Aufgabe 1 - Komplexe Zahlen (12 Punkte)

Gegeben seien vier komplexe Zahlen $z_1 = 3\exp\left(\frac{i\pi}{3}\right)$, $z_2 = 4\exp\left(-\frac{i\pi}{6}\right)$, $z_3 = 1 + 2\sqrt{3}i$ und

$z_4 = 2 + \sqrt{3}i$

Berechnen Sie (und geben Sie das Ergebnis in der kartesischen Form und der Euler-Form an):

a) $\frac{z_1}{z_2}$ b) $z_1 \cdot z_2$ c) $z_3 + z_4$

Aufgabe 2 - Umkehrfunktion (10 Punkte)

Bilden Sie die Umkehrfunktion folgender reeller Funktionen und geben Sie die Definitions- und Wertemenge der Umkehrfunktion an

a) $y = \exp(3x^2)$ $D = \{x \in \mathbb{R}\}$

b) $y = \ln\left(\frac{2-x}{x}\right)$ $D = \{x \in \mathbb{R}; 0 < x < 2\}$

Aufgabe 3 - Differentiation (12 Punkte)

Bilden Sie folgende Ableitungen und vereinfachen Sie soweit möglich

a) $\frac{d}{dx}(\sin(x)\ln(x)\exp(x^2))$ b) $\frac{d^2}{dx^2}(\exp(x^2)\cdot x)$ c) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(x)}{x^2}\right)$

d) $\frac{d}{dx}\left(x^{(x^2)}\right)$

Aufgabe 4 - Integration (12 Punkte)

Berechnen Sie folgende Integrale und vereinfachen Sie soweit möglich

a) $\int \frac{3}{4}x^2\exp(-2x^3)\,dx$ (✓) b) $\int \tan(x)\,dx$ c) $\int 3\exp(x)\cos(x)\,dx$

(✓) d) $\int_{-5}^{5}\frac{1}{2x^2}\,dx$

Aufgabe 5 - Grenzwerte (9 Punkte)

Berechnen Sie folgende Grenzwerte

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{2018}}{\exp(x)}$ b) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^3-x^2-4x+4}$ c) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\ln(x^2)}$

Aufgabe 6 - Reihen (9 Punkte)

Bestimmen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{7^{2n}}{\exp(n)}n$ Tipp: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$

c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

bitte wenden

n=0 oder n=1

Aufgabe 7 - Taylorreihe (6 Punkte)

Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{x-1}$ in eine Taylorreihe um den Entwicklungspunkt

$x_0 = 2$. Geben Sie eine geschlossene Formel ($f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dots$) an. Bestimmen Sie den

Konvergenzradius der Reihe (geben Sie an, für welche x die Reihe konvergiert bzw. divergiert).

Aufgabe 8 - Differentialgleichungen (18 Punkte)

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen (d.h. finden sie die allgemeine Lösung) und lösen Sie nach y auf.

a) $y' = \frac{y-6}{(x+4)^2}$

b) $2y' + y = 2\exp(-x)$

c) Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = \frac{x^2}{y^3}$. Finden Sie zunächst die allgemeine Lösung und dann die spezielle Lösung mit der Anfangsbedingung $y(1)=0$

d) die Hermite-Differentialgleichung lautet: $y'' - 2 \cdot x \cdot y' + 2 \cdot n \cdot y = 0$,

das n-te Hermitepolynom berechnet sich gemäß $H_n(x) = (-1)^n \cdot exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} exp(-x^2)$.

Berechen Sie $H_1(x)$ und zeigen Sie, dass es die Hermite-Differentialgleichung löst.

Aufgabe 9 - Funktionen mehrerer Veränderlicher (12 Punkte)

a) Bilden Sie das totale Differential der Funktion $f(x,y) = y \cdot sin(x^2) + x \cdot ln(y)$

b) Berechnen Sie den Gradienten der Funktion $g(x,y,z) = x^3y + y^2z^2 + xyz$

c) Bilden Sie die gemischte 3.Ableitung: $\frac{\partial^3 g}{\partial y \partial x \partial z}$ für $g(x,y,z) = x^3y + y^2z^2 + xyz$

d) Bestimmen Sie die Steigung der impliziten Funktion: $y \cdot exp\, y + x^3 y = 0$