

# Innere Reibung von Gasen

- A 46 -

Versuch vom: 28.06.2011

Tobias Rend & Raphael Schmaeger

Gruppe: 15



Karlsruher Institut für Technologie  
Institut Physikalische Chemie

Praktikum:

testiert am: 05.07.2011

Betreuer: Zybaylo

## I Ziele und theoretische Grundlagen

Ziel des Versuchs ist es, die Viskosität von  $H_2$  und  $CO_2$  bei  $20^\circ C$  und  $70^\circ C$  zu ~~messen~~ <sup>bestimmen</sup> und daraus die mittlere freie Weglänge, sowie den Stoßdurchmesser der Gase zu bestimmen.

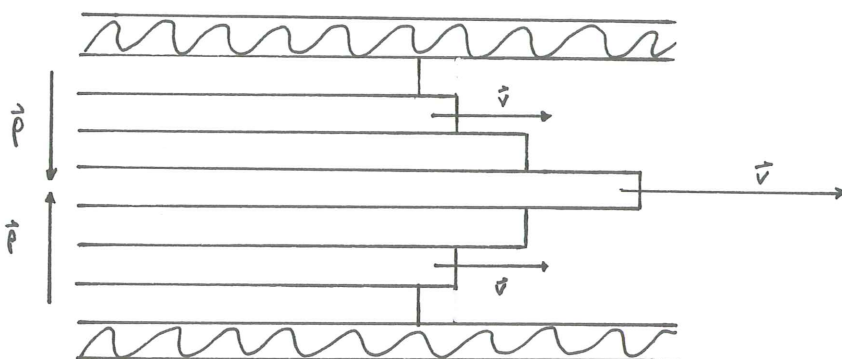
In der kinetischen Gastheorie behandeln wir unser Gas als ideal. Das ideale Gas besteht aus einzelnen Teilchen (Moleküle / Atome). Dabei nimmt man an, dass die Abmessung im Vergleich zur Entfernung sehr klein ist. Die Teilchen verhalten sich wie harte Kugeln. Der Gasdruck entsteht in diesem Modell durch elastische Stöße auf die Gefäßwand.

$$p = \frac{n \cdot M \cdot c^2}{3 \cdot V}$$

Stöße mit anderen Molekülen / Atome werden durch den Modell eines Stoßzylinders beschrieben; mit Stoßquerschnitt  $\sigma = r_{\text{St}}^2 \cdot \pi$  durch den die Teilchen mit mittlerer <sup>rd.</sup> Geschwindigkeit  $\langle v_{\text{rd.}} \rangle$  eine mittlere Anzahl von Stößen erfahren / verursachen.

Wichtig für unseren Versuch ist die Viskosität, welche die Reibung und den damit verbundenen Impulsübertrag von langsamen äußeren Schichten der schnelleren inneren Schichten beschreibt.

Laminare Strömung (Poiseuille):



Für die Viskosität eines verdünnten Gases liefert die kinetische Gastheorie

$$\eta = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot \Lambda \bar{c}$$

Mit dem idealen Gasgesetz erhält man:

$$pV = nRT \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{\rho M}{RT}$$

Aus der Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung

$$G(v) = 4\pi v^2 \cdot \left( \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \right)^3 \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

folgt die mittlere Molekulargeschwindigkeit:

$$\bar{c} = \int_0^{\infty} v \cdot G(v) \cdot dv = \left( \frac{8RT}{\pi \cdot M} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Für die mittlere freie Weglänge gilt:

$$\Lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot \sigma^2 \cdot \frac{N}{V}}$$

Setzt man diese Zusammenhänge in die Gleichung für die Viskosität ein, so ergibt sich durch triviale Umformung:

$$\eta = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{MR T}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot \sigma^2}$$

Der Faktor  $\frac{2}{3}$  an der Gleichung kann durch 0,499 (genauere Theorie) ersetzt werden.

