

3. Stationäres Verhalten von Messsystemen

- 3.1 Stationäre Messkennlinie und deren Fehler
- 3.2 Kennlinienfehler unter Normalbedingungen
- 3.3 Kennlinienfehler bei Abweichung von den Normalbedingungen
- 3.4 Rückwirkung des Messsystems

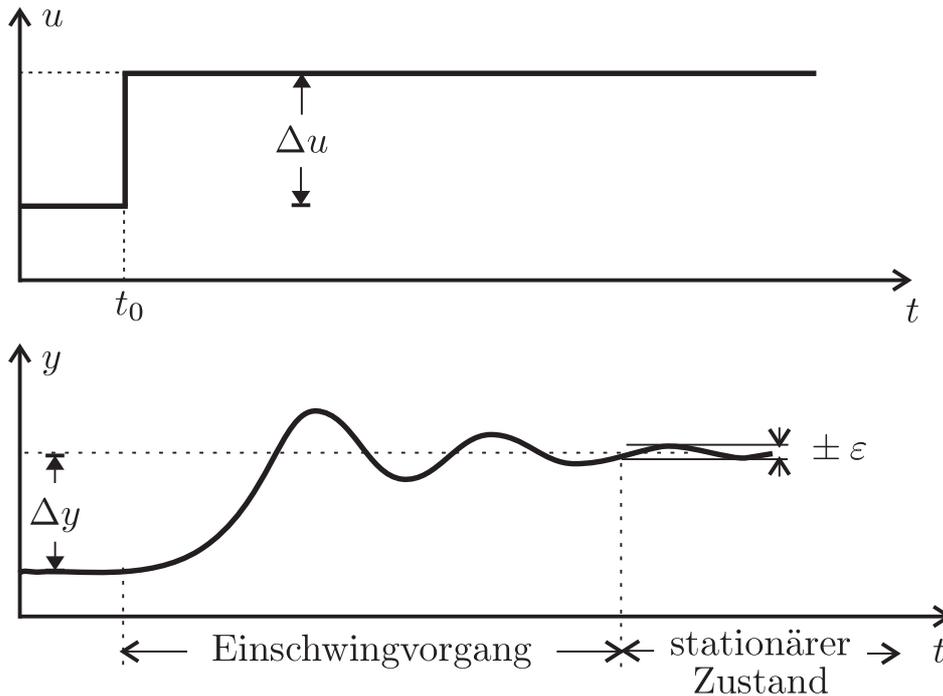
3.1 Stationäre Messkennlinie und deren Fehler

- 3.1.1 Ideale und reale Messkennlinie
- 3.1.2 Abgleich der Messkennlinie
- 3.1.3 Kennlinienfehler bei realer Messkennlinie
- 3.1.4 Abschätzung des Kennlinienfehlers

3.1 Stationäre Messkennlinie und deren Fehler

- Stationäres Verhalten: **Einschwingvorgänge** abgeklungen

➔ Messsystem durch **Kennlinie** beschreibbar



3.1.1 Ideale und reale Messkennlinie

- Kennlinie beschreibt funktionalen Zusammenhang zwischen den Messwerten u und den Anzeigewerten $y(u)$ im stationären Zustand

- **Empfindlichkeit (sensitivity) $S(u)$** : Steigung der Kennlinie $y(u)$:

$$S(u) = \frac{\partial y(u)}{\partial u}$$

- Reale Kennlinie $y(u)$ i. Allg. **nichtlinear**

- **Ideale Kennlinie: lineare** Kennlinie $y_i(u)$, die Messanfang und -ende durch eine Gerade miteinander verbindet. Ihre Empfindlichkeit ist konstant:

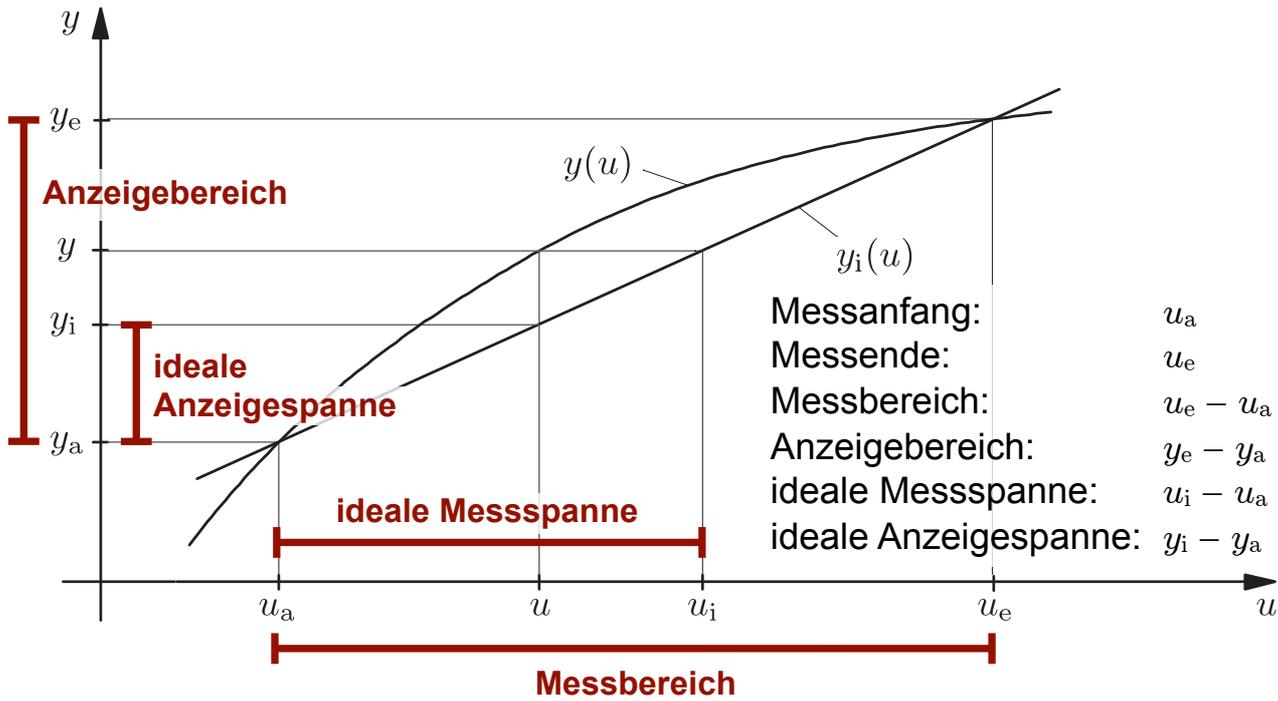
$$S_i = \frac{y_e - y_a}{u_e - u_a}$$

- Damit lässt sich die ideale Kennlinie angeben:

$$y_i(u) = S_i \cdot (u - u_a) + y_a$$

3.1.1 Ideale und reale Messkennlinie

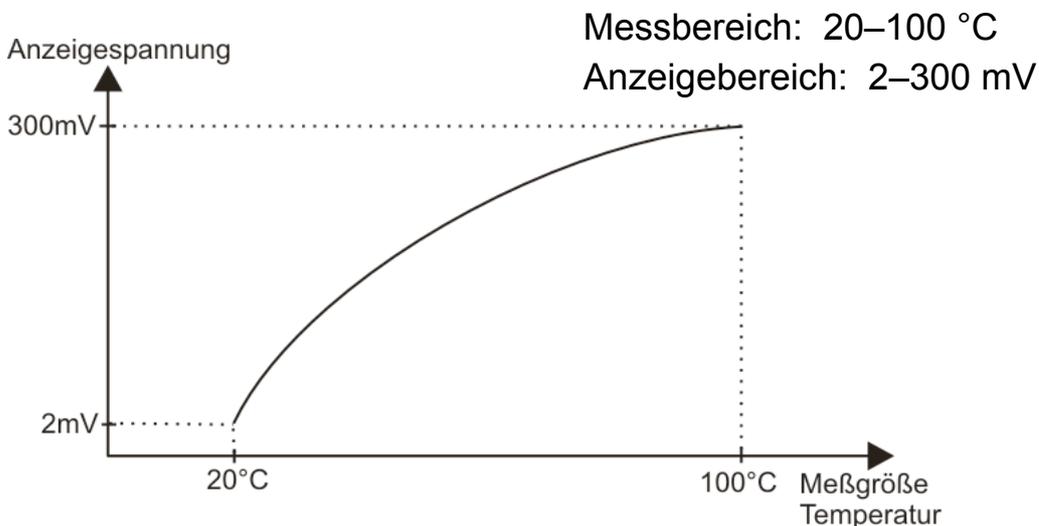
Reale Kennlinie $y(u)$ und ideale Kennlinie $y_i(u)$



3.1.2 Abgleich der Messkennlinie

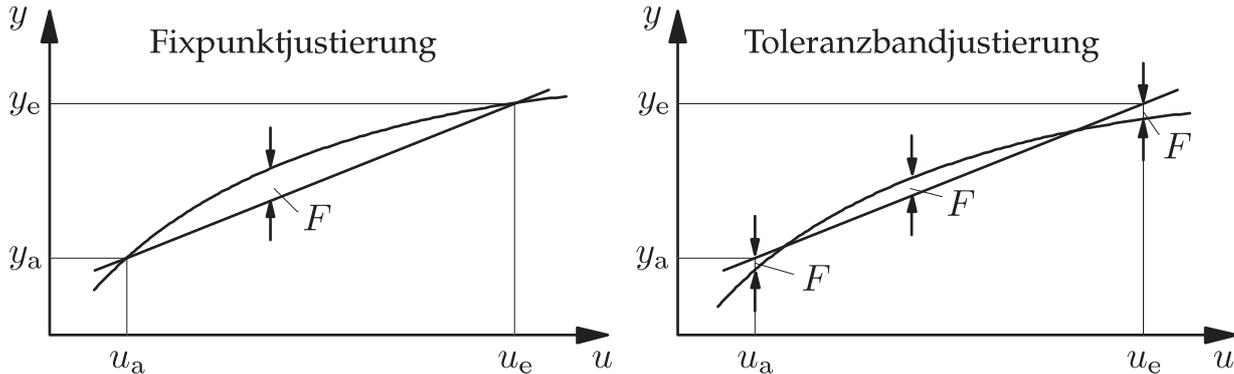
Abgleich (Justierung): Eingriff in das Messsystem, um **den Messbereich auf den vorgesehenen Bereich** des Ausgangssignals oder der Anzeige **abzubilden**. Der Abgleich erfolgt unter **Normalbedingungen** gemäß Spezifikation.

Beispiel 3.1: Justierung eines Temperaturmessgerätes



3.1.2 Abgleich der Messkennlinie

- Bei der Justierung sind zwei Verfahren gebräuchlich:
 - **Fixpunktjustierung:** Kennlinie geht durch den Anfangspunkt (u_a, y_a) und den Endpunkt (u_e, y_e) . Der Messbereich $[u_e, u_a]$ wird auf den Anzeigebereich $[y_e, y_a]$ abgebildet. Der Fehler am Messanfang und Messende ist null.
 - **Toleranzbandjustierung:** Zusätzlich zur Fixpunktjustierung erfolgt eine additive Verschiebung. Damit wird der **maximale Fehler im Messbereich** auf die Hälfte reduziert. Die Kennlinie geht nicht mehr durch Anfangs- und Endpunkt.

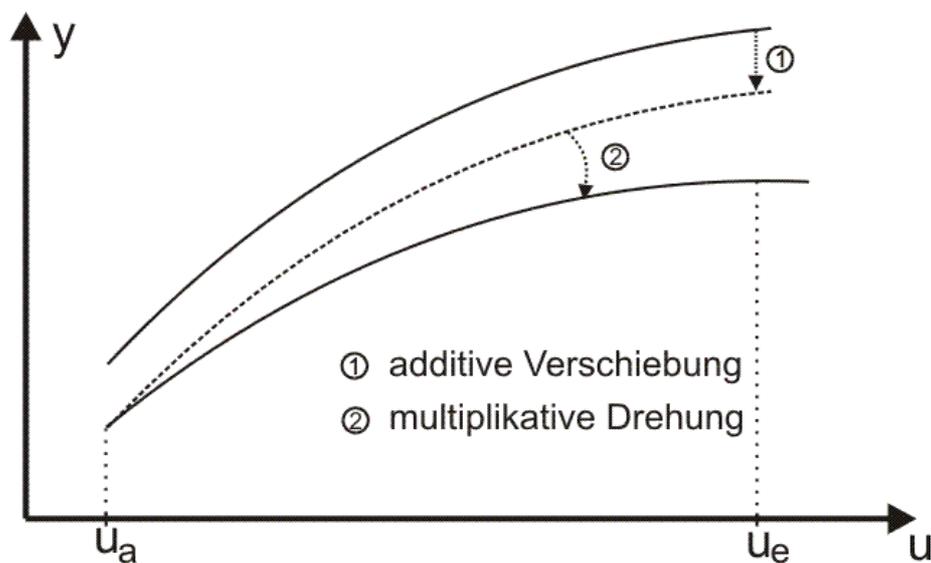


7

Prof. Dr.-Ing. F. Puente León – Messtechnik

3.1.2 Abgleich der Messkennlinie

Möglichkeiten für den Abgleich einer Kennlinie:



1. **additive Verschiebung** → z. B. Toleranzbandjustierung
2. **multiplikative Drehung** → Anpassung der Steigung

8

Prof. Dr.-Ing. F. Puente León – Messtechnik

Nullpunktfehler

- Der Nullpunktfehler (Offsetfehler) beschreibt die Differenz zwischen der Kennlinie am Anfang des Messbereiches und dem gewünschten Anfangspunkt y_a :

$$e(\mathbf{z}) = f(u_a, \mathbf{z}) - y_a$$

- Unter Normalbedingungen ($\mathbf{z} = \mathbf{z}_0$) ist er bei Fixpunktjustierung gleich null:

$$e(\mathbf{z}_0) = f(u_a, \mathbf{z}_0) - y_a = 0$$

Abgrenzung zum *Eichen*:

Eichen ist eine gesetzliche Maßnahme, die durch eine Prüfbehörde erfolgt.

