

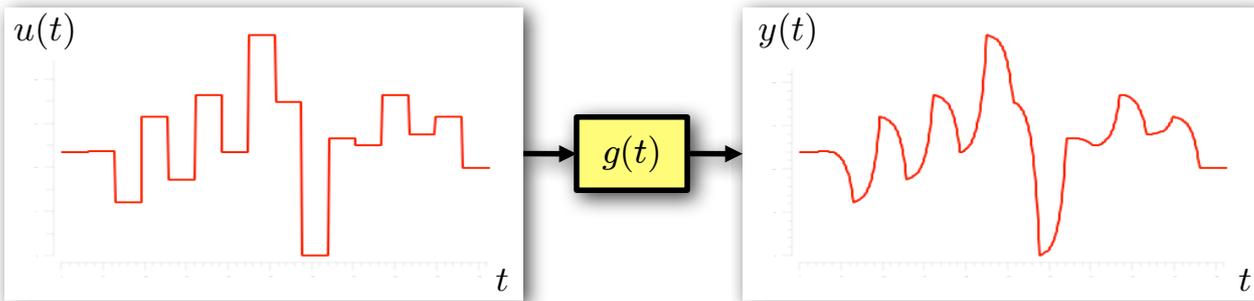
# 6. Messung stochastischer Signale

- 6.1 Stochastische Prozesse
- 6.2 Korrelationsfunktionen
- 6.3 Korrelationsmesstechnik
- 6.4 Spektrale Darstellung stochastischer Signale
- 6.5 Systemidentifikation
- 6.6 Wiener-Filter

## 6.1 Stochastische Prozesse

- 6.1.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung und Wahrscheinlichkeitsdichte
- 6.1.3 Schar- und Zeitmittelwerte
- 6.1.4 Momente der Statistik 1. Ordnung
- 6.1.5 Momente der Statistik 2. Ordnung
- 6.1.6 Stationäre Prozesse
- 6.1.7 Ergodische Prozesse

## Übertragung deterministischer Signale über LTI-Systeme



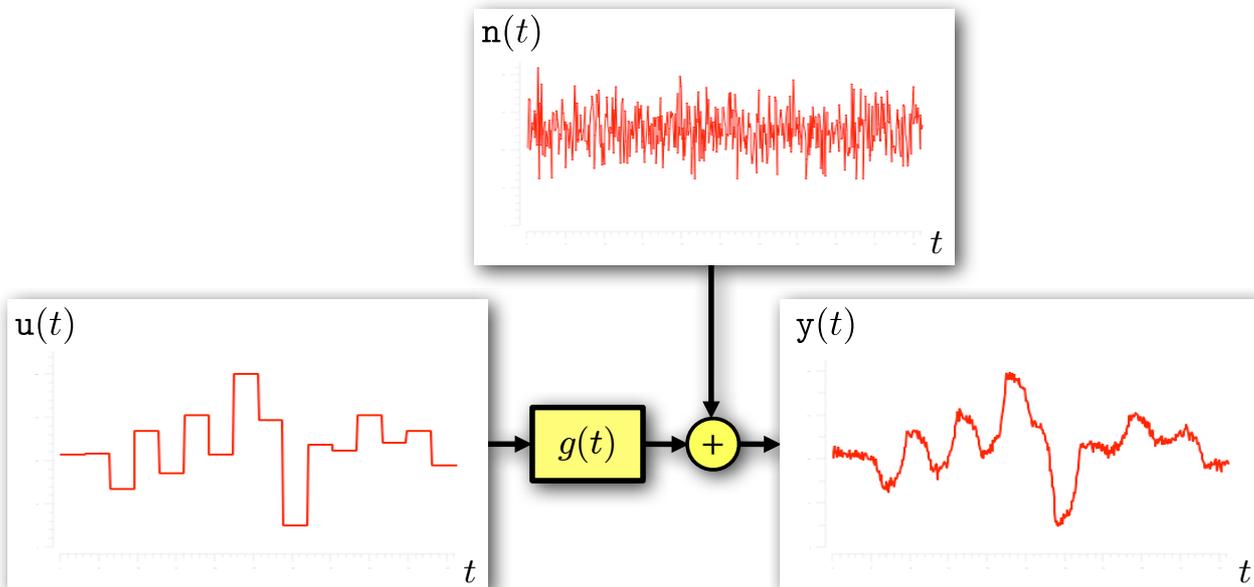
- Ausgang eines Systems ergibt sich durch Faltung des Eingangssignals  $x(t)$  mit der Impulsantwort  $g(t)$

$$y(t) = u(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

- Eingangs- und Ausgangsgrößen **deterministisch** beschrieben (Funktion der Signalamplitude über der Zeit)
- Vielfach sind die interessierenden Signale nicht deterministischer, sondern **stochastischer** Natur

## Beispiel: Nachrichtenübertragung

- Eine Nachrichtenquelle erzeugt eine Sequenz  $u(t)$  zufälliger Symbole
- Bei der Übertragung durch einen LTI-Kanal mit der Impulsantwort  $g(t)$  wird dem Signal ein Rauschprozess  $n(t)$  additiv überlagert

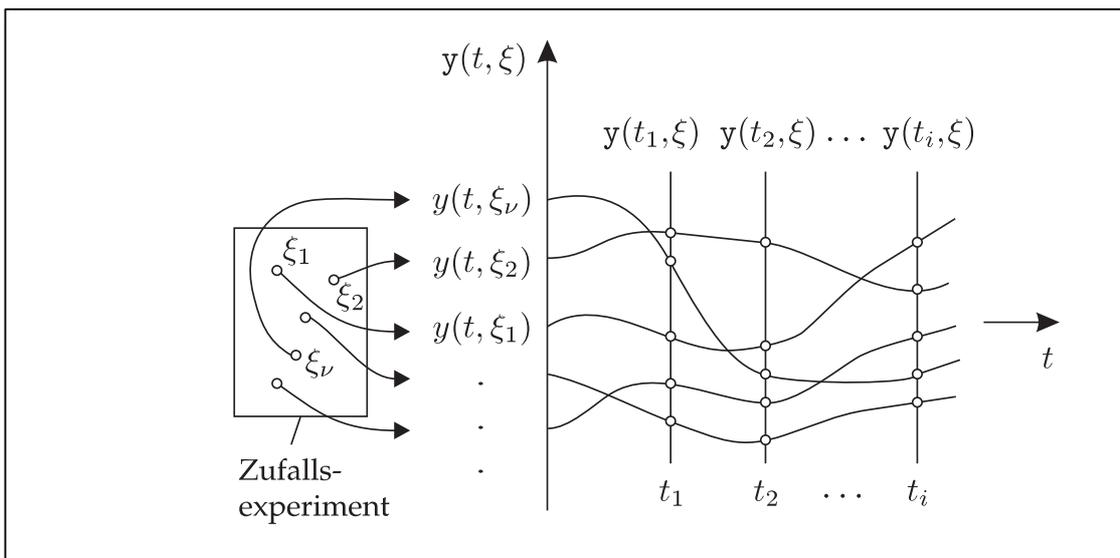


- Probleme der Informationstechnik erfordern i. Allg. Lösungen, die nicht nur für bestimmte einzelne Signale, sondern für eine **große Zahl möglicher Signale** mit gewissen **gemeinsamen Eigenschaften** gelten
- Mathematisches Modell für eine derartige Schar von Signalen:

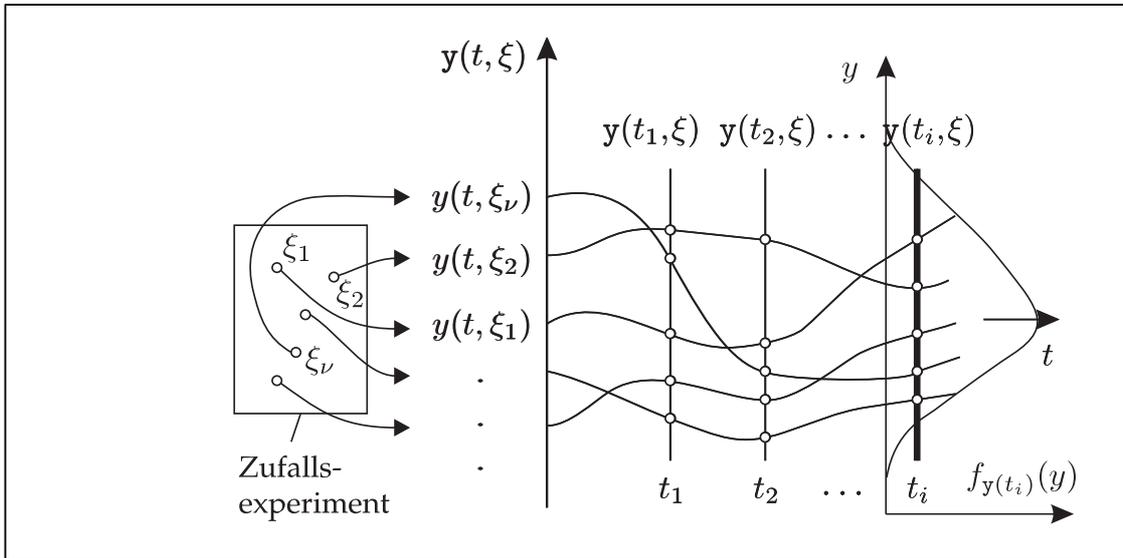
**stochastischer Prozess** (Zufallsprozess)

## Anwendungen (Auswahl)

- Messtechnik (Laufzeitkorrelation)
- Systemidentifikation (stochastische Anregung)
- Signalrestauration (Wiener-Filter)
- Optimale Signaldetektion (Matched-Filter)
- Signalprädiktion (AR-Signalmodell)



Ein **stochastischer Prozess**  $y(t, \xi)$  besteht aus einem Zufalls-experiment und einer Zuordnung von deterministischen Funktionen  $y(t, \xi_\nu)$ , den sogenannten **Musterfunktionen** (Realisierungen), zu den Elementarereignissen  $\xi_\nu$  des Zufallsexperimentes



Für jeden festen Zeitpunkt  $t_i = \text{const.}$  geht der stochastische Prozess  $y(t, \xi)$  in eine Zufallsvariable  $y(t_i, \xi)$  über, die sich mit Hilfe einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF) beschreiben lässt.

