

# Messtechnik

Prof. Dr.-Ing. F. Puente León



Universität Karlsruhe (TH)  
Forschungsuniversität · gegründet 1825



Institut für Industrielle  
Informationstechnik



Institut für Industrielle Informationstechnik, Hertzstr. 16, Geb. 06.35, 76187 Karlsruhe

[www.iiit.kit.edu](http://www.iiit.kit.edu)

## Organisatorisches

### Termine

- Do. 09:45-11:15 NTI (Vorlesung\*)
  - Fr. 08:00-09:30 MTI (Übung, ca. 14-täglich)
- \*) Vorlesung am 30.10.2014 um 8:00 h**

### Materialien

- Buch (**9. Auflage, 2012**, 444 S., 39,95 €),  
**im KIT-Intranet kostenlos** als PDF verfügbar
- Weitere Unterlagen ([www.iiit.kit.edu/mt.php](http://www.iiit.kit.edu/mt.php);  
Zugang: **mthoerer** / **wheatst0ne**):
  - Übungen, Musterlösungen, Übungsfolien
  - Matlab-Übungen und -Programme
  - Alte Klausuren mit Musterlösungen

### Feedback, Fragen

- während oder nach der Vorlesung oder per E-Mail: [mt@iiit.kit.edu](mailto:mt@iiit.kit.edu)



## 1. Messsysteme und Messfehler

Messskalen, Metrische Größen, Messsysteme, Messfehler

## 2. Kurvenanpassung

Approximation, Interpolation, Kennfeldinterpolation

## 3. Stationäres Verhalten von Messsystemen

Stationäre Messkennlinie, Kennlinienfehler, Rückwirkung des Systems

## 4. Zufällige Messfehler

Grundlagen, Stichproben, Statistische Tests, Fehlerfortpflanzung

## 5. Dynamisches Verhalten von Messsystemen

[Wird nicht gelesen und ist nicht klausurrelevant]

## 6. Messung stochastischer Signale

Zufallsprozesse, Korrelationsfunktionen, Leistungsdichtespektrum

## 7. Erfassung analoger Signale

Abtastung, Quantisierung, Analog/Digital- und Digital/Analog-Umsetzer

## 8. Erfassung frequenzanaloger Signale

Frequenzbegriff, Digitale Frequenz- und Drehzahlmessung

# Motivation

## Messtechnik

- ermöglicht es dem Menschen, seinen Wahrnehmungshorizont über seine Sinne hinaus zu erweitern
  - liefert Erkenntnisse über die Natur
  - führt zu einem Wachstum in der Produktion und einer Steigerung der Zuverlässigkeit
  - erlaubt eine Überwachung technischer Prozesse, um Anlagen sicher zu betreiben und Mensch und Umwelt vor Schäden zu bewahren
- ➔ **Forschung** und **Entwicklung** intensiv vorangetrieben
- ➔ **Kenntnisse der Messtechnik** in Forschung und Technik erforderlich

# 1. Messsysteme und Messfehler

- 1.1 Messskalen
- 1.2 Metrische Größen
- 1.3 Messsysteme
- 1.4 Messfehler

## 1.1 Messskalen

## Messen – allgemeine Definition

- Im weitesten Sinne bedeutet **Messen** ein objektives Zuordnen mathematischer Symbole (meist: Zahlen) zu bestimmten Merkmalen empirischer Objekte
- Auf der Grundlage der Merkmalsausprägungen lassen sich Zusammenhänge („empirische Relationen“) zwischen den Objekten herstellen
- Für diese Relationen gibt es verschieden aussagekräftige **Skalentypen**:
  - **Nominalskala**: Merkmale haben rein attributiven Charakter und heißen auch *kategorial* oder *begrifflich* (Bsp.: Geschlecht, Blutgruppe)
  - **Ordinalskala**: Beschreibt die Ordnungsstruktur zwischen Objekten verschiedener Merkmalsausprägungen (Bsp.: Härtegrad, Güteklasse)
  - **Intervallskala**: Empirische Relationen können durch Addition und Subtraktion repräsentiert werden (Bsp.: Temperatur, Kalenderzeit)
  - **Verhältnisskala**: Zusätzlich liegt ein natürlicher Nullpunkt vor; die Skaleneinheit ist frei wählbar (Bsp.: Länge, Masse, Stromstärke)

# 1.1 Messskalen

	Nominalskala	Ordinalskala	Intervallskala	Verhältnisskala
<b>empirische Relationen</b>	Äquivalenz	Äquivalenz, Ordnung	Äquivalenz, Ordnung, empirische Addition	Äquivalenz, Ordnung, empirische Addition, empirische Multiplikation
<b>zulässige Transformationen</b>	$\tilde{u} = f(u)$ mit $f(\cdot)$ bijektiv	$\tilde{u} = f(u)$ mit $f(\cdot)$ streng monoton steigend	$\tilde{u} = a u + b$ mit $a > 0$	$\tilde{u} = a u$ mit $a > 0$
<b>Lageparameter</b>	Modalwert	Median	arithmetischer Mittelwert	harmonischer / geometrischer Mittelwert
<b>Streuungsmaße</b>	Entropie	Quantile	Varianz	Variationskoeffizient
<b>weitere Kenngrößen</b>	Transinformation	Rangkorrelation	Korrelationskoeffizient	Korrelationskoeffizient
<b>mathematische Struktur</b>	Menge	total geordnete Menge	affine Gerade	Körper
<b>Beispiele von Merkmalen</b>	Geschlecht, Blutgruppe	Härtegrad, Güteklasse	Temperatur, Kalenderzeit	Länge, Masse, Stromstärke