3.1.3 Kennlinienfehler bei realer Kennlinie

- Nach der Justierung können alle systematischen Fehler (Nichtlinearitäten, systematische Störungen) als **Kennlinienfehler** beschrieben werden

Relativer Kennlinienfehler

- Bei Unterdrückung des Anfangswertes u_a lautet der **relative KL-Fehler**:

$$F_r = \frac{(u_i - u_a) - (u - u_a)}{u - u_a} = \frac{u_i - u}{u - u_a}$$

- Mit der **idealen Kennlinie** (vgl. Folie 5)

$$y - y_i = S_i \cdot (u_i - u)$$

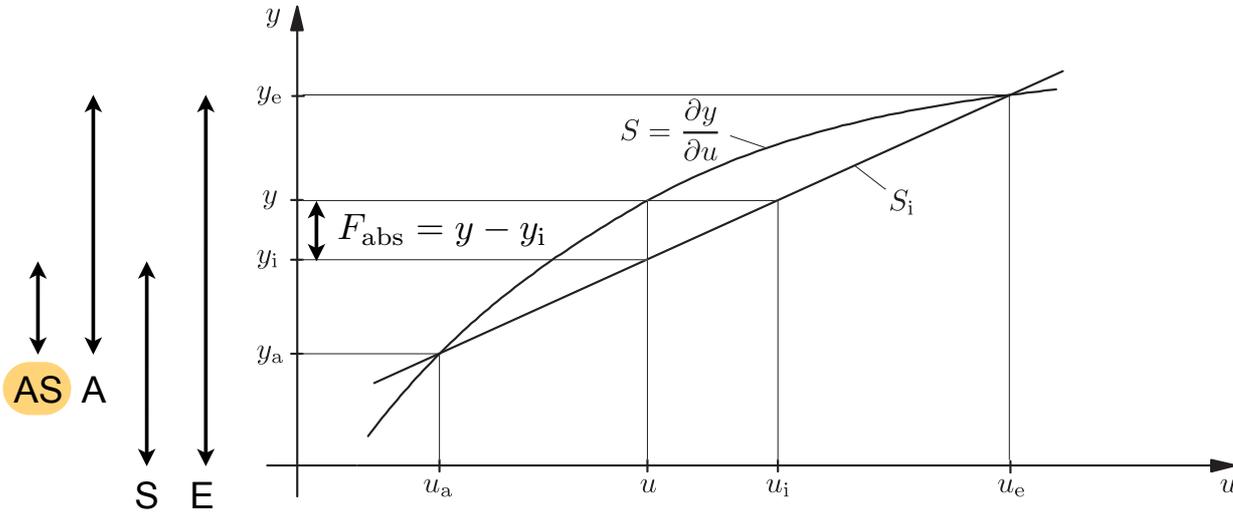
$$y_i - y_a = S_i \cdot (u - u_a)$$

kann dieser durch die Anzeigegrößen dargestellt werden:

$$F_r = \frac{y - y_i}{S_i} \cdot \frac{S_i}{y_i - y_a} = \frac{y - y_i}{y_i - y_a}$$

relativer Fehler bezogen auf die Anzeigespanne

3.1.3 Kennlinienfehler bei realer Kennlinie



■ Gängige Bezugswerte für den **relativen Kennlinienfehler** sind:

Anzeigespanne AS

Anzeigebereich A

Sollwert S

Endwert E

$$F_r = \frac{y - y_i}{y_i - y_a}$$

$$F_{rA} = \frac{y - y_i}{y_e - y_a}$$

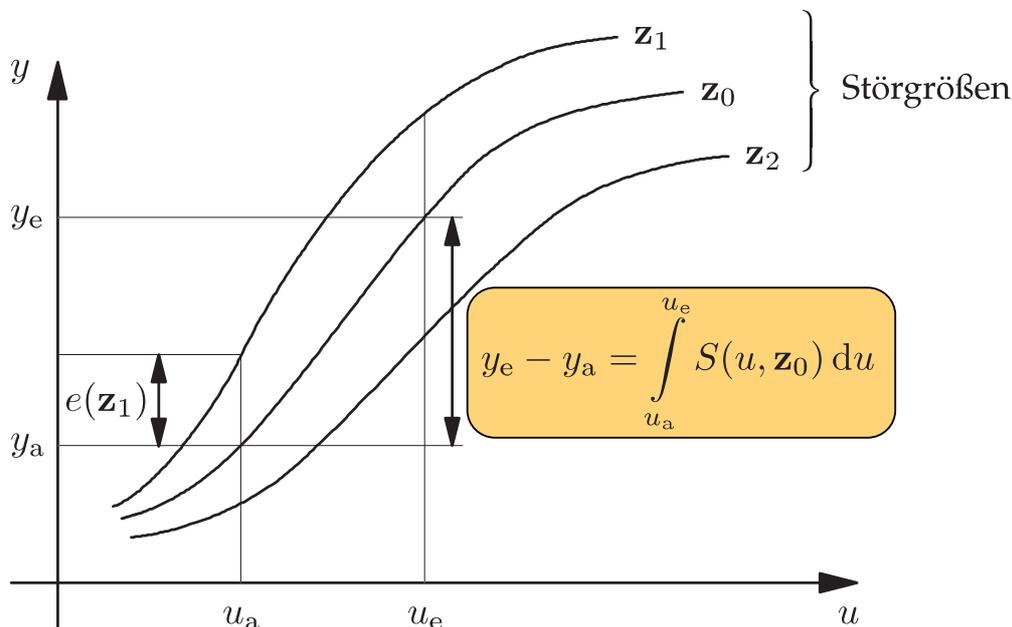
$$F_{rS} = \frac{y - y_i}{y_i}$$

$$F_{rE} = \frac{y - y_i}{y_e}$$

3.1.4 Abschätzung des Kennlinienfehlers

Wunsch: Angabe des rel. KL-Fehlers abhängig von der Empfindlichkeit S

■ Bei Abgleich und Normalbedingungen ($z = z_0$) lässt sich die **reale Kennlinie** durch Integration der Empfindlichkeit S angeben:

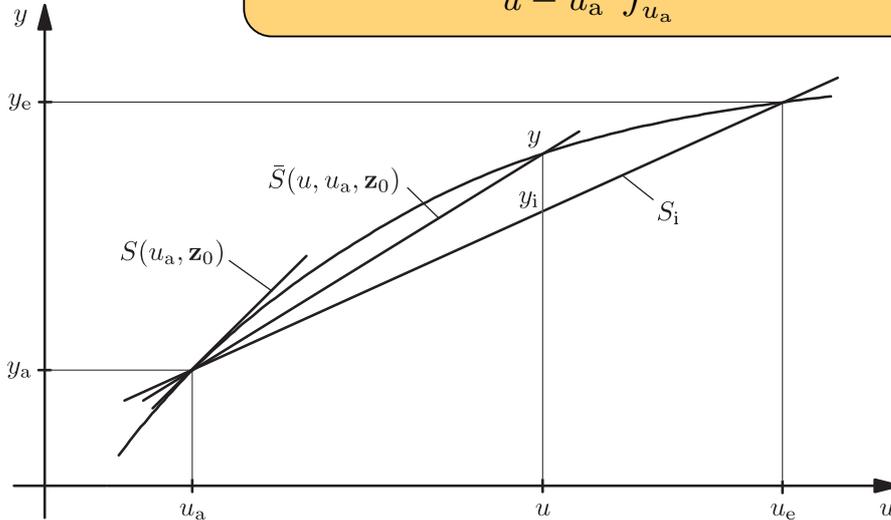


3.1.4 Abschätzung des Kennlinienfehlers

- Die **mittlere Empfindlichkeit** (Funktion von u) folgt durch Rechteckintegration:

$$y - y_a = \int_{u_a}^u S(u, \mathbf{z}_0) du \stackrel{!}{=} \bar{S}(u, u_a, \mathbf{z}_0) \cdot (u - u_a) \quad (3.21)$$

$$\bar{S}(u, u_a, \mathbf{z}_0) = \frac{1}{u - u_a} \int_{u_a}^u S(u, \mathbf{z}_0) du = \frac{y - y_a}{u - u_a}$$



Definition der
mittleren
Empfindlichkeit unter
spezifizierten
Normalbedingungen

3.1.4 Abschätzung des Kennlinienfehlers

- Für das Messende $u = u_e$ stimmt die **mittlere Empfindlichkeit** mit der **idealen** überein:

$$\bar{S}(u_e, u_a, \mathbf{z}_0) = \frac{1}{u_e - u_a} \int_{u_a}^{u_e} S(u, \mathbf{z}_0) du = S_i$$

- Anderenfalls lautet die **Empfindlichkeitsdifferenz**:

$$\Delta \bar{S}(u, \mathbf{z}_0) = \bar{S}(u, u_a, \mathbf{z}_0) - S_i$$

- Für den **relativen KL-Fehler** erhält man:

$$F_r = \frac{y - y_i}{y_i - y_a} = \frac{(y - y_a) - (y_i - y_a)}{y_i - y_a} \quad (3.25)$$

$$\stackrel{(3.21)}{=} \frac{(\bar{S}(u, u_a, \mathbf{z}_0) - S_i) \cdot (u - u_a)}{S_i \cdot (u - u_a)} = \frac{\Delta \bar{S}(u, \mathbf{z}_0)}{S_i} \quad (3.26)$$

$$\Rightarrow y - y_a = (y_i - y_a) \cdot (1 + F_r) = S_i \cdot (u - u_a) \cdot (1 + F_r) \quad (3.28)$$

3.1.4 Abschätzung des Kennlinienfehlers

- Zur näheren Spezifizierung des **relativen Fehlers** wird die **mittlere Empfindlichkeit** abhängig von den Ableitungen von S benötigt
- Dafür wird y durch eine **Taylorreihe** um den Messanfang u_a abgeschätzt:

$$y = f(u_a, \mathbf{z}_0) + \left. \frac{\partial f(u, \mathbf{z}_0)}{\partial u} \right|_{u=u_a} (u - u_a) + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 f(u, \mathbf{z}_0)}{\partial u^2} \right|_{u=u_a} (u - u_a)^2 + \dots$$
$$= y_a + S(u_a, \mathbf{z}_0) \cdot (u - u_a) + \frac{1}{2!} S'(u_a, \mathbf{z}_0) \cdot (u - u_a)^2 + \dots$$

- Subtraktion von y_a und Ausklammern von $(u - u_a)$ ergibt:

$$y - y_a = (u - u_a) \underbrace{\left\{ S(u_a, \mathbf{z}_0) + \frac{1}{2!} S'(u_a, \mathbf{z}_0) \cdot (u - u_a) + \dots \right\}}_{\bar{S}(u, u_a, \mathbf{z}_0)} \quad \text{wegen (3.21)}$$

- Vergleich mit (3.21) ergibt für die **mittlere Empfindlichkeit** der realen KL:

$$\bar{S}(u, u_a, \mathbf{z}_0) = S(u_a, \mathbf{z}_0) + \frac{1}{2!} S'(u_a, \mathbf{z}_0) \cdot (u - u_a) + \dots$$

3.1.4 Abschätzung des Kennlinienfehlers

- Vernachlässigen der Glieder zweiter und höherer Ordnung:

$$\bar{S}(u, u_a, \mathbf{z}_0) \approx S(u_a, \mathbf{z}_0) + \frac{1}{2!} S'(u_a, \mathbf{z}_0) \cdot (u - u_a)$$

→ **relativer KL-Fehler** nach (3.26): $F_r = \frac{\Delta \bar{S}(u, \mathbf{z}_0)}{S_i} = \frac{\bar{S}(u, u_a, \mathbf{z}_0) - S_i}{S_i}$

$$F_r \approx \frac{S(u_a, \mathbf{z}_0) + \frac{1}{2} S'(u_a, \mathbf{z}_0) \cdot (u - u_a) - S_i}{S_i}$$
$$= \frac{\Delta \bar{S}(u_a, \mathbf{z}_0)}{S_i} + \frac{1}{2} \frac{S'(u_a, \mathbf{z}_0)}{S_i} (u - u_a) \quad (3.35)$$

Über die Definition der mittleren Empfindlichkeit \bar{S} und über deren Näherung mit der Taylorreihenentwicklung lässt sich der relative Kennlinienfehler F_r in Abhängigkeit von der Empfindlichkeit und deren Ableitungen angeben.

