

Aufgabe 1 - Komplexe Zahlen (10 Punkte)

- a) Gegeben sei die komplexe Zahl $z = 1 + i$.
Berechnen Sie (d.h. geben Sie in der kartesischen Form $a + b \cdot i$ an):
- i) z^* ii) $|z|$ iii) $\frac{z}{z}$ iv) $\sqrt{z-1}$
- b) Eine komplexe Zahl w ist in der Polardarstellung durch $|w| = \sqrt{2}$ und $\varphi = \frac{\pi}{4}$ gegeben.
Berechnen Sie die kartesische Darstellung dieser Zahl.

Aufgabe 2 - Umkehrfunktion (10 Punkte)

Bilden Sie die Umkehrfunktion folgender reeller Funktionen und geben Sie die Definitions- und Wertemenge der Umkehrfunktion an

- a) $y = \frac{x+1}{x+2}$ $D = \{x \in \mathbb{R}, x > -2\}$
- b) $y = x^3 - 1$ $D = \{x \in \mathbb{R}\}$

Aufgabe 3 - Differentiation (12 Punkte)

Bilden Sie folgende Ableitungen und vereinfachen Sie soweit möglich

- a) $\frac{d}{dx} \left(\frac{x+1}{x+2} \right)$ b) $\frac{d^2}{dx^2} \exp(x^2)$
- c) $\frac{d}{dx} \exp(x^2) \cdot \sin(x) \cdot x^2$ d) $\frac{d}{dx} (x+1)^{x+1}$

Aufgabe 4 - Integration (12 Punkte)

- a) $\int (x+2)^3 dx$ b) $\int 3x^2 \ln(x^3) dx$
- c) $\int_{-3}^3 \frac{1}{(x-2)^2} dx$ d) $\int \exp(x) \cdot \sin(x) dx$

Aufgabe 5 - Grenzwerte (12 Punkte)

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(-x^2)}{x^2}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \exp(-x)}{x + \ln(x)}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)}{\tan(x-1)}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^3} \right)$

Aufgabe 6 - Reihen (8 Punkte)

Bestimmen Sie den Konvergenzradius folgender Reihen, d.h. bestimmen Sie, für welche x die Reihen konvergieren bzw. divergieren.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \exp(x) \cdot x^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n^2-1)}{\exp(n-1)} (x-1)^n$

Aufgabe 7 - Taylorreihe (6 Punkte)

Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \sin(x)$ in eine Taylorreihe um $x=0$. Geben Sie eine geschlossene Formel ($f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dots$) an.

Aufgabe 8 - Differentialgleichungen (20 Punkte)

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen (d.h. finden sie die allgemeine Lösung) und lösen Sie nach y auf.

a) $\frac{y'}{y} = \sin(2x)$

b) $x^2 y'' - 3x \cdot y' + 3y = 0$ (Tip: Reihenansatz um $x=0$)

c) $-y'' - 3y' + 4y = \sin(x)$

d) $y' + 4x \cdot y = 0$

Aufgabe 9 - Funktionen mehrerer Veränderlicher (10 Punkte)

a) Bilden Sie das totale Differential der Funktion $f(x, y) = \ln\left(\frac{x+y}{x \cdot y}\right)$

b) Berechnen Sie den Gradienten von $f(x, y, z) = x \cdot \cos(y) + y \cdot z + x \cdot \exp(y)$ im Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ 1 \end{pmatrix}$

c) Berechnen Sie die Steigung y' der implizit angegebenen Funktion

$f(x, y) = (x - y)^3 - x + y^2 - y + 24 = 0$ im Punkt $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Wichtige Werte trigonometrischer Funktionen:

Winkel	$0^\circ \equiv 0$	$30^\circ \equiv \frac{\pi}{6}$	$45^\circ \equiv \frac{\pi}{4}$	$60^\circ \equiv \frac{\pi}{3}$	$90^\circ \equiv \frac{\pi}{2}$	$120^\circ \equiv \frac{2\pi}{3}$
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$