Lösungsblatt
Mathematische Grundlagen

Physikalische Chemie 1 - Thermodynamik **WS 2019/20**

Übungsleitung: Monja Sokolov, Mila Krämer

Aufgabe 1

Zum aufwärmen: Bilden Sie die ersten Ableitungen und die Stammfunktionen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 2 \cdot cos(x)$ b) $f(x) = e^{-2x}$ c) $f(x) = \frac{1}{3}x^2$ d) $f(x) = \frac{2}{x} + 7$

Lösung:

a) $f'(x) = -2 \cdot sin(x)$
$F(x) = 2 \cdot sin(x)$

b) $f'(x) = -2e^{-2x}$
$F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

c) $f'(x) = \frac{2}{3}x$
$F(x) = \frac{1}{9}x^3$

d) $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$
$F(x) = 2ln(x) + 7x$

Aufgabe 2

In der Thermodynamik gibt es Funktionen, die von mehreren Variablen abhängen. Diese Funktionen können nach einer Variablen abgeleitet werden, während die anderen Variablen festgehalten werden. Bilden Sie für die folgenden Funktionen die *partiellen* Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial y}$:

a) $f(x, y) = xy^2$ b) $g(x, y) = \frac{1}{x}e^{2y} + y$ c) $h(x, y) = \frac{x^2y}{x+y}$

Lösung:

a) $\frac{\partial}{\partial x}f(x, y) = y^2$, $\frac{\partial}{\partial y}f(x, y) = 2xy$

b) $\frac{\partial}{\partial x}g(x, y) = -\frac{1}{x^2}e^{2y}$, $\frac{\partial}{\partial y}g(x, y) = \frac{2}{x}e^{2y} + 1$

c) $\frac{\partial}{\partial x}h(x, y) = \frac{2xy}{x+y} - \frac{x^2y}{(x+y)^2}$, $\frac{\partial}{\partial y}h(x, y) = \frac{x^2}{x+y} - \frac{x^2y}{(x+y)^2}$

Aufgabe 3

Funktionen, die von mehreren Variablen x_i abhängen und deren erste partielle Ableitungen stetig sind, heißen *vollständig differenzierbar*. Die Summe der partiellen ersten Ableitungen nach allen Variablen heißt dann vollständiges Differenzial:

$$\mathrm{d}f = \sum_{x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i$$

Bei der Bildung höherer Ableitungen hilft der *Satz von Schwarz*: Er besagt, dass die Reihenfolge, in der man nach den einzelnen Variablen ableitet, bei einer vollständig differenzierbaren Funktion keine Rolle spielt. Wenn also bei einer Funktion zweier Variablen die gemischten zweiten Ableitungen gleich sind, dann ist sie (zweimal) vollständig differenzierbar:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x\right]$$

Überprüfen Sie mithilfe des Satzes von Schwarz, ob die folgenden Funktionen vollständig differenzierbar sind und bilden Sie wenn möglich das vollständige Differenzial:

a) $f(x,y) = 3xy^2 + 4x^2y^3$ b) $g(x,y)$ aus Aufg. 2   c) $p(V,T) = \frac{nRT}{V}$

Lösung:

a)

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 6y + 24xy^2 = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$$

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \mathrm{d}y = \left(3y^2 + 8xy^3\right)\mathrm{d}x + \left(6xy + 12x^2y^2\right)\mathrm{d}y$$

b)

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} g(x,y) = -\frac{2e^{2y}}{x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} g(x,y)$$

$$\mathrm{d}g = \left(-\frac{1}{x^2}e^{2y}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{2}{x}e^{2y} + 1\right)\mathrm{d}y$$

c)

$$\frac{\partial}{\partial V}\frac{\partial}{\partial T} p(V,T) = -\frac{nR}{V^2} = \frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial}{\partial V} p(V,T)$$

$$\mathrm{d}p = -\frac{nRT}{V^2}\mathrm{d}V + \frac{nR}{V}\mathrm{d}T$$

Aufgabe 4

Um ein Objekt um eine bestimmte Strecke Δx entgegen einer Kraft F zu bewegen, muss die *Arbeit* W geleistet werden. Ist die Kraft konstant, gilt $\Delta W = -F\Delta x$. Sobald allerdings die Kraft vom Weg abhängt, muss man integrieren:

$$\Delta W = \int -F(x)dx$$

Berechnen Sie in jedem der folgenden Fälle die jeweils geleistete Arbeit:

a) Ein 75 kg schwerer Mensch springt vom 5 m-Turm.

b) Ein Bogen (modelliert als Feder der Federkonstante $D = 1500\,\mathrm{N\,m^{-1}}$) wird um 30 cm gespannt.

c) 2 mol Argon bei 25 °C mit dem Anfangsvolumen 22.5 L expandieren in ein 45.0 L großes Vakuum.

d) Ein Kolben komprimiert das Argon aus Teilaufg. c) wieder von 45.0 L auf 22.5 L. (Die ideale Gasgleichung (Aufg. 3c)) kann verwendet werden).

Lösung:

a) $\Delta W = m \cdot g \cdot \Delta h$
$= 75\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot (-5\,\mathrm{m})$
$= -3678.75\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}} \approx -3.679\,\mathrm{kJ}$

b) $\Delta W = \int_{x1}^{x2} D \cdot x \; \mathrm{d}x = [\frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2]_{x1}^{x2}$
$= [\frac{1}{2} \cdot 1500\,\mathrm{N\,m^{-1}} \cdot x^2]_{0\,\mathrm{m}}^{0.3\,\mathrm{m}}$
$= 67.5\,\mathrm{N\,m} = 67.5\,\mathrm{J}$

c) $\Delta W = \int p \; \mathrm{d}V = 0$, da $p = 0$

d) $\Delta W = -\int p(V) \; \mathrm{d}V = -\int_{V1}^{V2} \frac{n \cdot R \cdot T}{V} \mathrm{d}V = [-n \cdot R \cdot T \; \ln(V)]_{V1}^{V2}$
$= -2\,\mathrm{mol} \cdot 8.314\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}} \cdot 298\,\mathrm{K} \cdot \ln\left(\frac{0.0225\,\mathrm{m^3}}{0.045\,\mathrm{m^3}}\right)$
$= 3434.64\,\mathrm{J} \approx 3.434\,\mathrm{kJ}$