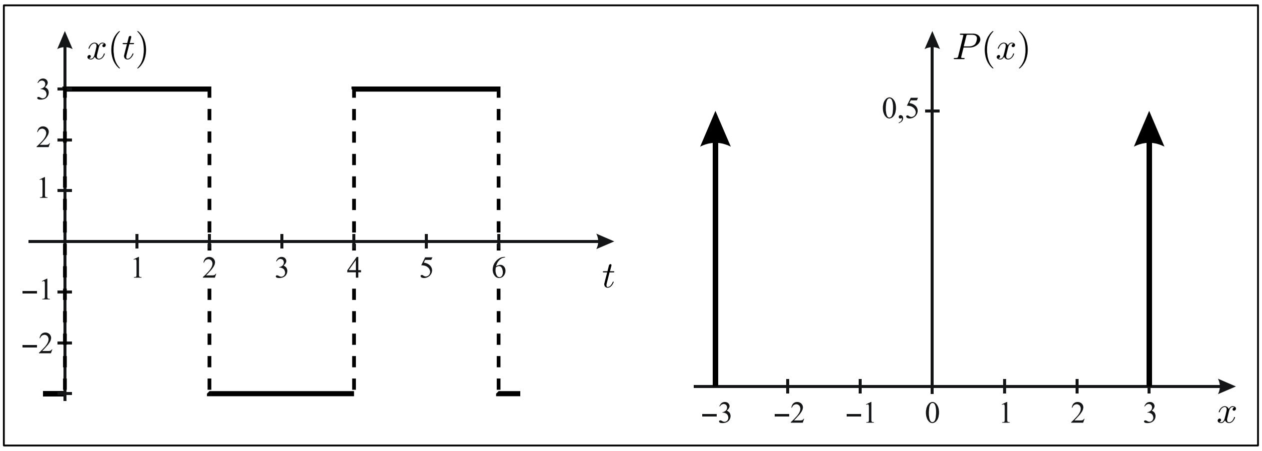
4. Zufällige Messfehler

Institut für Industrielle Informationstechnik

4.1 Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie

Institut für Industrielle Informationstechnik

- Ausgang eines Messsystems ist abhängig vom zeitlichen Verlauf **aller** Eingangssignale
- Eingangs- und Ausgangsgrößen meist **deterministisch** beschrieben (Funktion der Signalamplitude über der Zeit)
- Verlauf von Störgrößen nicht genau bekannt
  → **Statistische Beschreibung** der Signale
  (Beschreibung im „Amplitudenbereich“)



Definition 4.1: Zufallsvariable

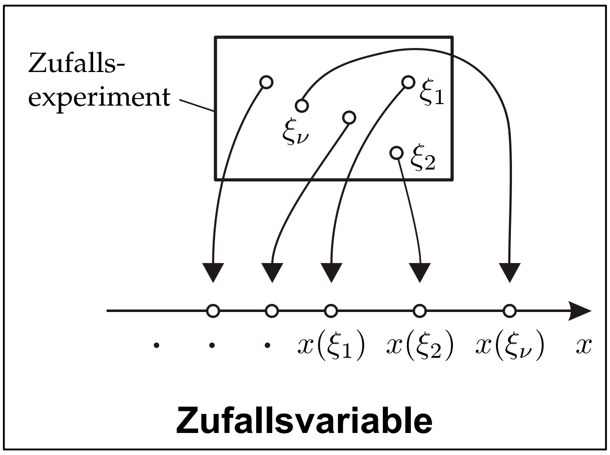
Jede auf der Ergebnismenge eines Zufallsexperimentes definierte reelle Funktion wird als **Zufallsvariable** bezeichnet. Ist x das Symbol einer Zufallsvariablen, so bezeichnet man die reelle Zahl, die dem Elementar-ereignis ξ durch x zugeordnet wird, mit $\mathrm{x}(\xi)$.

Beispiel 4.2: Diskrete Zufallsvariable

- Experiment:
  Zweimaliges Werfen eines Würfels
- Zufallsvariable:
  Summe der Augenzahlen

$$\mathrm{x}(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 + \xi_2$$

➡ x kann die diskreten Werte 2,3,…,12 annehmen ■



Beispiel 4.3: Kontinuierliche Zufallsvariable

- Experiment: Vermessen einer Spannungsquelle mit Nennspannung $U_0 = 5\,\mathrm{V}$
- Messwerte schwanken zufällig im Intervall:

$$4{,}9\,\mathrm{V} \le \mathrm{u} \le 5{,}1\,\mathrm{V}$$

- Zufallsvariable x: Abweichung von der Nennspannung: $\mathrm{x} = \mathrm{u} - U_0$

➡ $-0{,}1\,\mathrm{V} \le \mathrm{x} \le 0{,}1\,\mathrm{V}$

➡ x ist kontinuierlich

■

Definition 4.2: Wahrscheinlichkeitsverteilung

Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** (kurz: Verteilung)

$$F_{\mathrm{x}}(x) = P(\mathrm{x} \le x)$$

einer Zufallsvariablen x gibt die Wahrscheinlichkeit P an, mit welcher der Funktionswert von x kleiner oder höchstens gleich x ist.

- Anstelle der Verteilung wird meist die **Wahrscheinlichkeitsdichte** $f_{\mathrm{x}}(x)$ (auch Verteilungsdichte) verwendet, die dieselbe Information enthält:

Definition 4.3: Wahrscheinlichkeitsdichte

Die **Wahrscheinlichkeitsdichte** einer Zufallsvariablen x ist

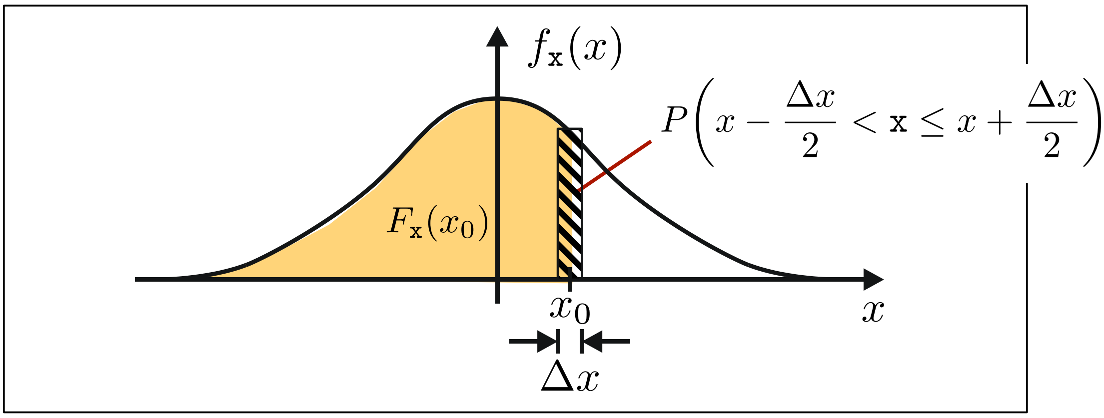
$$f_{\mathrm{x}}(x) = \frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{x}}(x)}{\mathrm{d}x}$$

4.1.1 Wahrscheinlichkeitsdichte

Interpretation

- Die **Wahrscheinlichkeitsdichte** $f_{\mathrm{x}}(x)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit pro Umgebungsbreite, dass x in einer schmalen Umgebung der Breite Δx um x liegt:

$$\boxed{f_{\mathrm{x}}(x) \approx \frac{P(x - \frac{\Delta x}{2} < \mathrm{x} \leq x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}}$$

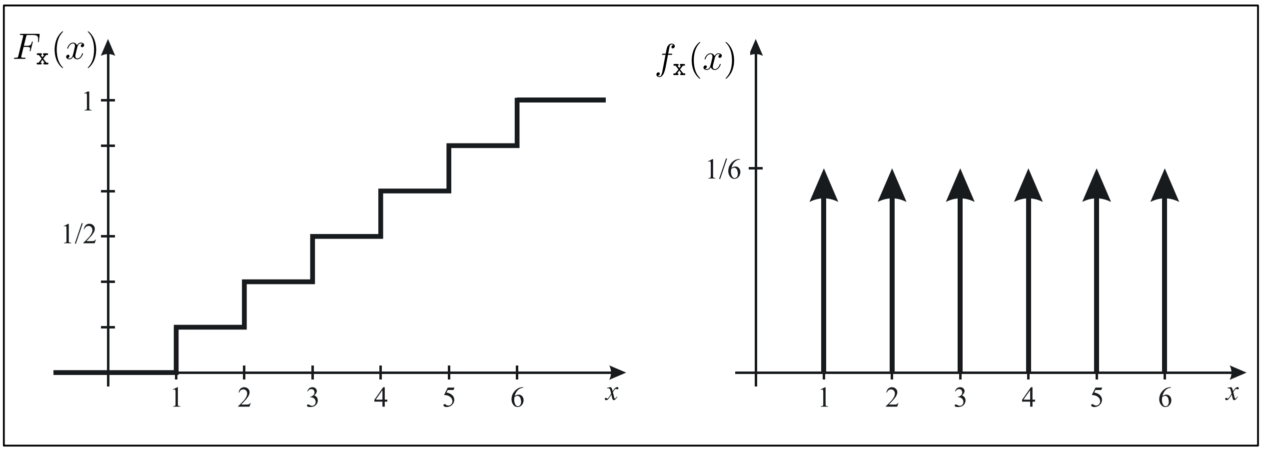


- Wenn Elementarereignisse mit **diskreter** Wahrscheinlichkeit auftreten, enthält die Verteilungsdichte **Dirac-Impulse**

4.1.1 Wahrscheinlichkeitsdichte

- Eigenschaften:
  - $F_{\mathrm{x}}(x)$ monoton steigend: $F_{\mathrm{x}}(-\infty) = 0$ $F_{\mathrm{x}}(+\infty) = 1$
  - $f_{\mathrm{x}}(x) \geq 0$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathrm{x}}(x)\,\mathrm{d}x = 1$

Beispiel: Fairer Würfel



Definition 4.4: Verbundwahrscheinlichkeitsverteilung

Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$F_{\mathrm{xy}}(x,y) = P(\mathrm{x} \le x \ \cap \ \mathrm{y} \le y)$$

zweier Zufallsvariabler x, y gibt die Wahrscheinlichkeit P an, mit welcher der Funktionswert von x kleiner oder höchstens gleich x ist und der Funktionswert von y kleiner oder höchstens gleich y ist.

- Meist wird anstelle der Verbundverteilung die **Verbundverteilungsdichte** verwendet, die dieselbe Information enthält:

Definition 4.5: Verbundwahrscheinlichkeitsdichte

Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte zweier Zufallsvariabler x, y ist:

$$f_{\mathrm{xy}}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{\mathrm{xy}}(x,y)}{\partial x \, \partial y}$$

Beispiel: Zweifacher Würfelwurf (diskrete Verbundverteilungsdichte)

- $\mathrm{x} = \mathrm{x}_1$ und $\mathrm{y} = \max(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)$ mit x_i : Augenzahl des i-ten Würfels

y — $P(\mathrm{x} = x \ \cap \ \mathrm{y} = y)$

x		1	2	3	4	5	6	Σ
	1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
	2	0	2/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
	3	0	0	3/36	1/36	1/36	1/36	1/6
	4	0	0	0	4/36	1/36	1/36	1/6
	5	0	0	0	0	5/36	1/36	1/6
	6	0	0	0	0	0	6/36	1/6
	Σ	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36	1

$P(\mathrm{x} = x)$

$P(\mathrm{y} = y)$

Quelle: Henze, Stochastik für Einsteiger (2011)

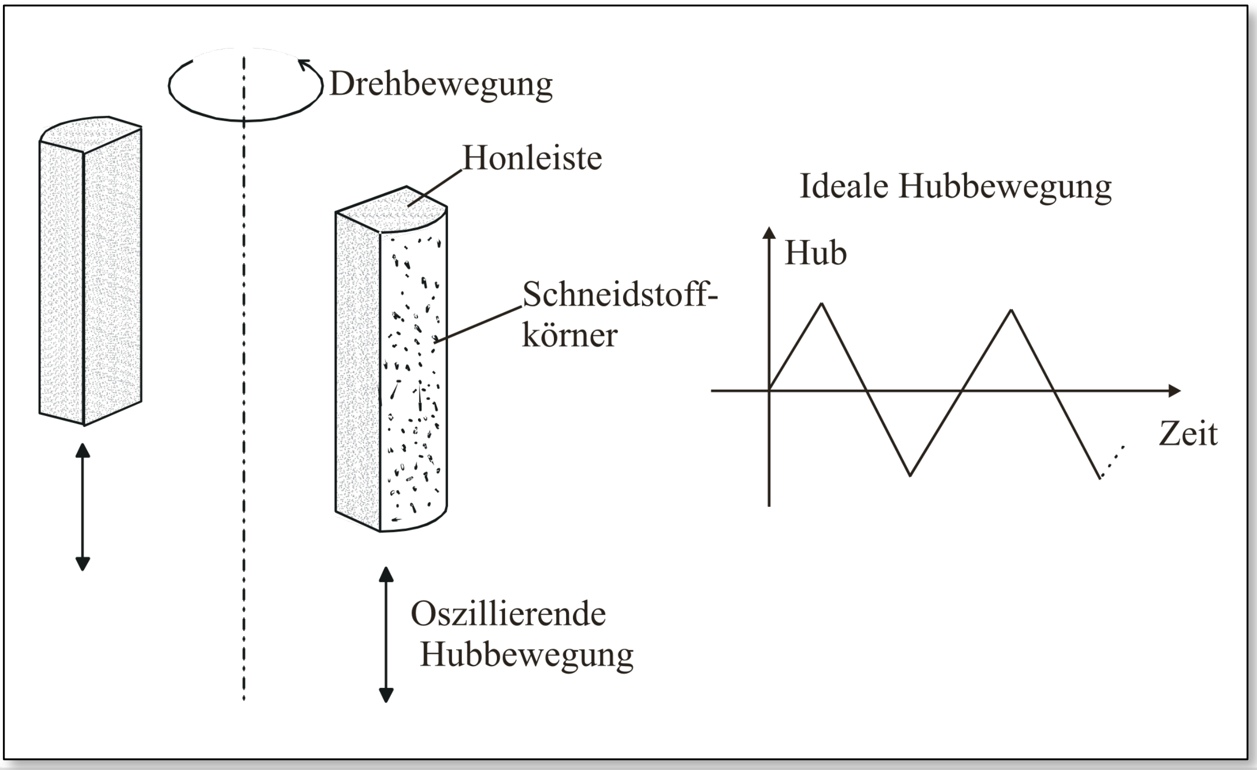
Definition 4.7: Statistische Unabhängigkeit

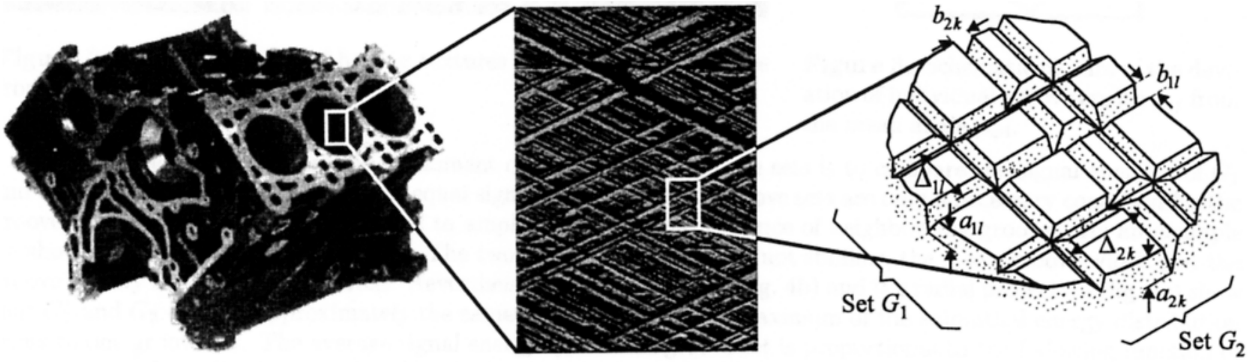
Zwei Zufallsvariable x und y sind **statistisch unabhängig**, wenn gilt:

$$F_{\mathrm{xy}}(x,y) = F_{\mathrm{x}}(x) \cdot F_{\mathrm{y}}(y) \qquad \text{bzw.} \qquad f_{\mathrm{xy}}(x,y) = f_{\mathrm{x}}(x) \cdot f_{\mathrm{y}}(y)$$

- Statistische Unabhängigkeit kann experimentell höchstens näherungsweise nachgewiesen werden
- **Vorteil** der statistischen Unabhängigkeit: vereinfachte Modellanalyse

Beispiel: Probabilistische Modellierung von Hontexturen





$\mathbf{u} := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ a: Amplitude, b: Breite

Δ: Riefenabstand

- Modell für die Verteilung der Größen a, b, Δ für beide Riefenscharen i=1,2:

$$f_i(\mathbf{u},\Delta) = \underbrace{\lambda_i \exp(-\lambda_i \Delta)}_{\text{Exponentialverteilung } f_i(\Delta)} \underbrace{\frac{1}{2\pi\sqrt{\det \mathbf{C}_i}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{u}-\boldsymbol{\mu}_i)^{\mathrm{T}}\, \mathbf{C}_i^{\mathrm{T}}\, (\mathbf{u}-\boldsymbol{\mu}_i)\right)}_{\text{Gaußverteilung } f_i(\mathbf{u})}$$

■

Definition 4.8: Bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte

Die **bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte** $f_{\mathrm{x}|y}(x|y)$ ist die Wahrscheinlichkeitsdichte von x unter der Bedingung, dass $\mathrm{y} = y$ eingetreten ist:

$$f_{\mathrm{x}|y}(x|y) = \frac{f_{\mathrm{xy}}(x,y)}{f_{\mathrm{y}}(y)}$$

- Sind x und y **statistisch unabhängig**, so hängt das Auftreten von $\mathrm{x} = x$ in keiner Weise von der Bedingung $\mathrm{y} = y$ ab:

$$f_{\mathrm{x}|y}(x|y) = \frac{f_{\mathrm{xy}}(x,y)}{f_{\mathrm{y}}(y)} = \frac{f_{\mathrm{x}}(x)\cdot f_{\mathrm{y}}(y)}{f_{\mathrm{y}}(y)} = f_{\mathrm{x}}(x)$$

