

PCO(A)

Aufgabe 1 - Komplexe Zahlen (10 Punkte)

a) Gegeben sei die komplexe Zahl $z = -1 - i$
Berechnen Sie (geben Sie im der Form $a + b \cdot i$ an):

i) z^* ii) z^2 iii) $\frac{z}{z}$ iv) $\frac{|z|}{2}$

b) Eine komplexe Zahl w ist in der Polardarstellung durch $|w| = \sqrt{2}$ und $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ gegeben.
Berechnen Sie die kartesische Darstellung dieser Zahl.

Aufgabe 2 - Umkehrfunktion (9 Punkte)

Bilden Sie die Umkehrfunktion folgender reeller Funktionen und geben Sie die Definitions- und Wertemenge der Umkehrfunktion an

a) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ mit $\mathbb{R}_0^-(x \leq 0)$

b) $f(x) = x^3$ mit $\mathbb{R}_0^-(x \leq 0)$

c) $f(x) = e^{x-1}$ mit \mathbb{R}_0

Aufgabe 3 - Differentiation (12 Punkte)

Bilden Sie folgende Ableitungen und vereinfachen Sie soweit möglich

a) $\frac{d}{dx} \left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right]$ b) $\frac{d}{dx} [\ln(\sin(x))]$ c) $\frac{d}{dx} [(a+x)^x]$

d) $\frac{d}{dx} [\cos(x) \cdot \ln(x) \cdot \exp(-x^2)]$

Aufgabe 4 - Integration (12 Punkte)

a) $\int \frac{3x^2-2}{(x^2+1)(x-2)} dx$ b) $\int x^2 \ln(x^3) dx$

c) $\int_0^\pi \sin^2(4x) dx$ d) $\int_{-2}^2 \frac{1}{(x+1)^2} dx$

Aufgabe 5 - Grenzwerte (12 Punkte)

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{\sin^2(x)} \right)$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{\exp(-x)})$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right)$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin(2x)(1-\cos(x))}{\sin(x)(\cos(2x)-1)} \right)$

Aufgabe 6 - Reihen (16 Punkte)

Bestimmen Sie, für welche x die Reihen konvergieren bzw. divergieren

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n+1} e^{-nx}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1-n}}{n} e^{-nx}$

c) entwickeln Sie die Funktion $f(x) = a^x$ in eine Taylorreihe (in der Form $\sum_{n=0}^{\infty} \dots$) um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

d) entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}$ in eine Taylorreihe (in der Form $\sum_{n=0}^{\infty} \dots$) um den Entwicklungspunkt $x_0 = -2$. Bestimmen Sie den Konvergenzradius und geben Sie das Intervall von x an, in dem die Reihe absolut konvergiert.

Aufgabe 7 - Differentialgleichungen (20 Punkte)

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen (allgemeine Lösung), lösen Sie nach y ab.

a) $y' + 4yx e^{x^2+1} = 0$

b) $y' - \frac{1}{y^2} \tan(3x) = 0$

c) $\frac{1}{x^2} y' + xy = kx$

d) $y'' - 9y = 0$

Aufgabe 8 - Funktionen mehrerer Veränderlicher (9 Punkte)

a) Bilden Sie das totale Differential der Funktion $f(x, y) = (x + y) \cdot y \cdot e^{x^2-y^2}$

b) Berechnen Sie den Gradienten von $f(x, y, z) = x^3 e^z + x y z + y \ln(x^2)$ im Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) Berechnen Sie die Steigung y' der implizit angegebenen Funktion

$f(x, y) = x e^{y-1} + 3xy + y^2 - x - 7 = 0$ im Punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Wichtige Werte trigonometrischer Funktionen:

Winkel	$0^\circ \equiv 0$	$30^\circ \equiv \frac{\pi}{6}$	$45^\circ \equiv \frac{\pi}{4}$	$60^\circ \equiv \frac{\pi}{3}$	$90^\circ \equiv \frac{\pi}{2}$	$-45^\circ \equiv -\frac{\pi}{4}$
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$$