## Interpretation:

- 1. Fall:  $\xi$  ist fest,  $t$  ist variabel  $\rightarrow y(t, \xi_\nu)$  ist eine Realisierung des stochastischen Prozesses, d. h. eine deterministische **Musterfunktion**
- 2. Fall:  $\xi$  ist variabel,  $t$  ist fest  $\rightarrow y(t_i, \xi)$  ist eine Zufallsvariable, die jedem Ereignis  $\xi_\nu$  den entsprechenden Funktionswert der zugehörigen Musterfunktion zuordnet
- 3. Fall:  $\xi$  ist fest,  $t$  ist fest  $\rightarrow y(t_i, \xi_\nu)$  ist ein Zahlenwert
- 4. Fall:  $\xi$  ist variabel,  $t$  ist variabel  $\rightarrow y(t, \xi)$  ist ein stochastischer Prozess, d. h. eine Schar von Musterfunktionen

Bei stochastischen Prozessen  $y(t, \xi)$  sind Wahrscheinlichkeitsverteilungen  $F_Y(y, t)$  und Wahrscheinlichkeitsdichten  $f_Y(y, t)$  abhängig von der Zeit

### Definitionen 6.4–6.5: Verbundverteilung, Verbunddichte

- Für zwei stochastische Prozesse  $x(t, \xi)$  und  $y(t, \xi)$  werden die Verbundverteilung und die Verbunddichte definiert, indem die Zeitabhängigkeit berücksichtigt wird:

$$F_{x(t_1)y(t_2)}(x, y) = P(x(t_1) \leq x \cap y(t_2) \leq y)$$

$$f_{x(t_1)y(t_2)}(x, y) = \frac{\partial F_{x(t_1)y(t_2)}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

### Definition 6.8: Statistische Unabhängigkeit

Zwei stochastische Prozesse  $x(t, \xi)$  und  $y(t, \xi)$  nennt man **statistisch unabhängig**, wenn für alle Zeiten  $t_1, t_2$  gilt:

$$F_{x(t_1)y(t_2)}(x, y) = F_{x(t_1)}(x) \cdot F_{y(t_2)}(y)$$

bzw.

$$f_{x(t_1)y(t_2)}(x, y) = f_{x(t_1)}(x) \cdot f_{y(t_2)}(y)$$

## 6.1.3 Schar- und Zeitmittelwerte

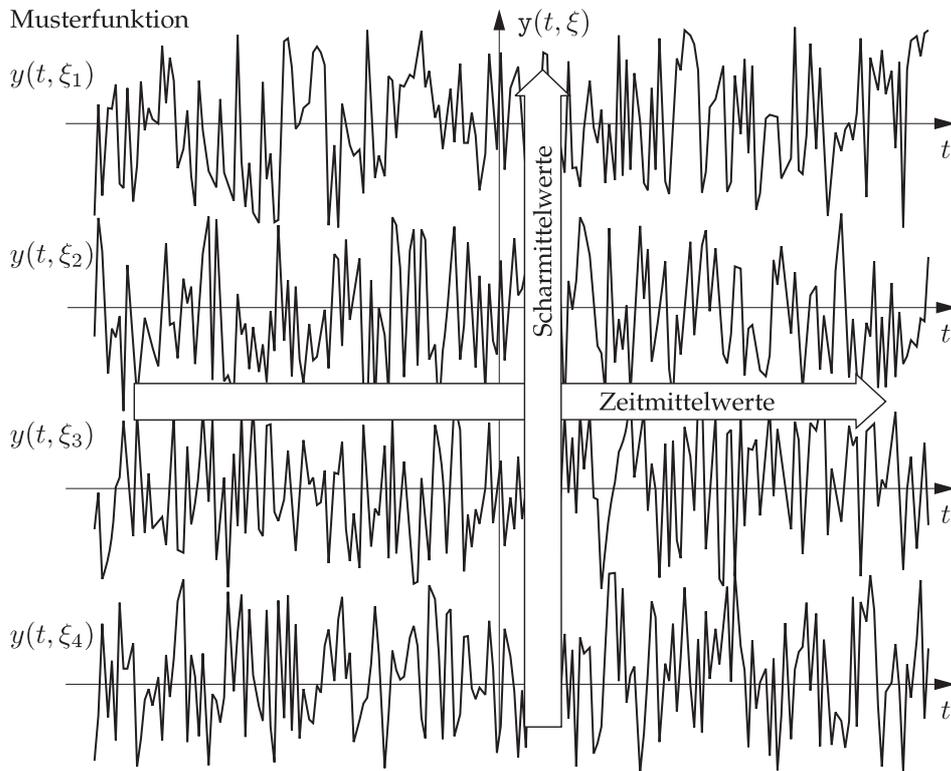
- Stochastische Prozesse sind Funktionen von zwei Parametern  $\xi$  und  $t$ .
- Bei zufälligen Signalen dominiert meist der Zeitparameter  $t$ .
- Bei der Bildung von Mittelwerten und Erwartungswerten gibt es jedoch entsprechend den beiden Parametern zwei mögliche Vorgehensweisen:

1. **Erwartungswerte über alle Musterfunktionen**  $y(t, \xi_1), y(t, \xi_2) \dots$  bei festem  $t$  :

Der **Scharmittelwert** gibt an, welchen Mittelwert der Zufallsprozess zu einem Zeitpunkt  $t$  hat und ist i. Allg. **zeitabhängig**.

2. **Mittelwerte über den Parameter  $t$  einer einzigen Musterfunktion**  $y(t, \xi_v)$ :

Die **Zeitmittelwerte** einzelner Musterfunktionen sind i. Allg. verschieden und damit vom Parameter  $\xi_v$  abhängig.



Mittelwertbildung als Zeitmittelwert oder Scharmittelwert

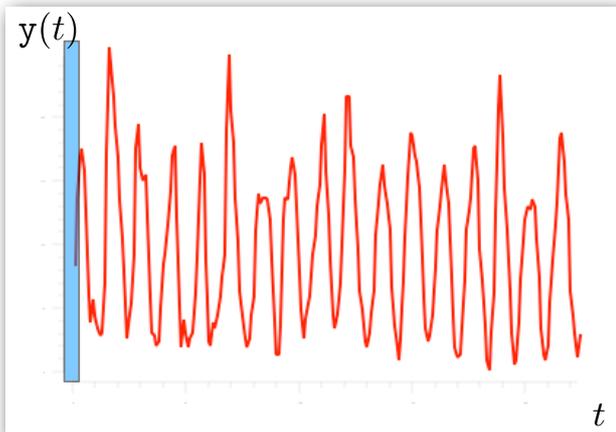
# 6.1.4 Momente der Statistik 1. Ordnung

## Beispiel

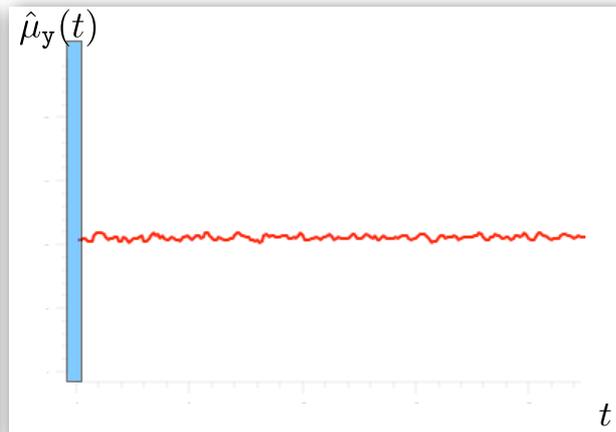
■ Erwartungswert:

$$\mu_y(t) = E\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{y(t)}(y) dy \triangleq \text{lokaler Mittelwert}$$

E{ } bedeutet, dass über die Schar der Musterfunktionen gemittelt wird



Zufallsprozess  $y(t)$



Erwartungswert  $\mu_y(t)$

- WV und Momente von Prozessen sind i. Allg. zeitabhängig
  - Momente der Statistik 1. Ordnung (Erwartungswert, Varianz) sind Zeitfunktionen
  - Momente der Statistik 2. Ordnung (AKF, AKV) sind zweidimensional!

### Definition 6.17: Stationarität

- Ein stochastischer Prozess heißt **stationär**, wenn seine statistischen Eigenschaften invariant gegenüber Verschiebungen der Zeit sind:

$$F_{y(t)}(y) = F_{y(t+t_0)}(y) = F_y(y)$$

und

$$f_{y(t)}(y) = f_{y(t+t_0)}(y) = f_y(y)$$

- Abhängigkeiten von zwei Zeitpunkten  $t_1$  und  $t_2$  vereinfachen sich bei Stationarität auf die Abhängigkeit von der Differenz  $\tau = t_2 - t_1$  dieser Zeiten:

$$f_{y(t_1)y(t_2)}(y_1, y_2) = f_{y(t_1+t_0)y(t_2+t_0)}(y_1, y_2) = f_{y(t+\tau)y(t)}(y_1, y_2)$$

### Definition 6.18: Verbundene Stationarität zweier Zufallsprozesse

Zwei stochastische Prozesse heißen **verbunden stationär**, wenn beide stationär sind und ihre gemeinsamen statistischen Eigenschaften invariant gegenüber Verschiebungen der Zeit sind.

- Für zwei **verbunden stationäre** Prozesse gilt:

$$f_{x(t_1)y(t_2)}(x, y) = f_{x(t_1+t_0)y(t_2+t_0)}(x, y) = f_{x(t+\tau)y(t)}(x, y)$$

- Bei **Stationarität** sind die Momente der Statistik 1. Ordnung zeitunabhängig:

$$\mu_{y,m}(t) = E\{y^m(t)\} = \mu_{y,m}$$

und die Momente der Statistik 2. Ordnung nur noch abhängig von  $\tau$ :

$$r_{yy}(t_1, t_2) = E\{y(t+\tau)y(t)\} = r_{yy}(\tau) \quad \text{AKF}$$

$$r_{xy}(t_1, t_2) = E\{x(t+\tau)y(t)\} = r_{xy}(\tau) \quad \text{KKF}$$

- Momente werden berechnet, indem man über **alle** Musterfunktionen mittelt. Oftmals sind jedoch nicht alle verfügbar!
- Abhilfe: Zeitmittelung

### Definition 6.20: Ergodizität

Ein Zufallsprozess heißt **ergodisch**, wenn die Zeitmittelwerte **einer beliebigen Musterfunktion** mit den entsprechenden Scharmittelwerten übereinstimmen.

Ergodizität  $\Rightarrow$  Stationarität

### Definition 6.21: Schwache Ergodizität

Ein Zufallsprozess heißt **schwach ergodisch**, wenn die anhand einer beliebigen Musterfunktion berechneten Zeitmittelwerte für das 1. Moment und für die AKF mit den entsprechenden Scharmittelwerten übereinstimmen.

- **Interpretation:** Jede Musterfunktion kann bzgl. der Momente 1. und 2. Ordnung den ganzen Prozess vertreten

- Für die **Momente ergodischer Prozesse** gelten die folgenden Sätze:

**Satz 6.1:** Das  $m$ -te **Moment** eines ergodischen Prozesses berechnet sich als Zeitmittelwert zu:

$$\mu_{y,m} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y^m(t, \xi_0) dt$$

**Satz 6.2:** Die **Korrelation** zweier ergodischer Prozesse berechnet sich zu:

$$r_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau, \xi_0) y^*(t, \xi_1) dt$$

**Satz 6.3:** Die **Kovarianz** zweier ergodischer Prozesse berechnet sich zu:

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x(t + \tau, \xi_0) - \mu_x) (y(t, \xi_1) - \mu_y)^* dt$$

### Beispiel 6.3: Schwach stationärer, ergodischer Prozess

■ Zufallsprozess:  $y(t) = \sin(\omega t + \varphi)$      $\varphi$  : zufällig, gleichverteilt

■ Autokorrelationsfunktion (**Scharmittelwert**):

$$\begin{aligned}
 r_{yy}(t_1, t_2) &= E\{\sin(\omega t_1 + \varphi) \sin(\omega t_2 + \varphi)\} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\omega t_1 + \varphi) \sin(\omega t_2 + \varphi) d\varphi \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left( \cos(\omega t_1 - \omega t_2) - \underbrace{\cos(\omega t_1 + \omega t_2 + 2\varphi)}_{\int d\varphi \rightarrow 0} \right) d\varphi \\
 &= \frac{1}{2} \cos(\omega t_1 - \omega t_2) = \frac{1}{2} \cos(\omega \tau) \quad \text{mit } \tau = t_1 - t_2
 \end{aligned}$$

→ **schwache Stationarität**

## 6.1.7 Ergodische Prozesse

■ Autokorrelationsfunktion (**Zeitmittelwert**):

$$\begin{aligned}
 \overline{y_i(t + \tau) y_i(t)} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sin(\omega t + \omega \tau + \varphi) \sin(\omega t + \varphi) dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T} \left[ \int_{-T}^T \cos(\omega \tau) dt - \int_{-T}^T \cos(2\omega t + \omega \tau + 2\varphi) dt \right] \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T} \left[ 2T \cos(\omega \tau) - \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t + \omega \tau + 2\varphi) \Big|_{-T}^T \right] \\
 &= \frac{1}{2} \cos(\omega \tau) - \underbrace{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T\omega} [\sin(2\omega T + \omega \tau + 2\varphi)]}_{=0} \\
 &= \frac{1}{2} \cos(\omega \tau) = r_{yy}(\tau)
 \end{aligned}$$

→ **schwache Ergodizität**

### Beispiel 6.4: Schwach stationärer, nicht ergodischer Prozess

■ Prozess:  $y(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$   $a, \varphi$ : zufällig, gleichverteilt, stat. unabh.