3.2 Kennlinienfehler unter Normalbedingungen

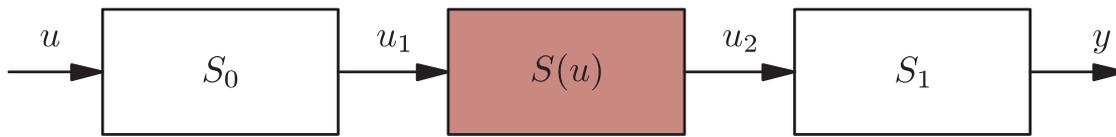
- 3.2.1 Herabsetzen des Messbereichs
- 3.2.2 Reihenschaltung zweier nichtlinearer Glieder
- 3.2.3 Wahl des günstigsten Messbereichs
- 3.2.4 Differenzmethode
- 3.2.5 Gegenkopplung

3.2 Kennlinienfehler unter Normalbedingungen

- In diesem Abschnitt wird das Messsystem laut Spezifikation betrieben
→ Störgrößenvektor $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0$
- Annahme: Fixpunktjustierung → Nullpunktfehler $e(\mathbf{z}_0) = 0$
- Die auftretenden Messfehler werden als Abweichung der Messkennlinie von der idealen Messkennlinie interpretiert
- **Wunsch:** lineare Kennlinie mit konstanter Empfindlichkeit $S = S_i$
- Durch die folgenden Verfahren kann die Kennlinie der idealen Grundform angenähert werden:
 - Herabsetzen des Messbereichs
 - Hintereinanderschalten zweier nichtlinearer Glieder
 - Wahl des günstigsten Messbereichs
 - Differenzmethode
 - Gegenkopplung
- Damit werden **Messfehler infolge von Nichtlinearitäten reduziert**

3.2.1 Herabsetzen des Messbereichs

- Ziel: **nichtlin. Glied** durch 2 weitere lineare Glieder in Serie linearisieren
- Blockschaltbild der Anordnung:



Durch ein **vorgeschaltetes lineares** Übertragungsglied der Empfindlichkeit $S_0 \ll 1$ und ein **nachgeschaltetes lineares** Übertragungsglied der Empfindlichkeit $S_1 \gg 1$ wird eine **Linearisierung der Kennlinie** erreicht.

■ Einzelkennlinien:

$$u_1 - u_{1a} = S_0 \cdot (u - u_a)$$

$$u_2 - u_{2a} \stackrel{(3.28)}{=} S_i \cdot (1 + F_r) (u_1 - u_{1a})$$

$$y - y_a = S_1 \cdot (u_2 - u_{2a})$$

→ Gesamtkennlinie: $y - y_a = S_0 S_1 S_i \cdot (1 + F_r) (u - u_a)$

3.2.1 Herabsetzen des Messbereichs

- Wegen $S_0 \ll 1$ wird das **nichtlineare** Glied am Anfang u_{1a} des Messbereiches betrieben. Der relative Kennlinienfehler lautet nach (3.35):

$$F_r \approx \frac{\Delta \bar{S}(u_{1a}, \mathbf{z}_0)}{S_i} + \frac{1}{2} \frac{S'(u_{1a}, \mathbf{z}_0)}{S_i} (u_1 - u_{1a})$$

$S_0 \ll 1$ → $= \frac{\bar{S}(u_{1a}, \mathbf{z}_0) - S_i}{S_i} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{S'(u_{1a}, \mathbf{z}_0)}{S_i} S_0 \cdot (u - u_a)}_{\approx 0}$

$$\Rightarrow S_i \cdot (1 + F_r) = S(u_{1a}, \mathbf{z}_0) = \text{const.}$$

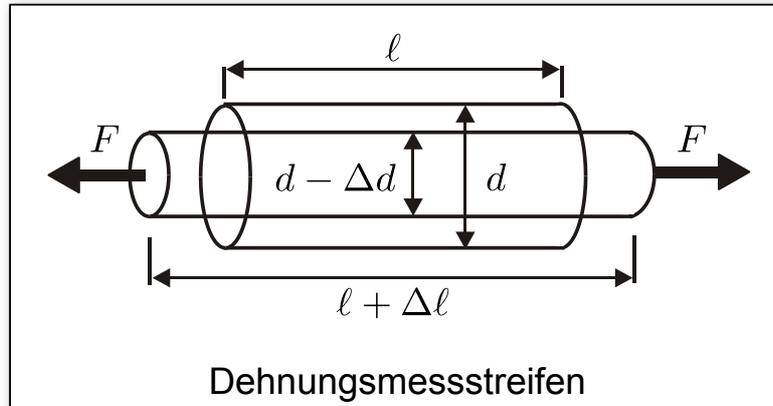
→ Ausgangsgröße: $y - y_a \approx S_0 S_1 S(u_{1a}, \mathbf{z}_0) (u - u_a)$

Die Ausgangsgröße hängt nur noch von der konstanten Empfindlichkeit $S(u_{1a}, \mathbf{z}_0)$ im Messanfang des nichtlinearen Gliedes ab (Linearisierung um den Arbeitspunkt $u_1 = u_{1a}$). S_1 wird so gewählt, dass $S_0 \cdot S_1 = 1$ gilt.

Beispiel 3.2: Wegmessung mit Dehnmessstreifen (DMS)

- DMS ermöglichen die Messung von Dehnungen, Stauchungen, Torsionen und anderen mechanischen Beanspruchungen im μm -Bereich
- Bei mechanischen Beanspruchungen ändern sich Länge l und Querschnitt A eines Leiters und somit der elektrische Widerstand R :

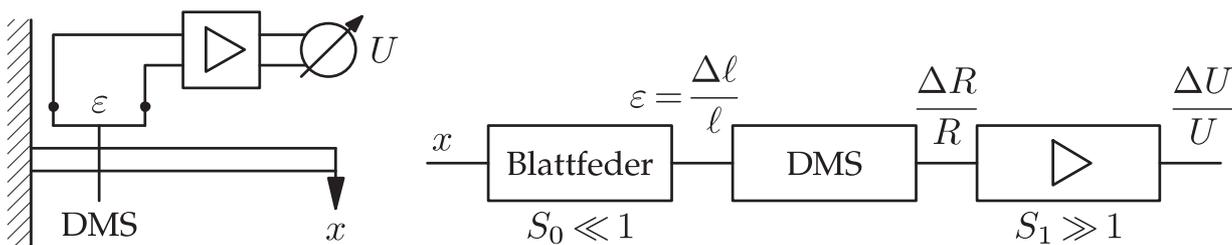
$$R = \frac{l \cdot \rho}{A}$$



- Dadurch werden Dehnungen des DMS (bzw. des Messobjektes) in eine elektrische Widerstandsänderung umgeformt

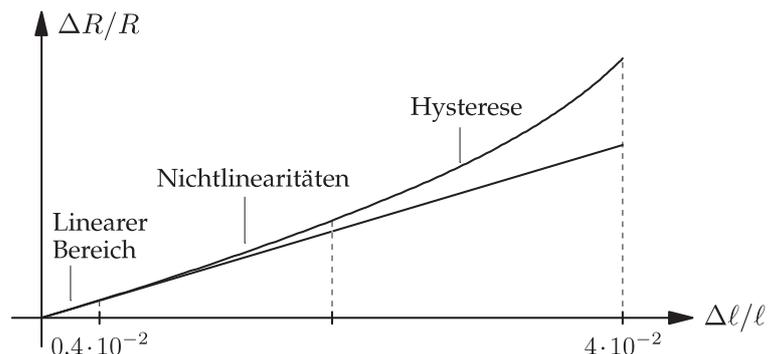
3.2.1 Herabsetzen des Messbereichs

- Ziel: Messbereich von ca. 1 mm Weg anhand der Dehnung eines DMS

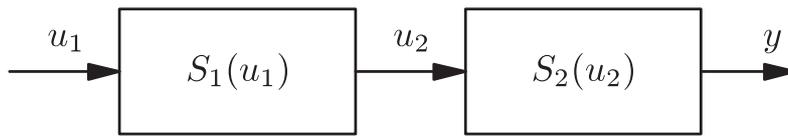


Vorgehen zur Linearisierung:

1. Umsetzen des Weges x in eine kleine Längenänderung $\Delta l/l$
2. Umsetzen der Längenänderung $\Delta l/l$ in eine Widerstandsänderung $\Delta R/R$ (**linearer** Teil der DMS-Kennlinie)
3. Umsetzen von $\Delta R/R$ in eine Spannung $\Delta U/U$ mit anschließender Verstärkung: $S_1 \gg 1$



Zwei **nichtlineare** Glieder mit den Empfindlichkeiten $S_1(u_1)$ und $S_2(u_2)$ werden in Reihe geschaltet und ergeben eine **lineare** Gesamtkennlinie.



■ Kennlinien: $u_2 = f_1(u_1)$ $y = f_2(u_2)$

■ Empfindlichkeiten: $\frac{\partial u_2}{\partial u_1} = \frac{\partial f_1(u_1)}{\partial u_1} = S_1(u_1)$ $\frac{\partial y}{\partial u_2} = \frac{\partial f_2(u_2)}{\partial u_2} = S_2(u_2)$

→ $\frac{\partial y}{\partial u_1} = \frac{\partial f_2(u_2)}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial f_1(u_1)}{\partial u_1} = S_1(u_1) S_2(u_2)$

■ Für eine **lineare** Kennlinie der Gesamtanordnung muss gelten:

$$S = S_1(u_1) S_2(u_2) \stackrel{!}{=} \text{const.}$$

■ Entwicklung von S in eine Taylor-Reihe um den Arbeitspunkt und **Nullsetzen der ersten Koeffizienten** (Bedingung für Linearität):

$$\frac{dS}{du_1} = S_1' S_2 + S_1 S_2' \frac{du_2}{du_1} = S_1' S_2 + S_1^2 S_2' = 0 \quad (3.48)$$

$$\frac{d^2 S}{du_1^2} = S_1'' S_2 + 3S_1 S_1' S_2' + S_1^3 S_2'' = 0$$

$$\frac{d^3 S}{du_1^3} = S_1''' S_2 + 4S_1 S_1'' S_2' + 3S_1'^2 S_2' + 6S_1^2 S_1' S_2'' + S_1^4 S_1''' = 0$$

Die Gleichungen sind mit steigenden Ansprüchen an die Linearisierung (konstante Steigung, Krümmung etc.) zu erfüllen

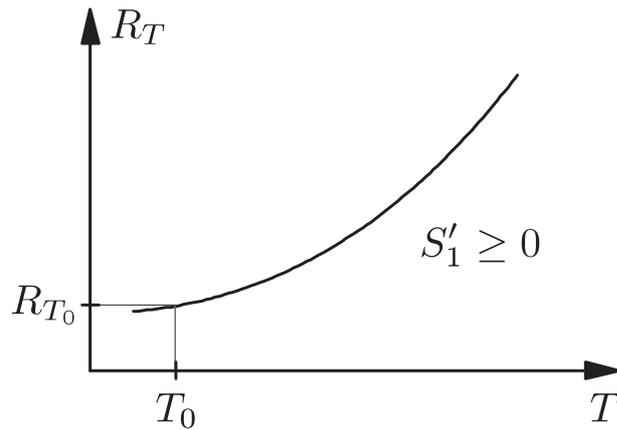
■ Die Reihenfolge der nichtlinearen Glieder in der Messkette ist **wesentlich**, da die Beziehungen **nicht symmetrisch** in S_1 und S_2 sind. So gilt z.B.:

$$S_2' = -\frac{S_2}{S_1^2} S_1'$$

Beispiel 3.3: Widerstandsthermometer in Brückenschaltung

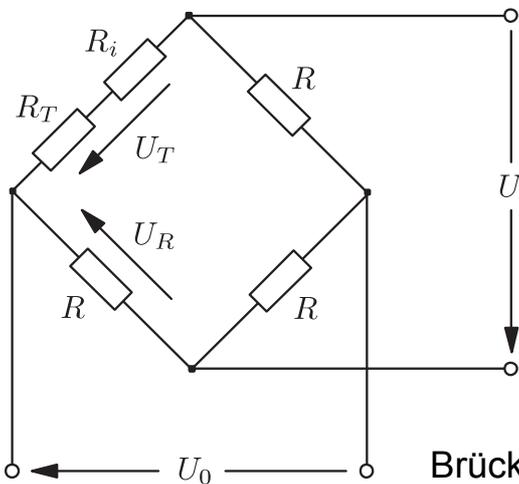
- Temperaturabhängiger Widerstand:

$$\begin{aligned} \Delta R_T &= f_1(T) \\ &= R_T - R_{T_0} \\ &= a(T - T_0) + b(T - T_0)^2 \end{aligned}$$



Kennlinie des Widerstandsthermometers

Signalfluss: $T \rightarrow \Delta R_T \rightarrow U$



Brückenschaltung im Abgleichverfahren

3.2.2 Reihenschaltung zweier nichtlinearer Glieder

R_i : konstanter, temperaturunabhängiger Justierwiderstand in Serie zu R_T

Abgleichbedingung:

$$\left. \begin{aligned} R &= R_{T_0} + R_i \\ \Delta R_T &= R_T - R_{T_0} = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow U = 0$$

- Brücken-Ausgangsspannung:

$$\begin{aligned} U &= f_2(\Delta R_T) = U_T - U_R \\ &= U_0 \left[\frac{R_T + R_i}{R_T + R_i + R} - \frac{R}{R + R} \right] = U_0 \left[\frac{R_{T_0} + \Delta R_T + R_i}{R_{T_0} + \Delta R_T + R_i + R} - \frac{1}{2} \right] \\ &= U_0 \left[\frac{\Delta R_T + R}{\Delta R_T + 2R} - \frac{1/2 \Delta R_T + R}{\Delta R_T + 2R} \right] = U_0 \frac{\Delta R_T}{4R} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\Delta R_T}{2R}} \end{aligned}$$

➔ Beide Kennlinien $\Delta R_T = f_1(T)$ und $U = f_2(\Delta R_T)$ sind **nichtlinear**. Die Gesamtanordnung soll jedoch lineares Verhalten haben.