Satz 4.1: Bayes-Theorem

Aus Def. 4.8 folgt unmittelbar:

$$f_{\mathrm{xy}}(x,y) = f_{\mathrm{x}|y}(x|y)\cdot f_{\mathrm{y}}(y) = f_{\mathrm{y}|x}(y|x)\cdot f_{\mathrm{x}}(x)$$

Satz 4.2: Wahrscheinlichkeitsdichten transformierter Variabler

Wird eine Zufallsvariable x mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{\mathrm{x}}(x)$ durch eine Funktion $\mathrm{y} = g(\mathrm{x})$ in eine neue Zufallsvariable transformiert, und existiert eine Umkehrfunktion mit n Lösungen $\mathrm{x}_i = g^{-1}(\mathrm{y})$, $i = 1,\ldots,n$, so gilt für die Wahrscheinlichkeitsdichte von y:

$$f_{\mathrm{y}}(y) = \sum_{i=1}^{n} f_{\mathrm{x}}(x_i) \left| \frac{\mathrm{d}g(\mathrm{x})}{\mathrm{d}\mathrm{x}} \right|^{-1}_{\mathrm{x}=x_i} \qquad (4.22)$$

Beweis:

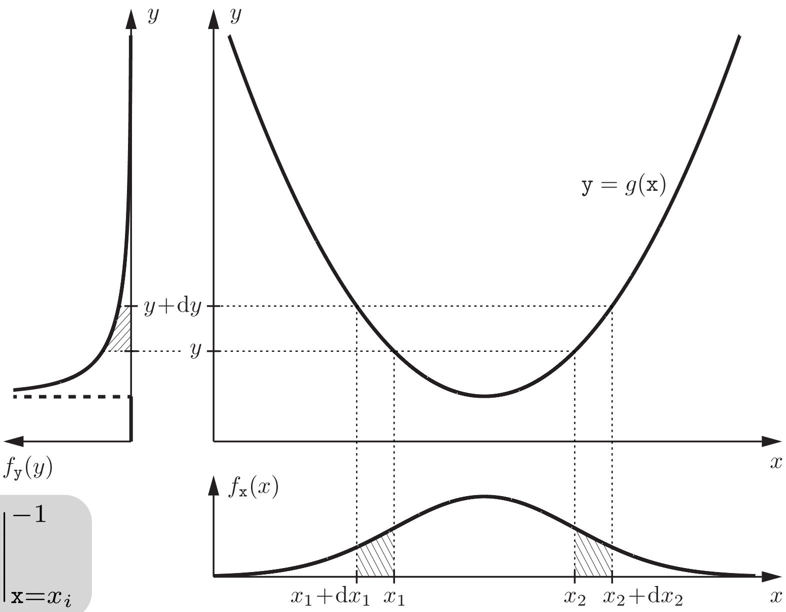
- Wahrscheinlichkeit im Intervall $y \leq \mathrm{y} \leq y + \mathrm{d}y$:

$$f_{\mathrm{y}}(y)\,\mathrm{d}y = f_{\mathrm{x}}(x_1)\,|\mathrm{d}x_1| + f_{\mathrm{x}}(x_2)\,|\mathrm{d}x_2| + \cdots$$

- Mit

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{g'(x_i)}$$

folgt sofort (4.22)



$$f_{\mathrm{y}}(y) = \sum_{i=1}^{n} f_{\mathrm{x}}(x_i) \left| \frac{\mathrm{d}g(\mathrm{x})}{\mathrm{d}\mathrm{x}} \right|^{-1}_{\mathrm{x}=x_i}$$

■

- Bisher wurden ZV x anhand ihrer WV $F_\mathrm{x}(x)$ bzw. $f_\mathrm{x}(x)$ charakterisiert
- Zur kompakten Beschreibung von Zufallsvariablen werden Kenngrößen wie z. B. der **Mittelwert** oder die **Varianz** herangezogen
- Diese lassen sich über den **Erwartungswert-Operator** definieren

Definition 4.10: Erwartungswert

- Der Erwartungswert einer Funktion $g(\mathrm{x})$ einer Zufallsvariablen x mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f_\mathrm{x}(x)$ ist:

$$\mathrm{E}\{g(\mathrm{x})\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_\mathrm{x}(x)\,\mathrm{d}x$$

- Der Erwartungswert ist ein **linearer** Operator; daher gilt:

1. $\mathrm{E}\{a\,g(\mathrm{x})\} = a \cdot \mathrm{E}\{g(\mathrm{x})\}$ — Homogenität
2. $\mathrm{E}\{g(\mathrm{x}) + h(\mathrm{x})\} = \mathrm{E}\{g(\mathrm{x})\} + \mathrm{E}\{h(\mathrm{x})\}$ — Additivität

- Setzt man für die Funktion $g(\mathrm{x})$ **Potenzen** x^m, so erhält man die Momente

Definition 4.11: Moment

- Das m-te **Moment** einer Zufallsvariablen x ist definiert zu

$$\mu_{\mathrm{x},m} = \mathrm{E}\{\mathrm{x}^m\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^m\, f_\mathrm{x}(x)\,\mathrm{d}x$$

- Das erste Moment ist der **Mittelwert** μ_x oder auch Schwerpunkt von x

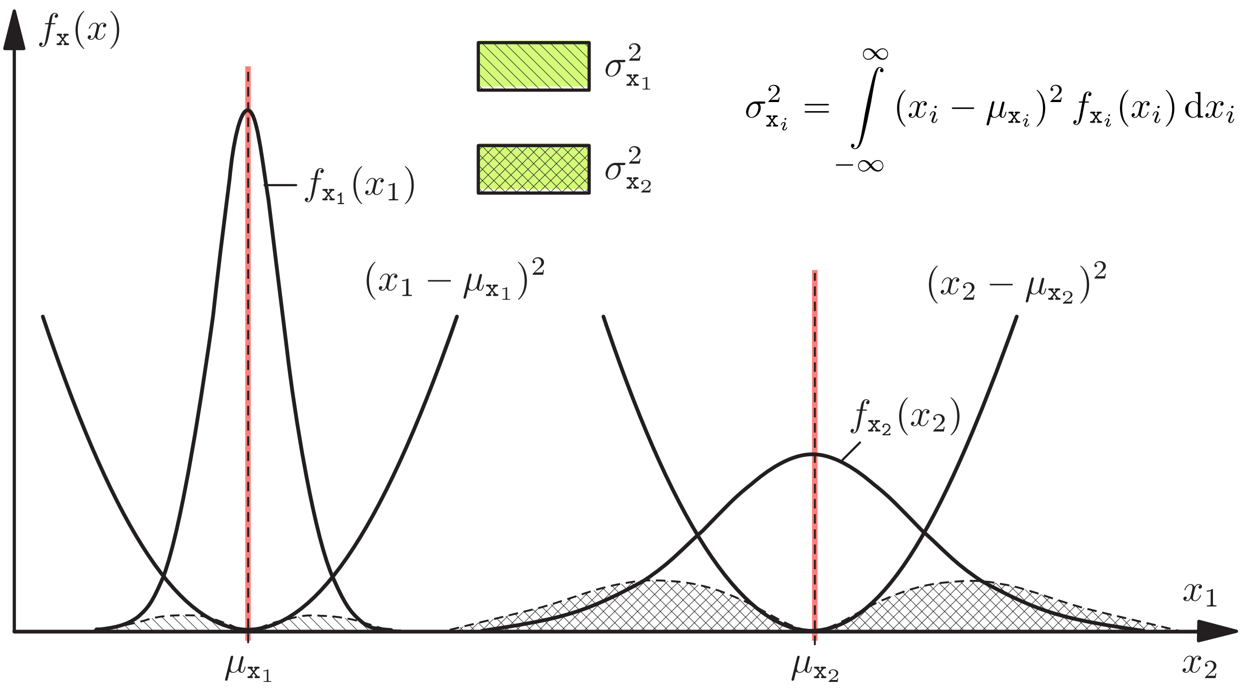
Definition 4.12: Zentrales Moment

- Das m-te zentrale Moment einer Zufallsvariablen x ist definiert zu

$$\mathrm{E}\{(\mathrm{x} - \mathrm{E}\{\mathrm{x}\})^m\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathrm{E}\{\mathrm{x}\})^m\, f_\mathrm{x}(x)\,\mathrm{d}x$$

- Das zweite zentrale Moment ist die **Varianz** σ_x^2

4.1.3 Momente der Statistik 1. Ordnung



Mittelwert und Varianz von zwei stochastischen Variablen x_1 und x_2

4.1.4 Momente der Statistik 2. Ordnung

Definition 4.14: Kovarianz

$$C_{\mathrm{xy}} = \mathrm{E}\{(\mathrm{x} - \mu_{\mathrm{x}})(\mathrm{y} - \mu_{\mathrm{y}})\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_{\mathrm{x}})(y - \mu_{\mathrm{y}}) \, f_{\mathrm{xy}}(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

- Die Kovarianz sagt etwas über die **Korrelation** aus, also über die **lineare statistische Abhängigkeit** zweier Zufallsgrößen. Es gilt insbesondere:

Definition 4.15: Unkorrelierte Größen

- Zwei Zufallsvariable x und y sind unkorreliert, wenn für sie gilt:

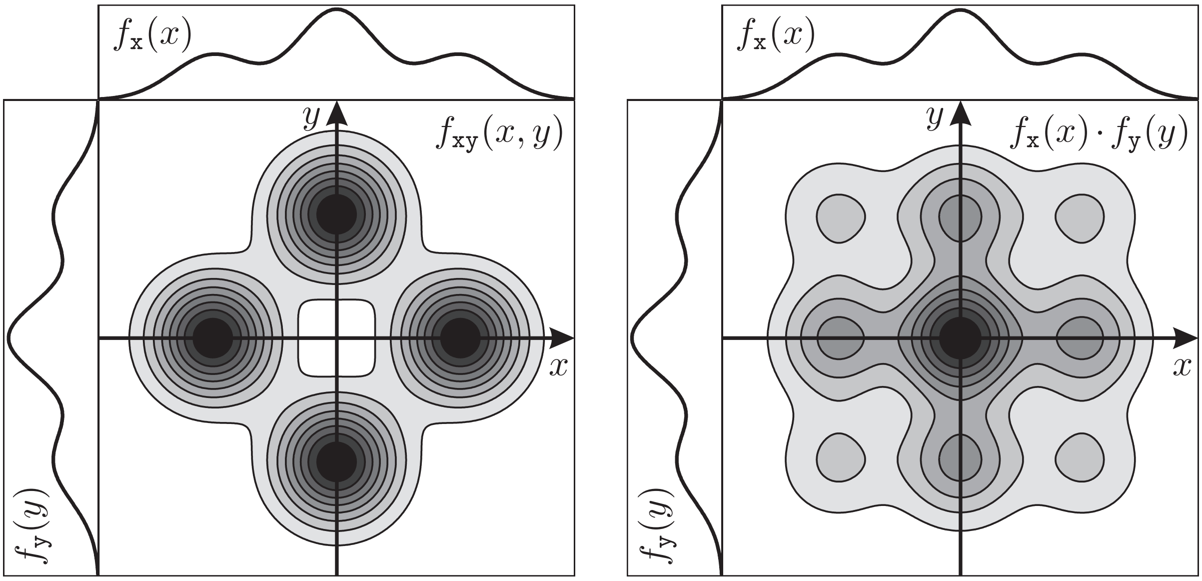
$$C_{\mathrm{xy}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{E}\{\mathrm{xy}\} = \mathrm{E}\{\mathrm{x}\} \cdot \mathrm{E}\{\mathrm{y}\}$$

- Für zwei **unkorrelierte** Zufallsvariable x_i und x_j gilt:

$$C_{\mathrm{x}_i \mathrm{x}_j} = \sigma^2_{\mathrm{x}} \, \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \sigma^2_{\mathrm{x}} & i = j \end{cases}$$

Statistische Unabhängigkeit
⇒ Unkorreliertheit

Beispiel 4.4: Unkorreliertheit bei statistischer Abhängigkeit



- Die Zufallsgrößen x und y sind **statistisch abhängig**, da sich $f_{\mathrm{xy}}(x,y)$ nicht als Produkt der **Randdichten** $f_{\mathrm{x}}(x)$ und $f_{\mathrm{y}}(y)$ darstellen lässt
- Wegen $C_{\mathrm{xy}} = \mathrm{E}\{(\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{x}})(\mathrm{y}-\mu_{\mathrm{y}})\} = \mathrm{E}\{\mathrm{xy}\} = 0$ sind sie aber **unkorreliert** ■

Definition 4.16: Korrelationskoeffizient

- Der Korrelationskoeffizient

$$\rho_{\mathrm{xy}} = \frac{C_{\mathrm{xy}}}{\sigma_{\mathrm{x}}\,\sigma_{\mathrm{y}}} = \frac{\mathrm{E}\{(\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{x}})(\mathrm{y}-\mu_{\mathrm{y}})\}}{\sqrt{\mathrm{E}\{(\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{x}})^2\}\mathrm{E}\{(\mathrm{y}-\mu_{\mathrm{y}})^2\}}}$$

$$-1 \le \rho_{\mathrm{xy}} \le 1$$

ist ein Maß für die **Korreliertheit** zweier stochastischer Größen x und y.

Bei **starrer Bindung** von x und y nimmt ρ_{xy} den Wert ±1 an, bei **unkorrelierten** Größen den Wert 0

Beweis: Interpretation der Zufallsgrößen als verallgemeinerte Vektoren in unitären Räumen

Für ZV gilt das Innenprodukt: $\langle x, y\rangle = \mathrm{E}\{(\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{x}})(\mathrm{y}-\mu_{\mathrm{y}})\}$

und die Norm: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\mathrm{E}\{(\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{x}})^2\}}$

Mit der Schwarz'schen Ungleichung: $|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\cdot\|y\|$

ergibt sich die folgende Abschätzung für die Kovarianz:

$$|\mathrm{E}\{(\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{x}})(\mathrm{y}-\mu_{\mathrm{y}})\}| \leq \sqrt{\mathrm{E}\{(\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{x}})^2\}}\sqrt{\mathrm{E}\{(\mathrm{y}-\mu_{\mathrm{y}})^2\}}$$

$$|C_{\mathrm{xy}}| \leq \sigma_{\mathrm{x}} \cdot \sigma_{\mathrm{y}}$$

Mit dem Korrelationskoeffizienten ρ_{xy} gilt gerade das Gleichheitszeichen:

$$C_{\mathrm{xy}} = \rho_{\mathrm{xy}} \cdot \sigma_{\mathrm{x}}\,\sigma_{\mathrm{y}}$$

1. Starre Bindung: $\mathrm{y} = k\,\mathrm{x} + a$

$$\Rightarrow \quad \rho_{\mathrm{xy}} = \frac{C_{\mathrm{xy}}}{\sigma_{\mathrm{x}}\sigma_{\mathrm{y}}} = \frac{\mathrm{E}\{(\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{x}})\cdot k \cdot (\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{x}})\}}{\sqrt{\mathrm{E}\{(\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{x}})^2\}\cdot k^2 \cdot \mathrm{E}\{(\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{x}})^2\}}} = \pm 1$$

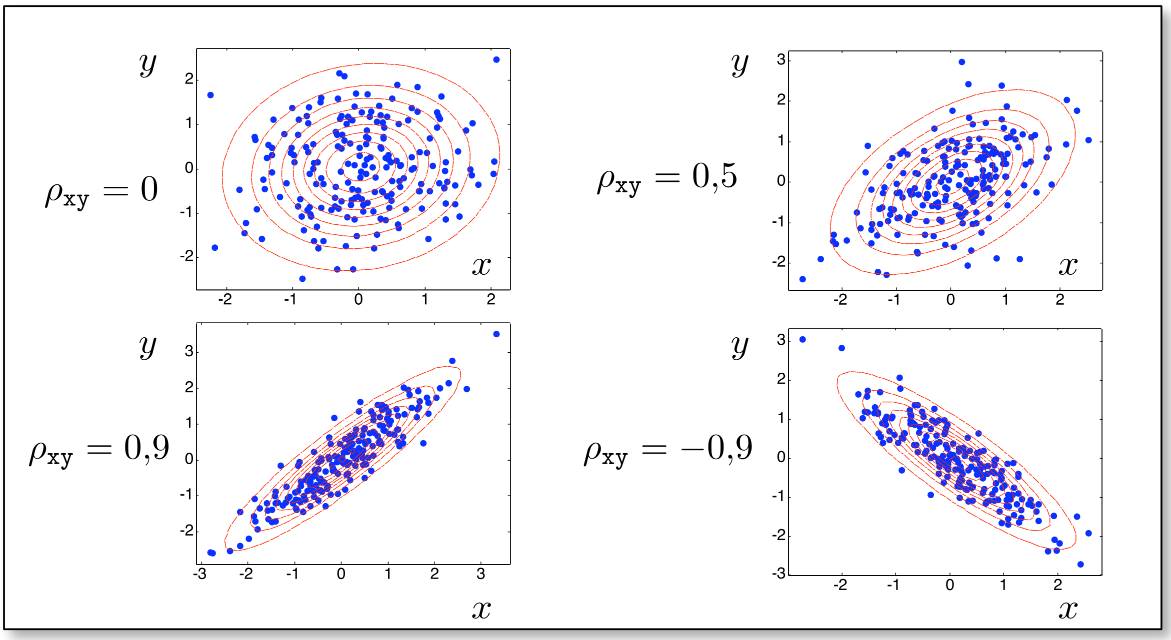
$$|C_{\mathrm{xy}}| = \sigma_{\mathrm{x}} \cdot \sigma_{\mathrm{y}}$$

2. Unkorrelierte oder statistisch unabhängige Größen:

$$\Rightarrow \quad C_{\mathrm{xy}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_{\mathrm{xy}} = 0$$