■ Autokorrelationsfunktion (**Scharmittelwert**):

$$\begin{aligned} r_{yy}(t_1, t_2) &= E\{a \sin(\omega t_1 + \varphi) a \sin(\omega t_2 + \varphi)\} \\ &= E\{a^2\} \cdot E\{\sin(\omega t_1 + \varphi) \sin(\omega t_2 + \varphi)\} \\ &= E\{a^2\} \frac{1}{2} \cos(\omega t_1 - \omega t_2) = E\{a^2\} \frac{1}{2} \cos(\omega \tau) \quad \tau = t_1 - t_2 \end{aligned}$$

→ **schwache Stationarität**

■ Autokorrelationsfunktion (**Zeitmittelwert**):

$$\begin{aligned} \overline{y_i(t + \tau) y_i(t)} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T a_i^2 \sin(\omega t + \omega \tau + \varphi) \sin(\omega t + \varphi) dt \\ &= a_i^2 \frac{1}{2} \cos(\omega \tau) \neq r_{yy}(\tau) \end{aligned}$$

→ **nicht ergodisch**, da Zeit- und Scharmittelwerte verschieden

## 6.2 Korrelationsfunktionen

6.2.1 Signalklassen

6.2.2 Korrelation für Leistungssignale

6.2.3 Korrelation für Energiesignale

6.2.4 Eigenschaften der Korrelationsfunktionen

- Mit der Korrelation lässt sich die **Erhaltungstendenz** von stochastischen Prozessen und deren Musterfunktionen beschreiben
- Damit können insbesondere zufällige Signale miteinander verglichen werden
- Zunächst soll aber untersucht werden, wie die Korrelation für die verschiedenen Signalklassen definiert ist

### 6.2.1 Signalklassen

#### Definition 6.22: Energiesignale

- Energiesignale sind beschränkte, stückweise stetige Signale  $x(t)$ , für die gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t) dt < \infty$$

→ Für die Konvergenz muss gelten:  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0$

#### Definition 6.23: Leistungssignale

- Leistungssignale sind beschränkte, stückweise stetige Signale  $x(t)$ , für die das obige Integral **divergiert**, jedoch

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) x^*(t) dt < \infty \quad \text{existiert}$$

- Welche Signale können Musterfunktionen **ergodischer Prozesse** sein?

### Leistungssignale

- Beispiel eines ergodischen Prozesses:  $y = \sin(\omega t + \varphi)$

**Leistungssignale** können Musterfunktionen ergodischer Prozesse sein

### Energiesignale

- Konvergenzbedingung für **Energiesignale**:  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0$

$$\rightarrow \mu_x(t \rightarrow \infty) = 0 \quad \text{keine Stationarität}$$

**Energiesignale** können **keine** Musterfunktionen ergodischer Prozesse sein, da sie nicht stationär sind

- Bei einer messtechnisch bedingten Begrenzung des Signals geht man meist von **Leistungssignalen** aus

## 6.2.2 Korrelation für Leistungssignale

- Die **Korrelation** für Leistungssignale ist über das Innenprodukt definiert:

$$r_{xy}(\tau) = \langle x(t + \tau), y(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau) y^*(t) dt \quad (*)$$

- Für das Korrelationsintegral folgt mit der Schwarz'schen Ungleichung

$$|\langle x(t + \tau), y(t) \rangle|^2 \leq \|x(t + \tau)\|^2 \cdot \|y(t)\|^2$$

die Abschätzung:

$$|r_{xy}(\tau)|^2 \leq P_x \cdot P_y < \infty$$

- Die Leistung  $P_x$  des Signals  $x(t)$  folgt aus (\*) für  $y(t) = x(t)$  und  $\tau = 0$ :

$$r_{xx}(0) = \langle x(t), x(t) \rangle = \|x(t)\|^2 = P_x$$

### Beispiel 6.5: Korrelation zweier Leistungssignale

■ Leistungssignale:  $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$   $y(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

■ Für die Kreuzkorrelationsfunktion (KKF) erhält man:

$$\begin{aligned} r_{xy}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t + \tau) y^*(t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(2\pi f_0(t + \tau)) \cos(2\pi f_0 t) dt \\ &= \dots = \frac{1}{2} \sin(2\pi f_0 \tau) \end{aligned}$$

■ Sonderfall AKF: Periodische Signale haben eine periodische AKF der gleichen Frequenz! ■

## 6.2.3 Korrelation für Energiesignale

- Energiesignale sind nicht ergodisch → keine KKF im stochastischen Sinne möglich
- Zum Zwecke des Signalvergleichs lässt sich aber auch für Energiesignale „E“ das Innenprodukt angeben (Voraus.: quadratische Integrierbarkeit)
- Damit erhält man für die **Korrelationsfunktion**:

$$r_{xy}^E(\tau) = \langle x(t + \tau), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau) y^*(t) dt < \infty$$

■ Die Korrelation kann auch als **Faltung** dargestellt werden:

$$r_{xy}^E(\tau) = x(\tau) * y^*(-\tau)$$

■ Die Autokorrelationsfunktion ist für  $\tau = 0$  gerade gleich der **Signalenergie**:

$$r_{xx}^E(0) = \langle x(t + 0), x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t) dt = E_x$$

Signal-  
energie  $E_x$

## 6.2.3 Korrelation für Energiesignale

- Das Korrelationsintegral konvergiert nach der Schwarz'schen Ungleichung, wenn  $x(t)$  und  $y(t)$  eine **endliche** Energie haben:

$$\begin{aligned} |\langle x(t + \tau), y(t) \rangle|^2 &\leq \|x(t)\|^2 \cdot \|y(t)\|^2 \\ |r_{xy}^E(\tau)|^2 &\leq E_x \cdot E_y < \infty \end{aligned}$$

- Für Energiesignale geht die **Energiedichte im Zeitbereich**

$$s_{xx}(t) = x(t) x^*(t) = |x(t)|^2$$

aufgrund der Konvergenzbedingung für Energiesignale für  $t \rightarrow \pm\infty$  gegen null:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} s_{xx}(t) = 0$$

- Das gleiche gilt für die **Energiedichte im Frequenzbereich**:

$$\lim_{f \rightarrow \pm\infty} S_{xx}(f) = 0$$

Anderenfalls würde nach Integration keine endliche Energie resultieren.

## 6.2.3 Korrelation für Energiesignale

- Aufgrund der **Parseval'schen Beziehung** kann die Signalenergie sowohl aus der Energiedichte im Zeitbereich als auch aus der Energiedichte im Frequenzbereich durch Integration ermittelt werden:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} s_{xx}(t) dt = \|x(t)\|^2 = \|X(f)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) df$$

### Beispiel 6.6: Korrelation von Energie- und Leistungssignal

Energiesignal:  $x(t) = r_T(t)$

Leistungssignal:  $y(t) = \sin(2\pi f_0 t)$

- Die Signalenergien sind:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} r_T^2(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{T^2} dt = \frac{1}{T}$$

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2(2\pi f_0 t) dt = \left[ \frac{1}{2}t - \frac{1}{8\pi f_0} \sin(4\pi f_0 t) \right]_{-\infty}^{\infty} = \infty$$

$$r_T(t) = \begin{cases} T^{-1} & \text{für } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{für } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

- Das Korrelationsintegral für Energiesignale ist endlich:

$$\begin{aligned} r_{xy}^E(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} r_T(t + \tau) \sin(2\pi f_0 t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2} + \tau}^{\frac{T}{2} + \tau} \sin(2\pi f_0 t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi f_0 T} \left[ -\cos 2\pi f_0 t \right]_{\tau - \frac{T}{2}}^{\tau + \frac{T}{2}} = \sin(2\pi f_0 \tau) \frac{\sin(\pi f_0 T)}{\pi f_0 T} \end{aligned}$$

## 6.2.4 Eigenschaften

### Eigenschaften der Auto- und Kreuzkorrelation stationärer Prozesse:

#### Eigenschaften der Autokorrelationsfunktion $r_{xx}(\tau)$

Maximalwert:  $\Re\{r_{xx}(\tau)\} \leq r_{xx}(0) = \sigma_x^2 + \mu_x^2$

Symmetrie:  $r_{xx}(\tau) = r_{xx}^*(-\tau)$

Unkorreliertheit für  $|\tau| \rightarrow \infty$ :  $\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} r_{xx}(\tau) = \mu_x^2$

Periodische Funktionen ( $T$ : Periode):  $r_{xx}(\tau) = r_{xx}(\tau + T)$

#### Eigenschaften der Kreuzkorrelationsfunktion $r_{xy}(\tau)$

Maximalwert:  $\Re\{r_{xy}(\tau)\} \leq \frac{1}{2}(r_{xx}(0) + r_{yy}(0))$

Symmetrie:  $r_{xy}(\tau) = r_{yx}^*(-\tau) \neq r_{xy}^*(-\tau)$

Unkorreliertheit für  $|\tau| \rightarrow \infty$ :  $\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} r_{xy}(\tau) = \mu_x \cdot \mu_y^*$

Unkorreliertheit von  $x(t)$  und  $y(t)$ :  $r_{xy}(\tau) = \mu_x \cdot \mu_y^* \quad \forall \tau$

### Unkorreliertheit

- Zwei stationäre Signale sind unkorreliert, wenn für alle Zeiten gilt:

$$E\{x(t + \tau) y^*(t)\} = E\{x(t + \tau)\} \cdot E\{y^*(t)\}$$

$$\rightarrow r_{xy}(\tau) = \mu_x \mu_y^*$$

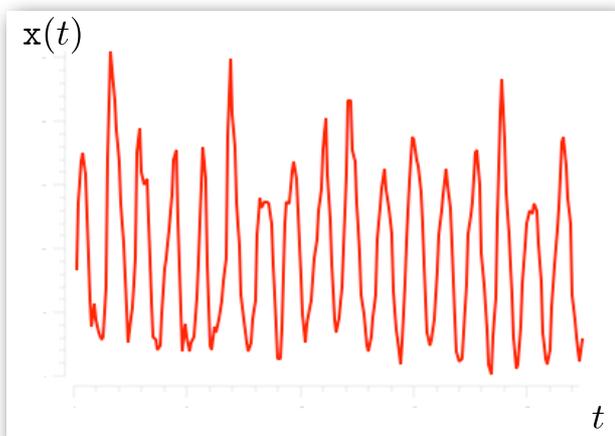
- Unkorreliertheit gilt meist nur für  $|\tau| \rightarrow \infty$
- Periodische Signale sind auch für  $|\tau| \rightarrow \infty$  **nicht** unkorreliert



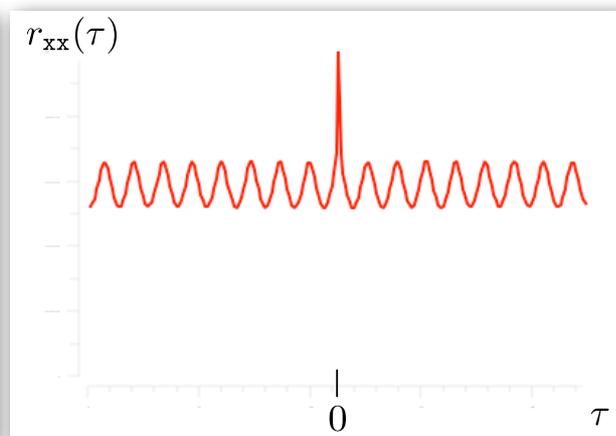
## 6.2.4 Eigenschaften

### Beispiel: Autokorrelationsfunktion eines stationären Prozesses

- Korrelation** ist ein Maß für die lineare statistische Abhängigkeit zwischen Zufallsgrößen, d. h. in unserem Falle ein Maß für die lineare statistische Abhängigkeit von Signalwerten im Abstand  $\tau$ .



