

Aufgabe 1

$$a) \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3 \frac{x^2}{y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2 \frac{x^3}{y^3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

$$b) dz = y dx + x dy$$

$$dz = y^2 dx + 2xy dy$$

$$dz = \frac{2x}{y} dx - \frac{x^2}{y^2} dy$$

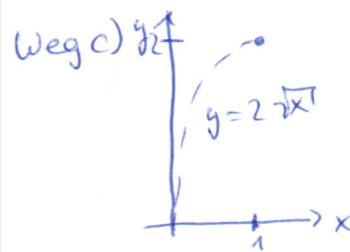
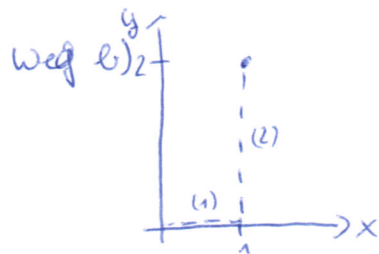
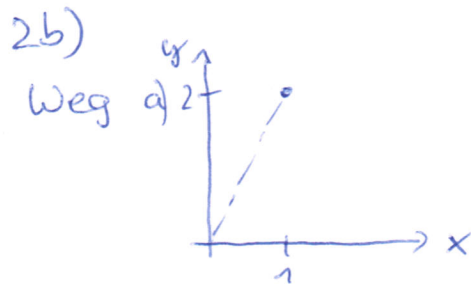
Aufgabe 2

$$a) df = \underbrace{\frac{1}{4} x^2 y^2 dx}_{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y} + \underbrace{\frac{1}{4} x^3 y dy}_{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{4} x^2 y^2 \right) &= \frac{1}{2} x^2 y \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{4} x^3 y \right) &= \frac{3}{4} x^2 y \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{gemischte 2. Ableitungen ungleich,} \\ &\text{Satz v. Schwarz nicht erfüllt} \\ &\rightarrow \text{kein totales Differential} \end{aligned}$$

$$dg = \frac{1}{2} x^2 y^2 dx + \frac{1}{3} x^3 y dy$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} x^2 y^2 \right) &= x^2 y \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{3} x^3 y \right) &= x^2 y \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{gemischte 2. Ableitungen gleich} \\ &\rightarrow \text{totales Differential} \end{aligned}$$



Um das Integral berechnen zu können, benötigt man jeweils den Zusammenhang zwischen x und y bzw. dx und dy

a) $y = 2x$, $\frac{dy}{dx} = 2 \Rightarrow dy = 2dx$

b) (1) $y = 0 \cdot x$, $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow dy = 0$

(2) $x = 1$, $dx = 0$

c) $y = 2\sqrt{x}$, $\frac{dy}{dx} = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow dy = x^{-\frac{1}{2}} dx$

Integration df

a) $\Delta f = \int_{(0,0)}^{(1,2)} \left[\frac{1}{4} x^2 y^2 dx + \frac{1}{4} x^3 y dy \right]$ ersetze y und dy

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{4} x^2 (2x)^2 dx + \frac{1}{4} x^3 (2x) 2 dx \right]$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 8x^4 dx = 2 \int_0^1 x^4 = \frac{2}{5} x^5 \Big|_0^1 = \frac{2}{5}$$

b) $\Delta f = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{4} x^2 \cdot 0 dx}_{(1)} + \underbrace{\int_0^2 \frac{1}{4} (1)^3 y dy}_{(2)}$

$$= 0 + \frac{1}{4} \int_0^2 y dy = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^2 = \frac{1}{8} \cdot 4 = \frac{1}{2}$$

c) $\Delta f = \int_0^1 \left[\frac{1}{4} x^2 (4x) dx + \frac{1}{4} x^3 \cdot 2\sqrt{x} \cdot x^{-\frac{1}{2}} dx \right]$

$$= \int_0^1 x^3 dx + \frac{1}{2} x^3 dx = \int_0^1 \frac{3}{2} x^3 dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^1 = \frac{3}{8}$$

$\Rightarrow df$ ist wegabhängig!

Fortsetzung 2b)

Integration dg

$$\begin{aligned} \text{a) } \Delta g &= \int_{(0,0)}^{(1,2)} \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 dx + \frac{1}{3} x^3 y dy \right] \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^2 (2x)^2 dx + \frac{1}{3} x^3 (2x) \cdot 2 dx \right] \\ &= \int_0^1 2x^4 dx + \frac{4}{3} x^4 dx = \int_0^1 \frac{10}{3} x^4 dx = \frac{2}{3} x^5 \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \Delta g &= \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 \cdot 0 dx + \int_0^2 \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot y dy \\ &= 0 + \int_0^2 \frac{1}{3} y dy = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \Delta g &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^2 \cdot 4x dx + \frac{1}{3} x^3 2\sqrt{x} \cdot x^{-\frac{1}{2}} dx \right] \\ &= \int_0^1 \left[2x^3 dx + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} dx \right] \\ &= \frac{8}{3} \int_0^1 x^3 dx = \frac{2}{3} x^4 \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

→ dg ist wegunabhängig!

2c) totale Differentiale sind ~~nicht~~ wegunabhängig

2d) wegunabhängig: Höhendifferenz zwischen 2 Orten
wegabhängig: Benzinkosten

Aufgabe 3

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{nR}{P} \quad \left[\frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \right]_T = - \frac{nR}{P^2}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = - \frac{nRT}{P^2} \quad \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \right]_P = - \frac{nR}{P^2}$$

⇒ gemischte 2. Abl. gleich

$V(T,P)$ ist in diesem Fall eine Zustandsfunktion