

**Aufgabe 1 - Komplexe Zahlen (10 Punkte)**

a) Gegeben seien zwei komplexe Zahlen  $z_1 = 2 + i$  und  $z_2 = 3 - i$

Berechnen Sie (und geben Sie das Ergebnis in der kartesischen Form  $a + b \cdot i$  an):

i)  $z_1 + z_2$       ii)  $z_1 \cdot z_2$       iii)  $|z_1| \cdot |z_2|$       iv)  $\frac{z_1}{z_2}$

b) Eine komplexe Zahl  $w$  ist in der Polardarstellung durch  $|w| = \sqrt{3}$  und  $\varphi = 60^\circ$  gegeben.

Berechnen Sie die kartesische Darstellung dieser Zahl.

**Aufgabe 2 - Umkehrfunktion (10 Punkte)**

Bilden Sie die Umkehrfunktion folgender reeller Funktionen und geben Sie die Definitions- und Wertemenge der Umkehrfunktion an

a)  $y = \frac{1-2x}{x-1}$   $D = \{x \in \mathbb{R}, x < 1\}$

b)  $y = \sqrt[3]{x+1}$   $D = \{x \in \mathbb{R}\}$

**Aufgabe 3 - Differentiation (12 Punkte)**

Bilden Sie folgende Ableitungen und vereinfachen Sie soweit möglich

a)  $\frac{d}{dx} \left( \frac{2x+1}{x-3} \right)$     b)  $\frac{d}{dx} (2x)^x$     c)  $\frac{d}{dx} (\exp(x^3) \cdot \cos(x) \cdot x)$     d)  $\frac{d^2}{dx^2} (\sqrt{x})$

**Aufgabe 4 - Integration (12 Punkte)**

Berechnen Sie folgende Integrale und vereinfachen Sie soweit möglich

a)  $\int (x+1)^2 dx$     b)  $\int x \ln(x^2) dx$     c)  $\int_{-2}^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx$     d)  $\int (\sin(x))^2 dx$

**Aufgabe 5 - Grenzwerte (12 Punkte)**

Berechnen Sie folgende Grenzwerte

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{\cos(x)}{x} \right)$     b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x(x+1)}{2x^2} \right)$     c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x(x+1)}{2x^2} \right)$     d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\exp(x)-1} - \frac{1}{x} \right)$

**Aufgabe 6 - Reihen (8 Punkte)**

Bestimmen Sie, für welche  $x$  die Reihen konvergieren bzw. divergieren:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$       b)  $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + 3) \cdot x^n$

c) Berechnen Sie den Summenwert folgender Reihe:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n}$

**Aufgabe 7 - Taylorreihe (6 Punkte)**

Entwickeln Sie die Funktion  $f(x) = \frac{1}{x}$  in eine Taylorreihe um den Entwicklungspunkt

$x_0 = 1$ . Geben Sie eine geschlossene Formel ( $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dots$ ) an. Bestimmen Sie den

Konvergenzradius der Reihe (geben Sie an, für welche  $x$  die Reihe konvergiert bzw. divergiert)

**Aufgabe 8 - Differentialgleichungen (18 Punkte)**

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen (d.h. finden sie die allgemeine Lösung) und lösen Sie nach  $y$  auf.

a)  $y' = \frac{y+4}{x-3}$       b)  $y' + 2y = \exp(-2x)$       c)  $3y'' + 18y' + 24y = 0$

d) Lösen Sie die Differentialgleichung  $y' = 2\sqrt{y}$ . Finden Sie zunächst die allgemeine Lösung und dann die spezielle Lösung für die Anfangsbedingung  $y(0)=1$ .

**Aufgabe 9 - Funktionen mehrerer Veränderlicher (12 Punkte)**

a) Bilden Sie das totale Differential der Funktion  $f(x, y) = b^2 \cdot y \cdot \exp(x^2) + g \cdot \ln(y) = 0$

b) Berechnen Sie den Gradienten der Funktion  $g(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2 + \cos z$  im Punkt  $P_0(1, -1, 0)$ .

c) Bilden Sie die partielle Ableitung:  $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$  für  $u = \ln(x^2 + y^2)$

d) Bestimmen Sie die Steigung der impliziten Funktion:  $y \cdot \cos y + x^2 y = 0$

**Wichtige Werte trigonometrischer Funktionen:**

Winkel	0°	0	30°	$\frac{1}{6}\pi$	45°	$\frac{1}{4}\pi$	60°	$\frac{1}{3}\pi$	90°	$\frac{1}{2}\pi$
Sinus	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}\sqrt{2}$		$\frac{1}{2}\sqrt{3}$		1	
Cosinus	1		$\frac{1}{2}\sqrt{3}$		$\frac{1}{2}\sqrt{2}$		$\frac{1}{2}$		0	
$x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		
$\arctan x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$		