Da die Viskosität schlecht zu messen ist bezieht man sich das Hagen-Poiseuille'schen Gesetz. Das Gesetz gilt für laminare Strömungen.

$$\eta = \frac{r^4 \cdot \pi \cdot \Delta p}{8 \cdot \dot{V} \cdot L} \quad \checkmark$$

Hier können wir alle Größen messen. Für die Druckdifferenz gilt:

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot \Delta h \quad \checkmark$$

Das Fick'sche Gesetz besagt, dass die Teilchenstromdichte proportional zum Konzentrationsgradienten ist.

$$j = -D \cdot \frac{\partial c}{\partial x} \quad \checkmark$$

Beim Newton'schen Fluid ist die Viskosität unabhängig von der Fließgeschwindigkeit.

## II Auswertung

1.) a)  $pV = nRT$

mit  $dp = 0$  folgt:  $\frac{T_1}{V_1} = \frac{T_2}{V_2} \Leftrightarrow V_2 = \frac{T_2}{T_1} \cdot V_1$

$$V_1 = 28,5 \text{ cm}^3$$

$$T_1 = 29^\circ\text{C}$$

$$\text{Fehler: } \Delta V_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial T} \Delta T_1\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial T_2} \Delta T_2\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-V_1}{T_1^2} \Delta T_1\right)^2 + \left(\frac{V_1}{T_1} \Delta T_2\right)^2}$$

Annahme:  $\Delta T_1 = \Delta T_2 = 0,05 \text{ K}$

b) Durchflusszeit wurde 10 mal gemessen und dann daraus der Mittelwert bestimmt. Anschließend die Standardabweichung berechnet.

$$\Delta(\bar{t}) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_i (t_i - \bar{t}_m)^2} \quad \leftarrow \bar{t}_m = \text{Mittelwert}$$

c)  $\Delta p = \rho \cdot g \cdot \Delta h$

$$\text{Fehler: } \Delta(\Delta p) = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta p}{\partial \Delta h}\right)^2 \cdot \Delta(\Delta h)^2} = |\rho \cdot g \cdot \Delta(\Delta h)|$$

Annahme:  $\Delta(\Delta h(20^\circ\text{C})) = \pm 2 \text{ mm}$

$$\Delta(\Delta h(70^\circ\text{C})) = \pm 4 \text{ mm}$$

$\leftarrow$  bei  $70^\circ\text{C}$  gab es kleine Druckschwankungen

$\Leftrightarrow$  somit dafür größerer Fehler.



d) Die Viskosität bestimmt man durch:

$$\eta = \frac{r^4 \cdot \pi \cdot t \cdot \Delta p}{8V \cdot L}$$

$$\Rightarrow \Delta \eta = \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \Delta t\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \Delta p} \Delta(\Delta p)\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial V} \Delta V\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{r^4 \cdot \pi \cdot \Delta p}{8VL} \Delta t\right)^2 + \left(\frac{r^4 \cdot \pi \cdot t}{8V \cdot L} \Delta(\Delta p)\right)^2 + \left(-\frac{r^4 \cdot \pi \cdot t \cdot \Delta p}{8V^2 \cdot L} \Delta V\right)^2}$$

2.) Zu zeigen ist die Proportionalität:  $\eta \sim \sqrt{T}$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\eta}{\sqrt{T}}$$

Wasserstoff:  $k_1 = \frac{\eta_1}{\sqrt{T_1}} = 4,53 \cdot 10^{-7} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s} \cdot \sqrt{\text{K}}}$  ,  $T_1 = 293,15 \text{K}$

$k_2 = \frac{\eta_2}{\sqrt{T_2}} = 4,57 \cdot 10^{-7} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s} \cdot \sqrt{\text{K}}}$  ,  $T_2 = 343,15 \text{K}$

Kohlendioxid:  $k_3 = \frac{\eta_3}{\sqrt{T_1}} = 7,71 \cdot 10^{-7} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s} \cdot \sqrt{\text{K}}}$  "

$k_4 = \frac{\eta_4}{\sqrt{T_2}} = 8,10 \cdot 10^{-7} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s} \cdot \sqrt{\text{K}}}$

Man sieht bei Wasserstoff, dass der Proportionalitätsfaktor  $k$  etwa gleich groß ist. Hier stimmt  $\eta \sim \sqrt{T}$  mit der Messung gut überein.

Bei Kohlendioxid hingegen gibt es kleinere Abweichungen, jedoch ist die Proportionalität gewahrt. Hatte man mehr als 2 Werte (z.B. 4 Temperaturen) so könnte man genauere Aussagen mit Hilfe eines Diagramms machen.