Bsp.: $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}, \begin{bmatrix} \sigma_{\mathrm{x}}^2 & \rho_{\mathrm{xy}}\sigma_{\mathrm{x}}\sigma_{\mathrm{y}} \\ \rho_{\mathrm{xy}}\sigma_{\mathrm{x}}\sigma_{\mathrm{y}} & \sigma_{\mathrm{y}}^2 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \begin{bmatrix} 1 & \rho_{\mathrm{xy}} \\ \rho_{\mathrm{xy}} & 1 \end{bmatrix}\right)$

$\rho_{\mathrm{xy}} \in [-1, 1]$: Korrelationskoeffizient



Beispiel 4.5: Korrelation von Messwerten

- Messreihe von $n = 12$ Wertepaaren:

x_i	0,8	1,3	2,1	2,8	3,4	4,9	5,5	6,6	7,2	8,1	9,4	9,6
y_i	0,3	0,75	1,15	1,2	1,8	2,35	2,65	3,5	3,5	4,15	4,6	4,9

- Stichprobenmittelwerte: $\hat{\mu}_\mathrm{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 5{,}14$ $\quad$ $\hat{\mu}_\mathrm{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = 2{,}57$

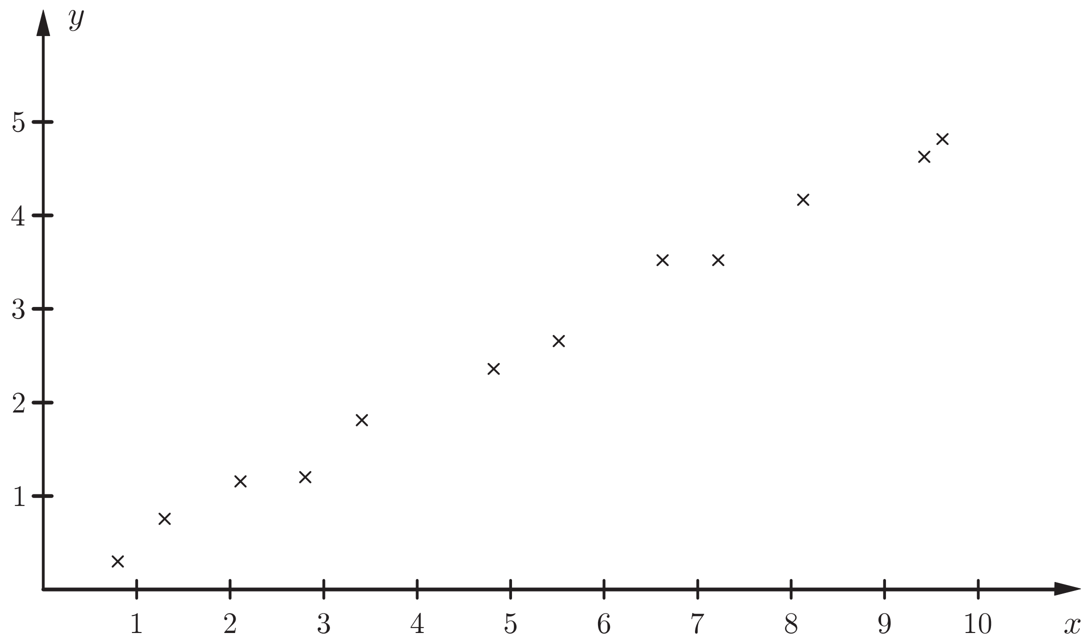
➡ Kovarianz: $C_\mathrm{xy} \approx \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{\mu}_\mathrm{x})(y_i - \hat{\mu}_\mathrm{y}) = 4{,}8$

- Zur Normierung werden die Standardabweichungen berechnet:

$$\sigma_\mathrm{x} \approx \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{\mu}_\mathrm{x})^2} = 3{,}08 \qquad \sigma_\mathrm{y} \approx \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\mu}_\mathrm{y})^2} = 1{,}56$$

Korrelationskoeffizient: $r_\mathrm{xy} = \frac{C_\mathrm{xy}}{\sigma_\mathrm{x}\sigma_\mathrm{y}} \approx 0{,}997$

➡ Die Wertepaare sind **stark** voneinander abhängig.



Definition 4.17: Charakteristische Funktion

- Die charakteristische Funktion $\Phi_\mathrm{x}(f)$ einer ZV x ist durch folgenden Erwartungswert definiert:

$$\boxed{\Phi_\mathrm{x}(f) = \mathrm{E}\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f \mathrm{x}}\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_\mathrm{x}(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f x}\, \mathrm{d}x = \mathcal{F}^{-1}\{f_\mathrm{x}(x)\}}$$

- Da $f_\mathrm{x}(x)$ stets reell ist, kann $\Phi_\mathrm{x}(f)$ ebenfalls als die komplex konjugierte Fourier-Transformierte von $f_\mathrm{x}(x)$ aufgefasst werden, weshalb f als die mit x korrespondierende **Frequenz** interpretiert wird. Insbesondere gilt:

$$|\Phi_\mathrm{x}(f)| = |\mathcal{F}\{f_\mathrm{x}(x)\}|$$

- Allgemeine **Eigenschaften** der charakteristischen Funktion [SUS Kap. 3]:

$$\boxed{\Phi_\mathrm{x}(0) = 1} \qquad \boxed{|\Phi_\mathrm{x}(f)| \leq 1}$$

4.1.6 Charakteristische Funktion

- Durch m-fache Differentiation von $\Phi_\mathrm{x}(f)$ nach der Frequenz f ergibt sich:

$$\frac{\mathrm{d}^m \Phi_\mathrm{x}(f)}{\mathrm{d}f^m} = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{j}2\pi x)^m \cdot f_\mathrm{x}(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f x}\, \mathrm{d}x$$

- Für $f = 0$ lassen sich daraus die **Momente** der Verteilung berechnen:

$$\boxed{\mu_{\mathrm{x},m} = \mathrm{E}\{\mathrm{x}^m\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^m f_\mathrm{x}(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{(\mathrm{j}2\pi)^m} \left.\frac{\mathrm{d}^m \Phi_\mathrm{x}(f)}{\mathrm{d}f^m}\right|_{f=0}}$$

- Die Summe mehrerer **unabhängiger** Zufallsvariabler x_i

$$\mathrm{x} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{x}_i$$

entspricht einer Faltung ihrer Dichten, weshalb im Fourier-Bereich daraus eine Multiplikation resultiert:

$$\boxed{\Phi_\mathrm{x}(f) = \prod_{i=1}^{n} \Phi_{\mathrm{x}_i}(f)}$$

4.2 Stichproben

Institut für Industrielle Informationstechnik

4.2 Stichproben

- In der Praxis sind die Dichte $f_{\mathbf{x}}(x)$ und ihre Kenngrößen (Mittelwert, Varianz usw.) meist nicht bekannt
- Diese muss man daher anhand einer Stichprobe ermitteln („schätzen“)
- Eine **Stichprobe** ist ein Zufallsexperiment, bei dem n Messwerte $\mathbf{x}_i$, $i = 1,\ldots,n$, aus einer Grundgesamtheit zur weiteren statistischen Analyse herangezogen werden
- Mit den Werten $\mathbf{x}_i$ versucht man, Schätzwerte für die zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsdichte, den Mittelwert und die Varianz der Grundgesamtheit zu ermitteln
  - Aus den Wahrscheinlichkeiten werden dann Häufigkeiten;
  - die Erwartungswerte gehen in Mittelwerte über

Institut für Industrielle Informationstechnik

- Für ein **Histogramm** ordnet man die Messwerte x_i in Größenklassen der Breite Δx:

$$\boxed{\nu \cdot \Delta x \leq \mathrm{x}_i < (\nu+1)\Delta x} \qquad \nu : \text{Klassennummer}$$

- Das Histogramm h_ν entspricht der relativen Häufigkeit n_ν/n der Messwerte in der Klasse ν bezogen auf die Klassenbreite Δx (durch diesen Bezug ist h_ν unabhängig von Δx):

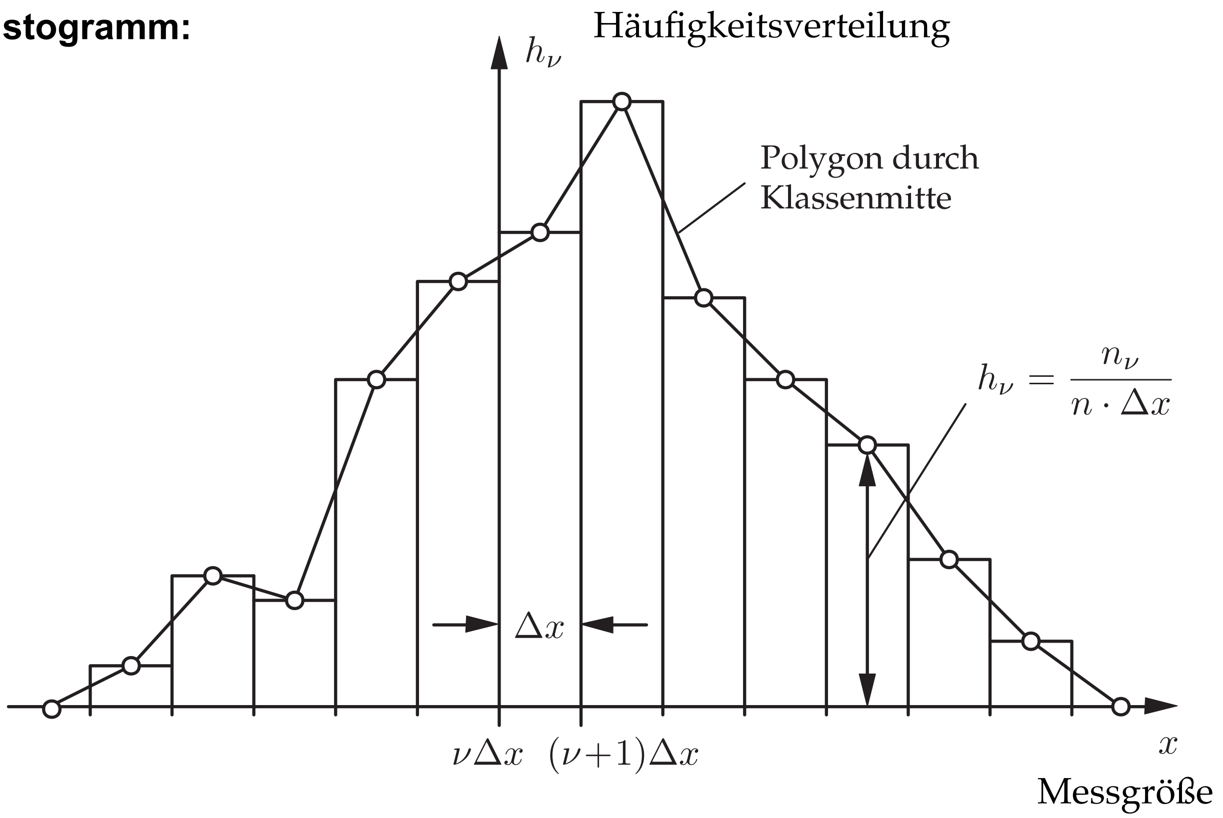
$$\boxed{h_\nu = \frac{n_\nu}{n \cdot \Delta x}}$$

mit $n = \sum_{\nu=1}^{m} n_\nu$: Gesamtzahl der Messwerte

- Die Klassenbreite Δx ist so zu wählen, dass der Polygonzug durch die Klassenmitte „glatt" ist. Für jedes Histogramm ist die Fläche zwischen Kurve und Abszisse $A = 1$:

$$A = \sum_{\nu=1}^{m} h_\nu \Delta x = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{n_\nu}{n \cdot \Delta x} \Delta x = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{m} n_\nu = 1$$

Histogramm:



4.2.2 Stichprobenmittelwert

Definition 4.18: Stichprobenmittelwert

- Ist eine Schätzwert „^“ des wahren Mittelwertes: $$\boxed{\hat{\mathrm{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{x}_i}$$
- Kriterien zur Bewertung von Schätzfunktionen („Schätzern“):

Definition 4.19: Erwartungstreue

- Einen Schätzer $\hat{\mathrm{y}}$ nennt man **erwartungstreu**, wenn bei wiederholten Stichproben der wahre Wert y_w **im Mittel** richtig geschätzt wird:

$$\mathrm{E}\{\hat{\mathrm{y}}\} = y_\mathrm{w}$$

Definition 4.20: Konsistenz

- Ein Schätzer $\hat{\mathrm{y}}$ heißt **konsistent**, wenn mit wachsendem Stichproben-umfang n der wahre Wert y_w **mit Sicherheit** ermittelt wird:

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\mathrm{y}}_n = y_\mathrm{w} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sigma_{\hat{\mathrm{y}}} = 0$$

4.2.2 Stichprobenmittelwert

- Sind diese Forderungen für den Stichprobenmittelwert erfüllt?

Erwartungstreue: $\mathrm{E}\{\hat{\mathrm{x}}\} = \mu_\mathrm{x}$

$$\boxed{\mathrm{E}\{\hat{\mathrm{x}}\} = \mathrm{E}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i\right\} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\mathrm{E}\{\mathrm{x}_i\}}_{\mu_\mathrm{x}} = \frac{1}{n}\, n\, \mu_\mathrm{x} = \mu_\mathrm{x}}$$

➡ Der Stichprobenmittelwert $\hat{\mathrm{x}}$ ist eine erwartungstreue Schätzung des wahren Mittelwertes μ_x

Konsistenz: $\lim_{n\to\infty} \sigma_{\hat{\mathrm{x}}} = 0$

$$\sigma_{\hat{\mathrm{x}}}^2 = \mathrm{E}\{(\hat{\mathrm{x}}-\mu_\mathrm{x})^2\} = \mathrm{E}\left\{\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i\right) - \mu_\mathrm{x}\right]^2\right\} = \mathrm{E}\left\{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x}_i - \mu_\mathrm{x})\right]^2\right\}$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{E}\{(\mathrm{x}_i-\mu_\mathrm{x})(\mathrm{x}_j-\mu_\mathrm{x})\} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{\mathrm{x}_i\mathrm{x}_j}$$

4.2.2 Stichprobenmittelwert

- Für die Kovarianz lassen sich zwei Extremfälle unterscheiden:

1. **Starre Bindung** zwischen x_i und x_j :

$$\boxed{C_{\mathrm{x}_i\mathrm{x}_j} = \sigma_{\mathrm{x}_i}\sigma_{\mathrm{x}_j} = \sigma_\mathrm{x}^2} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\hat{\mathrm{x}}}^2 = \frac{1}{n^2} n^2 \sigma_\mathrm{x}^2 = \sigma_\mathrm{x}^2$$

nicht konsistent

Viele Messwerte enthalten nicht mehr Information als ein einziger

2. **Statistisch unabhängige Messwerte** x_i und x_j für $i \neq j$:

$$\boxed{C_{\mathrm{x}_i\mathrm{x}_j} = \sigma_\mathrm{x}^2\,\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \sigma_\mathrm{x}^2 & i = j \end{cases}}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{\hat{\mathrm{x}}}^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_\mathrm{x}^2\,\delta_{ij} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_\mathrm{x}^2 = \frac{\sigma_\mathrm{x}^2}{n} \qquad (4.82)$$

konsistent

Abnahme der **Standardabweichung** des Schätzers mit $1/\sqrt{n}$ ist typisch für die meisten praktisch relevanten Aufgabenstellungen

4.2.3 Stichprobenvarianz

- Meist ist die Dichte $f_\mathrm{x}(x)$ unbekannt. Es liegen lediglich einzelne Messwerte vor. Die **unbekannte** Varianz $\sigma_\mathrm{x}{}^2$ wird durch die Stichprobenvarianz geschätzt.