3.2.2 Reihenschaltung zweier nichtlinearer Glieder

- Empfindlichkeit S_1 aus Widerstandskennlinie:

$$\Delta R_T = a(T - T_0) + b(T - T_0)^2$$

$$S_1(T = T_0) = \left. \frac{d(\Delta R_T)}{dT} \right|_{T=T_0} = a$$

$$S_1'(T = T_0) = \left. \frac{d^2(\Delta R_T)}{dT^2} \right|_{T=T_0} = 2b$$

- Empfindlichkeit S_2 aus Kennlinie der Brückenschaltung:

$$S_2(\Delta R_T = 0) = \left. \frac{dU}{d\Delta R_T} \right|_{\Delta R_T=0} = \frac{U_0}{4R}$$

$$S_2'(\Delta R_T = 0) = \left. \frac{d^2U}{d\Delta R_T^2} \right|_{\Delta R_T=0} = -\frac{U_0}{4R^2}$$

- Mit der Bedingung (3.48) für eine konstante Steigung erhält man:

$$S_1' S_2 + S_1^2 S_2' = 0 \quad \rightarrow \quad 2b \frac{U_0}{4R} - a^2 \frac{U_0}{4R^2} = 0 \quad \rightarrow \quad R = \frac{a^2}{2b}$$

Justierwiderstand: $R_i = R - R_{T_0} = \frac{a^2}{2b} - R_{T_0}, \quad b > 0$

3.2.2 Reihenschaltung zweier nichtlinearer Glieder

Beispiel: Nickel-Thermometer

- Bei einem Ni-Thermometer mit $R_{T_0} = 100 \Omega$ bei $T_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ und einem Messbereich von $100 \text{ }^\circ\text{C}$ sind die beiden Koeffizienten:

$$a = 0,574 \Omega/^\circ\text{C} \quad b = 0,0007 \Omega/(\text{ }^\circ\text{C})^2$$

$$\rightarrow R_i = a^2/2b - R_{T_0} = 135,34 \Omega$$

- Für die resultierenden Kennlinien des Ni-Widerstandsthermometers ohne und mit Linearisierung erhält man die Näherungen:

- ohne Linearisierung ($R_i = 0$):

$$R = R_{T_0} = 100 \Omega \quad \rightarrow \quad \frac{U}{U_0} = 1,87 \cdot 10^{-3} \frac{T}{^\circ\text{C}} \left(1 - 1,7 \cdot 10^{-2} \frac{T}{^\circ\text{C}} \right)$$

- mit Linearisierung (R_i s.o.):

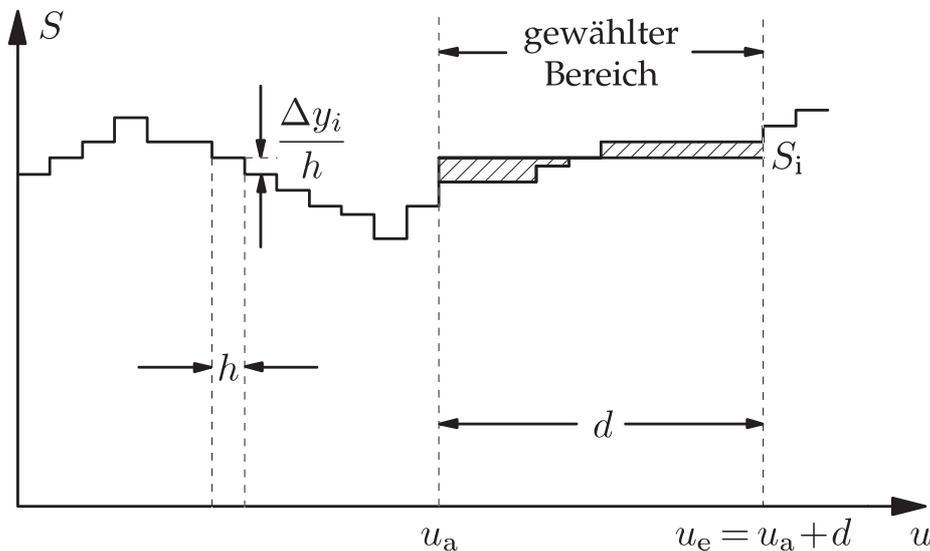
$$R = \frac{a^2}{2b} = 235,34 \Omega \quad \rightarrow \quad \frac{U}{U_0} = 0,61 \cdot 10^{-3} \frac{T}{^\circ\text{C}} \left(1 - 2,0 \cdot 10^{-4} \frac{T}{^\circ\text{C}} \right)$$

- Reduzierung der Nichtlinearitäten (F_r) um zwei Größenordnungen. Dafür wurde die Empfindlichkeit S_i auf ein Drittel verringert.

3.2.3 Wahl des günstigsten Messbereichs

Bei Kennlinien mit einem großen Bereich der Eingangsgröße wird für den Messbereich ein möglichst **linearer Teil** (konstante Empfindlichkeit) mit hoher **Empfindlichkeit** S ausgewählt.

Grafische Ermittlung des günstigsten Messbereichs:



3.2.3 Wahl des günstigsten Messbereichs

- **Analytische Berechnung** des günstigsten Messbereichs:

Gütemaß:

$$Q = \int_{u_a}^{u_a+d} (S(u) - S_i)^2 du$$

- Gesucht wird dabei der **Messanfang** u_a , der mit Rücksicht auf die Nebenbedingung

$$S_i = \frac{1}{d} \int_{u_a}^{u_a+d} S(u) du$$

das Gütemaß Q **minimiert**. Ausmultiplizieren des Binoms ergibt:

$$Q = \int_{u_a}^{u_a+d} S^2(u) du - 2S_i \underbrace{\int_{u_a}^{u_a+d} S(u) du}_{S_i d} + S_i^2 d$$

→
$$Q = \int_{u_a}^{u_a+d} S^2(u) du - S_i^2 d$$

Gütemaß:

$$Q = \int_{u_a}^{u_a+d} S^2(u) du - S_i^2 d$$

$$S_i = \frac{1}{d} \int_{u_a}^{u_a+d} S(u) du$$

■ Notwendig für Minimum:

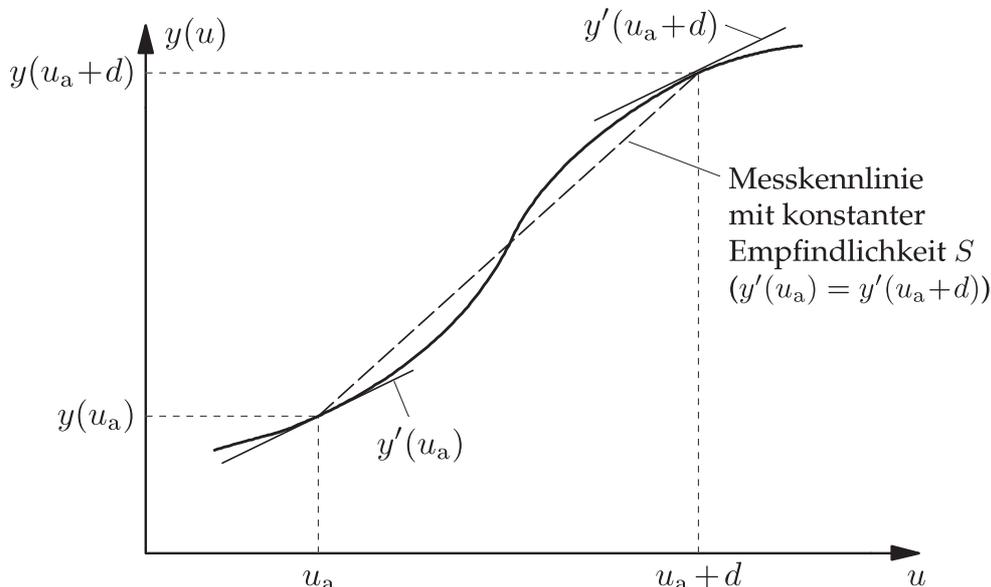
$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial u_a} &= S^2(u_a + d) - S^2(u_a) - 2S_i (S(u_a + d) - S(u_a)) \\ &= \underbrace{(S(u_a + d) - S(u_a))}_I \cdot \underbrace{((S(u_a + d) + S(u_a)) - 2S_i)}_{II} = 0 \end{aligned}$$

➔ Zwei Bedingungen, von denen eine erfüllt sein muss

Bedingung I: Arbeitsbereich um einen Wendepunkt

$$S(u_a + d) - S(u_a) = y'(u_a + d) - y'(u_a) \stackrel{!}{=} 0$$

■ Der Arbeitsbereich ist möglichst um einen Wendepunkt der Kennlinie herum zu legen. Dort findet man meistens 2 Punkte, die (I) erfüllen.

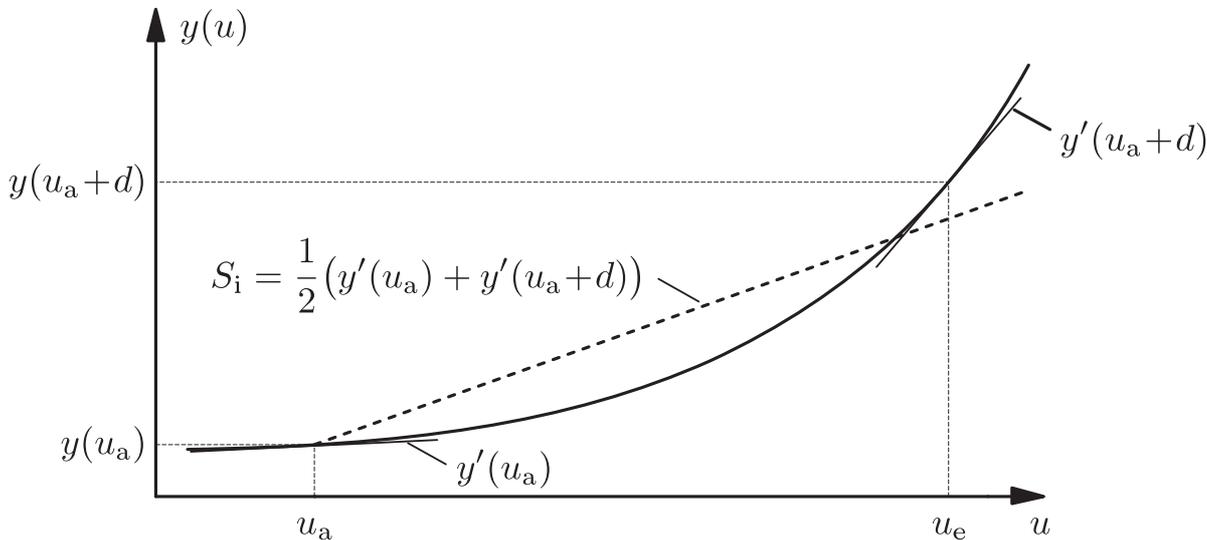


3.2.3 Wahl des günstigsten Messbereichs

Bedingung II: Arbeitsbereich ohne Wendepunkt

$$\frac{1}{2} (S(u_a + d) + S(u_a)) - S_i = \frac{1}{2} (y'(u_a + d) + y'(u_a)) - S_i = 0$$

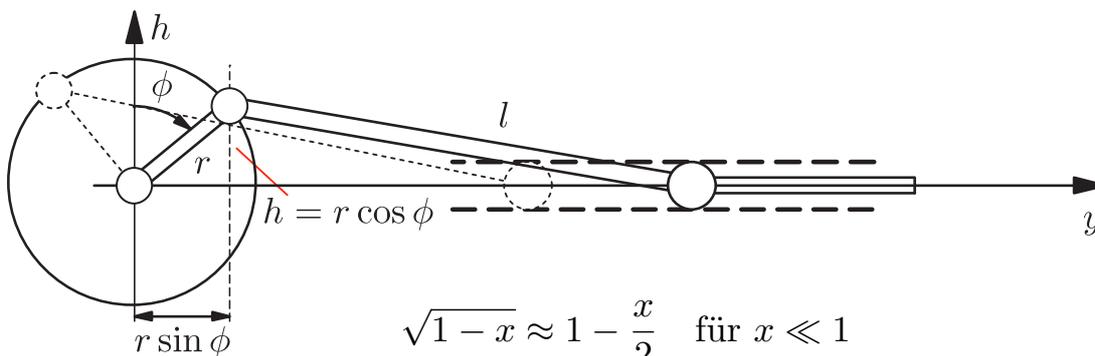
- Der Arbeitsbereich wird so gewählt, dass der arithmetische Mittelwert der Steigungen in u_a und $u_a + d$ gerade der mittleren Steigung S_i entspricht.