# 1.2 Metrische Größen

## 1.2.1 Einheitensystem

## 1.2.2 Anpassung der Definitionen der Einheiten

# 1.2 Metrische Größen

## Definition 1.1: Messen metrischer Größen

- Eine metrische Größe zu messen heißt, ihre Ausprägung quantitativ zu erfassen. Dafür wird die Messgröße mit einer zuvor vereinbarten Maßeinheit – dem **Normal** – verglichen:

$$\text{Messgröße} = \text{Zahlenwert} \cdot \text{Maßeinheit}$$

- Der Zahlenwert gibt an, wie oft die Maßeinheit in der Messgröße enthalten ist.

## Voraussetzungen:

- Messgröße muss eindeutig definiert sein
- Einheit muss festgelegt werden

### Entwicklung der Einheiten

- Schon früh waren Menschen bestrebt, einheitliche Maße festzulegen
- Ältestes Längenmaß: **Gudea-Fuß** (Statue des Fürsten Gudea von Lagasch, Mesopotamien; um 2050 v. Chr.)

- Maßstab auf den Knien (26,5 cm)
- Einheit in **Persien** weit verbreitet
- Zur Berechnung des Polumfangs der Erde verwendete **Eratosthenes** ca. 200 Jahre v. Chr. eine auf dem Gudea-Fuß basierende Einheit – das Stadion (158,7 m)





**Rom:** Pflastersteine vor Augustusmausoleum (29 v.Chr.) danach bemessen



Die abwechselnd schwarzen und weißen Blocklagen der gotischen Kathedrale in **Orvieto** (12. Jhd.) sind ein Gudea-Fuß dick

## 1.2 Metrische Größen

Bei der Festlegung von Einheiten sollte Folgendes beachtet werden:

- Die Einheit sollte **praktisch** sein, d. h. im Alltag und in der Wirtschaft verwendbar sein.
- Die Einheit sollte **gut reproduzierbar** sein.
- Das Normal sollte möglichst **unveränderlich** sein.

Bis Mitte des 19. Jahrhunderts war dies nur bedingt der Fall:

- Die meisten Maßeinheiten orientierten sich am Menschen (z. B. **Elle** als Längenmaß).
- Viele Maßeinheiten waren regional unterschiedlich.

➔ Individuell festgelegte Einheiten erschwerten internationalen Handel

### 1.2.1 Einheitensystem

Beispiel: Freiburger Elle



Freiburger Münster (ca. 1200-1330)  
Westportal, linker Pfeiler



## 1.2.1 Einheitensystem

### Beispiel: Bremer Elle



Rolandstatue, Marktplatz, Bremen



## 1.2.1 Einheitensystem

- Um verbindliche Einheiten festzulegen, wurde 1875 die Meterkonvention unterzeichnet und die **Generalkonferenz für Maß und Gewicht** (*Conférence Générale des Poids et Mesures, CGPM*) gegründet



- Diese bis heute höchste Autorität im Messwesen begründete 1954 das „**Internationale Einheitensystem**“

## 1.2.1 Einheitensystem

- Bis auf Liberia, Myanmar und die USA verwenden alle Länder metrische Einheiten



Quelle: Wikipedia

## 1.2.1 Einheitensystem

### Bedeutung des internationalen Einheitensystems

- In den 1990er Jahren baute die NASA die Sonde „Mars Climate Orbiter“ (MCO, ca. 655 Mio. USD), um das Marsklima zu untersuchen
- 1999 kam der MCO der Atmosphäre vom Mars zu nahe und verglühte
- Problem: NASA hatte mit unterschiedlichen Maßeinheiten gerechnet: ein Team in Metern und Kilogramm, das andere in *Foot* und *Pound* – gut 100 Jahre, nachdem die USA die Meterkonvention unterzeichnet hatten!

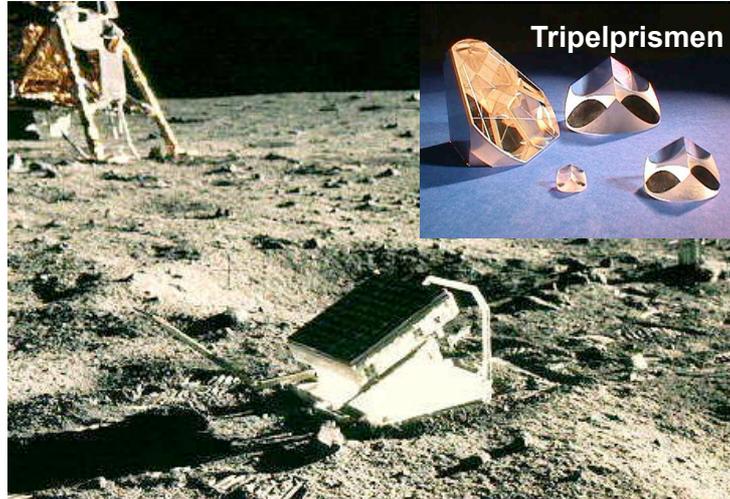


Quelle: NASA

Für eine widerspruchsfreie Darstellung aller physikalischer Größen reichen **sieben Basisgrößen** aus. Alle anderen physikalischen Größen werden aus diesen Basisgrößen abgeleitet.