Definition 4.22: Stichprobenvarianz

$$\boxed{\mathrm{s}_\mathrm{x}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x}_i - \hat{\mathrm{x}})^2}$$

s_x : Standardabweichung der Stichprobe

- Zur Untersuchung auf Erwartungstreue wird der Erwartungswert gebildet:

$$\mathrm{E}\{\mathrm{s}_\mathrm{x}^2\} = \mathrm{E}\left\{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x}_i - \hat{\mathrm{x}})^2\right\} = \frac{1}{n-1}\,\mathrm{E}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left((\mathrm{x}_i - \mu_\mathrm{x}) - (\hat{\mathrm{x}} - \mu_\mathrm{x})\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\,\mathrm{E}\left\{\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x}_i - \mu_\mathrm{x})^2 - 2\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x}_i - \mu_\mathrm{x})(\hat{\mathrm{x}} - \mu_\mathrm{x}) + n\,(\hat{\mathrm{x}} - \mu_\mathrm{x})^2\right\}$$

$$\mathrm{E}\{s_x^2\} = \frac{1}{n-1}\,\mathrm{E}\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2 - 2\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)(\hat{x}-\mu_x)}_{n\,(\hat{x}-\mu_x)^2} + n\,(\hat{x}-\mu_x)^2\right\}$$

- Vertauschung von Erwartungswertbildung und Summation ergibt:

$$\mathrm{E}\{s_x^2\} = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\mathrm{E}\left\{(x_i-\mu_x)^2\right\}}_{\sigma_x^2} - 2n\,\underbrace{\mathrm{E}\left\{(\hat{x}-\mu_x)^2\right\}}_{\sigma_{\hat{x}}^2} + n\,\underbrace{\mathrm{E}\left\{(\hat{x}-\mu_x)^2\right\}}_{\sigma_{\hat{x}}^2}\right]$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\mathrm{E}\{s_x^2\} = \frac{n}{n-1}\left(\sigma_x^2 - \sigma_{\hat{x}}^2\right)}$$

$$\mathrm{E}\{s_x^2\} = \frac{n}{n-1}\left(\sigma_x^2 - \sigma_{\hat{x}}^2\right)$$

1. **Starre Bindung** zwischen x_i und x_j: $\sigma_{\hat{x}}^2 = \sigma_x^2$ $\Leftarrow$ (Folie 35)

Stichprobenmittelwert hat die gleiche Varianz wie die Messwerte selbst

$$\rightarrow \quad \boxed{\mathrm{E}\{s_x^2\} = 0}$$

2. **Statistisch unabhängige Messwerte** x_i und x_j für $i \neq j$:

$$\sigma_{\hat{x}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{n} \qquad \Leftarrow \text{(Folie 35)}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\mathrm{E}\{s_x^2\} = \frac{n}{n-1}\,\sigma_x^2\left(1-\frac{1}{n}\right) = \sigma_x^2}$$

Die Stichprobenvarianz s_x^2 ist bei **statistisch unabhängigen** Messwerten eine **erwartungstreue** Schätzung der Varianz σ_x^2

- Manchmal werden das **3. und 4. Zentralmoment** betrachtet:

Schiefe:

$$\hat{\varrho}_{\mathrm{x}} = \frac{1}{\mathrm{s}_{\mathrm{x}}^3} \cdot \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{x}_i - \hat{\mathrm{x}})^3$$

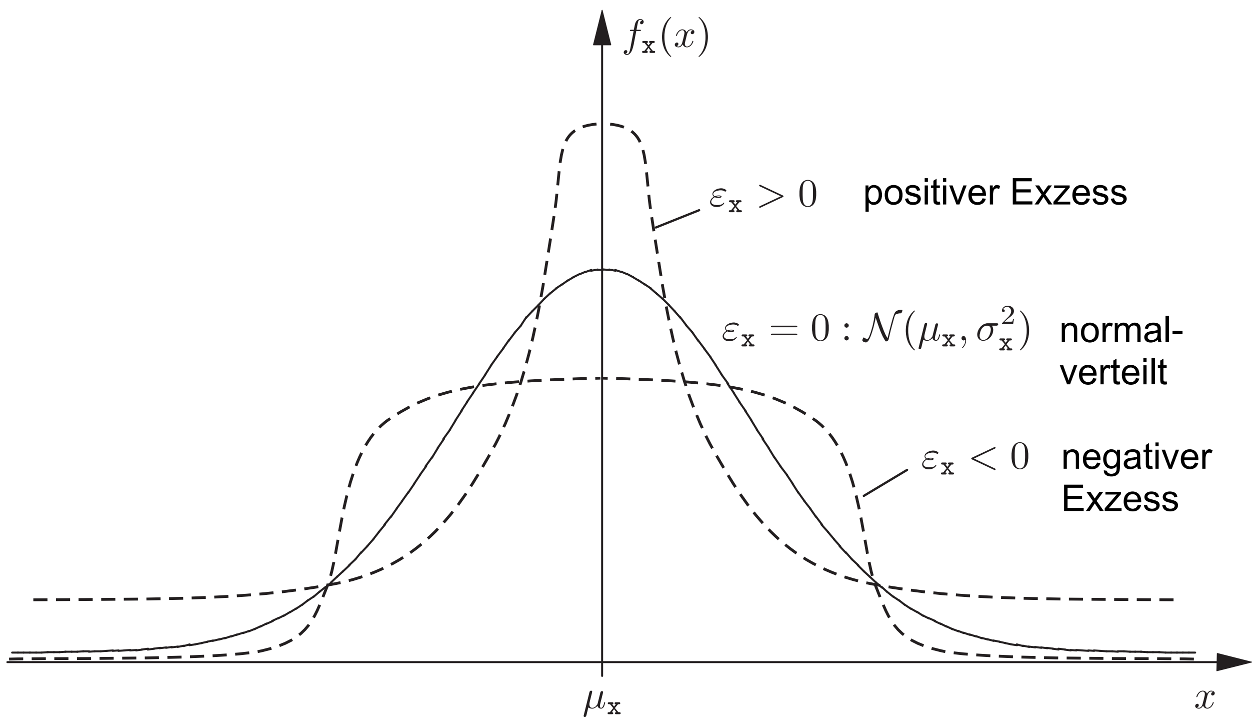
Maß für die **Asymmetrie** der Messwerteverteilung. Sie ist auf die dritte Potenz der Standardabweichung bezogen. Die Schiefe der Normalverteilung ist null.

Exzess:

$$\hat{\varepsilon}_{\mathrm{x}} = \frac{1}{\mathrm{s}_{\mathrm{x}}^4} \cdot \frac{n\,(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{x}_i - \hat{\mathrm{x}})^4 - \frac{3\,(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}$$

Maß für die **Wölbung** der Messwerteverteilung und somit für die Abweichung von der Normalverteilung. Sie ist auf die vierte Potenz der Standardabweichung bezogen.

Durch die Subtraktion des rechten Terms wird der Exzess normiert. Der Exzess der Normalverteilung ist somit null.



Verteilungen mit positivem und negativem Exzess

- Das **Gesetz der großen Zahlen** verbindet die Kenngrößen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit den aus Stichproben ermittelten Schätzwerten
- Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $|\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{x}}| \geq \varepsilon$ ist:

$$P\{|\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{x}}| \geq \varepsilon\} = \int_{-\infty}^{\mu_{\mathrm{x}}-\varepsilon} f_{\mathrm{x}}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mu_{\mathrm{x}}+\varepsilon}^{\infty} f_{\mathrm{x}}(x)\,\mathrm{d}x$$

- Mit $|x-\mu_{\mathrm{x}}| \geq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{(x-\mu_{\mathrm{x}})^2}{\varepsilon^2} \geq 1$ erhält man die Abschätzung:

$$\begin{aligned} P\{|\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{x}}| \geq \varepsilon\} &\leq \int_{-\infty}^{\mu_{\mathrm{x}}-\varepsilon} \frac{(x-\mu_{\mathrm{x}})^2}{\varepsilon^2} f_{\mathrm{x}}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mu_{\mathrm{x}}+\varepsilon}^{\infty} \frac{(x-\mu_{\mathrm{x}})^2}{\varepsilon^2} f_{\mathrm{x}}(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_{\mathrm{x}})^2 f_{\mathrm{x}}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sigma_{\mathrm{x}}^2}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

4.2.4 Gesetz der großen Zahlen

- Das Ergebnis ist die sog. **Tschebyscheff'sche Ungleichung**:

$$P\{|\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{x}}| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma_{\mathrm{x}}^2}{\varepsilon^2}$$

- Sie besagt, dass für eine Zufallsvariable x mit endlicher Varianz der Wert x mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit um den Erwartungswert μ_{x} liegt
- Auf den Stichprobenmittelwert (ZV) angewandt ergibt das bei statistischer Unabhängigkeit (4.82):

$$P\{|\hat{\mathrm{x}}-\mu_{\mathrm{x}}| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma_{\hat{\mathrm{x}}}^2}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma_{\mathrm{x}}^2}{n\cdot\varepsilon^2}$$

Die Versuchsergebnisse aus **großen** Stichproben nähern sich also den Ergebnissen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

4.2.4 Gesetz der großen Zahlen

- Einen entsprechenden Zusammenhang kann man zwischen der Häufigkeitsverteilung einer Stichprobe $h(x)$ und der Dichte $f_{\mathrm{x}}(x)$ aufzeigen
- Dazu werden **Indikatorvariable** definiert, die beschreiben, ob ein Ereignis x_i einer bestimmten Klasse ν angehört:

$$\mathrm{J}_{\nu i} = \begin{cases} 1 & \text{für } \nu\Delta x \le \mathrm{x}_i < (\nu+1)\Delta x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Die geschätzte Wahrscheinlichkeit (relative Häufigkeit) für das Eintreffen des Ereignisses x_i bei n Versuchen ist (vgl. Folie 31):

$$\Delta x\, h_\nu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{J}_{\nu i}$$

$$h_\nu = \frac{n_\nu}{n\cdot\Delta x}$$

- Der Erwartungswert davon ist gleich der Wahrscheinlichkeit $f_{\mathrm{x}}(x_\nu)\Delta x$:

$$\mathrm{E}\{\Delta x\, h_\nu\} = \mathrm{E}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{J}_{\nu i}\right\} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\mathrm{E}\{\mathrm{J}_{\nu i}\}}_{f_{\mathrm{x}}(x_\nu)\Delta x} = f_{\mathrm{x}}(x_\nu)\Delta x$$

4.2.4 Gesetz der großen Zahlen

- Der Schätzer für die Häufigkeitsverteilung $h(x)$ hat die gleiche Struktur wie der Schätzer für den Stichprobenmittelwert
- Für die Varianz der Häufigkeitsverteilung erhält man daher bei unabhängigen Ereignissen analog zu (4.82):

$$\mathrm{E}\{(h(x) - f_{\mathrm{x}}(x))^2\} = \frac{\sigma_{\mathrm{J}}^2}{n}$$

- Einsetzen in die Tschebyscheff'sche Ungleichung $P\{|\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{x}}| \ge \varepsilon\} \le \frac{\sigma_{\mathrm{x}}^2}{\varepsilon^2}$ ergibt das **Bernoulli'sche Gesetz der großen Zahlen**:

$$P\{|h(x) - f_{\mathrm{x}}(x)| \ge \varepsilon\} \le \frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{E}\{(h(x) - f_{\mathrm{x}}(x))^2\} = \frac{\sigma_{\mathrm{J}}^2}{n\,\varepsilon^2}$$

Mit wachsendem Stichprobenumfang n geht die Häufigkeitsverteilung $h(x)$ in die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{\mathrm{x}}(x)$ über

4.2.5 Mittelung zur Störungsunterdrückung

4.2.5.1 Lineare Kennlinie

- Gestörte Messgröße u wird durch ein lineares System transformiert:

$$\boxed{\mathrm{y} = S_\mathrm{i}\,(u + \mathrm{e})}$$

- Mittelung durch Erwartungswertbildung beschrieben:

$$\mu_\mathrm{y} = \mathrm{E}\{\mathrm{y}\} = \mathrm{E}\{S_\mathrm{i}\,(u + \mathrm{e})\} = S_\mathrm{i}\,(u + \mu_\mathrm{e})$$

1. **Mittelwertfreie** Störung: $\mu_\mathrm{e} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu_\mathrm{y} = S_\mathrm{i}\,u}$

2. Störung mit **endlichem Mittelwert**: $\mu_\mathrm{e} \neq 0$

   Kompensation durch Subtraktion der deterministischen additiven Störung $S_\mathrm{i}\,\mu_\mathrm{e}$ am Ausgang des Messsystems:

$$\boxed{\tilde{\mathrm{y}} = \mathrm{y} - S_\mathrm{i}\,\mu_\mathrm{e} = S_\mathrm{i}\,(u + \mathrm{e} - \mu_\mathrm{e})}$$

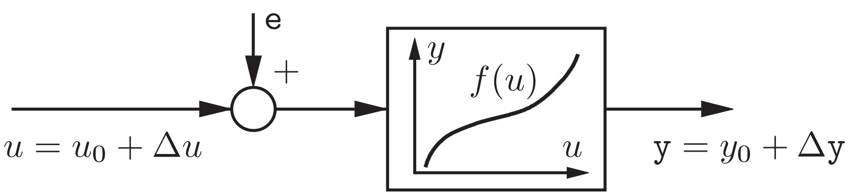
> Bei linearen Kennlinien können **additive mittelwertfreie Störungen** durch Mittelung unterdrückt werden!

4.2.5 Mittelung zur Störungsunterdrückung

4.2.5.2 Nichtlineare Kennlinie

- Gekrümmte Kennlinie der Empfindlichkeit S wird um den Arbeitspunkt u_0 herum in eine Taylor-Reihe $\Delta\mathrm{y}$ entwickelt:

$$\boxed{\Delta\mathrm{y} = S(u_0)\,(\Delta u + \mathrm{e}) \cdot \left[1 + \frac{1}{2}\frac{S'(u_0)}{S(u_0)}(\Delta u + \mathrm{e}) + \cdots\right]}$$



- Erwartungswert $\mu_{\Delta\mathrm{y}}$ der Ausgangsgröße (Δu und e unkorreliert):

$$\mu_{\Delta\mathrm{y}} = \mathrm{E}\{\Delta\mathrm{y}\} \approx S(u_0)\left[\Delta u + \underbrace{\mathrm{E}\{\mathrm{e}\}}_{=0}\right] + \frac{1}{2}S'(u_0)\left[\Delta u^2 + \underbrace{\mathrm{E}\{\mathrm{e}^2\}}_{\sigma_\mathrm{e}^2}\right]$$
$$= S(u_0)\cdot\Delta u + \frac{1}{2}S'(u_0)\cdot(\Delta u^2 + \sigma_\mathrm{e}^2)$$

4.2.5 Mittelung zur Störungsunterdrückung

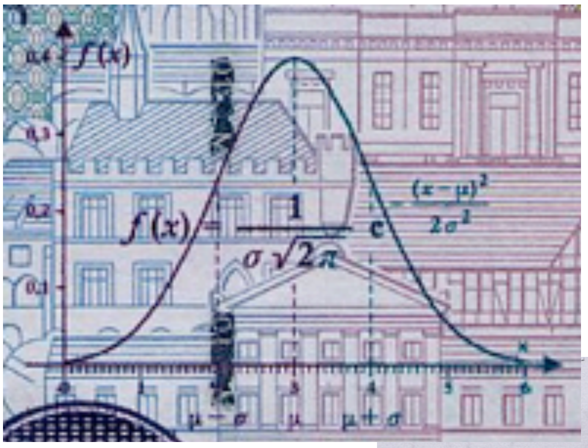
$$\mu_{\Delta y} \approx S(u_0) \cdot \Delta u + \frac{1}{2} S'(u_0) \cdot (\Delta u^2 + \sigma_e^2)$$

Diskussion

- Obwohl die Störung e mittelwertfrei ist, weicht bei gekrümmter Kennlinie der Mittelwert der Ausgangsgröße $\mu_{\Delta y}$ vom idealen Anzeigewert ab.
- Auch im Arbeitspunkt u_0 ($\Delta u = 0$) ist der Erwartungswert der Messabweichung $\mu_{\Delta y} \neq 0$. Die Abweichung ist proportional zur Kennlinienkrümmung $S'(u_0)$ im Arbeitspunkt und zur Varianz des Störsignals.
- Zur Unterdrückung von Störungen durch Mittelung muss zuvor die Kennlinie linearisiert werden!

4.3 Normalverteilte Zufallsvariable

4.3.1 Normalverteilung



Normalverteilung

$$f_{\mathrm{x}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\mathrm{x}}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_{\mathrm{x}})^2}{2\sigma_{\mathrm{x}}^2}}$$

4.3.2 Zentraler Grenzwertsatz

- In vielen Anwendungen resultiert der zufällige Fehler e aus einer additiven Überlagerung vieler **unabhängiger**, **zufälliger** Ereignisse e_n mit **unbekannten** Dichten:

$$\mathsf{e} = \sum_{n=1}^{N} \mathsf{e}_n$$

- Die Wahrscheinlichkeitsdichte der Summe von unabhängigen Zufalls-variablen e_n kann allgemein über die **Faltung der einzelnen Dichten** berechnet werden:

$$f_{\mathsf{e}}(e) = f_{\mathsf{e}_1}(e) * f_{\mathsf{e}_2}(e) * \ldots * f_{\mathsf{e}_N}(e) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \Phi_{\mathsf{e}}(f) = \prod_{n=1}^{N} \Phi_{\mathsf{e}_n}(f)$$

- **Beispiele** hierfür sind:
  - Widerstandsrauschen
  - Gasdruck
  - Messfehler unbekannter Ursache

4.3.2 Zentraler Grenzwertsatz

- Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeitsdichte von e ist folgender Satz von Bedeutung:

Satz 4.3: Zentraler Grenzwertsatz

Haben die Zufallsvariablen x_n Verteilungen mit beschränktem zweiten und dritten Moment und sind die Zufallsvariablen voneinander unabhängig, dann nähert sich die Dichte $f_{\mathrm{x}}(x)$ der Summe $\mathrm{x} = \sum_{n=1}^{N} \mathrm{x}_n$ mit wachsendem Umfang N asymptotisch einer Normalverteilung an:

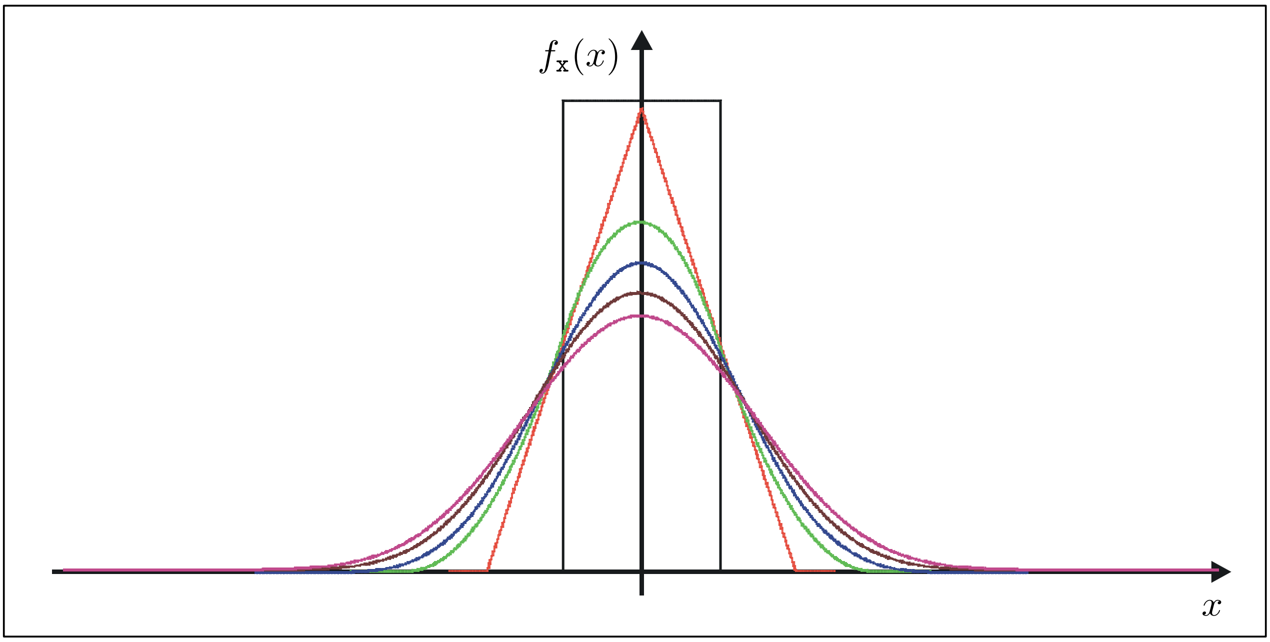
$$f_{\mathrm{x}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\mathrm{x}}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_{\mathrm{x}})^2}{2\sigma_{\mathrm{x}}^2}}$$