3.2.3 Wahl des günstigsten Messbereichs

Beispiel 3.4: Kurbeltrieb

- Umformung des Drehwinkels ϕ mit dem Hub $\pi/2$ in **lineare** Bewegung y



$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2} \quad \text{für } x \ll 1$$

Ausschlag: $y = r \sin \phi + \sqrt{l^2 - r^2 \cos^2 \phi} \rightarrow \frac{y}{l} = \frac{r}{l} \sin \phi + 1 - \frac{r^2}{2l^2} \cos^2 \phi$

Empfindlichkeit: $S = \frac{d(y/l)}{d\phi} = \frac{r}{l} \cos \phi + \frac{r^2}{l^2} \sin \phi \cos \phi$

$$u_a = \phi_a, \quad d = \frac{\pi}{2}, \quad \sin\left(\phi_a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \phi_a, \quad \cos\left(\phi_a + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \phi_a$$

3.2.3 Wahl des günstigsten Messbereichs

Bedingung I: Arbeitsbereich um einen Wendepunkt

$$S(u_a + d) = S(u_a)$$

- Einsetzen ergibt:

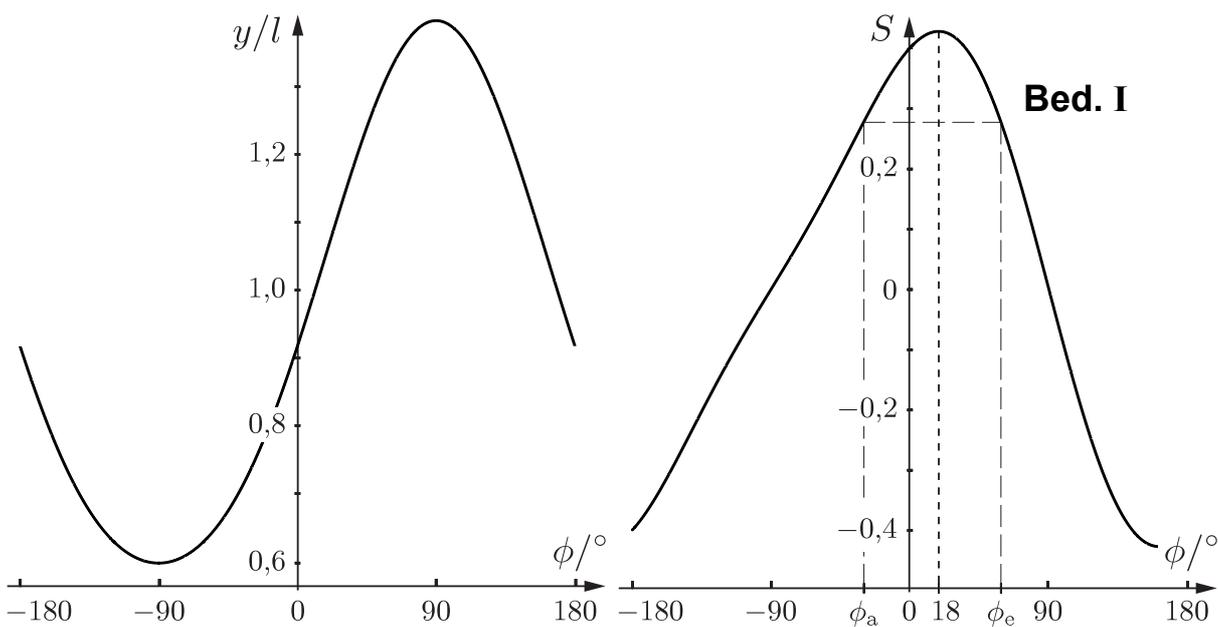
$$-\frac{r}{l} \sin \phi_a - \frac{r^2}{l^2} \sin \phi_a \cos \phi_a = \frac{r}{l} \cos \phi_a + \frac{r^2}{l^2} \cos \phi_a \sin \phi_a$$
$$\frac{2r}{l} = - \left(\frac{1}{\cos \phi_a} + \frac{1}{\sin \phi_a} \right)$$

- Gleichung lässt sich analytisch **nicht** lösen
- Für ein Hebelverhältnis von $r/l = 0,4$ ergibt sich nach numerischer Lösung für den Messbereich:

$$\phi_a \approx -30,7^\circ \quad \phi_e = 59,3^\circ$$

- Alternativ lässt sich die Lösung grafisch ermitteln

3.2.3 Wahl des günstigsten Messbereichs



Kennlinie und Empfindlichkeit beim Kurbeltrieb

3.2.3 Wahl des günstigsten Messbereichs

Bedingung II: Arbeitsbereich ohne Wendepunkt

$$\frac{1}{2} (S(u_a + d) + S(u_a)) = S_i$$

- Einsetzen ergibt:

$$\frac{r}{2l} (\cos \phi_a - \sin \phi_a) = S_i$$

- Die ideale Empfindlichkeit S_i resultiert aus der Forderung nach Fixpunktjustierung zu:

$$S_i = \frac{y(\phi_a + d) - y(\phi_a)}{d}$$

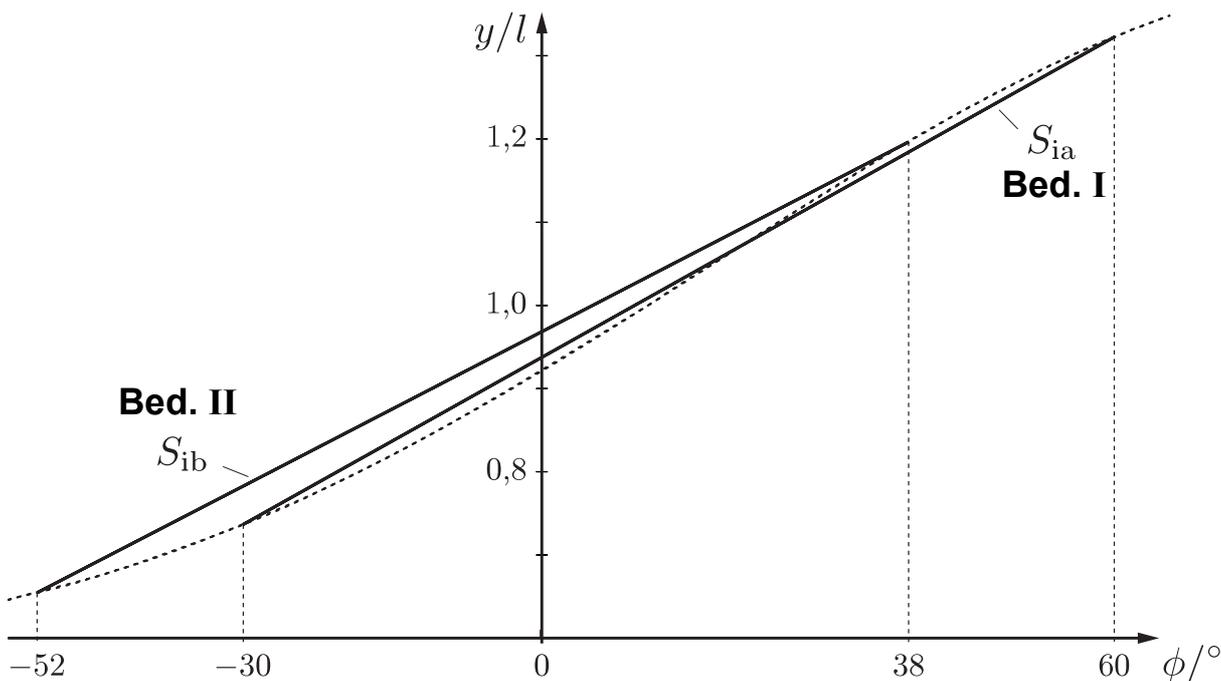
- Nach einer Zwischenrechnung [PK12] erhält man zwei Bedingungen:

① $(\cos \phi_a - \sin \phi_a) = 0$ **oder** ② $\cos \phi_a + \sin \phi_a = \left(\frac{\pi}{4} - 1\right) \frac{2l}{r}$

① → Messbereich: $\phi_a \approx -52^\circ$ $\phi_e = 38^\circ$

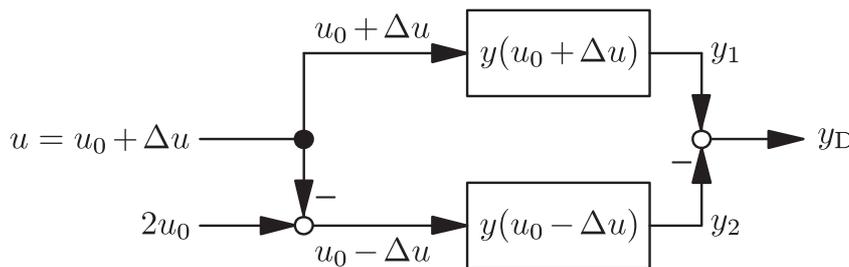
(für die Bedingung ② wird Q maximal → keine Lösung)

3.2.3 Wahl des günstigsten Messbereichs



Ausschnittsvergrößerung der realen Kennlinie mit den beiden möglichen idealen Kennlinien

Durch eine Parallelschaltung zweier **gleichartiger** Messsysteme mit gegenseitig wirkenden Abweichungen Δu wird die Messkennlinie linearisiert



- Jede Funktion um u_0 als Summe v. gerader und ungerader Funktion f_g bzw. f_u darstellbar:

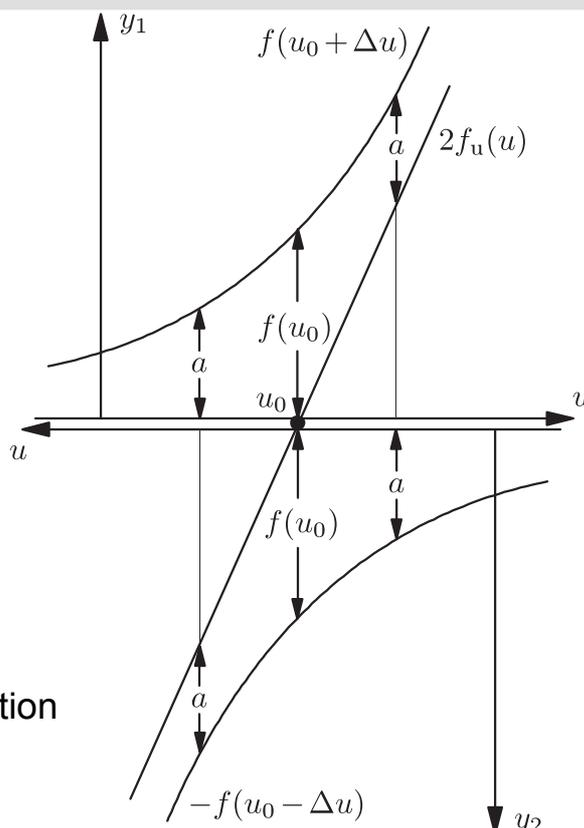
$$f(\Delta u) = f_g(\Delta u) + f_u(\Delta u)$$

Gerade Funktion: $f(\Delta u) + f(-\Delta u) = 2f_g(\Delta u)$

→ enthält ausschließl. systematische Fehler

Ungerade Funktion: $f(\Delta u) - f(-\Delta u) = 2f_u(\Delta u)$

→ Differenzkennlinie: $y_D = f(\Delta u) - f(-\Delta u) = 2f_u(\Delta u)$ ungerade



Grafische Konstruktion der Kennlinie in Differenzschaltung

3.2.4 Differenzmethode

- Zur Untersuchung der Differenzmethode werden y_1 und y_2 in Taylor-Reihen um u_0 entwickelt:

$$y_1 = y(u_0) + S(u_0) \Delta u \left(1 + \frac{S'(u_0)}{S(u_0)} \cdot \frac{\Delta u}{2!} + \frac{S''(u_0)}{S(u_0)} \cdot \frac{\Delta u^2}{3!} + \dots \right)$$

$$y_2 = y(u_0) - S(u_0) \Delta u \left(1 + \frac{S'(u_0)}{S(u_0)} \frac{-\Delta u}{2!} + \frac{S''(u_0)}{S(u_0)} \frac{(-\Delta u)^2}{3!} + \dots \right)$$

- Durch Differenzbildung

$$y_D = 2S(u_0) \Delta u \left(1 + \frac{S''(u_0)}{S(u_0)} \frac{\Delta u^2}{3!} + \dots + \frac{S^{(2v)}(u_0)}{S(u_0)} \frac{\Delta u^{2v}}{(2v+1)!} + \dots \right)$$

wird die Krümmung der Messkennlinie unterdrückt: $\frac{1}{2} S'(u_0) (\Delta u)^2$

Da dieser **quadratische** Term (genauer: alle geraden Terme) bei der Differenzbildung eliminiert wird, wird die Kennlinie **linearisiert**