3) Stoffdurchmesser bei  $T=20^\circ\text{C}$  und  $p=1\text{bar}$ :

$$\eta = 0,998 \cdot \sqrt{\frac{MRT}{\pi}} \cdot \frac{1}{N_A \cdot \pi \cdot \sigma^2}$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{0,998 \cdot \sqrt{\frac{MRT}{\pi}} \cdot \frac{1}{N_A \cdot \pi \cdot \eta}}$$

$$\sigma_{H_2} = 2,316 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

mit  $M_{H_2} = 2,0158 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$  \*

$$\sigma_{CO_2} = 4,832 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

$M_{CO_2} = 44,01 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$  \*

Mittlere freie Weglänge bei  $T=20^\circ\text{C}$  und  $p=1\text{bar}$ :

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \cdot \Lambda \cdot \bar{c} \quad \text{mit} \quad \bar{c} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \quad \rho = \frac{p \cdot M}{RT}$$

$$\Lambda = \frac{3\eta}{\rho \cdot \bar{c}}$$

$$\Lambda = \frac{3\eta}{\rho} \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot RT}{8M}}$$

$$\rho = 10^5 \text{ Pa}$$

$$T = 293,15 \text{ K}$$

$$\Rightarrow \Lambda_{H_2} = 1,604 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

$$\Lambda_{CO_2} = 5,84 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

\* Quelle: Atkins (Details siehe Quellenangabe)

Die Fehler für  $\sigma$  und  $\Lambda$  bestimmen sich wie folgt:

$$\Delta \sigma = \sqrt{\left(\frac{1}{4} T^{-\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{0,938} \sqrt{\frac{MR}{\pi}} \cdot \frac{1}{N_A \cdot \pi \cdot \eta} \cdot \Delta T\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} \sqrt{0,938} \sqrt{\frac{MR}{\pi}} \cdot \frac{1}{N_A \cdot \pi} \cdot \eta^{-\frac{3}{2}} \cdot \Delta \eta\right)^2}$$

$$\Delta \Lambda = \sqrt{\left(\frac{3}{\rho} \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot RT}{8M}} \Delta \eta\right)^2 + \left(\frac{3\eta}{2\rho} \sqrt{\frac{\pi R}{8M T}} \cdot \Delta T\right)^2}$$

$$\Rightarrow \Delta \sigma_{H_2} = 4,58 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

$$\Delta \sigma_{CO_2} = 6,72 \cdot 10^{-12} \text{ m} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \Delta \Lambda_{H_2} = 5,04 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

$$\Delta \Lambda_{CO_2} = 1,59 \cdot 10^{-9} \text{ m} \quad \checkmark$$

Im Folgenden ist eine Tabelle mit allen durch die in der Vorvorlesung berechneten Formeln, berechneten Werten.



# Auswertung: Tabelle

## A46 - Innere Reibung von Gasen

|                    |                       |                     |                                    |                              |
|--------------------|-----------------------|---------------------|------------------------------------|------------------------------|
| <b>Konstanten:</b> | T(0°C)                | 273,15              | K                                  | Quelle: Atkins               |
|                    | R                     | 8,134 <sup>21</sup> | Jmol <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> |                              |
|                    | g                     | 9,81                | m*s <sup>-2</sup>                  |                              |
|                    | L                     | 0,3                 | m                                  |                              |
|                    | r                     | 3,50E-04            | m                                  | Quelle: Versuchsbeschreibung |
|                    | V(T <sub>0</sub> )    | 2,85E-05            | m <sup>3</sup>                     |                              |
|                    | N <sub>A</sub>        | 6,02E+23            | mol <sup>-1</sup>                  |                              |
|                    | ρ <sub>Glycerin</sub> | 1,26E+03            | kg*m <sup>-3</sup>                 |                              |
|                    | T <sub>0</sub>        | 296,15              | 0,05 K                             |                              |