### Länge:

- **Meter:** Das Meter ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum in einem Intervall von  $1/299\,792\,458$  Sekunden zurücklegt (1983).
- **Realisierung:**
  - Laufzeitmessungen (astronomische Entfernungen) oder
  - Laserstrahlen (Labormaßstab → Laserinterferometer)

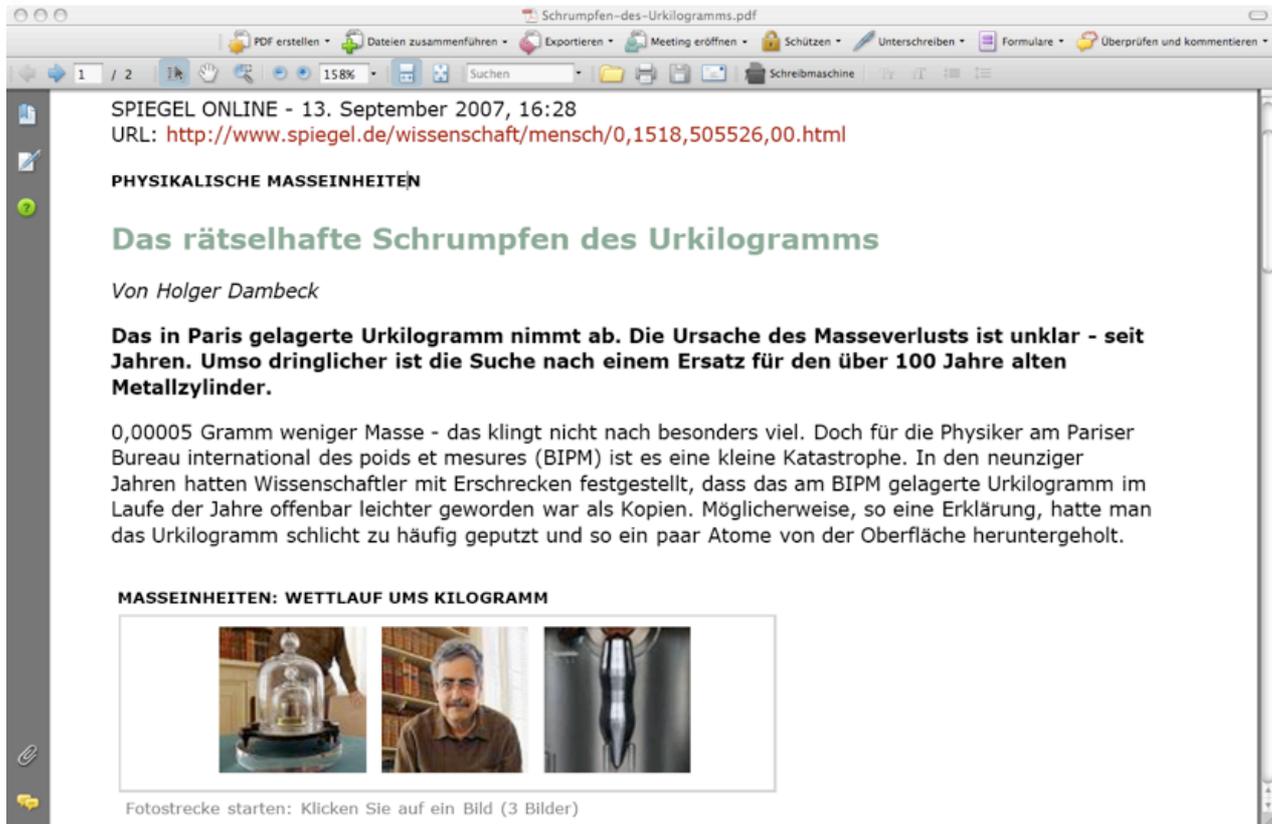


LR3 (*Laser Ranging Retroreflector*), aufgestellt von Armstrong und Aldrin am 20. Juli 1969 auf dem Mond

### Masse:

- **Kilogramm:** Das Kilogramm ist die Einheit der Masse. Es ist gleich der Masse des internationalen Kilogrammprototyps (1889).
- Platin-Iridium-Zylinder, in Sèvres bei Paris aufbewahrt
- Entspricht 1 Liter Wasser bei  $4\text{ °C}$
- PTB hat eine Kopie (nationales Kilogramm-Prototyp), die alle 10 Jahre mit dem „Urkilogramm“ verglichen wird





Schrumpfen-des-Urkilogramms.pdf

PDF erstellen • Dateien zusammenführen • Exportieren • Meeting eröffnen • Schützen • Unterschreiben • Formulare • Überprüfen und kommentieren

1 / 2 158% Suchen Schreibmaschine

SPIEGEL ONLINE - 13. September 2007, 16:28  
URL: <http://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/0,1518,505526,00.html>

**PHYSIKALISCHE MASSEINHEITEN**

### Das rätselhafte Schrumpfen des Urkilogramms

Von Holger Dambeck

**Das in Paris gelagerte Urkilogramm nimmt ab. Die Ursache des Masseverlusts ist unklar - seit Jahren. Umso dringlicher ist die Suche nach einem Ersatz für den über 100 Jahre alten Metallzylinder.**

0,00005 Gramm weniger Masse - das klingt nicht nach besonders viel. Doch für die Physiker am Pariser Bureau international des poids et mesures (BIPM) ist es eine kleine Katastrophe. In den neunziger Jahren hatten Wissenschaftler mit Erschrecken festgestellt, dass das am BIPM gelagerte Urkilogramm im Laufe der Jahre offenbar leichter geworden war als Kopien. Möglicherweise, so eine Erklärung, hatte man das Urkilogramm schlicht zu häufig geputzt und so ein paar Atome von der Oberfläche heruntergeholt.