3.2.4 Differenzmethode

- Der relative Fehler der **ursprünglichen Kennlinie** ist (Abschn. 3.1.4):

$$F_r = \frac{y - y_i}{y_i} \approx \frac{S(u_0, \mathbf{z}_0) + \frac{1}{2} S'(u_0, \mathbf{z}_0) \cdot \Delta u - S_i}{S_i}$$

- Die ideale Differenzkennlinie hat die doppelte Empfindlichkeit:

$$y_{Di} = 2S_i \cdot \Delta u$$

→ Relativer Fehler der **Differenzkennlinie**:

$$F_{rD} = \frac{y_D - y_{Di}}{y_{Di}} \approx \frac{2S(u_0, \mathbf{z}_0) + \frac{1}{3} S''(u_0, \mathbf{z}_0) \cdot \Delta u^2 - 2S_i}{2S_i}$$

- Die Empfindlichkeit der ursprünglichen Kennlinie im Arbeitspunkt u_0 ist gerade gleich der halben Empfindlichkeit der linearisierten Differenzkennlinie:

$$S(u_0, \mathbf{z}_0) = \frac{1}{2} (2S_i) = S_i$$

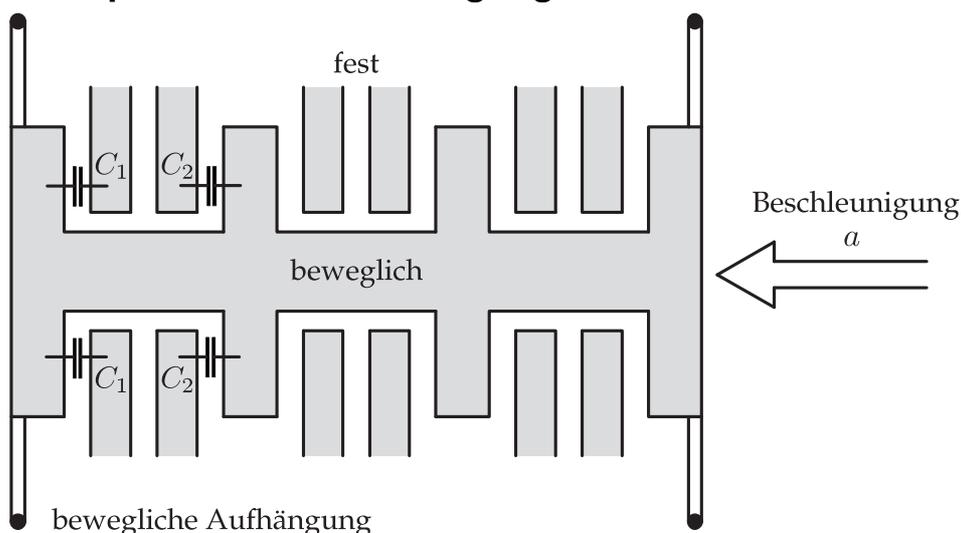
- Damit wird der **relative Fehler der Differenzkennlinie** zu:

$$F_{rD} \approx \frac{1}{6} \frac{S''(u_0, z_0)}{S_i} \Delta u^2$$

Diskussion

- Nach der vorliegenden Näherung ist der **relative Fehler proportional zur 2. Ableitung der Empfindlichkeit** („Krümmungsänderung“) der ursprünglichen Kennlinie im Arbeitspunkt und wächst quadratisch nach beiden Seiten an.
- Diese Näherung (Abbruch der Taylor-Reihe nach dem 3. Glied) ist bei den meisten physikalischen Messkennlinien ausreichend.
- Im Arbeitspunkt ist der Kennlinienfehler null. Diese Aussage gilt exakt!

Beispiel 3.5: Kapazitiver Beschleunigungssensor



- Feder-Masse-Dämpfer-System: $m \cdot \Delta \ddot{d} + \delta \cdot \Delta \dot{d} + c \cdot \Delta d = m \cdot a = F_m$

➔ Stationärer Zustand:
($\Delta d = \text{const.}$)

$$\Delta d = \frac{m}{c} a = \frac{1}{\omega_0^2} a$$

ω_0 : Eigenfrequenz

3.2.4 Differenzmethode

- Kapazitäten am Sensor:

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{\epsilon A} (d + \Delta d) = \frac{1}{C_0} \left(1 + \frac{\Delta d}{d} \right)$$

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{\epsilon A} (d - \Delta d) = \frac{1}{C_0} \left(1 - \frac{\Delta d}{d} \right)$$

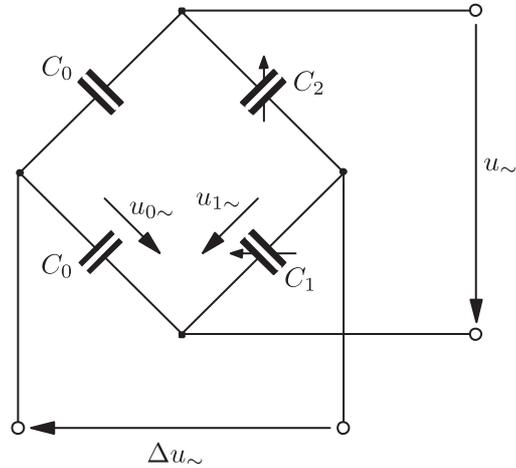
mit $C_0 = \frac{\epsilon A}{d}$

- Die Erfassung der Kapazitätsänderung erfolgt über eine **Wechselstrombrücke**:

$$\Delta u_{\sim} = u_{1\sim} - u_{0\sim}$$

$$\Delta u_{\sim} = \frac{C_1^{-1}}{C_1^{-1} + C_2^{-1}} u_{\sim} - \frac{1}{2} u_{\sim}$$

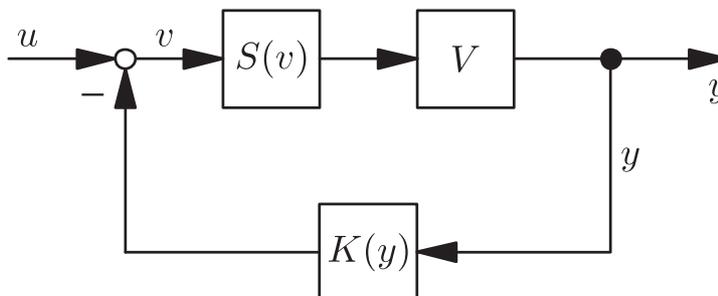
$$= \frac{1}{2} u_{\sim} \frac{\Delta d}{d}$$



- ➔ Zusammenhang zwischen Δu_{\sim} und Δd ist **linear**

3.2.5 Gegenkopplung

- **Prinzip:** Messgröße u wird mit einer Größe $K(y)$ verglichen, die vom Ausgangssignal y abgeleitet wird, bis die Differenz v gleich 0 ist (Kompensation)
- Kennzeichen der Gegenkopplung ist der geschlossene Kreis
- Gegenkopplung geeignet, um eine ideale Kennlinie zu erhalten
- Voraussetzung: Existenz von Messglied, um u - y -Vergleich zu ermöglichen



- Die Empfindlichkeit der Kennlinie $f(v)$ beträgt:

$$S(v) = \frac{\partial f(v)}{\partial v}$$

3.2.5 Gegenkopplung

- Wegen des **kleinen Messbereiches** $v_e - v_a$ (kleine Regelabweichung im stationären Zustand) wird die Empfindlichkeit als konstant angenommen:

$$S(v_e) = S(v_a) = S_i > 0$$

- Aus dem Strukturbild folgt:

$$\left. \begin{array}{l} y = S_i V \cdot v \\ v = u - K(y) \end{array} \right\} \begin{array}{l} v = \frac{1}{S_i V} y = u - K(y) \\ \rightarrow K(y) = u - \frac{1}{S_i V} y \end{array} \quad (3.124)$$

- Für **große Verstärkungen** $V \gg 1$ ergibt sich:

$$K(y) \approx u$$

d. h. für monoton steigende Kennlinien $K(y)$ entspricht die Kennlinie der gesamten Anordnung der **inversen Rückkopplungsfunktion**:

$$y = K^{-1}(u)$$

3.2.5 Gegenkopplung

- Falls die Auftrennung von $K(y)$ möglich ist, ergibt sich aus (3.124):

$$K(y) = K' \cdot y = u - \frac{1}{S_i V} y$$

und durch Auflösen nach y :

$$y = \frac{u}{K'} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{K' S_i V}}$$

- Mit der folgenden Näherung erhält man daraus:

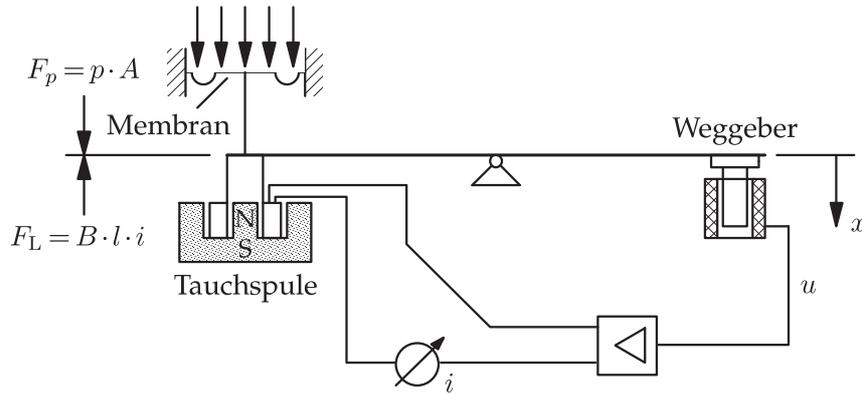
$$\frac{1}{1+x} \approx 1-x, \quad x \ll 1 \quad \rightarrow \quad y \approx \frac{u}{K'} \cdot \left(1 - \frac{1}{K' S_i V}\right)$$

- Mit der idealen Kennlinie (KL): $y_i = \frac{1}{K'} \cdot u$

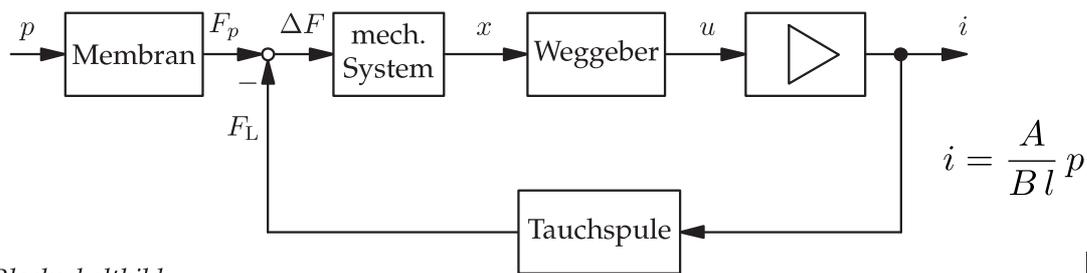
wird der relative KL-Fehler der gesamten Gegenkopplungsanordnung zu:

$$F_{rG} \approx \frac{y - y_i}{y_i} = -\frac{1}{K' S_i V}$$

Beispiel 3.6: Druck-Messumformer



Physikalisches Ersatzbild des Messumformers



Blockschaltbild

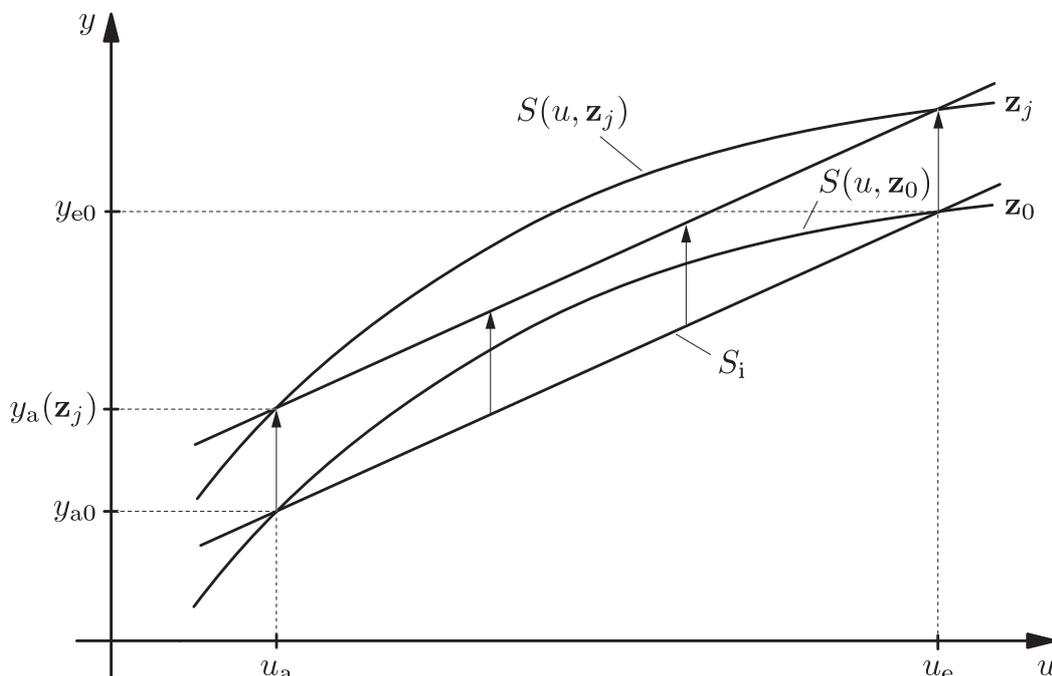
3.3 Kennlinienfehler bei Abweichungen von den Normalbedingungen

- 3.3.1 Superponierende Störgrößen
- 3.3.2 Unterdrückung superponierender Störgrößen: Differenzmethode
- 3.3.3 Deformierende Störgrößen
- 3.3.4 Deformierende Störgrößen bei Gegenkopplung
- 3.3.8 Superponierende Störgrößen in Messketten
- 3.3.9 Zerhackerverstärker

- Im vorherigen Abschnitt wurden die stationären Eigenschaften der Messkennlinie bei den spezifizierten Normalbedingungen behandelt.
- Weichen die Betriebsbedingungen von den Normalbedingungen ab, so ändert sich der Störgrößenvektor von \mathbf{z}_0 auf \mathbf{z} , was eine Änderung des Kennlinienabgleichs mit sich bringt.
- Beispiele für sich ändernde **Störgrößen** sind:
 - Temperatur, Temperaturgradient,
 - Feuchte,
 - mechanische Erschütterungen, Stöße,
 - Aussteuerung des Messsystems über den Messbereich hinaus,
 - Änderung von Hilfsenergien.
- Nach ihrer Wirkung auf die Messkennlinie lassen sich **superponierende** (additive) und **deformierende** (multiplikative) **Störgrößen** unterscheiden.
- Im Folgenden werden Maßnahmen zu deren Unterdrückung behandelt.