- Die Parameter der Normalverteilung berechnen sich wie folgt:

$$\mu_{\mathrm{x}} = \sum_{n=1}^{N} \mathrm{E}\{\mathrm{x}_n\} \qquad \sigma_{\mathrm{x}}^2 = \sum_{n=1}^{N} \sigma_{\mathrm{x}_n}^2$$

Erwartungswerte & Varianzen der Einzelverteilungen werden aufsummiert

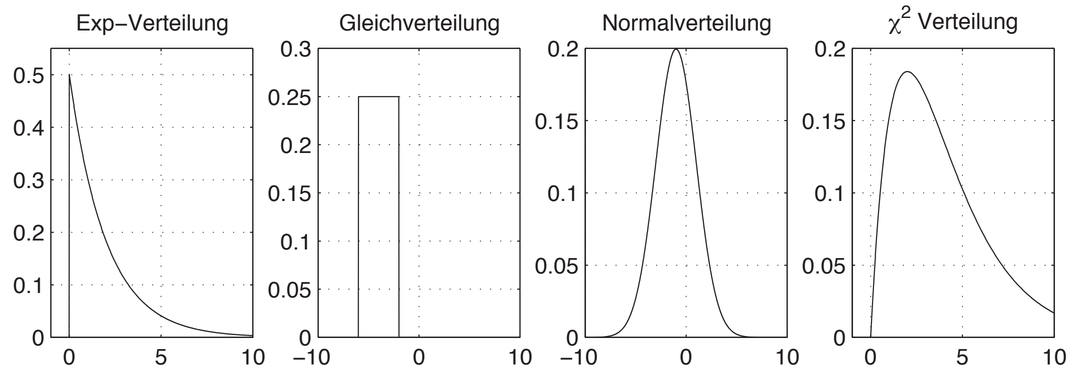
4.3.2 Zentraler Grenzwertsatz



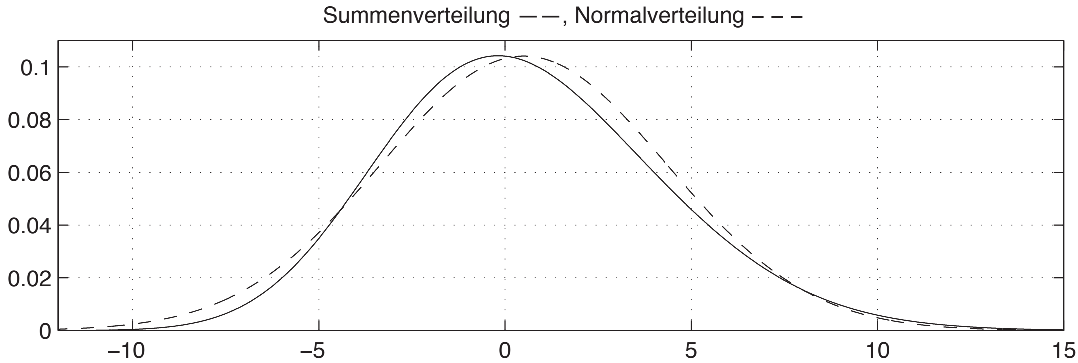
Dichte der Summe mehrerer gleichverteilter Zufallsgrößen

4.3.2 Zentraler Grenzwertsatz

Einzelwahrscheinlichkeitsdichten:



Summenwahrscheinlichkeitsdichte:



4.3.3 χ^2-Verteilung

- Im letzten Unterabschnitt wurden Zufallsgrößen additiv überlagert; unter bestimmten Bedingungen war das Ergebnis asymptotisch normalverteilt
- An dieser Stelle sollen die Zufallsgrößen vor der Addition **quadriert** werden
- Die Wahrscheinlichkeitsdichte solcher Quadratsummen ist von Interesse, weil sie die Verteilung der **Stichprobenvarianz** beschreibt

Satz 4.4: χ^2-Verteilung

Sind n unabhängige Zufallsvariable z_i mit $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung gegeben, so hat die Quadratsumme $\mathrm{y}_n = \mathrm{z}_1^2 + \mathrm{z}_2^2 + \ldots + \mathrm{z}_n^2$ die folgende Dichte:

$$f_{\mathrm{y}_n}(y=\chi^2) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})\,2^{\frac{n}{2}}}\, y^{\frac{n}{2}-1}\,\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}} & \text{für } \chi^2 \geq 0 \\ 0 & \text{für } \chi^2 < 0 \end{cases}$$

n : Parameter („Zahl der Freiheitsgrade“)
$\Gamma(x)$: Gammafunktion: $\Gamma(0{,}5) = \sqrt{\pi},\ \Gamma(1) = 1,\ \Gamma(r+1) = r\cdot\Gamma(r)$

- Mittelwert und Varianz werden über die charakteristische Funktion berechnet [PK12]

- Der **Mittelwert** lautet:

$$\boxed{\mathrm{E}\{\mathrm{y}_n\} = \frac{1}{(-\mathrm{j}2\pi)^1}\,\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{y}_n}(f)}{\mathrm{d}f}\bigg|_{f=0} = n}$$

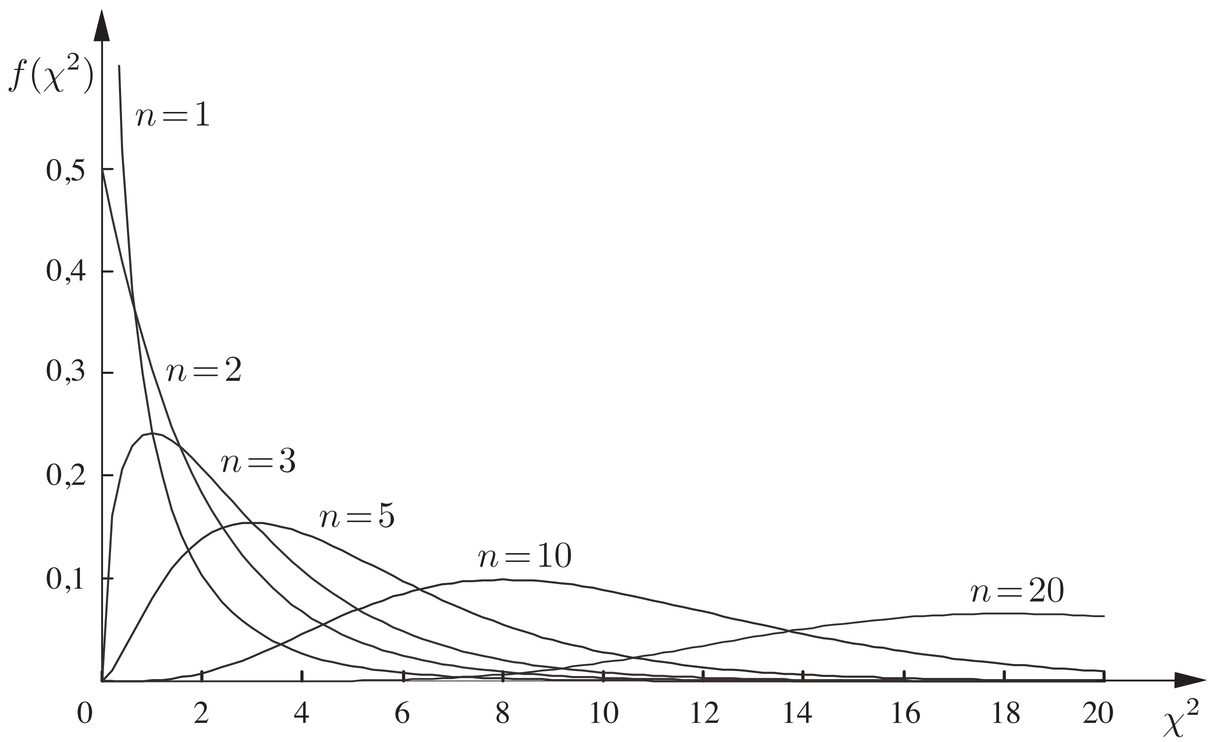
- Aus dem zweiten Moment

$$\mathrm{E}\{\mathrm{y}_n^2\} = \frac{1}{(-\mathrm{j}2\pi)^2}\,\frac{\mathrm{d}^2\Phi_{\mathrm{y}_n}(f)}{\mathrm{d}f^2}\bigg|_{f=0} = n^2 + 2n$$

kann die **Varianz** berechnet werden:

$$\boxed{\sigma_{\mathrm{y}_n}^2 = \mathrm{E}\{\mathrm{y}_n^2\} - \Big(\mathrm{E}\{\mathrm{y}_n\}\Big)^2 = 2n}$$

Wahrscheinlichkeitsdichte der χ^2-Verteilung:



- Durch Variablentransformation lässt sich die χ^2-Verteilung bei **allgemeiner Normalverteilung** $\mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ angeben:

$$\chi_n^2 = \frac{(x_1-\mu_x)^2 + (x_2-\mu_x)^2 + \ldots + (x_n-\mu_x)^2}{\sigma_x^2}$$

- **Anwendung** findet die Verteilung im Kontext der **Stichprobenvarianz** s_x^2, die χ^2-verteilt ist:

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{x})^2$$

- Wie viele **Freiheitsgrade** besitzt die Verteilung der Stichprobenvarianz?
- Der Stichprobenmittelwert ist der Schätzwert des wahren Mittelwertes μ_x:

$$\hat{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$

- x_n hängt aber von den übrigen x_i und vom Stichprobenmittelwert ab:

$$-(x_n-\hat{x}) = \sum_{i=1}^{n-1}(x_i-\hat{x})$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow\quad \chi_n^2 &= \frac{1}{\sigma_x^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{x})^2 = \frac{1}{\sigma_x^2}\left[\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-\hat{x})^2 + (x_n-\hat{x})^2\right] \\
&= \frac{1}{\sigma_x^2}\left[\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-\hat{x})^2 + \left(\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-\hat{x})\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{\sigma_x^2}\left[\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-\hat{x})^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}(x_i-\hat{x})(x_j-\hat{x})\right] \\
&= \frac{2}{\sigma_x^2}\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-\hat{x})^2 + \underbrace{\frac{1}{\sigma_x^2}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1,j\neq i}^{n-1}(x_i-\hat{x})(x_j-\hat{x})}_{\approx 0} \\
\rightarrow\quad \chi_n^2 &= \frac{2}{\sigma_x^2}\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-\hat{x})^2
\end{aligned}$$

Die **Wahrscheinlichkeitsdichte der Stichprobenvarianz** mit n Stichprobenwerten ist eine χ^2-Verteilung mit $(n-1)$ Freiheitsgraden

Satz 4.5: Student'sche t-Verteilung

Gegeben sind die Zufallsvariablen $\mathtt{x}$ und $\mathtt{y}$. $\mathtt{x}$ ist $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt, $\mathtt{y}$ ist χ^2-verteilt mit n Freiheitsgraden. Dann besitzt die Zufallsvariable $\mathtt{t} = \dfrac{\mathtt{x}}{\sqrt{\mathtt{y}/n}}$ eine **t-Verteilung** mit n Freiheitsgraden:

$$f_{\mathtt{t}}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{(n+1)/2}}$$

Mit wachsendem n strebt die t-Verteilung gegen eine $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung.

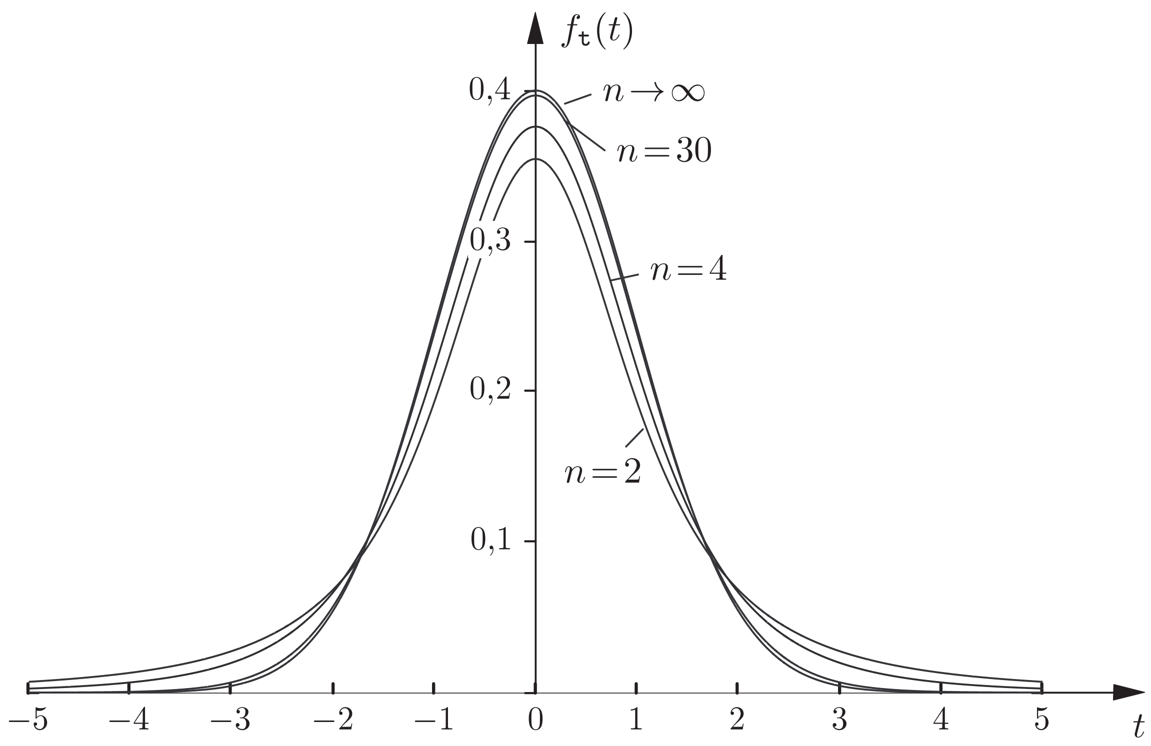
Anwendung der t-Verteilung

Stichprobenmittelwert $\hat{\mathtt{x}}$: normalverteilt

Stichprobenvarianz $\mathtt{s}_{\mathtt{x}}^2$: χ^2-verteilt

➡ Verhältnis $\boxed{\mathtt{t} = \dfrac{\hat{\mathtt{x}}}{\sqrt{\mathtt{s}_{\mathtt{x}}^2/n}}}$ ist t-verteilt

Wahrscheinlichkeitsdichte der t-Verteilung:



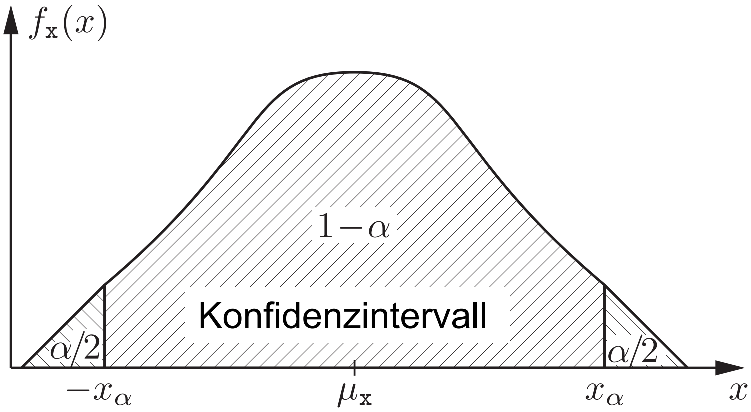
4.4 Statistische Testverfahren

- Die mathematische Statistik stellt Mittel zur Verfügung, um aus einer Stichprobe Aussagen über die zugrunde liegende Verteilung abzuleiten.
- Neben den **Schätzverfahren** (Abschn. 4.2) gehören dazu auch die **Testverfahren**, bei denen es um das Treffen von „Ja/Nein"-Entscheidungen geht. Hier sind zwei Fragestellungen von großer praktischer Bedeutung.
  - Beim Stichprobenmittelwert stellt sich die Frage, ob dieser Schätzwert repräsentativ für eine angenommene Verteilung ist; die Antwort liefert der **Signifikanztest für den Stichprobenmittelwert** (Abschn. 4.4.3).
  - Bei einer Stichprobe interessiert man sich, ob diese einem bestimmten Verteilungsmodell folgt; dazu dient der **χ^2-Anpassungstest** (Abschn. 4.4.4).
- Es liegt im Wesen der Statistik, dass Testverfahren keine absolut sicheren Aussagen liefern können; Testentscheidungen werden vielmehr nur mit einer gewissen **statistischen Sicherheit** getroffen (Abschn. 4.4.1).