**MASSEINHEITEN: WETTLAUF UMS KILOGRAMM**



Fotostrecke starten: Klicken Sie auf ein Bild (3 Bilder)

### Zeit:

- **Sekunde:** Die Sekunde ist das 9.192.631.770-fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstruktur-niveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids  $^{133}\text{Cs}$  entsprechenden Strahlung (1967).
- **Realisierung:** Caesium-Atome werden mit Hilfe elektromagnetischer Strahlung dazu gebracht, von einem Energieniveau in ein anderes zu wechseln. Dies funktioniert bei einer bestimmten Strahlungsfrequenz besonders gut. Abzählen der Anzahl von Perioden liefert die Sekunde.
- Kann von allen SI-Basiseinheiten am genauesten realisiert werden

### Stromstärke:

- **Ampere:** Das Ampere ist die Stärke eines konstanten elektrischen Stromes, der, durch zwei parallele, geradlinige, unendlich lange und im Vakuum im Abstand von einem Meter voneinander angeordnete Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigen Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern mit je einem Meter Leiterlänge die Kraft  $2 \cdot 10^{-7}$  Newton hervorrufen würde (1948).

### Thermodynamische Temperatur:

- **Kelvin:** Das Kelvin, die Einheit der thermodynamischen Temperatur, ist der 273,16-te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes des Wassers (1967). Temperaturdifferenzen dürfen auch in Grad Celsius, mit dem Einheitenzeichen °C angegeben werden.

### Stoffmenge:

- **Mol:** Das Mol ist die Stoffmenge eines Systems, das aus ebenso viel Einzelteilchen besteht, wie Atome in 0,012 Kilogramm des Kohlenstoffmoleküls  $^{12}\text{C}$  enthalten sind. Bei Benutzung des Mol müssen die Einzelteilchen spezifiziert sein und können Atome, Moleküle, Ionen, Elektronen sowie andere Teilchen oder Gruppen solcher Teilchen genau angegebener Zusammensetzung sein (1971).

### Lichtstärke:

- **Candela:** Die Candela ist die Lichtstärke in einer bestimmten Richtung einer Strahlungsquelle, die monochromatische Strahlung der Frequenz  $540 \cdot 10^{12}$  Hz aussendet und deren Strahlungsstärke in dieser Richtung 1/683 Watt durch Steradian beträgt (1979).

## 1.2.2 Anpassung der Definitionen der Einheiten

- Anpassung der Einheitendefinitionen an den Stand der Technik
- Rückführung auf die sog. Fundamentalkonstanten

### Beispiel: Längeneinheit Meter

- **1889** wird aus 37 Prototypen per Losverfahren das Urmeter bestimmt (x-förmiger Stab aus Platin-Iridium bei 0 °C). Das Urmeter wird bei Paris aufbewahrt. Weitere Normale werden an die Unterzeichnerstaaten der Meterkonvention verteilt.
- **1960** wird das Meter als das 1 650 763,73-fache der Wellenlänge festgelegt, die das Atom  $^{86}\text{Kr}$  (Krypton) beim Übergang vom Zustand  $5d_5$  in den Zustand  $2p_{10}$  als elektromagnetische Welle aussendet.
- **1983** wird das Meter in seiner bis heute gültigen Form definiert: Länge, die das Licht im Vakuum in einem bestimmten Zeitintervall zurücklegt. ■



# 1.3 Messsysteme

- 1.3.1 Struktur von Messsystemen
- 1.3.2 Systembeschreibung im Zustandsraum
- 1.3.3 Physikalische Messkennlinie
- 1.3.4 Messsignale als Informationsträger

## 1.3 Messsysteme

### 1.3.1 Struktur von Messsystemen

Bei **direkten** Messverfahren wird der Messwert durch unmittelbaren Vergleich mit einem Bezugswert **derselben Messgröße** gewonnen.

#### Beispiel 1.1: Balkenwaage

- Bei einer Balkenwaage wird die unbekannte Masse  $m$  mit der bekannten Masse der Gewichtssteine verglichen.



Die meisten physikalischen Größen können nur **indirekt** gemessen werden. Dabei wird die gesuchte Messgröße über physikalische Zusammenhänge auf **andere Größen** zurückgeführt und aus diesen ermittelt.

➔ Aufstellung einer **physikalischen Messkennlinie** erforderlich



### Messkette

- Am Anfang befindet sich der **Aufnehmer** (auch Sensor oder Fühler), an dessen Eingang die Messgröße  $u$  anliegt. Am Ausgang liefert dieser ein Signal, welches von der Messgröße abhängt.
- Der **Messumformer** bildet das Eingangssignal in ein zur Weiterverarbeitung (z. B. Digitalisierung, Filterung, Übertragung, Speicherung) geeignetes Ausgangssignal ab. Dafür kommen u. a. Messverstärker zum Einsatz.
- Die **Signalverarbeitung** extrahiert aus dem Eingangssignal den informationstragenden Parameter (z. B. Amplitude oder Frequenz) und ermittelt daraus das Messergebnis. Zur Signalverarbeitung wird das Messsignal meist digitalisiert.