3.3.1 Superponierende Störgrößen

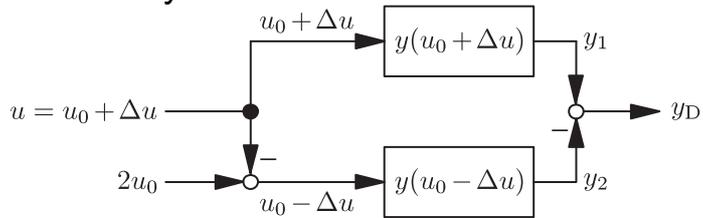
Superponierende Fehler sind über den gesamten Messbereich konstant
→ **Empfindlichkeit** der Kennlinie bleibt **unverändert**



- Linearisierte Kennlinien der Einzelmesssysteme:

$$y_1 \approx y(u_0) + S(u_0) \Delta u + z_1$$

$$y_2 \approx y(u_0) - S(u_0) \Delta u + z_2$$



mit z_1 und z_2 : superp. Störgrößen

- Daraus erhält man die Differenzkennlinie:

$$y_D = y_1 - y_2 \approx 2S(u_0) \Delta u + z_1 - z_2 = 2S(u_0) \Delta u \left(1 + \frac{z_1 - z_2}{2S(u_0) \Delta u} \right)$$

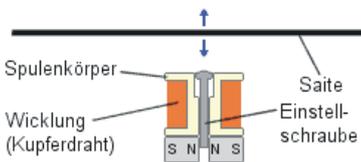
- Der superponierende KL-Fehler der Anordnung ist:

$$F_{r,\text{sup}} = \frac{z_1 - z_2}{2S(u_0) \Delta u}$$

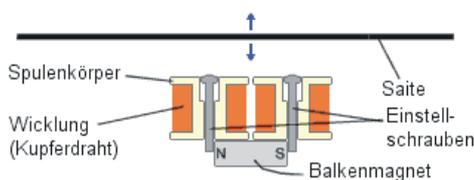
Superponierende Störgrößen, die gleichmäßig auf beide Kennlinien einwirken ($z_1 = z_2$), werden durch die Differenzbildung eliminiert. Gleichzeitig wird die Kennlinie linearisiert (Abschnitt 3.2.4).

Beispiel: Tonabnehmer für E-Gitarren

- Single-coil pickup** (Einzelspulen-Tonabnehmer):
bewegte Saite → Änderung des magnet. Flusses
→ Spannung induziert

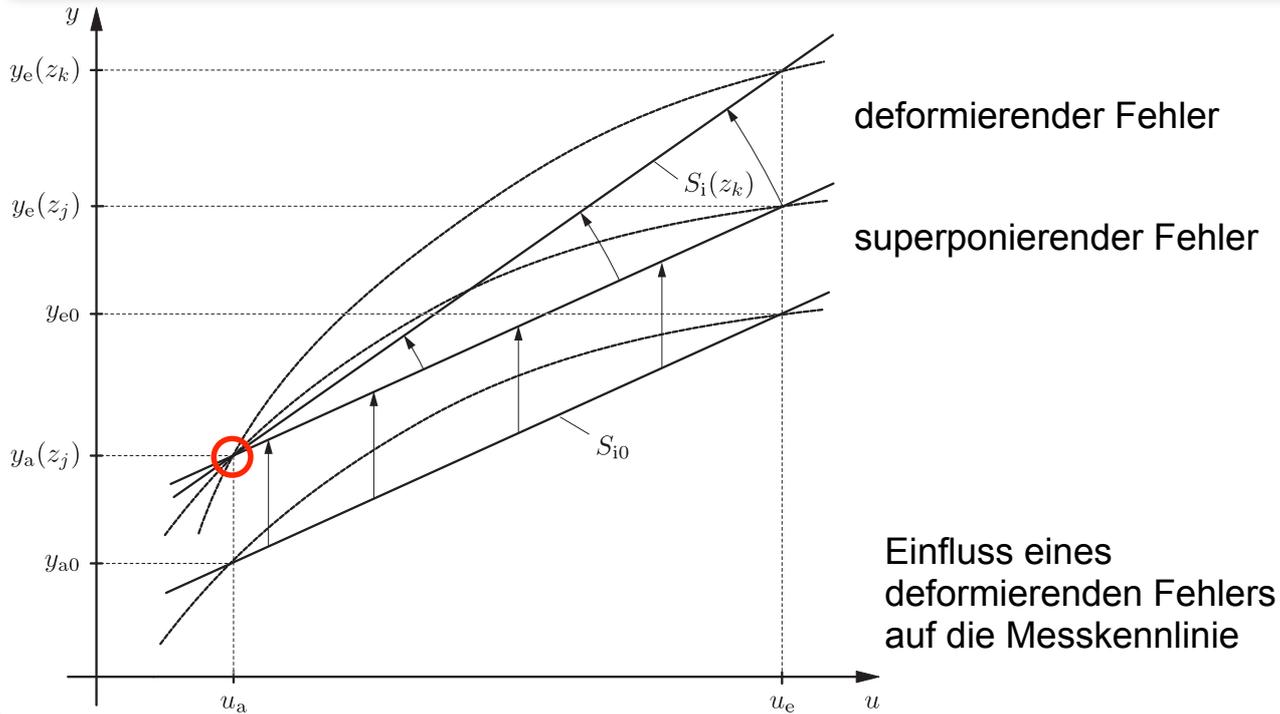


- Humbucker** (*hum*: Brummen, *buck*: entgegenwirken):
- 2 Spulen mit umgekehrter Polung elektr. in Reihe;
- Polung der Magnete in einer Spule umgedreht



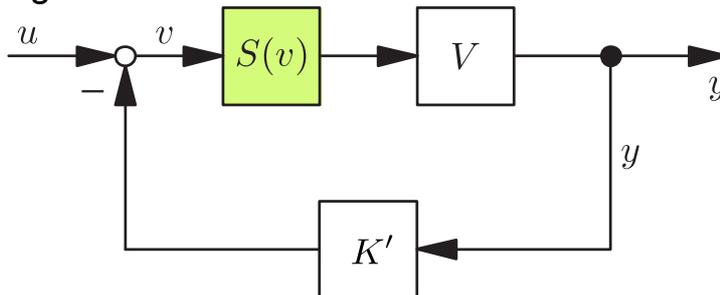
3.3.3 Deformierende Störgrößen

Bei **deformierenden Fehlern** ändert sich die Empfindlichkeit der Messkennlinie in Abhängigkeit vom Störgrößenvektor z . Der Nullpunktfehler ändert sich **nicht**.



3.3.4 Deformierende Störgrößen bei Gegenkopplung

- **Wunsch:** Reduktion des Einflusses deformierender Störgrößen durch Gegenkopplung



- Nach Abschnitt 3.2.5 ist die Kennlinie des gegengekoppelten Systems:

$$y = \frac{1}{K'} \cdot u \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{K' \cdot S_i V}}$$

- Die vorhin als konstant angenommene Empfindlichkeit S_i des **Messgliedes ohne Rückführung** ändere sich im Messbereich aufgrund einer **deformierenden Störgröße** z_k :

$$S_i(z_k) = S_{i0} + \Delta S_i(z_k)$$

- Durch Differentiation der Kennlinie $y(u, S_i)$ nach S_i mittels der Quotientenregel folgt die **Steigung der Kennlinie** bedingt durch Änderungen von S_i :

$$\frac{\partial y}{\partial S_i} = u \cdot \frac{V}{(1 + K' \cdot S_i V)^2}$$

- Zur Abschätzung des Kennlinienfehlers wird die Kennlinie y in eine Taylor-Reihe um S_{i0} entwickelt:

$$y \approx y(S_{i0}) + \left. \frac{\partial y}{\partial S_i} \right|_{S_{i0}} \Delta S_i(z_k) + \dots$$

$$\approx u \cdot \frac{S_{i0} V}{1 + K' \cdot S_{i0} V} \cdot \left(1 + \underbrace{\frac{1}{1 + K' \cdot S_{i0} V} \cdot \frac{\Delta S_i(z_k)}{S_{i0}}}_{\text{Relativer Fehler } F_{rG,def}} \right)$$

- Daraus folgt der relative Fehler des gegengekoppelten Systems

- Relativer Fehler des gegengekoppelten Systems:

$$F_{rG,def} = \frac{y - y(S_{i0})}{y(S_{i0})} = \frac{1}{1 + K' \cdot S_{i0} V} \cdot \frac{\Delta S_i(z_k)}{S_{i0}}$$

- Beim **nicht** gegengekoppelten Messsystem lautet der relative Fehler [PK12]:

$$F_{r,def} = \frac{S_i(z_k) - S_{i0}}{S_{i0}} = \frac{\Delta S_i(z_k)}{S_{i0}}$$

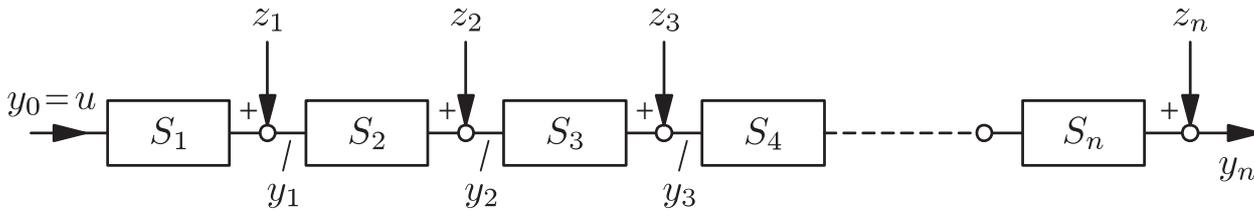
- Damit lautet das Verhältnis der Fehler des gegengekoppelten zum nicht gegengekoppelten Messsystem:

$$\frac{F_{rG,def}}{F_{r,def}} = \frac{1}{1 + K' S_{i0} V}$$

Durch die Gegenkopplung wird der **relative KL-Fehler** aufgrund einer deformierenden Störgröße um die Verstärkung des off. Kreises reduziert.