Zufallsprozess  $x(t)$



Autokorrelationsfunktion  $r_{xx}(\tau)$



## 6.3 Korrelationsmesstechnik

6.3.2 Ähnlichkeit von Signalen, Laufzeitmessung

6.3.3 Closed-loop-Korrelation

6.3.4 Polaritätskorrelation

6.3.5 Ähnlichkeit von Spektren, Doppler-Frequenz-Messung

6.3.6 Selbstähnlichkeit

### 6.3.2 Ähnlichkeit von Signalen, Laufzeitmessung

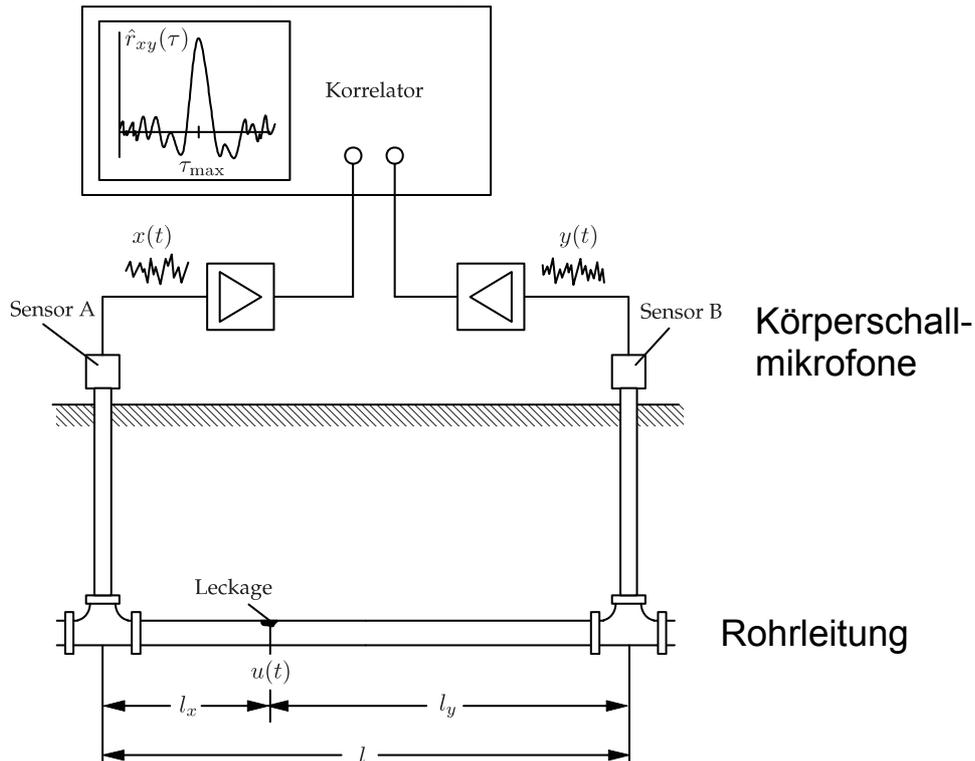
- Die Kreuzkorrelation ist ein Maß für die Ähnlichkeit zweier um  $\tau$  verschobener Signale
- Die **Distanz** beider Signale ist durch die Norm ihrer Differenz gegeben:

$$\begin{aligned}
 \|x(t + \tau) - y(t)\|^2 &= \langle x(t + \tau) - y(t), x(t + \tau) - y(t) \rangle \\
 &= \langle x(t + \tau), x(t + \tau) \rangle + \langle y(t), y(t) \rangle - \underbrace{\langle x(t + \tau), y(t) \rangle - \langle y(t), x(t + \tau) \rangle}_{2\Re\{\langle x(t + \tau), y(t) \rangle\} = 2\Re\{r_{xy}(\tau)\}} \\
 &= \|x(t)\|^2 + \|y(t)\|^2 - 2\Re\{r_{xy}(\tau)\} \geq 0
 \end{aligned}$$

- Ähnlichkeit maximal bei minimaler Distanz ( $\Rightarrow$  bei **maximaler** Korrelation)
- Zur Bewertung der Ähnlichkeit wird häufig der Kreuzkorrelationskoeffizient (normierte KKF) verwendet:

$$r_{xy, \text{norm}}(\tau) = \frac{r_{xy}(\tau)}{\sqrt{r_{xx}(0) \cdot r_{yy}(0)}}$$

### Beispiel 6.7: Orten von Leckagen mit Körperschall-Mikrofonen



35

Prof. Dr.-Ing. F. Puente León – Messtechnik

Institut für Industrielle  
Informationstechnik

## 6.3.2 Ähnlichkeit von Signalen, Laufzeitmessung

- Verzögerte Signale an den Sensoren:

$$x(t) = u\left(t - \frac{l_x}{c}\right)$$

$$y(t) = u\left(t - \frac{l_y}{c}\right)$$

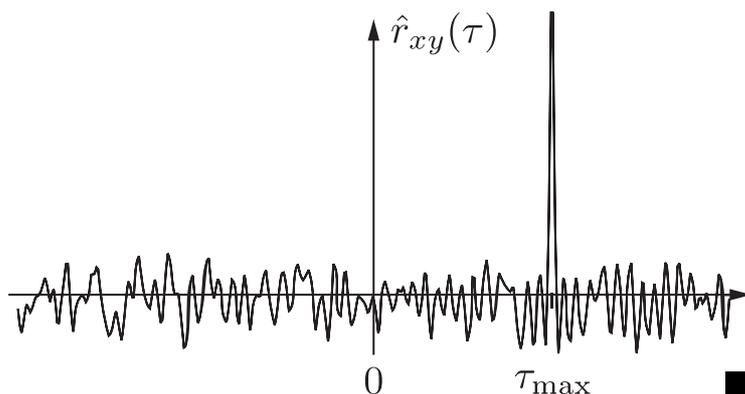
- Der Gesamtabstand  $l = l_x + l_y$  der Sensoren sei bekannt
- Über den Schätzwert der KKF kann eine der 2 Längen ermittelt werden:

$$\hat{r}_{xy}(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau) y(t) dt = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u\left(t + \tau - \frac{l_x}{c}\right) u\left(t - \frac{l_y}{c}\right) dt$$

- Die KKF hat ihr Maximum bei der Laufzeit  $\tau_{\max}$ :

$$\tau_{\max} = \frac{l_x}{c} - \frac{l_y}{c} = \frac{l - 2l_y}{c}$$

$$\rightarrow l_y = \frac{1}{2}(l - \tau_{\max} c)$$

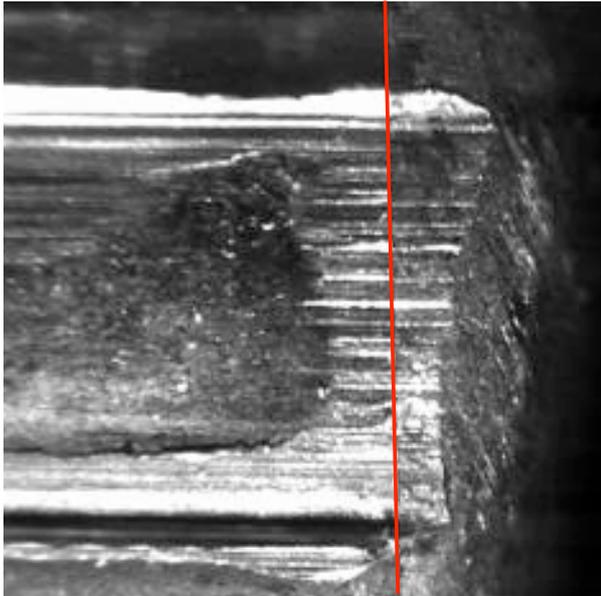


36

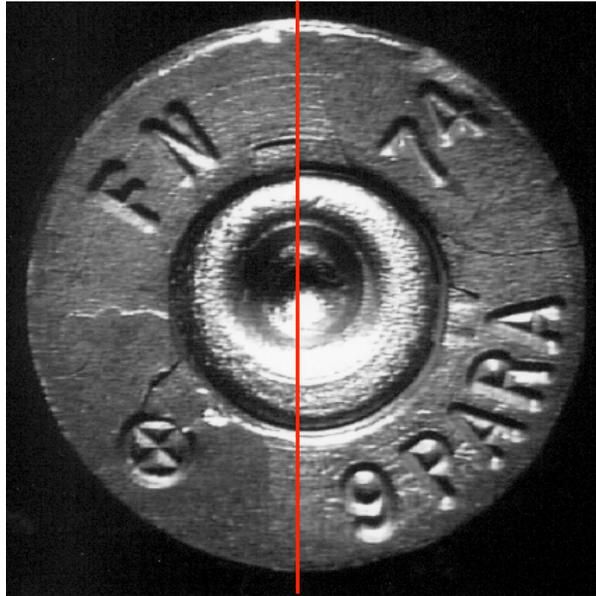
Prof. Dr.-Ing. F. Puente León – Messtechnik