## 1.3.2 Systembeschreibung im Zustandsraum

Zur Beschreibung der Systemdynamik können neben der Eingangsgröße  $u$  und der Ausgangsgröße  $y$  auch die **inneren Zustandsgrößen** des Systems berücksichtigt werden. Diese vermitteln zwischen Ein- und Ausgang und werden im **Zustandsvektor**  $\mathbf{x}(t)$  zusammengefasst.

- Im Zustandsraum wird das Messsystem durch die **Zustandsgleichung**

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{w}(\mathbf{x}(t), u(t), \mathbf{z}(t), t)$$

und durch die **Ausgangsgleichung**

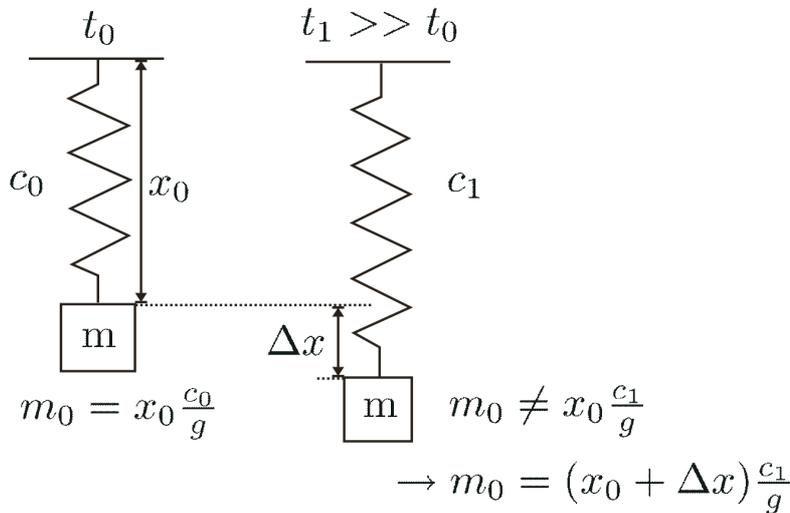
$$y = F(\mathbf{x})$$

beschrieben.

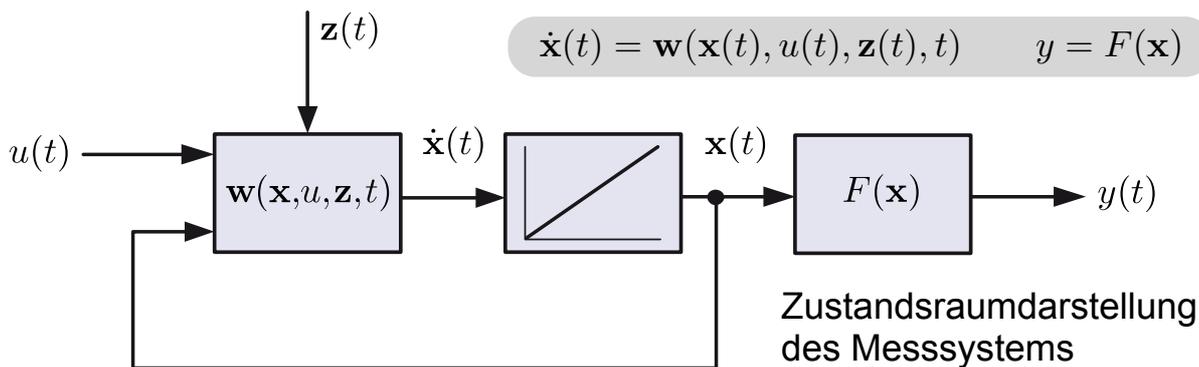
- Neben der Eingangsgröße  $u(t)$ , die speziell bei Messsystemen die Messgröße darstellt, wirken **Störgrößen**  $\mathbf{z}(t)$ , die das Systemverhalten ändern können. Sie sind daher weitere **Eingangsgrößen** des Messsystems.

## Beispiel 1.3: Federwaage

- Eine Federwaage mit der Kennlinie  $m = cx/g$  hat als Systemparameter die Federkonstante  $c$ . Ändert sich die Federkonstante im Betrieb aufgrund von Alterserscheinungen, so ist  $c$  eine Störgröße  $z$  des Messsystems.



## 1.3.3 Physikalische Messkennlinie



In der Messtechnik geht es meist darum, **stationäre** Messgrößen zu erfassen. Die **Kennlinie** beschreibt das System im stationären Zustand.

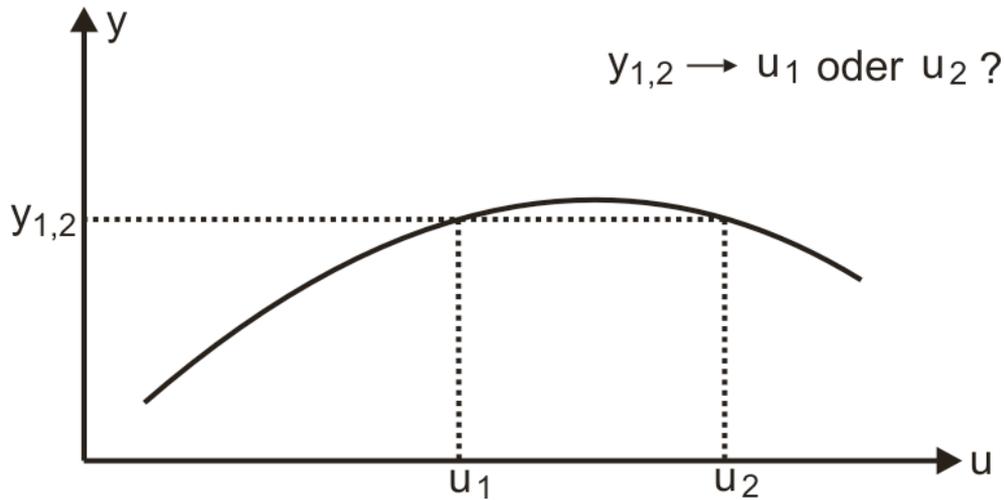
- Stationärer Zustand:  $\dot{\mathbf{x}} = 0 \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{g}(u, \mathbf{z})$   $\mathbf{x}$  nur noch abhängig von  $u$  und  $\mathbf{z}$
- Einsetzen von  $\mathbf{x}$  in die Ausgangsgleichung  $y = F(\mathbf{x})$  führt zur **physikalischen Messkennlinie**:

$$y = F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{g}(u, \mathbf{z})) = f(u, \mathbf{z})$$

### 1.3.3 Physikalische Messkennlinie

- Um Mehrdeutigkeiten zu vermeiden, wird für die physikalische Messkennlinie  $y = f(u, z)$  im Messbereich eine **stetige, streng monotone** Funktion gefordert.

#### Beispiel: Ungeeignete Messkennlinie

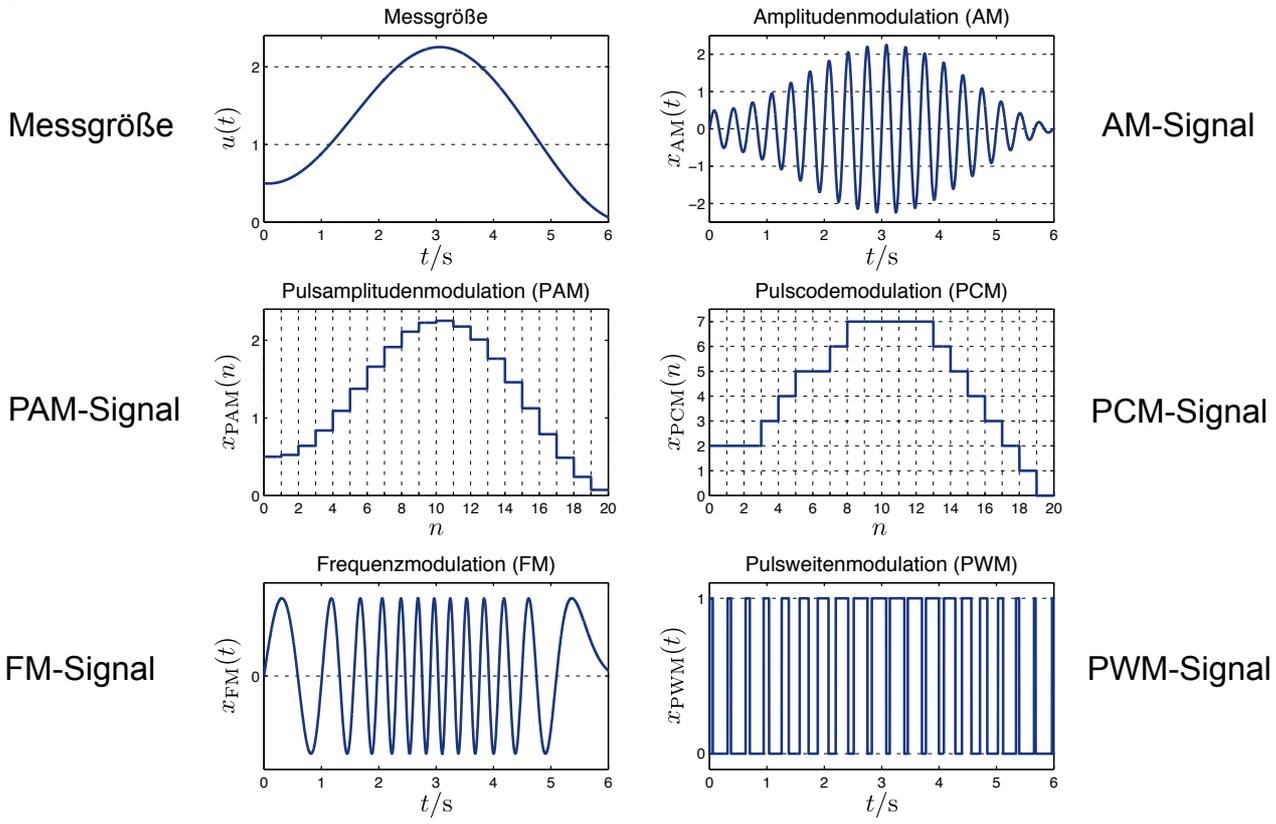


### 1.3.4 Messsignale als Informationsträger

In Messsystemen wird die Information über die Messgröße  $u$  in Form von Signalen  $x(t)$  ausgetauscht. Diese sind **Träger** des Messparameters  $u$ .