4.4.1 Konfidenzintervall und statistische Sicherheit

Karlsruher Institut für Technologie

- Oft will man Auskunft über die Zuverlässigkeit einer Schätzung geben (**Bsp.:** Wie vertrauenswürdig ist ein geschätzter Stichprobenmittelwert?)
- Dazu dienen die folgenden Begriffe:
  - **Konfidenzintervall:** Intervall $[\mu_x - x_\alpha, \mu_x + x_\alpha]$ welches den zu schätzenden Parameter mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit enthält
  - Irrtumswahrscheinlichkeit: $\alpha = P\{|x - \mu_x| > x_\alpha\}$
  - Statistische Sicherheit: $1 - \alpha = P\{|x - \mu_x| < x_\alpha\}$



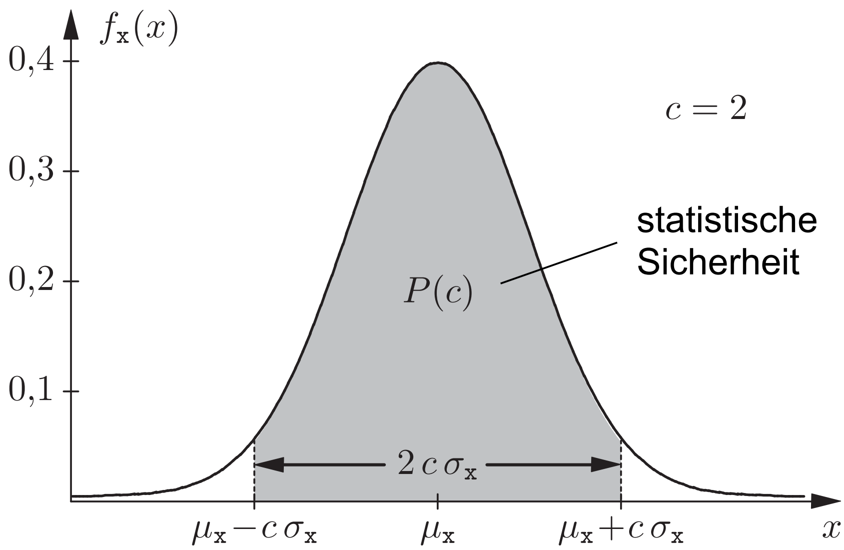
4.4.1 Konfidenzintervall und statistische Sicherheit

Karlsruher Institut für Technologie

- In der Praxis geht man meist von einer **Normalverteilung** aus

➡ Konfidenzintervall in Vielfachen c der Standardabweichung ausgedrückt:

$$\mu_x - c\,\sigma_x \le x \le \mu_x + c\,\sigma_x$$



Konfidenzintervall bei Normalverteilung

4.4.1 Konfidenzintervall und statistische Sicherheit

- Die **statistische Sicherheit** wird bei der Normalverteilung damit:

$$P(c) = 1 - \alpha = P\left\{ \frac{|\mathrm{x} - \mu_\mathrm{x}|}{\sigma_\mathrm{x}} \leq c \right\} = \int\limits_{\mu_\mathrm{x} - c\sigma_\mathrm{x}}^{\mu_\mathrm{x} + c\sigma_\mathrm{x}} f_\mathrm{x}(x)\,\mathrm{d}x$$

- Die folgende Transformation führt auf eine **Standardnormalverteilung**:

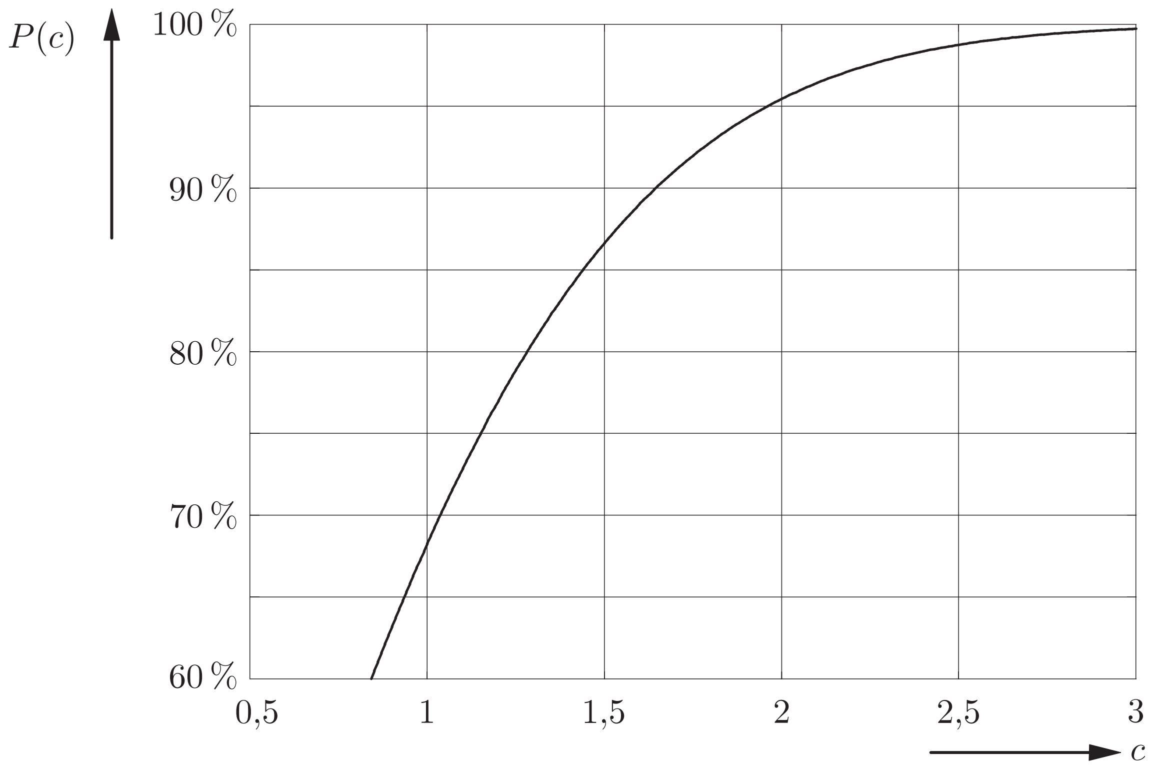
$$\mathrm{z} = \frac{\mathrm{x} - \mu_\mathrm{x}}{\sigma_\mathrm{x}}$$

$$\rightarrow \quad P(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-c}^{c} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z = \mathrm{erf}\left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right)$$

Gauß'sche Fehlerfunktion: $\mathrm{erf}(c) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{c} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{lcll} c = 1 & : & \mu_\mathrm{x} \pm \sigma_\mathrm{x} & \rightarrow \quad P = 68{,}27\% \\ c = 2 & : & \mu_\mathrm{x} \pm 2\sigma_\mathrm{x} & \rightarrow \quad P = 95{,}45\% \\ c = 3 & : & \mu_\mathrm{x} \pm 3\sigma_\mathrm{x} & \rightarrow \quad P = 99{,}73\% \end{array}$$

4.4.1 Konfidenzintervall und statistische Sicherheit



Statistische Sicherheit bei bekannter Standardabweichung

- Das **Konfidenzintervall** für eine Zufallsgröße x wurde als Vielfaches c der Standardabweichung angegeben:

$$\mu_{\mathrm{x}} - c\,\sigma_{\mathrm{x}} \le \mathrm{x} \le \mu_{\mathrm{x}} + c\,\sigma_{\mathrm{x}}$$

- Möchte man ein **Konfidenzintervall für den Stichprobenmittelwert** $\hat{\mathrm{x}}$ einer Messreihe von n **unabhängigen** Messungen ermitteln, so muss nach (4.82) die Standardabweichung des Stichprobenmittelwertes

$$\sigma_{\hat{\mathrm{x}}} = \frac{\sigma_{\mathrm{x}}}{\sqrt{n}}$$

herangezogen werden:

$$\boxed{\mu_{\mathrm{x}} - \underbrace{c\,\frac{\sigma_{\mathrm{x}}}{\sqrt{n}}}_{u_{\hat{\mathrm{x}}}} \le \hat{\mathrm{x}} \le \mu_{\mathrm{x}} + \underbrace{c\,\frac{\sigma_{\mathrm{x}}}{\sqrt{n}}}_{u_{\hat{\mathrm{x}}}}}$$

- Die **Messunsicherheit** $u_{\hat{\mathrm{x}}}$ ist abhängig von c und wird wie folgt definiert:

$$\boxed{u_{\hat{\mathrm{x}}} = c \cdot \sigma_{\hat{\mathrm{x}}} = c\,\frac{\sigma_{\mathrm{x}}}{\sqrt{n}}}$$

- In der Praxis ist die Standardabweichung σ_{x} jedoch **nicht** bekannt. Daher wird die empirische Standardabweichung s_{x} als **Schätzwert** eingesetzt
- Die Transformation

$$\boxed{\mathrm{t} = \frac{\hat{\mathrm{x}} - \mu_{\mathrm{x}}}{\mathrm{s}_{\mathrm{x}}/\sqrt{n}}}$$

ergibt eine t-verteilte Zufallsvariable mit $n-1$ Freiheitsgraden

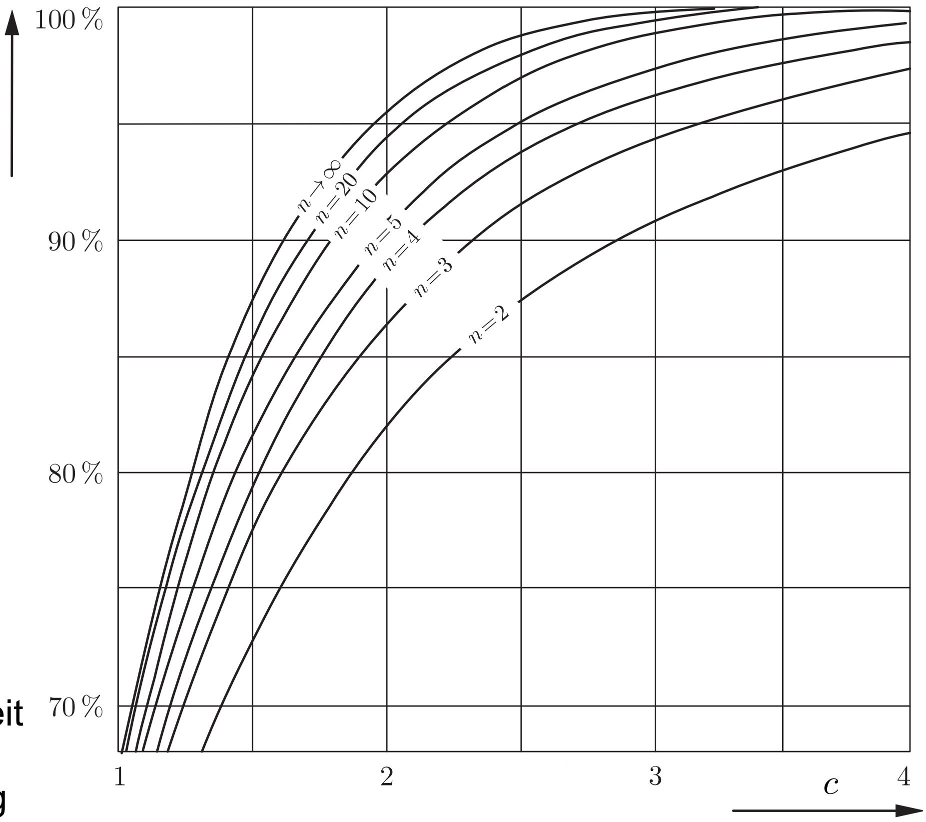
- Daher muss hier zur Bestimmung der statistischen Sicherheit **aus einer Stichprobe** mit dem **Integral der t-Verteilung** gearbeitet werden:

$$\boxed{P_n(c) = P\left\{\frac{|\hat{\mathrm{x}} - \mu_{\mathrm{x}}|}{\mathrm{s}_{\mathrm{x}}/\sqrt{n}} = |\mathrm{t}| \le c\right\} = \int_{-c}^{c} \underbrace{\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{(n+1)/2}}}_{f_{\mathrm{t}}(t)}\,\mathrm{d}t}$$

- Das Integral der t-Verteilung ist abhängig vom Stichprobenumfang; der Index n bei $P_n(c)$ bezeichnet jedoch die Zahl der Freiheitsgrade

$P_n(c) = P\{|\mathtt{t}| \leq c\}$

Integral der t-Verteilung



Statistische Sicherheit bei **geschätzter** Standardabweichung

Praktische Ermittlung des Konfidenzintervalls aus einer Stichprobe:

1. Wahl einer statistischen Sicherheit $P\{|\mathtt{t}| \leq c\}$
2. Ablesen des Wertes c mit der statistischen Sicherheit und dem Stichprobenumfang n
3. Berechnung der Standardabweichung der Stichprobe:

$$\mathrm{s_x} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x}_i - \hat{\mathrm{x}})^2}$$

4. Mit der Messunsicherheit des Stichprobenmittelwertes

$$u_{\hat{\mathrm{x}}} = c \cdot \frac{\mathrm{s_x}}{\sqrt{n}}$$

ergibt sich das Vertrauensintervall zu:

$$\mu_\mathrm{x} - c\,\frac{\mathrm{s_x}}{\sqrt{n}} \leq \hat{\mathrm{x}} \leq \mu_\mathrm{x} + c\,\frac{\mathrm{s_x}}{\sqrt{n}}$$

4.4.2 Hypothesen und Testverfahren

- **Wunsch**: Überprüfung einer präzise formulierten **Nullhypothese** H_0
  Beispiel: „Entstammt eine Stichprobe einer Grundgesamtheit?“
- **Problem**: Hypothesen kann man nur widerlegen, nicht jedoch beweisen!
- Der **Nullhypothese** H_0 steht eine **Alternativhypothese** H_1 gegenüber

Testentscheidung	**tatsächlicher Zustand**	
H_0 wird	H_0 trifft zu	H_0 trifft nicht zu
abgelehnt	α (Fehler 1. Art)	$1-\beta$
bestätigt	$1-\alpha$	β (Fehler 2. Art)

- **Signifikanzniveau** α: Irrtumswahrscheinlichkeit, die man bereit ist zu akzeptieren, falls das Testverfahren eine Ablehnung einer tatsächlich zutreffenden Nullhypothese H_0 ergibt (Fehler 1. Art ≙ Falschalarm)

  ➡ Wahl eines **kleinen** Signifikanzniveaus: $0{,}001 \leq \alpha \leq 0{,}05$

- **Problem**: Beim Verkleinern von α steigt die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art (Hypothese H_0 trifft nicht zu, wird aber „bestätigt“ ≙ Schlupf)

4.4.3 Signifikanztest für den Stichprobenmittelwert

- **Frage:** Gehört eine Stichprobe zu einer vorgegebenen (normalverteilten) Grundgesamtheit?

Signifikanztest für den Stichprobenmittelwert (Parametertest)**:**
Man geht von einer Normalverteilung $N(\mu_0, \sigma_x^2)$ aus und überprüft, ob der Mittelwert $\hat{x}$ der Stichprobe ausreichend nahe bei μ_0 liegt

Vorgehensweise

1. Voraussetzungen prüfen:
   - Unabhängigkeit der Messwerte
   - Normalverteilung der Grundgesamtheit mit Erwartungswert μ_0
2. Ermitteln des Stichprobenmittelwertes $\hat{x}$ und ggf. der Standardabweichung der Stichprobe s_x
3. Aufstellen der Nullhypothese: $H_0 : \hat{x} = \mu_0 \qquad H_1 : \hat{x} \neq \mu_0$

4. Festlegen der Prüfgröße c:
   - Varianz σ_x^2 bekannt ➡ Normalverteilung: $$\boxed{z = \frac{|\hat{x} - \mu_0|}{\sigma_x}\sqrt{n} = c}$$
   - Varianz σ_x^2 unbekannt ➡ t-Verteilung: $$\boxed{t = \frac{|\hat{x} - \mu_0|}{s_x}\sqrt{n} = c}$$ (Freiheitsgrade: $n - 1$)
5. Festlegen des Signifikanzniveaus $\alpha \to$ statistische Sicherheit: $\boxed{P = 1 - \alpha}$
6. Bestimmen der Wahrscheinlichkeit $P(c)$ der Prüfgröße:
   Aus einer Tabelle wird der Wert für $P(c)$ bzw. $P_n(c)$ entnommen
7. Testentscheidung:

$$\boxed{P(c) \begin{cases} \leq \quad 1-\alpha & \Rightarrow \text{‘Annahme’ der Nullhypothese} \\ > \quad 1-\alpha & \Rightarrow \text{Ablehnung der Nullhypothese} \end{cases}}$$

4.4.3 Signifikanztest für den Stichprobenmittelwert

Beispiel 4.9: Signifikanztest

- Sollmaß eines Werkstücks: $\boxed{\mu_0 = 12{,}000\,\mathrm{mm}}$
- Vermessung einer Stichprobe mit dem Umfang $n = 90$
  - Stichprobenmittelwert: $\boxed{\hat{x} = 12{,}075\,\mathrm{mm}}$
  - Standardabweichung: $\boxed{s_x = 0{,}229\,\mathrm{mm}}$
- Großer Stichprobenumfang $n > 30 \;\Rightarrow$ t-Verteilung $\triangleq$ Normalverteilung

➡ $$\boxed{\sigma_{\hat{x}} = \sigma_x/\sqrt{n} \approx s_x/\sqrt{90} = 0{,}0241\,\mathrm{mm}}$$

- Signifikanzniveau: $\pm 3\sigma_x \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0{,}0027 \quad \Rightarrow \quad 1-\alpha = 0{,}9973$

➡ $$\boxed{P(c) = P\left(\frac{|\hat{x} - \mu_0|}{\sigma_{\hat{x}}}\right) = P(3{,}112) = 0{,}9981 > 1-\alpha}$$

- Abweichung v. wahren Mittelwert **signifikant** $\Rightarrow$ $\hat{x}$ **nicht** repräsentativ ■

4.4.4 χ^2-Anpassungstest

Anpassungstest: Prüfen, ob eine Stichprobe einer Grundgesamtheit mit einer vorgegebenen, beliebigen Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{\mathrm{x}}(x)$ entstammt

- Teilen des Wertebereichs von x in k **disjunkte Intervalle** (Klassen):

$$\Delta_1, \ldots, \Delta_k$$

- Theoretische Wahrscheinlichkeit dafür, dass x in die Klasse Δ_i fällt:

$$p_i = \int_{\Delta_i} f_{\mathrm{x}}(x)\,\mathrm{d}x \qquad \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$$

- Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer **unabhängigen** Stichprobe mit dem Umfang n gerade n_i Elemente in die Klasse Δ_i (Einzelwahrscheinlichkeit: p_i) fallen, wird durch die **Binomialverteilung** beschrieben:

$$f_{\mathrm{n}_i} = \binom{n}{\mathrm{n}_i} p_i^{\mathrm{n}_i} (1-p_i)^{n-\mathrm{n}_i}$$

