

Aufgabe 1 – Komplexe Zahlen (12 Punkte)

- a) Eine komplexe Zahl w ist durch $|w| = \sqrt{3}$ und $\varphi = \frac{1}{6}\pi$ definiert. Berechnen Sie die kartesische Darstellung dieser Zahl. Geben Sie außerdem die komplex Konjugierte w^* an.
- b) Geben Sie die komplexe Zahl $z = \frac{12}{2+\sqrt{2}\cdot i}$ in kartesischer Darstellung $a + bi$ an.
- c) Berechnen Sie alle Zahlen, deren Quadrat i ergibt.

Aufgabe 2 – Umkehrfunktion (6 Punkte)

Bilden Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ folgender reeller Funktionen und geben Sie jeweils Definitions- und Wertemenge der Umkehrfunktion an.

- a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$ mit $x \in \mathbb{R}$
- b) $f(x) = \sqrt{x}$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $x > 4$

Aufgabe 3 – Differentiation (12 Punkte)

Bilden Sie folgende Ableitungen und vereinfachen Sie diese soweit wie möglich:

- a) $\frac{d}{dx} [x^2 \cdot \ln(-ax^2)]$
- b) $\frac{d}{dx} \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right]$
- c) $\frac{d}{dx} \left[\left(\frac{1}{x} \right)^x \right]$
- d) $\frac{d}{dx} [2x^2 \cdot \sin(x^2) \cdot \exp(2x)]$

Aufgabe 4 – Integrale (12 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

- a) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$
- b) $\int_0^\infty x \cdot \exp(-x^2) dx$
- c) $\int \sin(x) \cdot \exp(x) dx$
- d) $\int \frac{1+x}{x^2-1} dx$

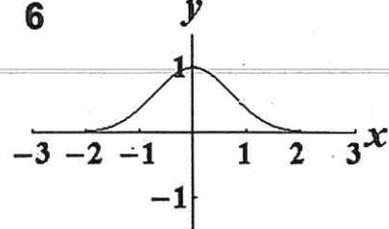
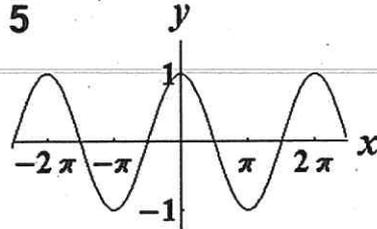
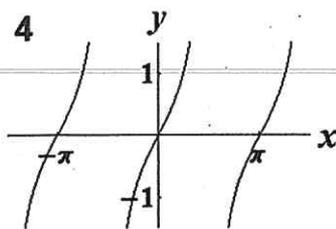
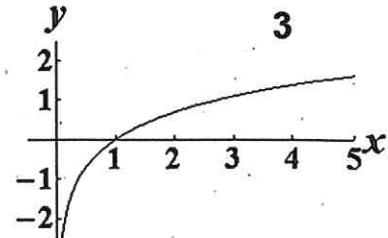
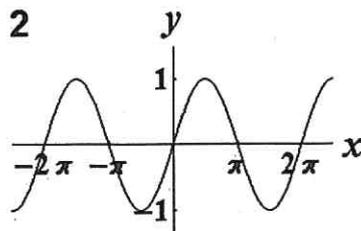
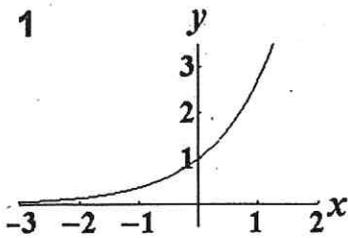
Aufgabe 5 – Grenzwerte (12 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^3 + 9x^2 + 8x + 7}{5x^3 + 6x^2 + 7x + 8}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x)$
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)$

Aufgabe 6 – Funktionen (6 Punkte)

Welche Funktionen sind in den Zeichnungen 1 bis 6 gegeben?



Aufgabe 7 – Reihen (6 Punkte)

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihen, d.h. bestimmen Sie, für welche x die Reihen konvergieren bzw. divergieren:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \exp(x) \cdot x^n$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^{2n}$

Aufgabe 8 – Taylorreihen (6 Punkte)

- a) Bilden Sie die Taylorreihe (in der Form $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dots$) von $f(x) = \frac{1}{1+x}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Begründen Sie Ihre Lösung ausführlich.
- b) Welchen Konvergenzradius hat diese Reihe?

Aufgabe 9 – Differentialgleichungen (18 Punkte)

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen:

a) $y' - \frac{x}{x^2+1} y = 0$ mit der Randbedingung: $y(0) = 2$

b) $3y' - \frac{6y}{x} = 9x^2$ (allgemeine Lösung gesucht)

c) $3y'' + 18y' + 24y = 0$ (allgemeine Lösung gesucht)

Aufgabe 10 – Totales Differential und Gradienten (10 Punkte)

- a) Bilden Sie das totale Differential der Funktion $f(x, y) = b^2 \cdot y \cdot \exp(x^2) + g \cdot \ln y$
- b) Berechnen Sie den Gradienten der Funktion $g(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2 + \cos z$
- c) Prüfen Sie, ob bei der folgenden Funktion der Schwarz'sche Satz gilt:

$$f(x, y) = x^2 y^3 + x^2 e^x \ln x + \tan y^2.$$