Bei **harmonischen** Signalen  $x(t)$  wird die Messgröße  $u$  durch Amplitude, Frequenz oder Phase dargestellt. Bei **impulsförmigen** Signalen werden Impulshöhe, Impulsdauer oder Impulsfrequenz genutzt. Signale lassen sich abhängig vom informationstragenden Parameter  $u$  wie folgt klassifizieren:

- Amplitudenanaloge Signale** sind wertkontinuierlich. Ihre Amplitude ist proportional zur Messgröße  $u$ . Beispiele: zeitkontinuierliches AM-Signal  $x_{AM}(t)$ ; zeitdiskretes PAM-Signal  $x_{PAM}(n)$ .
- Digitale Signale** sind wert- und zeitdiskrete Signale, bei denen die Messgröße  $u$  binär codiert wird. Beispiel: PCM-Signal  $x_{PCM}(n)$ , das durch Quantisierung eines PAM-Signals resultiert.
- Frequenzanaloge Signale** sind zeitkontinuierliche Signale, bei denen die Frequenz proportional zur Messgröße  $u$  ist. Beispiel: FM-Signal  $x_{FM}(t)$ , dessen **Momentanfrequenz** proportional zur Messgröße  $u(t)$  ist.
- Zeitanaloge Signale** sind zeitkontinuierliche impulsförmige Signale, bei denen die Impulsdauer oder der Abstand zwischen aufeinanderfolgenden Impulsen proportional zur Messgröße  $u$  ist. Bsp.: PWM-Signal  $x_{PWM}(t)$ .



## 1.4 Messfehler

- 1.4.1 Absoluter und relativer Fehler
- 1.4.2 Fehlerursachen
- 1.4.3 Spezifizierte Normalbedingungen

## Definition 1.2: Absoluter Fehler

- Der **absolute Fehler**  $F$  eines Messsystems ist die positive oder negative Abweichung des angezeigten oder ausgegebenen Wertes  $y_a$  vom wahren Wert  $y_w$ :

$$F = y_a - y_w$$

$y_a$  : **angezeigter** Wert (Istwert)

$y_w$  : **wahrer** Wert (Sollwert)

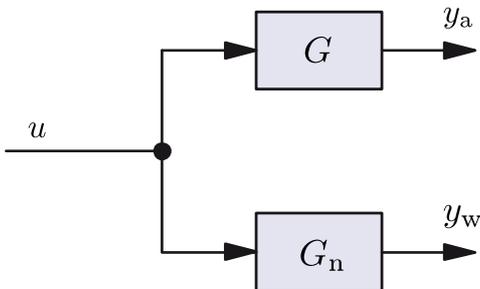
## Definition 1.3: Relativer Fehler

- Der **relative Fehler**  $F_{rel}$  ist eine bezogene Größe, wobei als Bezugswert in der Regel der wahre Wert  $y_w$  gewählt wird:

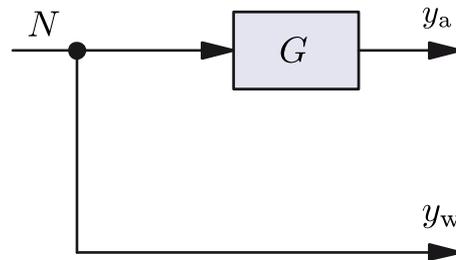
$$F_{rel} = \frac{F}{y_w} = \frac{y_a - y_w}{y_w}$$

- Er ist dimensionslos und wird meist in Prozent angegeben.

Es gibt zwei Möglichkeiten, den Fehler zu bestimmen, wenn der wahre Wert  $y_w$  **nicht** bekannt ist.



a) Vergleich mit Präzisionsgerät



b) Vermessung eines Normal

**Jede Messung ist fehlerbehaftet**

### Fehlerursachen:

- **Vereinfachtes Modell des Messsystems:** Nur Näherung des Messsystems, z. B. durch Beschreibung mit idealen Komponenten
- **Innere Störgrößen:** Störgrößen im Messgerät selbst (z. B. Alterungseffekte)
- **Äußere Störgrößen:** Beeinflussung des physikalischen Messeffekts durch unerwünschte Größen (z. B. Temperaturabhängigkeiten)
- **Beobachtungsfehler:** Der Beobachter ist Fehlerquelle bei falschem Ablesen
- **Dynamische Fehler:** Bei der Erfassung dynamischer Prozesse soll das Anzeigesignal der Messeinrichtung dem Messsignal verzögerungsfrei folgen
- **Rückwirkung:** Dem Prozess wird durch die Messeinrichtung Energie oder Leistung entzogen

- Ungeachtet der konkreten Fehlerursachen werden zwei **Fehlerklassen** unterschieden:

**Systematische Fehler:** Ursache des Fehlers und Art der Einwirkung sind bekannt.

→ Kompensation prinzipiell möglich

**Zufällige Fehler:** Bei wiederholten Messungen unter gleichen Bedingungen weisen die Fehler verschiedene Beträge und Vorzeichen auf. Zufällige Fehler sind im Einzelnen nicht erfassbar, da ihre Ursachen teilweise unbekannt sind.

- • Ergebnis einer einzelnen Messung interessiert nicht
- Abhilfe z. B. durch Mittelung über viele Messungen

### Spezifikation

- In der Spezifikation eines Messsystems werden die Randbedingungen und Umwelteinflüsse festgehalten, unter denen der Hersteller einen **maximalen** Fehler garantiert.
- Dazu gehören die folgenden Angaben:
  - Messbereich
  - Messgenauigkeit
  - Betriebsbedingungen
  - Einbauvorschriften
  - Energieversorgung
  - Abmessungen

- Bei Fehlern muss unterschieden werden, ob diese unter spezifizierten Normalbedingungen oder bei Abweichung davon vorkommen.
- Im Folgenden werden ausschließlich **statische Fehler** berücksichtigt (d. h. Fehler, die sich im **eingeschwungenen** Zustand einstellen).

