

**Aufgabe 1 – Komplexe Zahlen (12 Punkte)**

- Eine komplexe Zahl  $w$  ist durch  $|w| = \sqrt{3}$  und  $\varphi = \frac{1}{6}\pi$  definiert. Berechnen Sie die kartesische Darstellung dieser Zahl. Geben Sie außerdem die komplex Konjugierte  $w^*$  an.
- Geben Sie die komplexe Zahl  $z = \frac{12}{2+\sqrt{2}\cdot i}$  in kartesischer Darstellung  $a + bi$  an.
- Berechnen Sie alle Zahlen, deren Quadrat  $i$  ergibt.

**Aufgabe 2 – Umkehrfunktion (6 Punkte)**

Bilden Sie die Umkehrfunktion  $f^{-1}(x)$  folgender reeller Funktionen und geben Sie jeweils Definitions- und Wertemenge der Umkehrfunktion an.

- $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$  mit  $x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \sqrt{x}$  mit  $x \in \mathbb{R}$  und  $x > 4$

**Aufgabe 3 – Differentiation (12 Punkte)**

Bilden Sie folgende Ableitungen und vereinfachen Sie diese soweit wie möglich:

- $\frac{d}{dx} [x^2 \cdot \ln(-ax^2)]$
- $\frac{d}{dx} \left[ \frac{\sin x}{\cos x} \right]$
- $\frac{d}{dx} \left[ \left( \frac{1}{x} \right)^x \right]$
- $\frac{d}{dx} [2x^2 \cdot \sin(x^2) \cdot \exp(2x)]$

**Aufgabe 4 – Integrale (12 Punkte)**

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

- $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$
- $\int_0^\infty x \cdot \exp(-x^2) dx$
- $\int \sin(x) \cdot \exp(x) dx$
- $\int \frac{1+x}{x^2-1} dx$

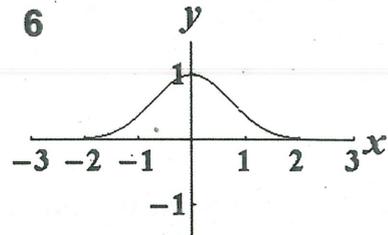
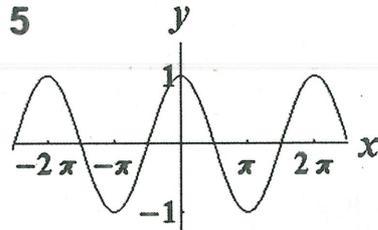
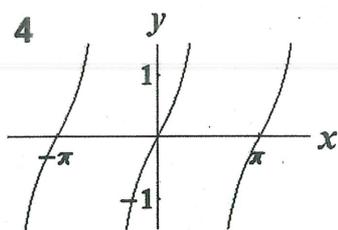
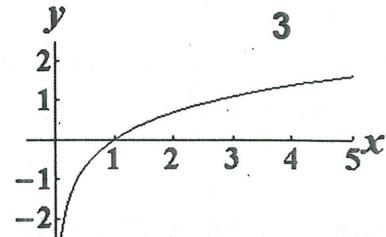
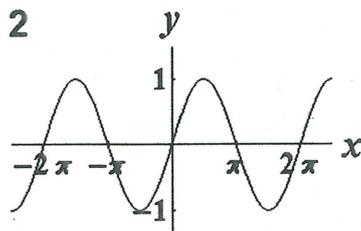
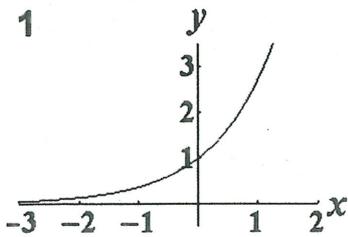
**Aufgabe 5 – Grenzwerte (12 Punkte)**

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^3 + 9x^2 + 8x + 7}{5x^3 + 6x^2 + 7x + 8}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\tan x}{x} \right)$

### Aufgabe 6 – Funktionen (6 Punkte)

Welche Funktionen sind in den Zeichnungen 1 bis 6 gegeben?



### Aufgabe 7 – Reihen (6 Punkte)

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihen, d.h. bestimmen Sie, für welche  $x$  die Reihen konvergieren bzw. divergieren:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \exp(x) \cdot x^n$

b)  $\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^{2n}$

### Aufgabe 8 – Taylorreihen (6 Punkte)

- a) Bilden Sie die Taylorreihe (in der Form  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dots$ ) von  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  um den Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ . Begründen Sie Ihre Lösung ausführlich.
- b) Welchen Konvergenzradius hat diese Reihe?

### Aufgabe 9 – Differentialgleichungen (18 Punkte)

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen:

a)  $y' - \frac{x}{x^2+1} y = 0$  mit der Randbedingung:  $y(0) = 2$

b)  $3y' - \frac{6y}{x} = 9x^2$  (allgemeine Lösung gesucht)

c)  $3y'' + 18y' + 24y = 0$  (allgemeine Lösung gesucht)

$3\lambda^2 + 18\lambda + 24 = 0$  NS?

### Aufgabe 10 – Totales Differential und Gradienten (10 Punkte)

- a) Bilden Sie das totale Differential der Funktion  $f(x, y) = b^2 \cdot y \cdot \exp(x^2) + g \cdot \ln y$
- b) Berechnen Sie den Gradienten der Funktion  $g(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2 + \cos z$
- c) Prüfen Sie, ob bei der folgenden Funktion der Schwarz'sche Satz gilt:

$$f(x, y) = x^2 y^3 + x^2 e^x \ln x + \tan y^2.$$