Institut für Industrielle  
Informationstechnik

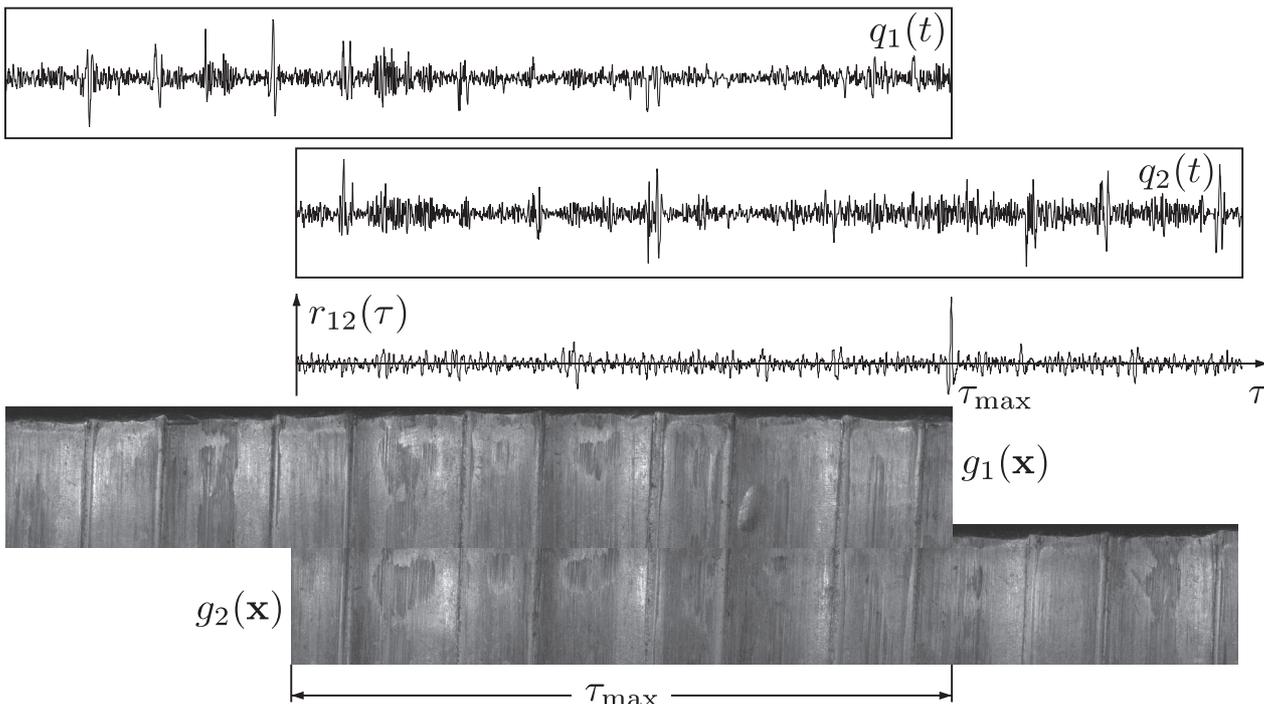
### Beispiel 6.8: Vergleich von Schusswaffenspuren



Spuren auf 2 Geschossen

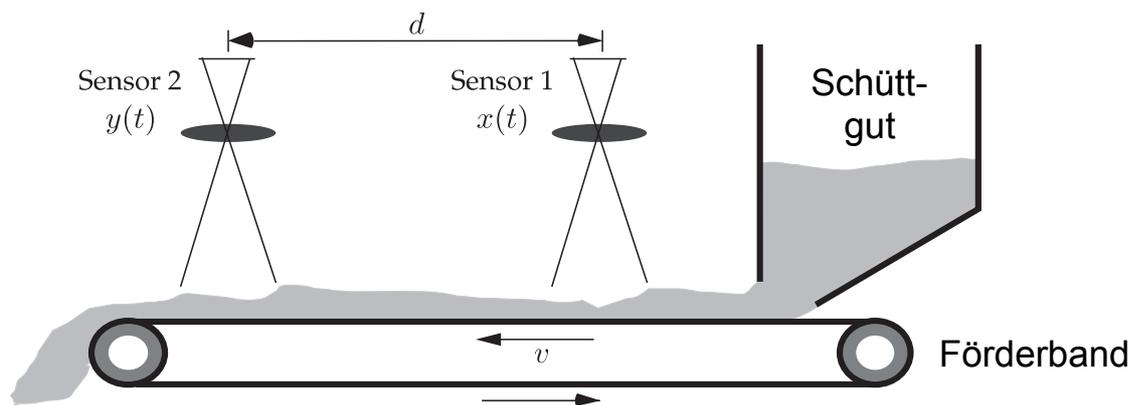


Spuren auf 2 Patronenhülsen



Bestimmung der Ähnlichkeit von Projektilen mit Korrelationsverfahren

### Beispiel 6.9: Berührungslose Geschwindigkeitsmessung



- Sensoren messen Reflexionen des Schüttgutes an den Sensorpositionen:
- Zeitverschobenes Signal (Idealfall):  $y(t) = x(t - \tau)$
- Maximum der KKF liegt bei  $\tau_{\max}$

→ Fördergeschwindigkeit:

$$v = \frac{d}{\tau_{\max}}$$

## 6.3.3 Closed-loop-Korrelation

### Nachteile der Laufzeitkorrelation

- Das Ergebnis der Korrelation

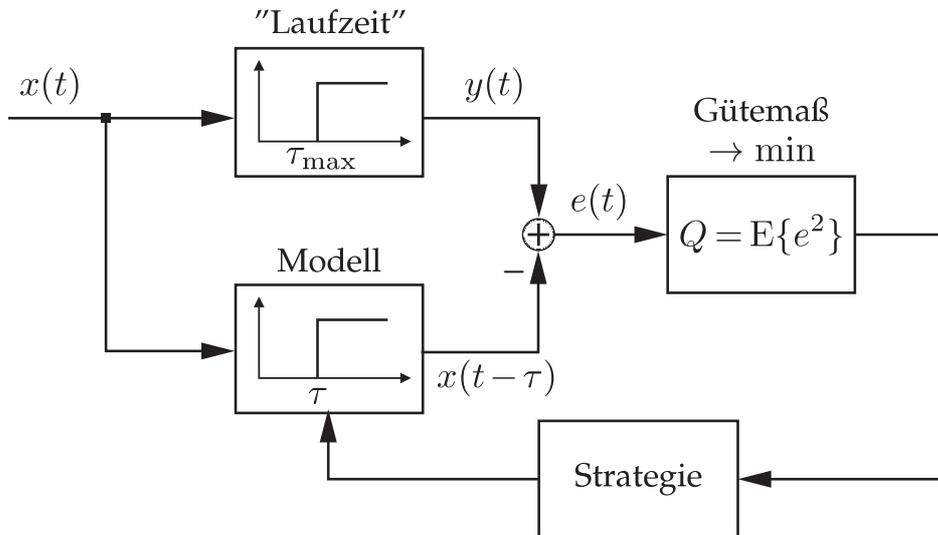
$$\hat{r}_{xy}(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau) y(t) dt$$

steht immer erst am Ende des Integrationsintervalls zur Verfügung. Die Bestimmung des Zeitpunktes  $\tau_{\max}$  ist dadurch sehr träge. Für dynamische Messgrößen ist das Verfahren schlecht geeignet.

- Das Verfahren ist numerisch sehr aufwendig. Zum einen müssen die Produkte der zeitverschobenen Signale  $x(t + \tau) \cdot y(t)$  gebildet werden, zum anderen muss nach der Integration noch eine Maximumsuche durchgeführt werden.

### Laufzeitkorrelation als Identifikationsproblem

- Zur Verbesserung des Verfahrens interpretiert man die Laufzeitkorrelation als Identifikationsproblem für die unbekannte Laufzeit  $\tau_{\max} = \tau$



Schätzung der Verzögerungszeit  $\tau$  beim Laufzeitkorrelator

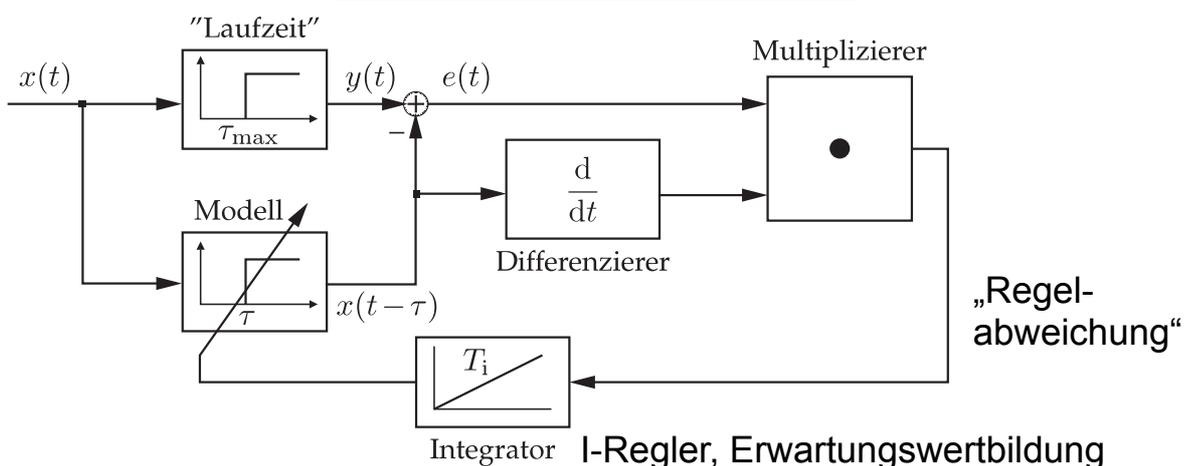
## 6.3.3 Closed-loop-Korrelation

- Gütemaß:  $Q = E\{e^2(t, \tau)\} \rightarrow \min$  mit  $e(t) = y(t) - x(t - \tau)$

- Notwendig für Minimum:

$$\frac{dQ}{d\tau} = \frac{dE\{e^2(t, \tau)\}}{d\tau} = 2E\left\{e(t, \tau) \cdot \frac{de(t, \tau)}{d\tau}\right\} = 0$$

- Einsetzen von  $e(t)$ :  $E\{[y(t) - x(t - \tau)] \dot{x}(t - \tau)\} = 0$



- Der Closed-loop-Korrelator vermeidet eine vollständige numerische Berechnung der KKF und passt sich an ändernde Laufzeiten  $\tau_{\max}$  an
- Es müssen jedoch weiterhin aufwendige **Produkte** der zeitverschobenen Signale gebildet werden

### Polaritätskorrelator

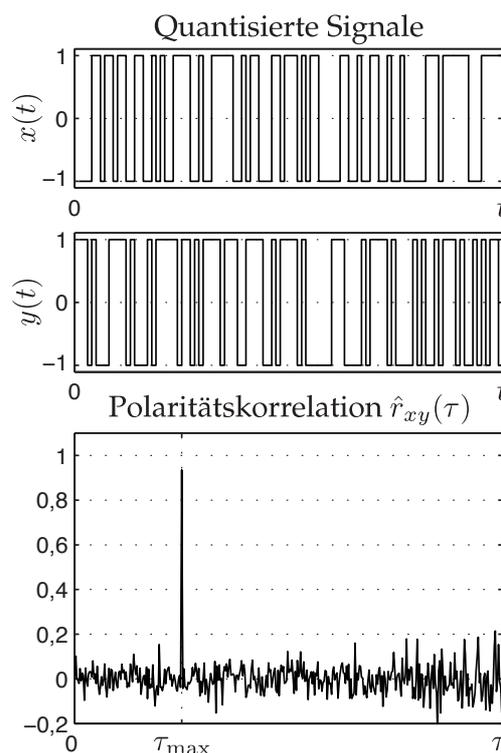
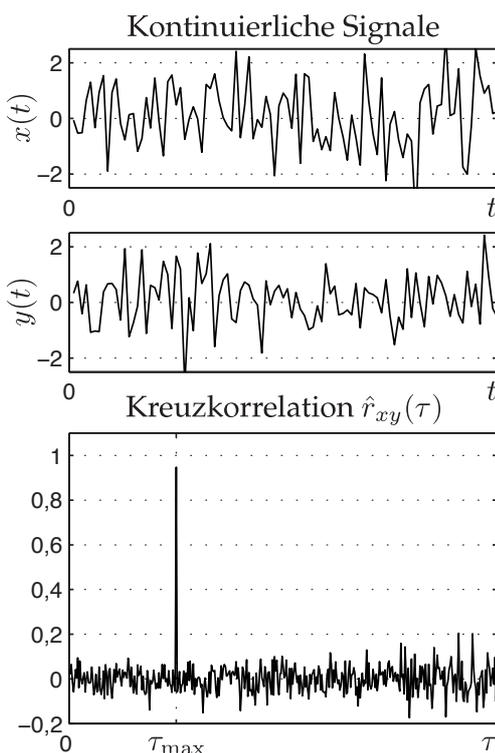
- Kreuzkorrelation für mit 1 Bit quantisierte, zeitdiskrete Signale:

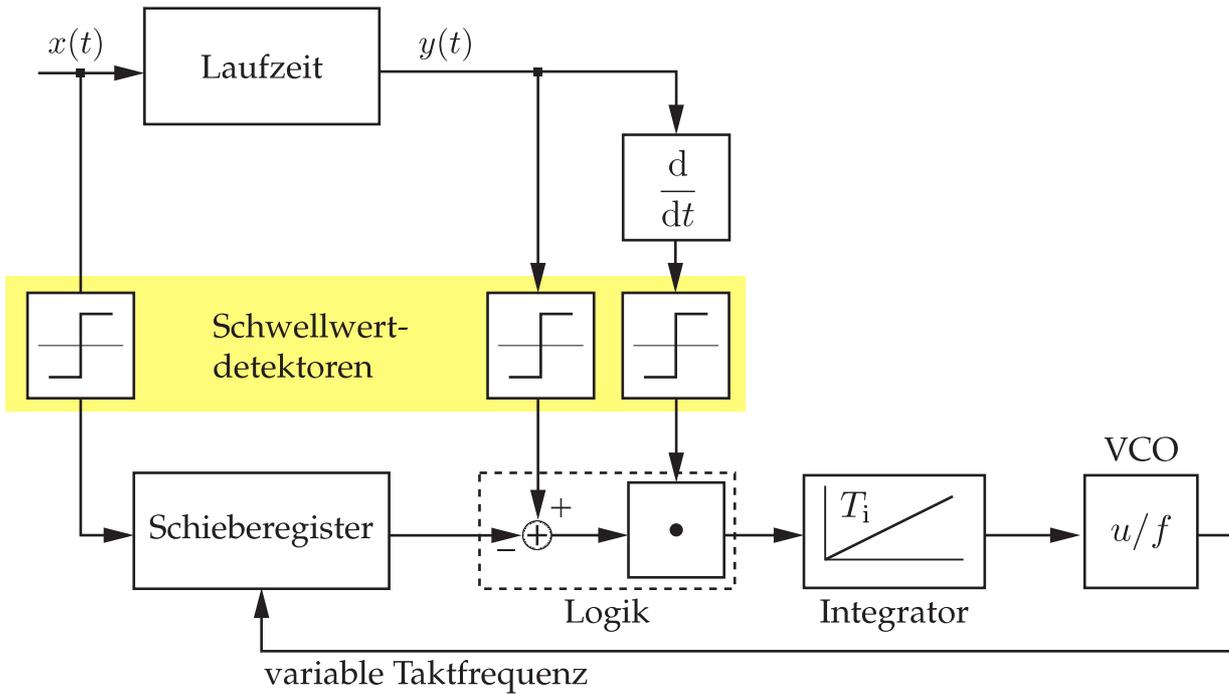
$$\hat{r}_{xy}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} \text{sign}[x_{n+k}] \text{sign}[y_n^*]$$

- Multiplikation kann mit logischen Gattern realisiert werden
- Statistische Eigenschaften der unquantisierten Signale bleiben erhalten
- Insbesondere bleibt die Lage des Maximums erhalten, so dass daraus weiterhin die Laufzeit bestimmt werden kann

## 6.3.4 Polaritätskorrelation

- Vergleich der KKF kontinuierlicher Signale mit der Polaritätskorrelation:





Laufzeitkorrelator mit Polaritätskorrelation und Realisierung der Modelllaufzeit als getaktetes Schieberegister

## 6.3.5 Ähnlichkeit von Spektren, Doppler-Messung

- Analog zur Korrelation zeitverschobener Signale wird eine **Korrelation im Frequenzbereich** als Maß für die Ähnlichkeit von Spektren definiert:

$$\varrho_{XY}(\vartheta) = \langle X(f + \vartheta), Y(f) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} X(f + \vartheta) Y^*(f) df$$

- Distanz der (um die Frequenz  $\vartheta$  verschobenen) Spektren:

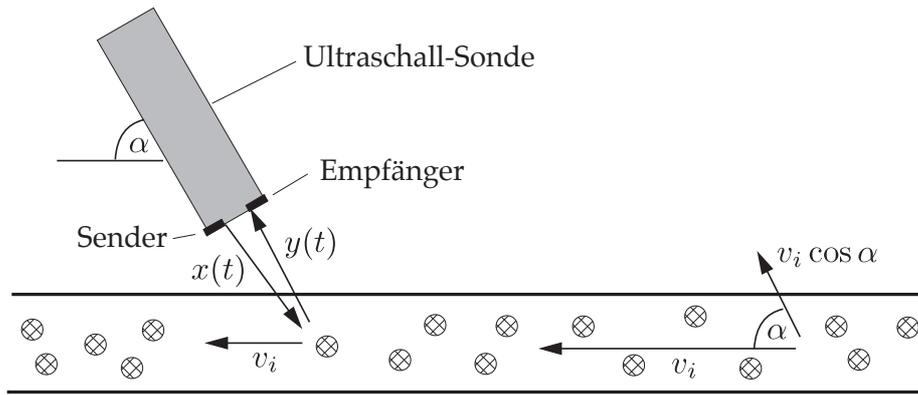
$$\begin{aligned} \|X(f + \vartheta) - Y(f)\|^2 &= \langle X(f + \vartheta), X(f + \vartheta) \rangle + \langle Y(f), Y(f) \rangle \\ &\quad - 2\Re\{\langle X(f + \vartheta), Y(f) \rangle\} \\ &= \|X(f)\|^2 + \|Y(f)\|^2 - 2\Re\{\varrho_{XY}(\vartheta)\} \end{aligned}$$

- Nach dem Satz von Parseval gilt:

$$\varrho_{XY}(\vartheta) = \langle x(t) e^{-j2\pi\vartheta t}, y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi\vartheta t} y^*(t) dt$$

Frequenzverschiebung des Spektrums  $\triangleq$  Modulation im Zeitbereich

### Beispiel 6.9: Strömungsgeschwindigkeitsmessung über Doppler-Effekt



#### Doppler-Effekt

■ Empfänger bewegt sich relativ zum Sender:  $f = f_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right)$

■ Sender bewegt sich relativ zum Empfänger:  $f = f_0 \left(\frac{1}{1 - \frac{v}{c}}\right)$

■ Bewegtes Teilchen ist Sender und Empfänger: →  $f = f_0 \frac{1 + \frac{v_i}{c} \cos \alpha}{1 - \frac{v_i}{c} \cos \alpha}$

## 6.3.5 Ähnlichkeit von Spektren, Doppler-Messung

■ Darstellung des Nenners als geom. Reihe und Näherung für  $v_i \ll c$ :

$$f = f_0 \left(1 + \frac{v_i}{c} \cos \alpha\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{v_i}{c} \cos \alpha\right)^n \approx f_0 \left(1 + \frac{v_i}{c} \cos \alpha\right) \left(1 + \frac{v_i}{c} \cos \alpha\right)$$

■ Abbruch nach dem linearen Glied:  $f \approx f_0 \left(1 + 2 \frac{v_i}{c} \cos \alpha\right) = f_0 + f_i$

→ Empfangssignal proportional zum frequenzverschobenen Sendesignal:

$$Y(f) = k \cdot X(f + f_i)$$

■ Korrelation der Signalspektren:

$$\varrho_{XY}(\vartheta) = k \int_{-\infty}^{\infty} X(f + \vartheta) X^*(f + f_i) df$$

→ Maximum der Korrelation bei der Frequenz:  $\vartheta = f_i$

→ Strömungsgeschwindigkeit:  $v_i = \vartheta \frac{c}{2f_0 \cos \alpha}$

- AKF hervorragend geeignet, um **periodische** Signalanteile aufzufinden, die im Vergleich zu einem Störsignal sehr klein sind

Stochastischer Prozess:  $y(t) = x(t) + n(t)$

Periodischer Anteil  $x(t)$ :  $x(t) = \sin(\omega t + \varphi)$

$n(t)$ : **mittelwertfreies** Rauschen

- Bei Unkorreliertheit von  $x(t)$  und  $n(t)$  gilt (vgl. Bsp. 6.3 auf Folie 17):

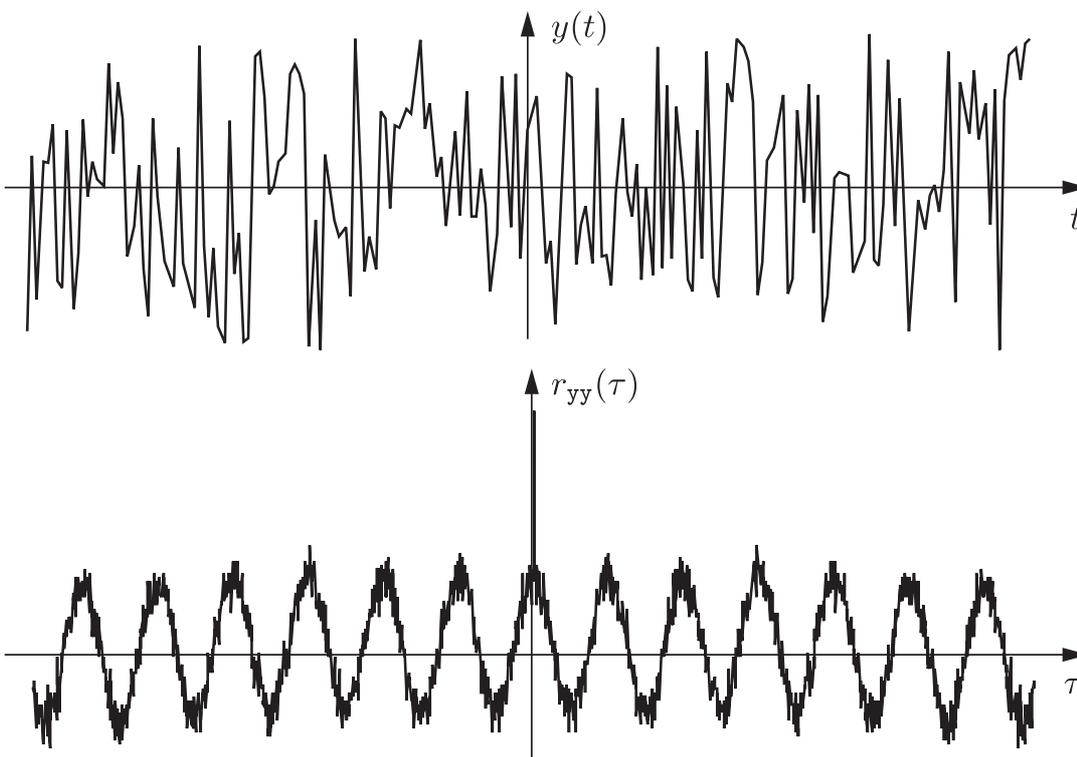
$$r_{yy}(\tau) = r_{xx}(\tau) + r_{nn}(\tau) = \frac{1}{2} \cos(\omega\tau) + r_{nn}(\tau)$$

- AKF des Rauschens verschwindet für hinreichend große  $\tau$ :

$$r_{nn}(\tau) \approx 0 \quad \text{für } \tau \neq 0$$

$$\rightarrow r_{yy}(\tau) \approx r_{xx}(\tau) = \frac{1}{2} \cos(\omega\tau) \quad \text{für } \tau \neq 0$$

Harmonische Schwingung überlagert von Rauschen und zugehörige AKF:



## 6.4 Spektrale Darstellung stochastischer Signale

6.4.1 Leistungsdichtespektrum

6.4.2 Rauschen

6.4.3 Überlagerung zufälliger Störsignale

6.4.4 Übertragung stochastischer Signale durch LTI-Systeme

### 6.4.1 Leistungsdichtespektrum

- Für Musterfunktionen stationärer Prozesse existiert i. Allg. das Fourier-Integral nicht. Abhilfe schafft die Transformation der Korrelationsfunktion.