### Statische Fehler unter spezifizierten Normalbedingungen:

- Die Störgrößen aus der Umgebung werden gemäß der Spezifikation konstant oder auf null gehalten:

$$Z = Z_0$$

### Statische Fehler bei Abweichung von den Normalbedingungen:

- Für jede *systematische Störgröße* wird eine definierte Abweichung von den Normalbedingungen hergestellt. Die Auswirkung auf die Ausgangsgröße wird als Fehler festgehalten.

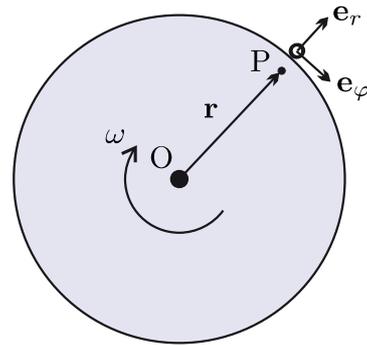
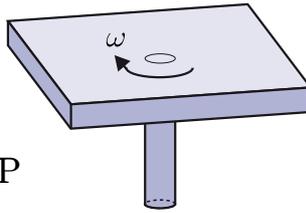
$$Z = Z_i$$

## 1.4.3 Spezifizierte Normalbedingungen

### Beispiel 1.8: Winkelgeschwindigkeitsmessung

- **Ziel:** Bestimmung der **konstanten**

Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  eines horizontal rotierenden Körpers über eine Beschleunigungsmessung im Punkt P



- Beschleunigung im Punkt P:

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_O + \underbrace{\dot{\omega} \cdot r \cdot \mathbf{e}_\varphi}_{\mathbf{a}_t} - \underbrace{\omega^2 \cdot r \cdot \mathbf{e}_r}_{\mathbf{a}_{zp}}$$

$\mathbf{a}_O$  : Führungsbeschleunigung des Aufpunktes O

$\mathbf{a}_t = \dot{\omega} \times \mathbf{r}$  : Tangentialbeschleunigung

$\mathbf{a}_{zp} = \omega \times \mathbf{v}$  : Zentripetalbeschleunigung

- **Reine Drehbewegung:** →

$$\mathbf{a}_O = 0$$

## 1.4.3 Spezifizierte Normalbedingungen

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_O + \underbrace{\dot{\omega} \cdot r \cdot \mathbf{e}_\varphi}_{\mathbf{a}_t} - \underbrace{\omega^2 \cdot r \cdot \mathbf{e}_r}_{\mathbf{a}_{zp}}$$

- Idealer 1D-Beschleunigungssensor:

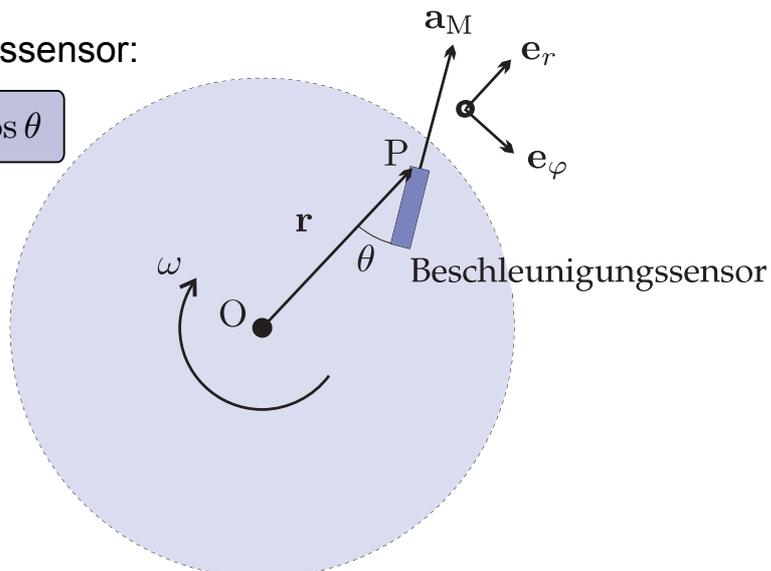
$$a_M = -\dot{\omega} r \sin \theta - \omega^2 r \cos \theta$$

- Bei **konstanter** Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\omega} = 0$$

erhält man die **stationäre Messkennlinie:**

$$a_M = -\omega^2 \cdot r \cdot \cos \theta$$



- Sensorposition  $r$  und -ausrichtung  $\theta$  beeinflussen Messergebnis und sind daher Störgrößen

### Diskussion

- Die Sensorposition  $r$  und -ausrichtung  $\theta$  sind **innere Störgrößen** des Messsystems. Als Normalbedingung wird daher die konstruktiv vorgegebene Platzierung  $r_0, \theta_0$  spezifiziert.
- Die Führungsbeschleunigung  $a_0$  ist eine **äußere Störgröße**, die **systematischer** Natur (Achse steht nicht senkrecht zur Erdoberfläche) oder **stochastischer** Natur (unbekannte Vibrationen der Messanordnung) sein kann.
- Statt einer quadratischen stationären Kennlinie wäre eine **lineare Kennlinie** wünschenswert. Vorteil: konstante **Empfindlichkeit** im gesamten Messbereich.
- Beim Übergang auf eine neue stationäre Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  treten **dynamische Fehler** auf, die proportional zur Winkelbeschleunigung sind. Ändert sich  $\omega$  sprungförmig, so ist die Messung erst nach einer gewissen Zeit brauchbar, wenn diese Fehler abgeklungen sind. ■