3.3.8 Superponierende Störgrößen in Messketten

- Messkette betrachtet; an Schnittstellen sind Störungen überlagert:



- Kennlinie vom j -ten Glied: $y_j = S_j y_{j-1} + z_j$

- Kennlinie der gesamten Anordnung:

$$y_n = (S_n S_{n-1} \cdots S_1) u + (S_n S_{n-1} \cdots S_2) z_1 + \cdots + S_n z_{n-1} + z_n$$

- Im **absoluten Fehler** des Ausgangssignals summieren sich die Fehler z_j der einzelnen Glieder multipliziert mit der Verstärkung vom $j+1$ -ten bis zum letzten Glied der Kette:

$$F = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\prod_{k=j}^{n-1} S_{k+1} \right) z_j + z_n$$

3.3.8 Superponierende Störgrößen in Messketten

- Absoluter Fehler des Ausgangssignals:

$$F = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\prod_{k=j}^{n-1} S_{k+1} \right) z_j + z_n$$

- Mit der **idealen Kennlinie**

$$y = u \cdot \prod_{j=1}^n S_j$$

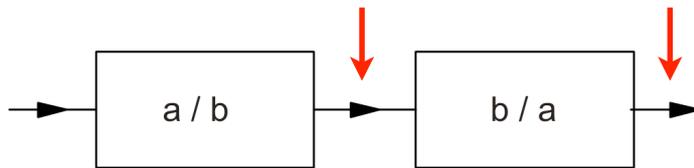
erhält man für den **rel. Fehler** bezogen auf den Anzeigebereich $y(u = d)$:

$$F_{rA} = \frac{F}{y} = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^n \frac{z_j}{\prod_{k=1}^j S_k} = \frac{z_1}{S_1 d} + \frac{z_2}{S_1 S_2 d} + \cdots + \frac{z_n}{S_1 S_2 \cdots S_n \cdot d} = \sum_{j=1}^n F_{rAj}$$

- Der **relative Fehler der Messkette** setzt sich additiv aus den relativen Fehlern der einzelnen Glieder zusammen

Der **superponierende Fehler** wird wirksam herabgesetzt, wenn die 1. Stufe die höchste Verstärkung $S_1 \gg S_j$ aufweist

Beispiel 3.9: Zweistufiger Verstärker



■ Spannungsverstärkung: $S_a = S_b = 30$

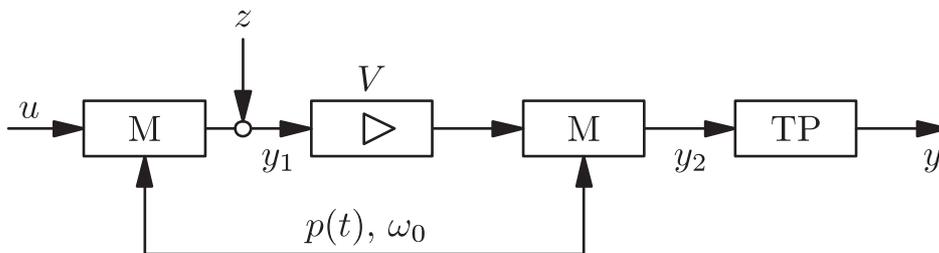
■ Nullpunktdrift: Verstärker a: 0,5 mV
 Verstärker b: 1 mV } Superponierende Störungen z_i

■ Absoluter Fehler F :

Anordnung a–b: $F = (30 \cdot 0,5 + 1) \text{ mV} = 16 \text{ mV}$

Anordnung b–a: $F = (30 \cdot 1 + 0,5) \text{ mV} = 30,5 \text{ mV}$

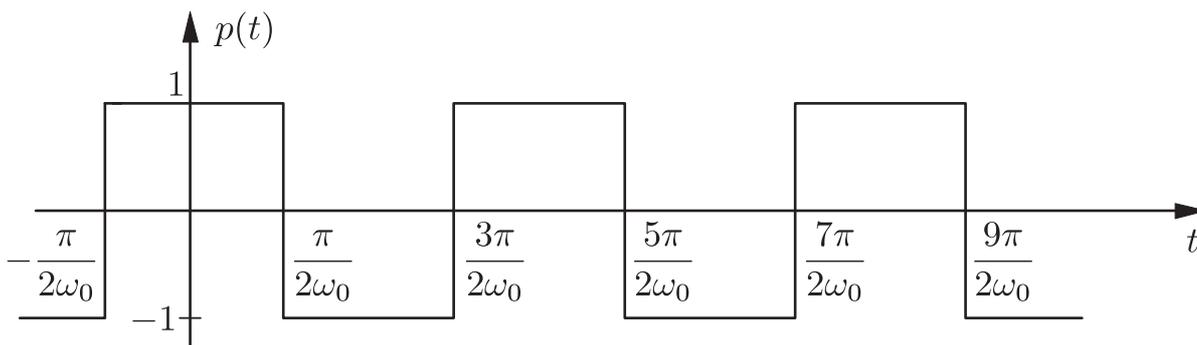
3.3.9 Zerhackerverstärker (Chopper-Verstärker)



■ Modulation der Messgröße $u(t)$ durch Multiplikation mit $p(t)$:

$$y_1(t) = u(t) \cdot p(t) + z(t)$$

■ Umschaltfunktion:



$$y_1(t) = u(t) \cdot p(t) + z(t)$$

- Modulation von $V \cdot y_1(t)$ mit der Umschaltfunktion $p(t)$ ergibt:

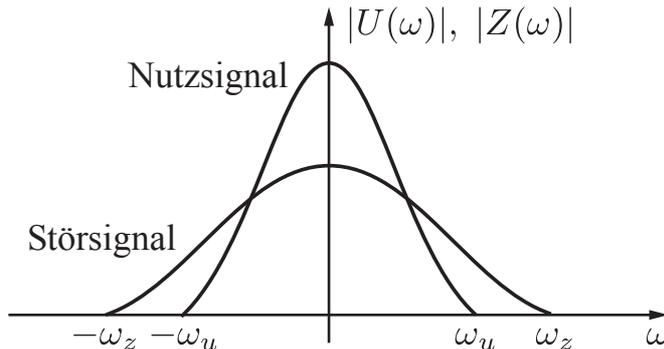
$$\begin{aligned} y_2(t) &= V \cdot y_1(t) \cdot p(t) \\ &= V u(t) \cdot \underbrace{p^2(t)}_{=1} + V \cdot z(t) p(t) = V \cdot u(t) + V \cdot z(t) p(t) \end{aligned}$$

Nutzsignal
unverzerrt

Störung mit
 $p(t)$ moduliert

Näherung: $p(t) \approx \cos \omega_0 t$

- Spektren:



1. Modulation: Multiplikation von $u(t)$ mit $p(t)$ entspricht Faltung im Frequenzbereich. Wegen des harmonischen Charakters von $p(t)$ erscheint das Spektrum $U(\omega)$ an den Frequenzen $\pm \omega_0$ der Modulationsschwingung:

$$Y_1(\omega) = \frac{1}{2} U(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} U(\omega + \omega_0) + Z(\omega)$$

2. Synchrongleichrichtung: Entspricht einer weiteren Modulation mit $p(t)$ synchron zur ersten Modulation. Unter Berücksichtigung der Verstärkung V erhält man:

$$y_2(t) = V u(t) \cos^2 \omega_0 t + V z(t) \cos \omega_0 t$$

- Mit der Beziehung $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$ kann man $y_2(t)$ schreiben als:

$$y_2(t) = \frac{V}{2} u(t) + \frac{V}{2} u(t) \cos(2\omega_0 t) + V z(t) \cos \omega_0 t$$

- Im Frequenzbereich ergibt sich eine weitere Verschiebung der Spektren:

$$Y_2(\omega) = \frac{V}{2} U(\omega) + \frac{V}{4} U(\omega \pm 2\omega_0) + \frac{V}{2} Z(\omega \pm \omega_0)$$

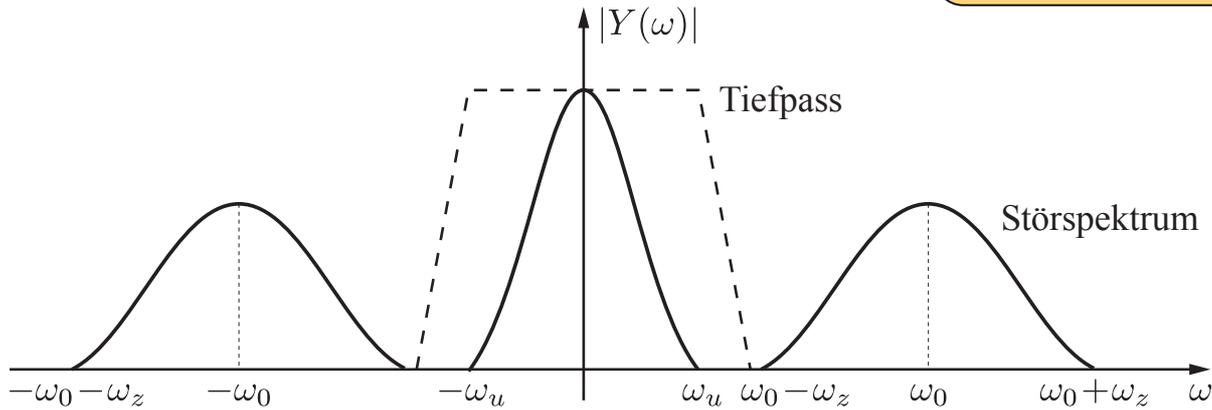
3. Tiefpass:

$$|T(\omega)| = \begin{cases} 1 & \text{für } |\omega| \leq |\omega_u| \\ 0 & \text{für } |\omega| > |\omega_0| - |\omega_z| \end{cases}$$

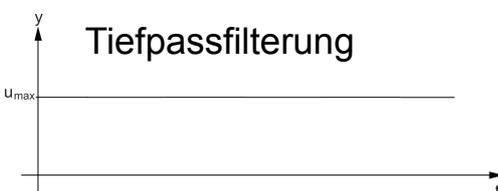
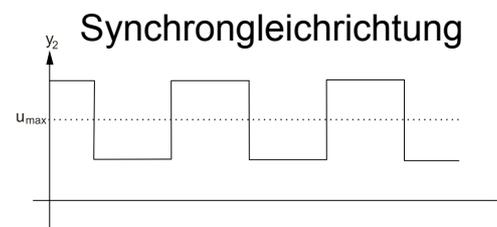
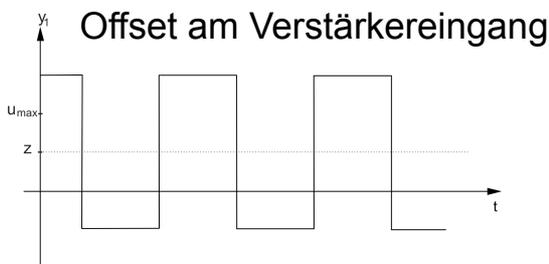
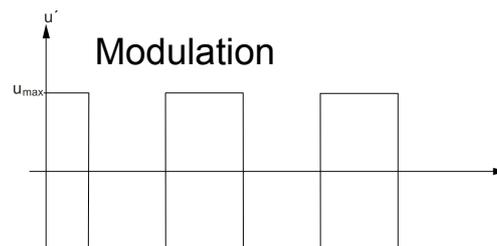
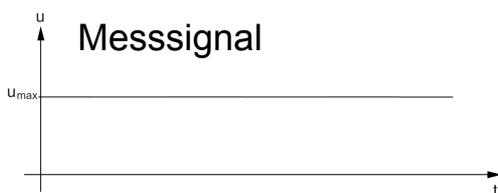
■ Damit werden aus $Y_2(\omega)$ die hochfrequenten Anteile entfernt.

■ Resultierendes Spektrum: $Y(\omega) = Y_2(\omega) \cdot T(\omega) = \frac{V}{2} \cdot U(\omega)$

Um spektrale Überlappungen zu vermeiden, muss gelten: $|\omega_0| > |\omega_u| + |\omega_z|$



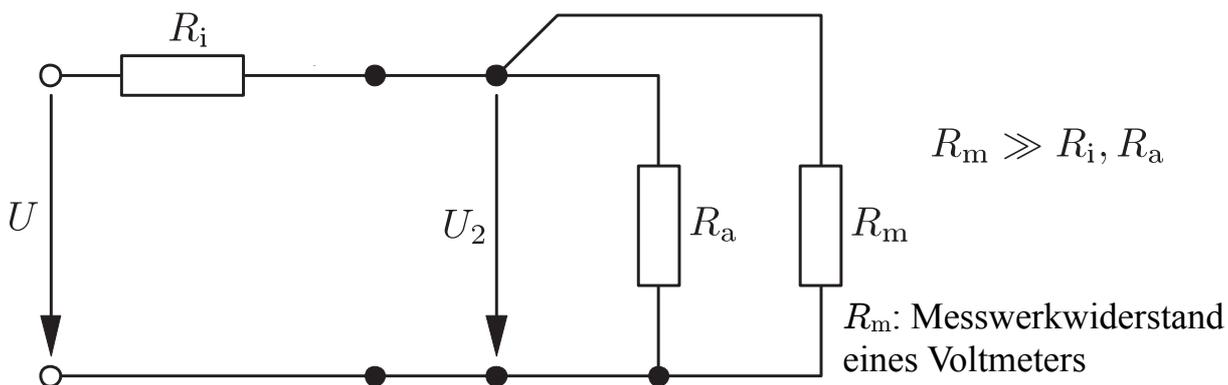
Beispiel: Offsetkompensation



3.4 Rückwirkung des Messsystems

3.4 Rückwirkung des Messsystems

Beispiel 3.10: Spannungsmessung an einem Spannungsteiler



■ Messwunsch:

$$U_{2i} = \frac{R_a}{R_i + R_a} U$$

■ Tatsächliche Messung:

$$U_{2m} = \frac{R_a \parallel R_m}{R_i + R_a \parallel R_m} U = \frac{R_a}{R_i (R_a/R_m + 1) + R_a} U$$

■ Relativer Fehler:

$$F_r = \frac{U_{2m} - U_{2i}}{U_{2i}}$$

- Für den relativen Fehler erhält man:

$$F_r = \frac{U_{2m} - U_{2i}}{U_{2i}} \approx \frac{1}{R_m} \cdot \frac{1}{\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_a}}$$

→ Für $R_m \rightarrow \infty$ geht der Fehler gegen null.

- Um eine Rückwirkung des Messsystems zu verhindern, muss bei der Spannungsmessung die Spannung **hochohmig** abgegriffen werden.
- Ströme sind dagegen **niederohmig** zu messen, um die Stromquelle minimal zu belasten.