8.3.2021

Aufgabe 1 - Komplexe Zahlen (12 Punkte)

a) Stellen Sie $z=-1+i$ in Polarkoordinaten dar

b) Vereinfachen Sie $\dfrac{17-6i}{2-3i}$ und geben Sie das Ergebnis in der Form $a+bi$ dar

c) Berechnen Sie alle komplexen Zahlen $z=a+bi$, für die gilt: $z^2=-2i$

Aufgabe 2 - Umkehrfunktion und Logarithmenrechnen (11 Punkte)

a) Geben Sie die Wertemenge folgender reeller Funktion an. Bilden Sie ihre Umkehrfunktion und geben Sie die Definitions- und Wertemenge der Umkehrfunktion an

$$y=\frac{5-x}{x-1} \qquad D=\{x\in\mathbb{R}; x>1\}$$

b) Vereinfachen Sie

$$\frac{\log_{10}(100)+2\cdot\log_2(8)}{\ln(\frac{1}{e^2})+2\log_3(3^2)}$$

Aufgabe 3 - Differentiation (12 Punkte)

Bilden Sie folgende Ableitungen und vereinfachen Sie soweit möglich

a) $\dfrac{d}{dx}\left(\ln(x)\cdot\exp(-x^2)\cdot\dfrac{1}{x^2}\right)$ b) $\dfrac{d^2}{dx^2}\exp(x^2)$

c) $\dfrac{d}{dx}x^x$ d) $\dfrac{d}{dx}\arcsin(x)$

Aufgabe 4 - Integration (13Punkte)

Berechnen Sie folgende Integrale und vereinfachen Sie soweit möglich

a) $\int \tan(x)\,dx$ b) $\int_0^1 x^n\exp(x^{n+1})\,dx$ c) $\int_0^{\pi/6}\sin^2(2x)\,dx$

d) $\int_{-3}^{3}\frac{1}{3x^2}\,dx$

Aufgabe 5 - Grenzwerte (9 Punkte)

Berechnen Sie folgende Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{2021}}{\exp(x)}$ b) $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^2-x-1}{x^3+x^2-6x+4}$ c) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sin(3x-6)}{x^2-4}$

Aufgabe 6 - Reihen (10 Punkte)

Bestimmen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{n!}$ b) $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k+5}{5k+1}\right)^k$

c) Entwickeln Sie $f(x)=2^x$ als Taylorreihe um $x_0=0$ und bestimmen Sie den Konvergenzradius

Aufgabe 7 – Fouriertransformation (8 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(t) = \sqrt{2\pi} \cdot \exp(-a \cdot |t|) \quad \text{mit } a > 0.$$

a) Bestimmen Sie die Funktionswerte an den Stellen $t = 0, t = \pm\frac{1}{a}$ und skizzieren Sie den Graph der Funktion *f(t)* im Bereich von $-\frac{1}{a} \leq t \leq +\frac{1}{a}$ in das leere Diagramm auf dem Deckblatt.

b) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $\hat{f}(\omega)$ und vereinfachen Sie so weit wie möglich.

c) Bestimmen Sie die Funktionswerte an den Stellen $\omega = 0,\ \omega = \pm a,\ \omega = \pm\sqrt{3}a$ und skizzieren Sie den Graph der Funktion $\hat{f}(\omega)$ im Bereich von $-\sqrt{3}a \leq \omega \leq +\sqrt{3}a$ in das leere Diagramm auf dem Deckblatt.

Aufgabe 8 - Differentialgleichungen (15 Punkte)

1. Für ein Teilchen auf einem Ring mit konstantem Radius R erhalte man folgenden 1D Hamilton-Operator:

$$\hat{H}(\varphi) = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\varphi^2} + V(\varphi) \qquad \text{mit} \qquad V(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{für } r = R \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Stellen Sie die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung, d.h. die Differentialgleichung für die gesuchte Wellenfunktion φ auf.

b) Um welchen Typ Differentialgleichung handelt es sich in Aufgabe a)?

[ ] gewöhnliche, nicht-lineare, homogene Differentialgleichung 2. Ordnung
[ ] gewöhnliche, lineare, homogene Differentialgleichung 2. Ordnung
[ ] gewöhnliche, lineare, homogene Differentialgleichung 1. Ordnung
[ ] gewöhnliche, lineare, inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung
[ ] partielle Differentialgleichung

2.) Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$y'(x) = -\frac{1}{x-1}y(x) + x - 1 \qquad \text{für} \qquad x > 1$$

a) Lösen Sie zunächst den homogenen Fall.

b) Bestimmen Sie die partikuläre Lösung für den inhomogenen Fall.

c) Wie lautet die allgemeine Lösung unter der Nebenbedingung $y(2)=0$?

Aufgabe 9 –Funktionen mehrerer Veränderlicher (10 Punkte)

a) Berechnen Sie die Punkte der folgenden Funktion, für die der Gradient Null ist:

$$z=f(x,y)=x^2y - 4y$$

b) Berechnen Sie das totale Differenzial im Punkt $P(x,y)=(0,\pi)$ von

$$f(x,y)=x^2-3\exp(x)\cos(y)+y$$

c) Bestimmen Sie die Richtungsableitung der Funktion $f(x,y,z)=-x^2+3y^2-2z$ in Richtung des Vektors

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$