Institut für Industrielle Informationstechnik

4.4.4 χ^2-Anpassungstest

- Die **Binomialverteilung** geht für große n in eine **Normalverteilung** über (Moivre-Laplace-Theorem: Spezialfall des zentralen Grenzwertsatzes) und lässt sich dann wie folgt **annähern**:

$$f_{\mathrm{n}_i} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n\, p_i(1-p_i)}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(\mathrm{n}_i - n\,p_i)^2}{2n\,p_i(1-p_i)}} \quad \rightarrow \quad \mathrm{E}\{\mathrm{n}_i\} \approx n\,p_i$$

$$\sigma_{\mathrm{n}_i}^2 \approx n\,p_i \quad \text{für} \quad p_i \ll 1$$

- Die Summe der auf die jeweiligen Varianzen $\sigma_{\mathrm{n}_i}^2 \approx n\,p_i$ normierten quadratischen Abweichungen zwischen der tatsächlichen Elementezahl n_i und dem Erwartungswert $n\,p_i$ für jede Klasse k ist ein **Maß für die Abweichung beider Verteilungen** und ist näherungsweise χ^2-verteilt:

$$\chi^2 \approx \sum_{i=1}^{k} \frac{(\mathrm{n}_i - n\,p_i)^2}{n\,p_i}$$

ist χ^2-verteilt mit $(k-1)$ Freiheitsgraden

- Bei der **Klasseneinteilung** wünscht man sich möglichst viele Klassen mit genügend vielen Elementen pro Klasse (≥ 5, außer bei den Randklassen)

Institut für Industrielle Informationstechnik

Vorgehensweise

1. Voraussetzungen prüfen:
   - Unabhängigkeit der Messwerte
   - Möglichst großer Stichprobenumfang
2. Erstellen eines Histogramms:
   - Festlegen der k Klassen Δ_i
   - Ermitteln der absoluten Häufigkeiten n_i
   - Nachbarklassen zusammenfassen, falls $\mathrm{n}_i < 5$ oder $\mathrm{n}_{i,\mathrm{Rand}} = 0$
3. Aufstellen der Nullhypothese: $H_0:\ f_{\mathrm{x}}(x) = f_0(x) \quad H_1:\ f_{\mathrm{x}}(x) \neq f_0(x)$
4. Festlegen des Signifikanzniveaus $\alpha \rightarrow$ statist. Sicherheit: $P = 1 - \alpha$
5. Berechnen der Prüfgröße: $$\chi^2 \approx \sum_{i=1}^{k} \frac{(\mathrm{n}_i - n\,p_i)^2}{n\,p_i}$$

4.4.4 χ^2-Anpassungstest

6. Bestimmung der Freiheitsgrade:

$$m = k - 1 - \text{Anzahl der geschätzten Parameter}$$

   Werden z. B. bei einer Normalverteilung der Erwartungswert und die Varianz geschätzt, so verringert sich m zusätzlich um zwei: $m = k - 2 - 1$

7. Bestimmung des Grenzwertes χ^2_α der Prüfgröße:

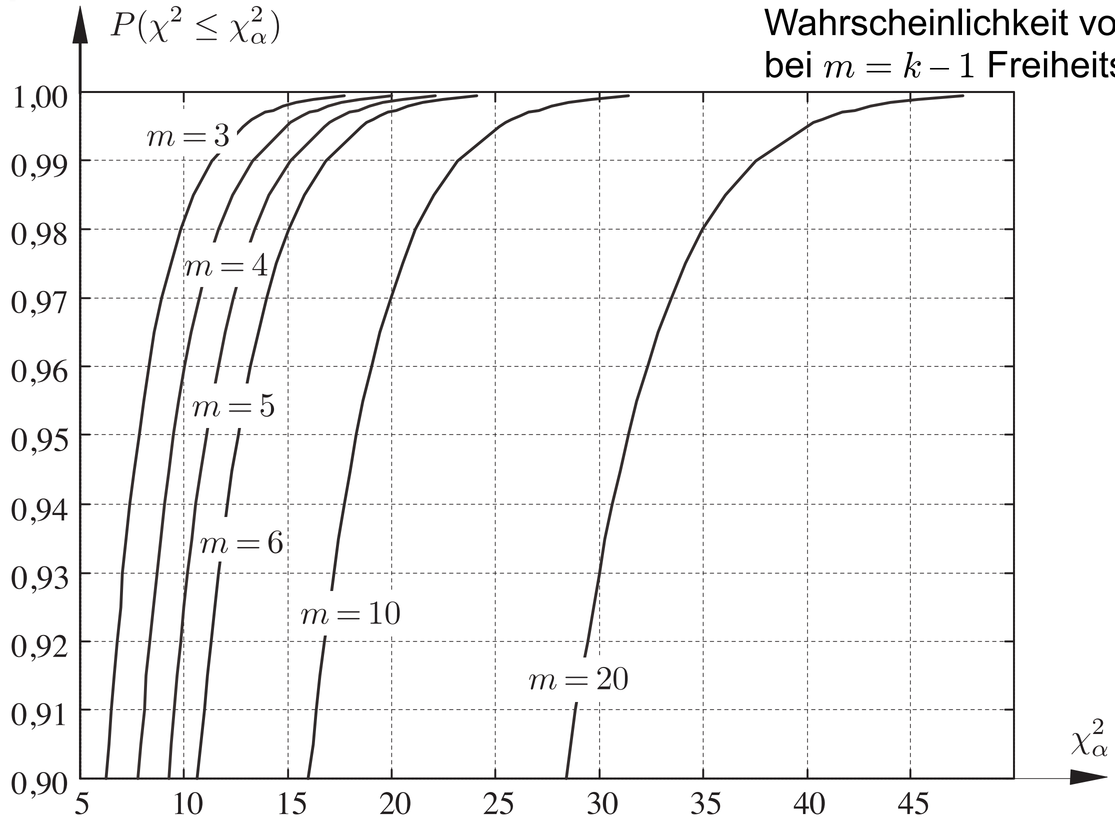
$$P(\chi^2 \leq \chi^2_\alpha) = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad \chi^2_\alpha$$

8. Testentscheidung:
   - Annahme der Nullhypothese: $$\chi^2 \leq \chi^2_\alpha$$
   - Ablehnung der Nullhypothese: $$\chi^2 > \chi^2_\alpha$$

IIIT Institut für Industrielle Informationstechnik

Karlsruher Institut für Technologie

Wahrscheinlichkeit von $\chi^2 \leq \chi^2_\alpha$ bei $m = k-1$ Freiheitsgraden



Karlsruher Institut für Technologie

Beispiel 4.10: χ^2-Test auf Gleichverteilung

- Gegeben: Würfel mit 1 bis 6 Augen → Gleichverteilung der Augenzahlen?
- Nullhypothese: $\boxed{H_0 : \; f_x(x) = f_0(x)}$ Gleichverteilung
- Stichprobenumfang: $n = 120$

  ➡ Theoretische Elementezahl pro Klasse: $n\,p_i = 20$
- Signifikanzniveau: $\alpha = 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P(\chi^2 \leq \chi^2_\alpha) = 1 - \alpha = 0{,}95}$
- Freiheitsgrade: $m = k - 1 = 5 \quad \rightarrow \quad \boxed{\chi^2_\alpha = 11{,}0}$

Augenzahl	1	2	3	4	5	6	Summe
Anzahl n_i	14	27	15	24	13	27	120
$n_i - n\,p_i$	−6	7	−5	4	−7	7	0
$\frac{(n_i - n\,p_i)^2}{n\,p_i}$	1,8	2,45	1,25	0,8	2,45	2,45	11,2

- Prüfgröße: $\boxed{\chi^2 = 11{,}2 \; > \; \chi^2_\alpha}$ $\Rightarrow$ Nullhypothese wird **abgelehnt** ∎

4.5 Qualitätssicherung

4.5.1 Beurteilung von Fertigungsprozessen

Beurteilung von Fertigungsprozessen

- **Ziel:** Prüfen, inwieweit 99,73% $(\mu_\mathrm{x} \pm 3\sigma_\mathrm{x})$ der Istmaße x eines Werkstücks innerhalb der spezifizierten Toleranzgrenzen liegen
- Vorauss.: x normalverteilt mit bekannten Parametern (große Stichprobe)

- Breite des Toleranzfeldes: $2\Delta x_\mathrm{s} = x_\mathrm{max} - x_\mathrm{min}$
- Abweichung des Stichprobenmittelwertes von der Toleranzfeldmitte:

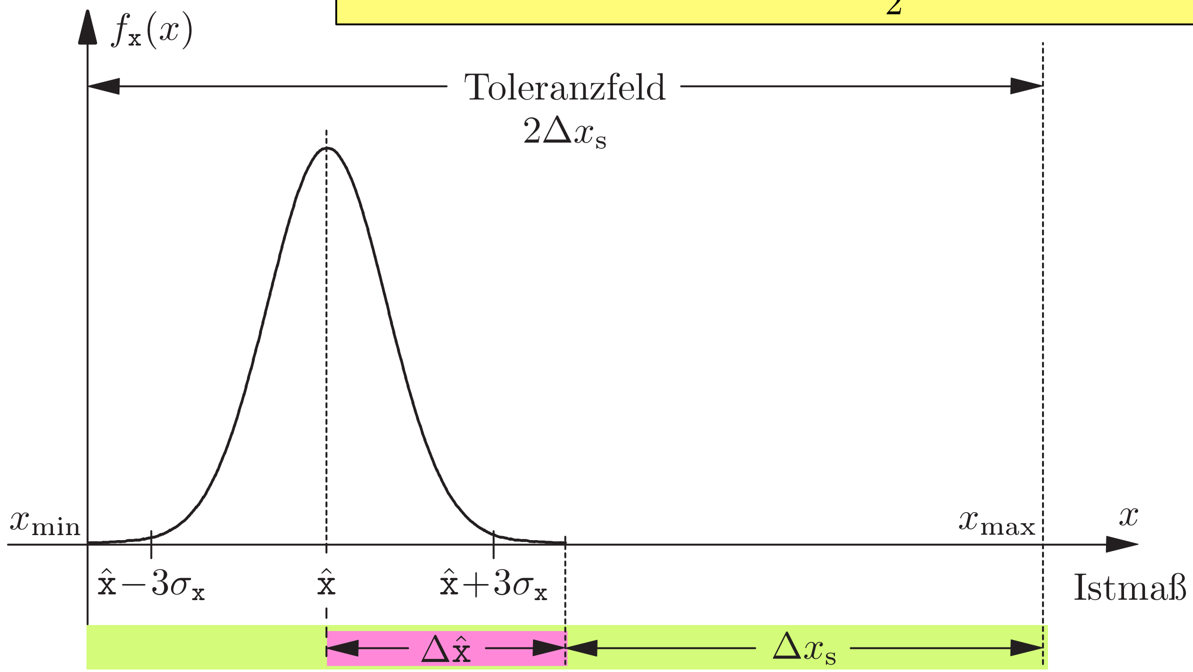
$$\Delta\hat{\mathrm{x}} = \left| \frac{1}{2}(x_\mathrm{max} + x_\mathrm{min}) - \hat{\mathrm{x}} \right|$$

Prozessfähigkeitsindex: $c_\mathrm{p} = \dfrac{x_\mathrm{max} - x_\mathrm{min}}{6\sigma_\mathrm{x}} = \dfrac{\Delta x_\mathrm{s}}{3\sigma_\mathrm{x}}$

Prozessbrauchbarkeitsindex: $c_\mathrm{pk} = \dfrac{\Delta x_\mathrm{s} - \Delta\hat{\mathrm{x}}}{3\sigma_\mathrm{x}} = c_\mathrm{p}\left(1 - \dfrac{\Delta\hat{\mathrm{x}}}{\Delta x_\mathrm{s}}\right)$

- Für einen geringen Ausschuss (< 0,27%) müssen beide Indices > 1 sein (d. h. Toleranz > Streuung der Istmaße)

Für die Ausschussrate gilt: $p \approx \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{erf}(3\,c_{\mathrm{pk}}/\sqrt{2})\right)$



Spezifikation von Fertigungstoleranzen

Beispiel 4.11: Länge eines Werkstückes

- Spezifiziertes Sollmaß: $x = 0{,}609\,\mathrm{mm}$
- Toleranzfeld (symmetrisch): $x_{\min} = 0{,}591\,\mathrm{mm} \leq \mathrm{x} \leq x_{\max} = 0{,}627\,\mathrm{mm}$
- Stichprobe $\rightarrow$ $\hat{\mathrm{x}} = 0{,}600\,\mathrm{mm} \approx \mu_{\mathrm{x}}$ $\quad$ $\mathrm{s}_{\mathrm{x}} = 0{,}003\,\mathrm{mm} \approx \sigma_{\mathrm{x}}$

$$\Delta x_{\mathrm{s}} = \frac{1}{2}(x_{\max} - x_{\min}) = 0{,}018\,\mathrm{mm}$$

$$\Delta\hat{\mathrm{x}} = \frac{1}{2}(x_{\min} + x_{\max}) - \hat{\mathrm{x}} = 0{,}009\,\mathrm{mm}$$

➡ Prozessfähigkeitsindex: $c_{\mathrm{p}} = \dfrac{\Delta x_{\mathrm{s}}}{3\sigma_{\mathrm{x}}} = \dfrac{0{,}018\,\mathrm{mm}}{0{,}009\,\mathrm{mm}} = 2$

Prozessbrauchbarkeitsindex: $c_{\mathrm{pk}} = c_{\mathrm{p}}\left(1 - \dfrac{\Delta\hat{\mathrm{x}}}{\Delta x_{\mathrm{s}}}\right) = 2\left(1 - \dfrac{0{,}009\,\mathrm{mm}}{0{,}018\,\mathrm{mm}}\right) = 1$

Ausschussrate: $p = \dfrac{1}{2}\left(1 - \mathrm{erf}(3\,c_{\mathrm{pk}}/\sqrt{2})\right) = 0{,}00135 = 1350\,\mathrm{dpm}$ ■

- Hersteller elektronischer Geräte beziehen große Mengen elektronischer Bauelemente mit vertraglich festgelegten Ausfallraten
- **Qualitätsüberprüfung nur stichprobenweise** möglich

Wahrscheinlichkeit für k_1 bis k_2 Ausfälle pro Stichprobe (Binomialverteilung):

$$p_n\{k_1 \leq i \leq k_2\} = \sum_{i=k_1}^{k_2} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

n : Stichprobenumfang
p : Ausfallwahrscheinlichkeit
k : Zahl der registrierten Ausfälle

Für $n \to \infty$ und $p \to 0$ gilt das Poisson'sche Theorem (→ Poissonverteilung):

$$p_n\{k_1 \leq i \leq k_2\} = \sum_{i=k_1}^{k_2} \frac{n^i}{i!} p^i \, \mathrm{e}^{-np}$$

➡ Wahrscheinlichkeit für maximal k Ausfälle:

$$p_n\{i \leq k\} = \mathrm{e}^{-np} \sum_{i=0}^{k} \frac{(np)^i}{i!}$$

Beispiel 4.12: Ausfallwahrscheinlichkeit

- Stichprobenumfang: $n = 3000$
- Ausfallwahrscheinlichkeit: $p = 10^{-3}$
- **Gesucht:** Wahrscheinlichkeit, dass in der Stichprobe maximal 5 Bauelemente defekt sind

$$p_n\{i \leq k\} = \mathrm{e}^{-np} \sum_{i=0}^{k} \frac{(np)^i}{i!}$$

➡ $$p_n\{i \leq 5\} = \mathrm{e}^{-3 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}} \sum_{i=0}^{5} \frac{(3 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3})^i}{i!} = 0{,}916$$

■

- Im Prüffeld wird häufig mit der **Ausfallrate** λ (durchschnittliche Ausfälle pro Zeit) gearbeitet. Bei der Prüfung von Bauelementen definiert man:

  nt : Zahl der „Bauelementestunden“ (Stichprobenumfang × Prüfzeit)

  λ : Ausfallrate bezogen auf die Prüfzeit

$$\boxed{\lambda \cdot nt = n \cdot p} \quad \rightarrow \quad \boxed{p_n\{i \leq k\} = \mathrm{e}^{-\lambda\, nt} \sum_{i=0}^{k} \frac{(\lambda \cdot nt)^i}{i!}}$$

- Zur Bestimmung der Ausfallrate λ wird die Zahl k der Ausfälle nach nt Bauelementestunden **gemessen**. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Stichprobe höchstens k Ausfälle enthält, wird klein angesetzt (≙ Signifikanzniveau):

$$p_n\{i \leq k\} = 0{,}1 = \mathrm{e}^{-\lambda\, nt} \sum_{i=0}^{k} \frac{(\lambda \cdot nt)^i}{i!} \quad \Rightarrow \quad p_n\{i > k\} = 1 - \alpha = 0{,}9$$

groß

- Diese Gleichung ordnet der Zahl von Ausfällen k einen Wert $\lambda \cdot nt$ zu. Man kann schreiben:

$$\boxed{\lambda \cdot nt = f(k)}$$

$$\lambda \cdot nt = f(k)$$

- Logarithmierung ergibt:

$$\boxed{\log \lambda = \log f(k) - \log(nt)}$$

- Die Funktion $f(k)$ kann numerisch berechnet werden
- Für $\alpha = 0{,}1$ erhält man:

$k = 0$: $f(0) = 2{,}30$

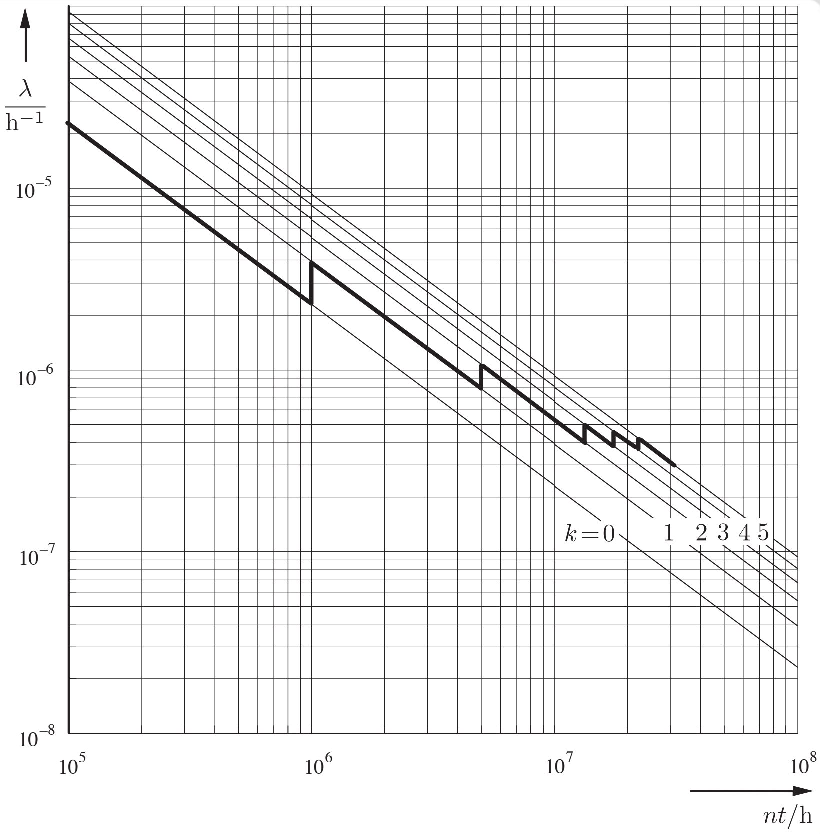
$k = 1$: $f(1) = 3{,}89$

$k = 2$: $f(2) = 5{,}32$

$k = 3$: $f(3) = 6{,}68$

$k = 4$: $f(4) = 7{,}99$

$k = 5$: $f(5) = 9{,}27$



Beispiel 4.13: Ausfallrate

- Eine Firma verarbeitet 3 Mio Bauelemente/Jahr. Für einen Test wird eine Stichprobe (n = 3000) bei erhöhten Temperaturen über 30 Tage getestet:

Stichprobenumfang: $n = 3000$

Prüfzeit: $t = 720\,\mathrm{h}$

Raffungsfaktor: $r \approx 10$ wegen Temperaturerhöhung

- Gemessene Ausfallzeiten von Bauelementen:

k	1	2	3	4	5
t/h	33	167	433	567	720
$r \cdot nt/\mathrm{h}$	10^6	$5 \cdot 10^6$	$1{,}3 \cdot 10^7$	$1{,}7 \cdot 10^7$	$2{,}16 \cdot 10^7$

➡ Ausfallrate: $$\boxed{\lambda = \frac{f(k)}{r \cdot nt} = \frac{9{,}27}{2{,}16 \cdot 10^7\,\mathrm{h}} = 4{,}3 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{h}^{-1}}$$

■

4.5.2 Bestimmung der Ausfallrate

- Die Zahl n der in der Stichprobe getesteten Bauteile ist von entscheidender Bedeutung für die Bewertung der **Ausfallwahrscheinlichkeit**.