|  | Wasserstoff |            |          |            | Kohlenstoffdioxid |            |          |            |
|--|-------------|------------|----------|------------|-------------------|------------|----------|------------|
|  | Wert        | Fehler     | Wert     | Fehler     | Wert              | Fehler     | Wert     | Fehler     |
| Temperatur / °C                                  | 20          | 0,05       | 70       | 0,05       | 20                | 0,05       | 70       | 0,05       |
| Temperatur / K                                   | 293,15      | 0,05       | 343,15   | 0,05       | 293,15            | 0,05       | 343,15   | 0,05       |
| Höhendifferenz / m                               | 7,80E-02    | 2,00E-03   | 8,05E-02 | 4,00E-03   | 7,80E-02          | 2,00E-03   | 8,40E-02 | 4,00E-03   |
| Volumen / m <sup>3</sup>                         | 2,82E-05    | 6,7705E-09 | 3,30E-05 | 7,3646E-09 | 2,82E-05          | 6,7705E-09 | 3,30E-05 | 7,3646E-09 |
| Durchflusszeit / s                               | 11,56       | 0,21       | 14,29    | 0,23       | 19,67             | 0,10       | 24,28    | 0,73       |
| Druckdifferenz / Pa                              | 9,64E+02    | 2,47E+01   | 9,95E+02 | 4,94E+01   | 9,64E+02          | 2,47E+01   | 1,04E+03 | 4,94E+01   |
| Viskosität / kg*m <sup>-1</sup> *s <sup>-1</sup> | 7,76E-06    | 2,4387E-07 | 8,46E-06 | 4,4177E-07 | 1,32E-05          | 3,4519E-07 | 1,50E-05 | 8,445E-07  |



4.) Man vergleiche die Stoßdurchmesser mit Moleküldurchmesser aus den Van-der-Waals Konstanten  $b$ .

$$b = N_A \cdot 4 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

|                         | H <sub>2</sub>                                    | CO <sub>2</sub>                                   |
|-------------------------|---|---|
| $\sigma$<br>(berechnet) | $2,316 \cdot 10^{-10} \text{ m}$                  | $4,832 \cdot 10^{-10} \text{ m}$                  |
| $b$                     | $2,661 \cdot 10^{-2} \frac{\text{l}}{\text{mol}}$ | $4,267 \cdot 10^{-2} \frac{\text{l}}{\text{mol}}$ |
| $r$                     | $2,76 \cdot 10^{-10} \text{ m}$                   | $2,294 \cdot 10^{-10} \text{ m}$                  |

Man erkennt, dass die gemessenen Durchmesser größer sind als die aus den Van der Waals-Konstanten abgeschätzten. Dies liegt vermutlich daran, dass die Moleküle bei vdW als harte Kugeln betrachtet werden und Effekte wie z.B. elektrostatische Abstoßung vernachlässigt werden.

Man erkennt auch, dass bei Wasserstoff die Werte besser übereinstimmen. Dies liegt daran, dass Wasserstoff eher als "harte Kugel" betrachtet werden kann als CO<sub>2</sub>.



5.) Druck und Temperaturabhängigkeit von Diffusion, Viskosität und Wärme von Gasen und Flüssigkeiten.

Diffusion:

$$j = -D \cdot \frac{dN}{dz} \quad \text{mit} \quad D = \frac{1}{3} \lambda \bar{c} \quad \text{bei Gasen}$$

$$\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot \sigma^2 \cdot \rho}$$

$\lambda$  nimmt mit steigendem Druck ab, daher wird auch  $D$  kleiner und die Moleküle diffundieren langsamer. Mit steigender Temperatur nimmt  $\bar{c}$  zu und somit auch  $D$ ; daher diffundieren die Moleküle schneller. Auch die Diffusion in Flüssigkeiten steigt mit wachsender Temperatur und sinkt mit steigendem Druck. Auf Flüssigkeiten haben nur sehr hohe Druckänderungen eine Auswirkung.

Viskosität:

$$\eta = \frac{1}{3} M \cdot \lambda \cdot \bar{c} \cdot [A] = \frac{1}{3} \rho \Lambda \bar{c} \quad \text{bei Gasen}$$

Die Viskosität bei Gasen ist unabhängig vom Druck. Man liegt daran, dass bei höherem Druck zwar die Konzentration steigt, aber auch  $\lambda$  abnimmt.

Bei steigender Temperatur steigt  $\eta$  da  $\bar{c}$  steigt.

Bei Flüssigkeiten sinkt  $\eta$  bei steigendem  $T$ , da auch die Kräfte zwischen den Molekülen sinken.

Bei steigendem Druck, steigt auch die Viskosität.