Beispiel 4.14: Größe der Stichprobe

- Es werden folgende Ausfälle für 3 Lieferanten gemessen:

$$\begin{array}{llll}
\text{Lieferant A:} & k=0 & \text{von } n = 500, & \text{d.h. } 0 \text{ dpm} \\
\text{Lieferant B:} & k=1 & \text{von } n = 2000, & \text{d.h. } 500 \text{ dpm} \\
\text{Lieferant C:} & k=6 & \text{von } n = 10000, & \text{d.h. } 600 \text{ dpm}
\end{array}$$

➡ Lieferant A ist scheinbar am besten – **falsch!**

- **Grund:** Zahl n der getesteten Einheiten wurde nicht korrekt verwendet

$$\begin{array}{llll}
\text{Lieferant A:} & k<1 & \text{Ausfälle von } n = 500, & \text{d.h. } < 2000 \text{ dpm} \\
\text{Lieferant B:} & k<2 & \text{Ausfälle von } n = 2000, & \text{d.h. } < 1000 \text{ dpm} \\
\text{Lieferant C:} & k<7 & \text{Ausfälle von } n = 10000, & \text{d.h. } < 700 \text{ dpm}
\end{array}$$

➡ Lieferant C ist tatsächlich am besten – **richtig!**

■

- **Ziel:** Erkennung **systematischer** Fehler

Beispiel 4.16: MA-Filterung

- Differenz zwischen Messwerten und Sollwert: $\boxed{\mathrm{x}(t) = s(t) + \mathrm{e}(t)}$

$s(t)$: systematischer Fehler
$\mathrm{e}(t)$: zufälliger, mittelwertfreier Fehler

- Der zufällige Anteil $\mathrm{e}(t)$ kann durch eine gleitende Mittelung (*moving average*, MA) **unterdrückt** werden (Voraussetzung: M groß):

$$\begin{aligned}\bar{x}(t) &= \frac{1}{2M+1}\sum_{j=-M}^{M}\left(s(t-jT)+\mathrm{e}(t-jT)\right)\\ &= \frac{1}{2M+1}\left[\sum_{j=-M}^{M} s(t-jT) + \underbrace{\sum_{j=-M}^{M}\mathrm{e}(t-jT)}_{\approx 0}\right]\\ &= \frac{1}{2M+1}\sum_{j=-M}^{M} s(t-jT)\end{aligned}$$

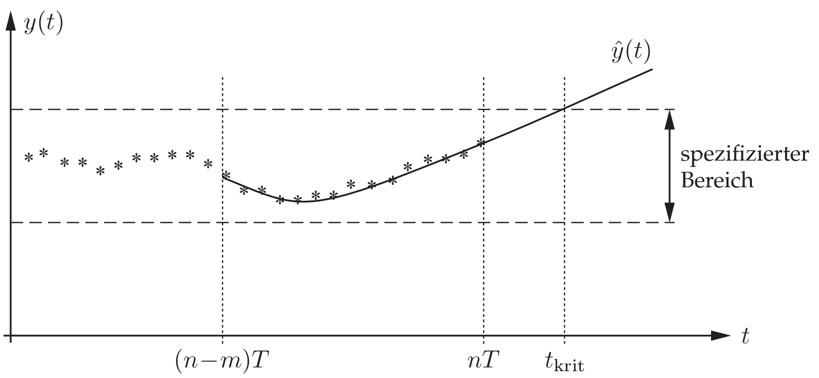
- Signalmodell: $\boxed{\mathrm{y}(t) = a_0\,\varphi_0(t) + a_1\,\varphi_1(t) + \ldots + a_k\,\varphi_k(t) + \mathrm{e}(t)}$ $t = nT$
- Für $m+1$ vergangene Messwerte ergibt sich (vgl. LS-Schätzer):

$$\hat{\mathbf{y}}_n = \begin{bmatrix}\hat{y}(n)\\ \hat{y}(n-1)\\ \vdots\\ \hat{y}(n-m)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\varphi_0(nT) & \cdots & \varphi_k(nT)\\ \varphi_0((n-1)T) & \cdots & \varphi_k((n-1)T)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \varphi_0((n-m)T) & \cdots & \varphi_k((n-m)T)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0(n)\\ a_1(n)\\ \vdots\\ a_k(n)\end{bmatrix} = \mathbf{\Phi}_n\,\mathbf{a}_n$$

➡ Parametervektor: $\boxed{\mathbf{a}_n = (\mathbf{\Phi}_n^{\mathrm{T}}\,\mathbf{\Phi}_n)^{-1}\,\mathbf{\Phi}_n^{\mathrm{T}}\,\mathbf{y}_n}$

Eigenschaften:

- Zufällige Fehler werden unterdrückt
- Veränderungen am Prozess und Trends können frühzeitig entdeckt werden



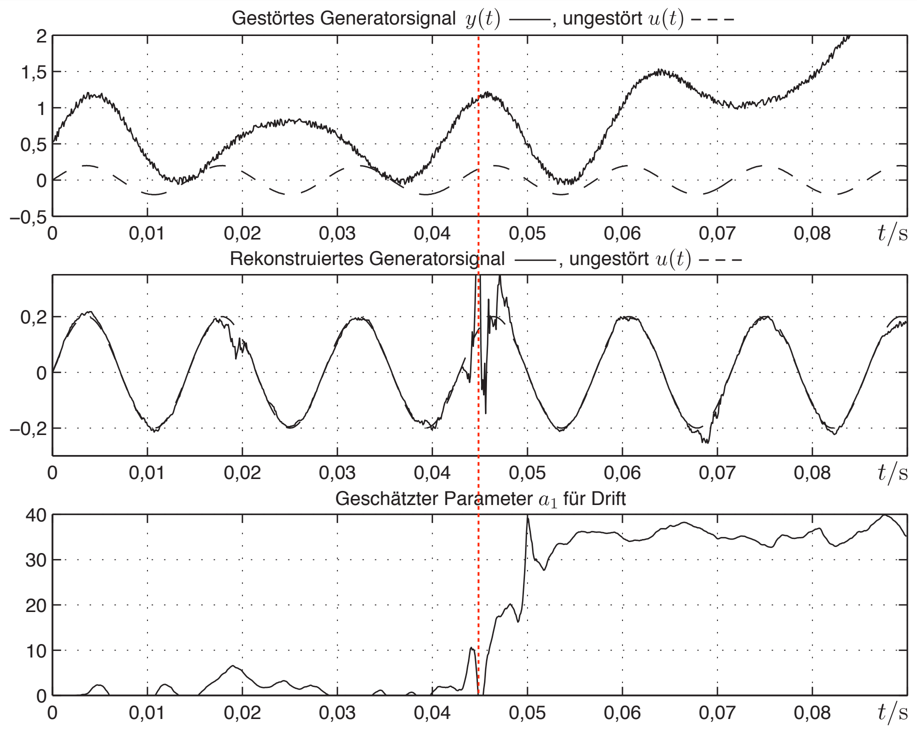
Beispiel 4.17: Modellgestützte Überwachung einer Generatorspannung

- Generatorspannung: $u(t) = a_3 \cdot \sin(2\pi f_\mathrm{g} t)$
- Störungen:
  - lineare Drift $a_1 t$ durch Temperatureinflüsse
  - Offset a_0
  - harmonische Netzstörung mit $f_\mathrm{n} = 50$ Hz
- Signalmodell: $\mathrm{y}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 \sin(2\pi f_\mathrm{n} t) + a_3 \sin(2\pi f_\mathrm{g} t) + \mathrm{e}(t)$
- Ansatz für LS-Schätzer (Phasenlage der Schwingungen sei bekannt):

$$\hat{\mathbf{y}}_n = \begin{bmatrix} 1 & nT & \sin(2\pi f_\mathrm{n} nT) & \sin(2\pi f_\mathrm{g} nT) \\ 1 & (n-1)T & \sin(2\pi f_\mathrm{n}(n-1)T) & \sin(2\pi f_\mathrm{g}(n-1)T) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & (n-m)T & \sin(2\pi f_\mathrm{n}(n-m)T) & \sin(2\pi f_\mathrm{g}(n-m)T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

→ $\mathbf{a}_n = (\mathbf{\Phi}_n^\mathrm{T} \mathbf{\Phi}_n)^{-1} \mathbf{\Phi}_n^\mathrm{T} \mathbf{y}_n$

→ Die **systematischen** Störeinflüsse können überwacht werden



Überwachung eines Generatorsignals mit sprunghafter Änderung des Parameters a_1 (Drift) bei t = 0,045. ■

4.6 Fehlerfortpflanzung

Messergebnis = Funktion mehrerer Messwerte: $\boxed{\mathrm{y} = f(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n) = f(\mathbf{x})}$

- Fehler der Messwerte: $\boxed{\Delta \mathrm{x}_i = \mathrm{x}_i - x_{i0}}$
- Fehler des Messergebnisses (Approximation mittels Taylor-Reihe):

$$\Delta \mathrm{y} = \mathrm{y} - y_0 = \sum_i \left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}_0} \Delta \mathrm{x}_i \qquad (4.252)$$

- Bei einer **Linearkombination** der Messwerte $\mathrm{y} = a_1\,\mathrm{x}_1 + \ldots + a_n\,\mathrm{x}_n$ folgt aus (4.252): $\boxed{\Delta \mathrm{y} = a_1\,\Delta \mathrm{x}_1 + a_2\,\Delta \mathrm{x}_2 + \cdots + a_n\,\Delta \mathrm{x}_n}$
- Bei einer **Multiplikation** der Messwerte $\mathrm{y} = a_1\,\mathrm{x}_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot a_n\,\mathrm{x}_n^{\alpha_n}$ rechnet man bevorzugt mit dem relativen Fehler:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = a_1\,x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \alpha_i\,a_i\,x_i^{\alpha_i - 1} \cdot \ldots \cdot a_n\,x_n^{\alpha_n} = y\,\frac{\alpha_i}{x_i}$$

$$\boxed{\Delta \mathrm{y} = \mathrm{y} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\Delta \mathrm{x}_i}{\mathrm{x}_i}} \qquad (4.258)$$

- **Zufällige Messfehler** werden meist durch ihre Varianz beschrieben. Die Varianz des **Messergebnisses** lässt sich wie folgt approximieren:

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{y}}^2 &= \mathrm{E}\left\{\left(\mathrm{y}-\mu_{\mathrm{y}}\right)^2\right\} \\ &\approx \mathrm{E}\left\{\left(\sum_i \left.\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}_0}(\mathrm{x}_i - x_{i0})\right)\left(\sum_j \left.\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{x}_0}(\mathrm{x}_j - x_{j0})\right)\right\} \\ &= \sum_i\sum_j \left.\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}_0} \cdot \left.\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{x}_0} \mathrm{E}\left\{(\mathrm{x}_i - x_{i0})(\mathrm{x}_j - x_{j0})\right\} \\ &\approx \sum_i\sum_j \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)\,\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)\,C_{\mathrm{x}_i\mathrm{x}_j}\end{aligned}$$

1. Bei statistisch **unabhängigen** Messwerten gilt: $C_{\mathrm{x}_i\mathrm{x}_j} = \sigma_{\mathrm{x}_i}^2\,\delta_{ij}$

$$\rightarrow \quad \sigma_{\mathrm{y}}^2 \approx \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)\right]^2 \sigma_{\mathrm{x}_i}^2$$

4.6 Fehlerfortpflanzung

$$\sigma_{\mathrm{y}}^2 \approx \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)\right]^2 \sigma_{\mathrm{x}_i}^2$$

Die Varianz des Messergebnisses y resultiert aus einer gewichteten Addition der Varianzen der Einzelmesswerte

2. Bei statistisch **abhängigen** Messwerten ist die Kovarianzmatrix keine Diagonalmatrix. Zur Berechnung der Fehlerfortpflanzung verwendet man die Korrelationskoeffizienten:

$$\sigma_{\mathrm{y}}^2 \approx \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)\right]^2 \sigma_{\mathrm{x}_i}^2 + \sum_i\sum_{j\neq i} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)\,\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)\,\sigma_{\mathrm{x}_i}\sigma_{\mathrm{x}_j}\cdot\rho_{\mathrm{x}_i\mathrm{x}_j}$$

4.6 Fehlerfortpflanzung

- Wird das Messergebnis als Produkt oder Quotient der Messwerte gebildet, so folgt aus (4.258) für den relativen Fehler:

$$\frac{\Delta \mathrm{y}}{y_0} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \frac{\Delta \mathrm{x}_i}{x_{i0}}$$

- Die **relative Varianz** ist damit:

$$\frac{\sigma_{\mathrm{y}}^2}{y_0^2} = \mathrm{E}\left\{\frac{\Delta \mathrm{y}^2}{y_0^2}\right\} = \mathrm{E}\left\{\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \frac{\Delta \mathrm{x}_i}{x_{i0}}\right]^2\right\} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i\, \alpha_j\, \underbrace{\mathrm{E}\left\{\frac{\Delta \mathrm{x}_i}{x_{i0}}\frac{\Delta \mathrm{x}_j}{x_{j0}}\right\}}_{\dfrac{C_{\mathrm{x}_i \mathrm{x}_j}}{x_{i0}\, x_{j0}}}$$

- Bei statistisch **unabhängigen** Messwerten x_i ergibt sich mit $C_{\mathrm{x}_i \mathrm{x}_j} = \sigma_{\mathrm{x}_i}^2\, \delta_{ij}$ für die **relative Varianz**:

$$\frac{\sigma_{\mathrm{y}}^2}{y_0^2} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\, \frac{\sigma_{\mathrm{x}_i}^2}{x_{i0}^2}$$

4.6 Fehlerfortpflanzung

Beispiel 4.18: Fehler bei Massebestimmung

- Die Masse einer in einem zylindrischen Tank gelagerten Flüssigkeit soll bestimmt werden:

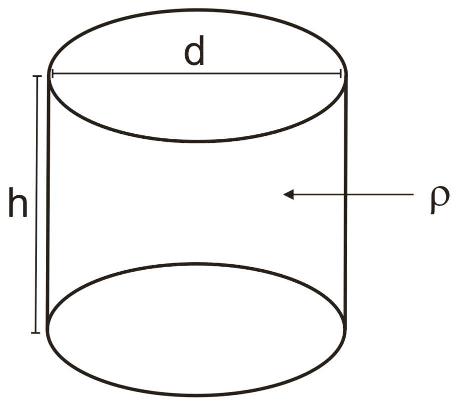
$$\mathrm{m} = \pi \left(\frac{\mathrm{d}}{2}\right)^2 \cdot \rho \cdot \mathrm{h}$$

- Exponenten der Messwerte:

$$\alpha_{\mathrm{d}} = 2\,,\ \alpha_{\rho} = 1\,,\ \alpha_{\mathrm{h}} = 1$$

➡ Bei statistisch unabhängigen x_i gilt:

$$\left(\frac{\sigma_{\mathrm{m}}}{\mathrm{m}}\right)^2 = 4\left(\frac{\sigma_{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\mathrm{h}}}{\mathrm{h}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\rho}}{\rho}\right)^2$$



Mit den rel. Streuungen der Messungen

$$\frac{\sigma_{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}} = 1\,\%\,,\quad \frac{\sigma_{\mathrm{h}}}{\mathrm{h}} = 0{,}5\,\%\,,\quad \frac{\sigma_{\rho}}{\rho} = 0{,}9\,\%$$

folgt die rel. Streuung der Masse:

$$\frac{\sigma_{\mathrm{m}}}{\mathrm{m}} = \sqrt{4 + 0{,}25 + 0{,}81}\ \% = 2{,}2\%$$ ■