**Definition 6.27: Autoleistungsdichtespektrum** (Voraus.: schw. Stationar.)

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Wiener-Khintchine-Theorem

- Auto-LDS gibt an, welche Frequenzen im statistischen Mittel wie stark am Aufbau einer Musterfunktion beteiligt sind.

#### Spektralanalyse:

- deterministische Funktion  $x(t)$ : Fourier-Transformation  $\rightarrow X(f)$ 
  - eigentliche harmonische Analyse, umkehrbar
- Zufallsprozess  $x(t)$ : Fourier-Transformation der AKF  $\rightarrow S_{xx}(f)$ 
  - verallgemeinerte harmonische Analyse
  - Informationsverlust (Phasenspektrum geht verloren)
  - einzelne Musterfunktionen nicht aus  $S_{xx}(f)$  rekonstruierbar
  - mittlere Aussage über den spektralen Signalaufbau

### Definition 6.28: Kreuzleistungsdichtespektrum

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

- Berechnung der Korrelationsfunktionen über Fourier-Rücktransformation:

$$r_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

- Begriff „Leistungsdichte“ deutet an, dass  $S_{xx}(f)$  die Leistungsverteilung über der Frequenz  $f$  darstellt. Durch Integration erhält man die Leistung.

### Satz 6.5: Leistung

- Für die Leistung  $P_x$  eines Zufallsprozesses  $x(t)$  gilt:

$$P_x = E\{x^2(t)\} = r_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) df$$

## 6.4.1 Leistungsdichtespektrum

### Eigenschaften des Leistungsdichtespektrums:

1. Für reelle Prozesse ist  $S_{xx}(f)$  eine **gerade** Funktion:  $S_{xx}(f) = S_{xx}(-f)$

2.  $S_{xx}(f)$  ist **reell** für alle Frequenzen:  $S_{xx}(f) = S_{xx}^*(f)$

3.  $S_{xx}(f)$  ist **nichtnegativ** für alle Frequenzen:  $S_{xx}(f) \geq 0$

4. Für die Kreuzleistungsdichtespektren gilt:  $S_{xy}(f) = S_{yx}(-f)$

Für reellwertige Prozesse gilt zusätzlich:

$$S_{xy}(f) = S_{xy}^*(-f) = S_{yx}(-f) = S_{yx}^*(f)$$

Da die Kreuzkorrelation i. Allg. nicht symmetrisch ist, ist auch das Kreuzleistungsdichtespektrum reellwertiger Prozesse nicht reellwertig.

- Viele **Störeinflüsse** lassen sich durch Prozesse modellieren, deren LDS über einen weiten Frequenzbereich ungefähr konstant ist
- Einfaches, gängiges Modell: **weißes Rauschen**

### Definition 6.29: Weißes Rauschen

Einen Zufallsprozess  $n(t)$  nennt man **weißes Rauschen**, wenn seine Leistungsdichte für alle Frequenzen **konstant** ist:

$$S_{nn}(f) = a^2 = \text{const} \quad \forall f$$

→ AKF:

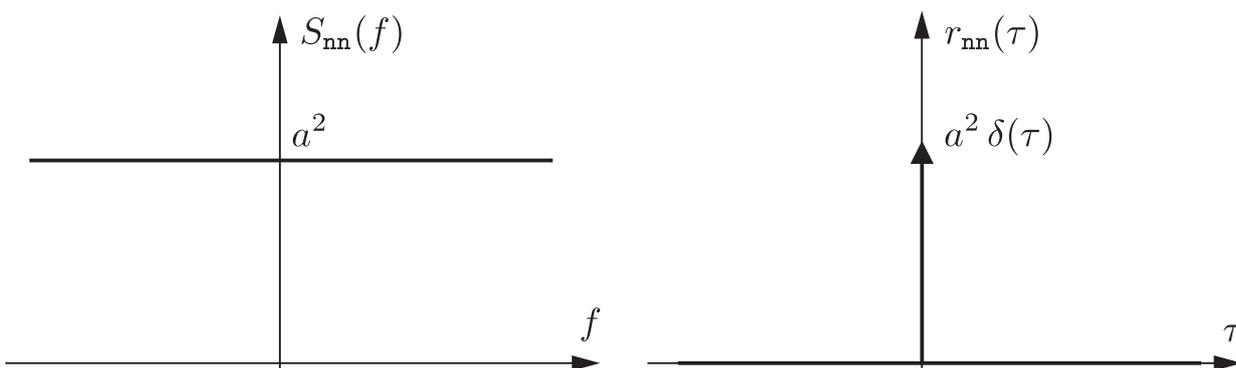
$$r_{nn}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{a^2\} = a^2 \delta(\tau)$$

Leistung:

$$P_n = r_{nn}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} a^2 df \rightarrow \infty$$

- Weißes Rauschen ist eine **Idealisierung**, die sich physikalisch **nicht** realisieren lässt

### Leistungsdichte und Autokorrelationsfunktion von **weißem** Rauschen



### Diskussion

- AKF verschwindet für alle Werte  $\tau \neq 0$   
 $\Rightarrow$  **benachbarte Signalwerte** von  $n(t)$  sind immer **unkorreliert**
- Demnach müsste sich das Signal unendlich schnell ändern: dies ist physikalisch unmöglich, was an der unendlichen Leistung deutlich wird
- Gauß'sches weißes Rauschen: Unkorreliertheit  $\Rightarrow$  stat. Unabhängigkeit

### Beispiel 6.10: Farbigen Rauschen

- Durch Tiefpassfilterung wird aus **weißem** Rauschen **farbiges** Rauschen

- ÜF von TP 1. Ordnung: 
$$G(f) = \frac{1}{1 + j \frac{2\pi f}{2\pi f_g}} = \frac{2\pi f_g}{2\pi f_g + j2\pi f} \quad (\text{PT}_1\text{-Glied})$$

- Für das LDS des farbigen Rauschens gilt (vgl. Abschn. 6.4.3):

$$S_{nn}(f) = |G(f)|^2 \cdot S_{xx}(f) = \frac{a^2 \cdot (2\pi f_g)^2}{(2\pi f_g)^2 + (2\pi f)^2}$$

- Durch inverse Fourier-Transformation erhält man die AKF:

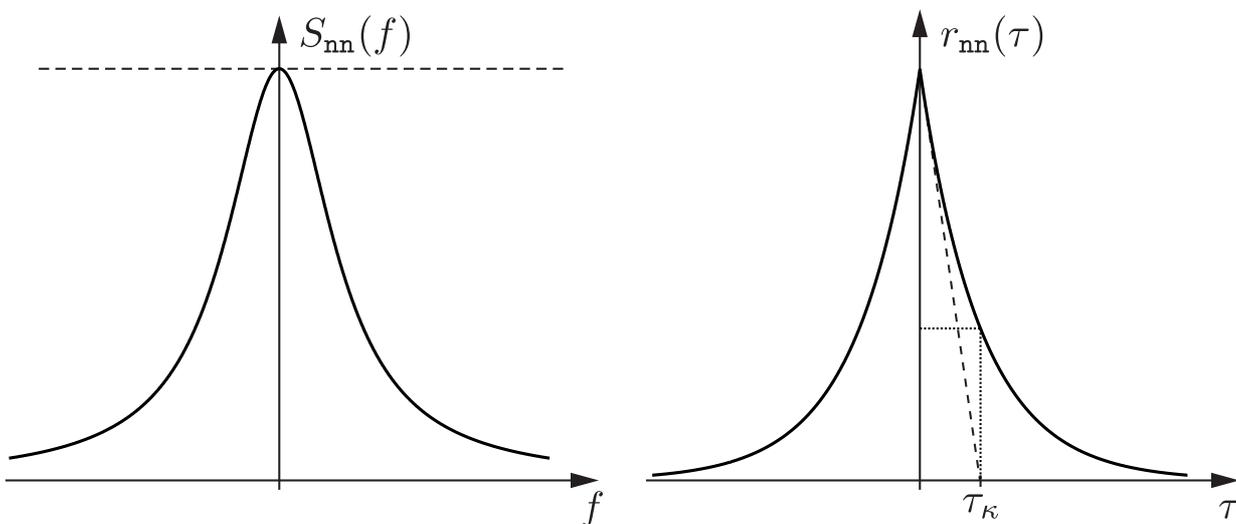
$$r_{nn}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_{nn}(f)\} = a^2 \pi f_g e^{-2\pi f_g |\tau|}$$

- Die Leistung des farbigen Rauschprozesses folgt für  $\tau = 0$  und ist **endlich**:

$$P_n = r_{nn}(0) = a^2 \cdot \pi f_g$$

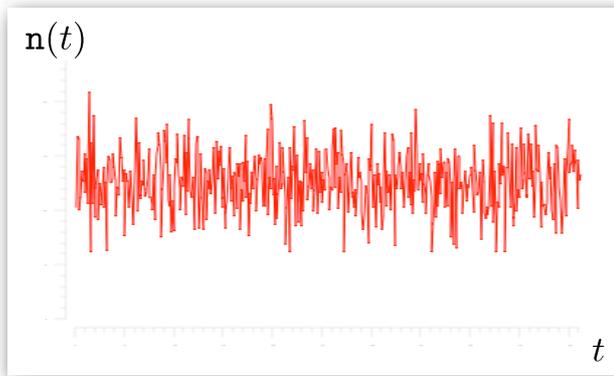
## 6.4.2 Rauschen

### Leistungsdichte und Autokorrelationsfunktion von **farbigem** Rauschen

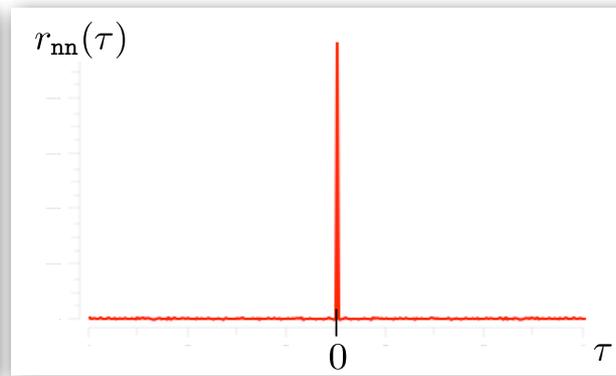


### Diskussion

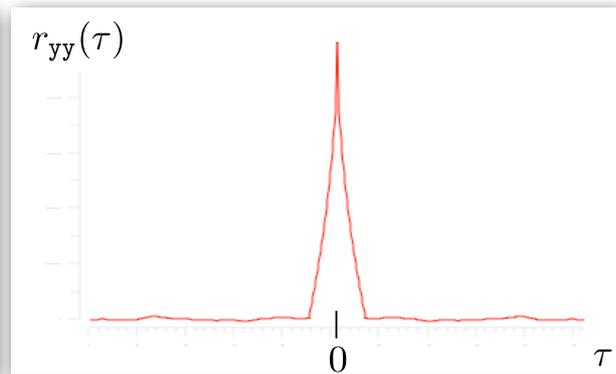
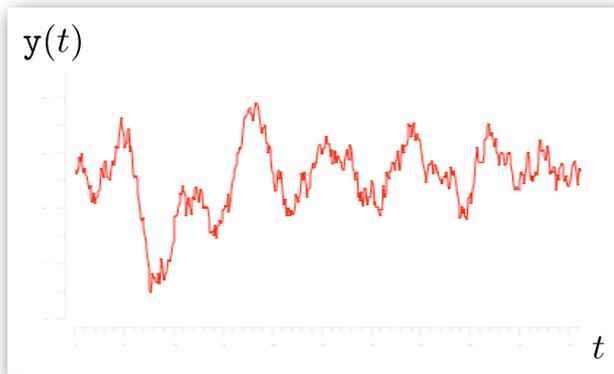
- zeitlich **benachbarte Signalwerte** sind miteinander **korreliert**
- Korrelationslänge  $\tau_k$ : Zeitabstand für einen Abfall der AKF auf  $r_{nn}(0)/e$  ■



Rauschprozess



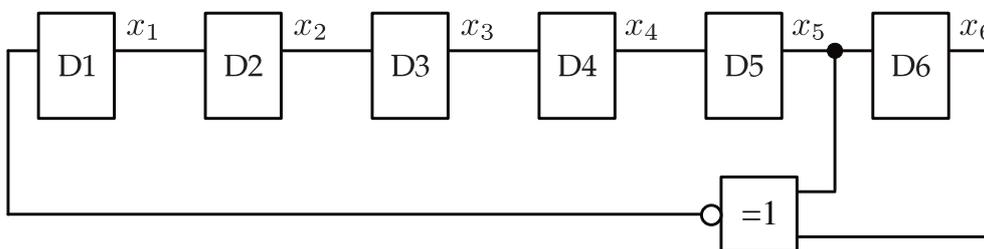
Autokorrelationsfunktion



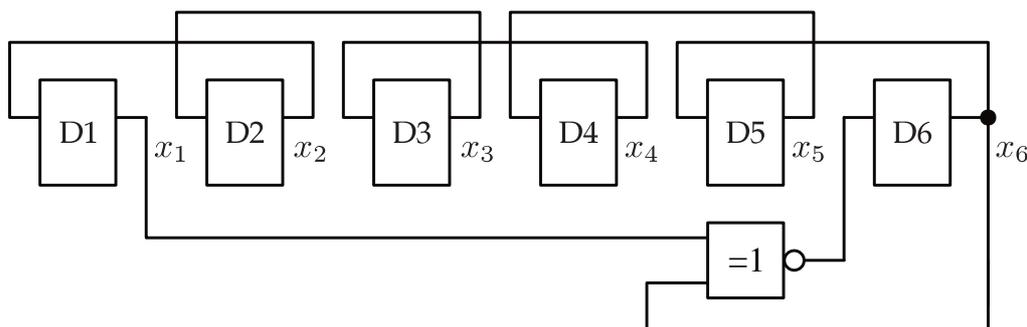
## Pseudostochastische Binärfolgen (PRBS):

- Erzeugung von weißem Rauschen durch Schieberegisterschaltungen

a) Rechts-Schieben



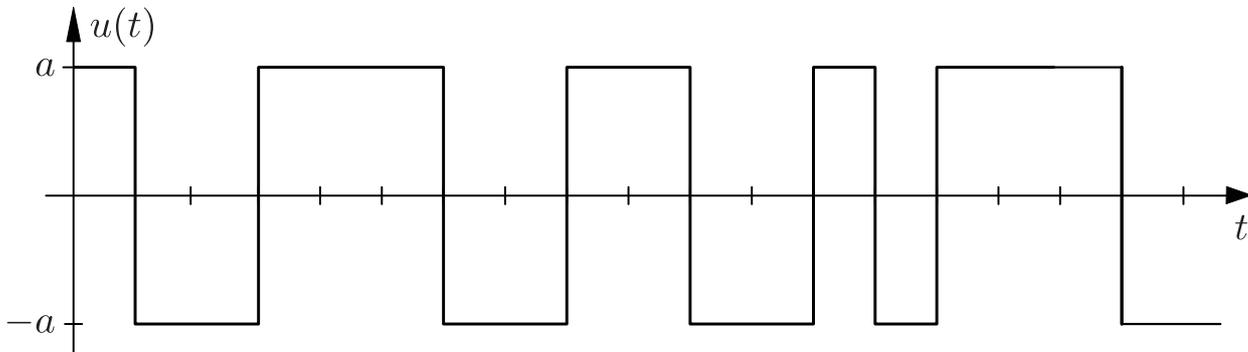
b) Links-Schieben



- Zuordnung der Ausgangswerte  $x_N$  (hier:  $N = 6$ ) des letzten Flipflops zum Ausgangssignal  $u(t)$  :

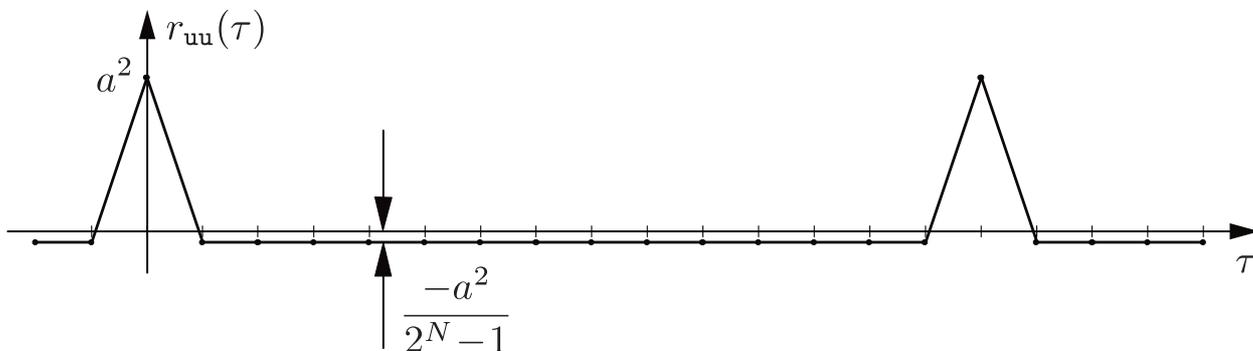
$$x_N = 1 \rightarrow u(t) = a$$

$$x_N = 0 \rightarrow u(t) = -a$$



Beispiel einer pseudostochastischen Binärfolge

- PRBS-Folgen sind **periodisch** → Autokorrelationsfunktion **periodisch**

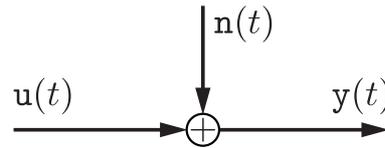


Autokorrelationsfunktion einer pseudostochastischen Binärfolge

## 6.4.3 Überlagerung zufälliger Störsignale

### Modell zur Überlagerung zufälliger Störsignale:

- Wie kann das Ausgangssignal eines Messsystems modelliert werden?
- Gängiges Modell: **additives Rauschen** (Vorteil: einfache Systemanalyse):



$$y(t) = u(t) + n(t)$$

- Die **Autokorrelationsfunktion** des gestörten Signals  $y(t)$  lautet:

$$\begin{aligned} r_{yy}(\tau) &= E\{y(t + \tau) y(t)\} \\ &= E\{[u(t + \tau) + n(t + \tau)][u(t) + n(t)]\} \\ &= r_{uu}(\tau) + r_{un}(\tau) + r_{nu}(\tau) + r_{nn}(\tau) \end{aligned}$$

- Für das **Leistungsdichtespektrum** erhält man durch Fourier-Trafo:

$$S_{yy}(f) = S_{uu}(f) + S_{un}(f) + S_{nu}(f) + S_{nn}(f)$$

## 6.4.3 Überlagerung zufälliger Störsignale

- Bei **reellen** Signalen (und KKFen) vereinfacht sich der letzte Ausdruck aufgrund der Symmetrie der Fourier-Transformation:

$$S_{un}(f) + S_{nu}(f) = S_{un}(f) + S_{un}^*(f) = 2\Re\{S_{un}(f)\}$$

$$\rightarrow S_{yy}(f) = S_{uu}(f) + S_{nn}(f) + 2\Re\{S_{un}(f)\}$$

- Spezialfall:** **unkorrelierte** Signale  $u(t)$ ,  $n(t)$  und mindestens ein Signal **mittelwertfrei**:

$$r_{un}(\tau) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S_{un}(f) = 0$$

$$\begin{aligned} r_{yy}(\tau) &= r_{uu}(\tau) + r_{nn}(\tau) \\ S_{yy}(f) &= S_{uu}(f) + S_{nn}(f) \end{aligned}$$

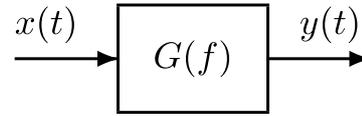
Die Annahme der **Unkorreliertheit** gilt in vielen Fällen, in denen  $n(t)$  eine Messstörung darstellt (z. B. Rauschen eines Messverstärkers).

## 6.4.4 Übertragung stochastischer Signale

- Wie werden Zufallsprozesse (konkret: ihr LDS) bei Übertragung durch LTI-Systeme verändert?
- Antwort zunächst für Energiesignale, für die die Fourier-Trafo existiert:

### Energiesignale:

- Ausgangssignal:  $Y(f) = G(f) X(f)$



### Energiedichtespektrum:

$$\begin{aligned} S_{yy}^E(f) &= Y(f) Y^*(f) \\ &= G(f) X(f) \cdot G^*(f) X^*(f) \\ &= |G(f)|^2 S_{xx}^E(f) \end{aligned}$$

### Kreuzenergiedichtespektrum:

$$\begin{aligned} S_{xy}^E(f) &= X(f) Y^*(f) \\ &= X(f) \cdot G^*(f) X^*(f) \\ &= G^*(f) S_{xx}^E(f) \end{aligned}$$

## 6.4.4 Übertragung stochastischer Signale

### Leistungssignale

- Bei Leistungssignalen muss man eine **Erwartungswertbildung** durchführen, bevor man die Systemantwort untersuchen kann. Die Erwartungswertbildung führt auf den folgenden Satz.

### Satz 6.6: Ergodische Prozesse in LTI-Systemen

Für ergodische Zufallsprozesse  $x(t)$ , die ein LTI-System mit der Impulsantwort  $g(t)$  und der Übertragungsfunktion  $G(f)$  durchlaufen, gelten die folgenden Beziehungen:

$$r_{xy}(\tau) = r_{xx}(\tau) * g^*(-\tau) \quad \circ \bullet \quad S_{xy}(f) = S_{xx}(f) G^*(f)$$

$$r_{yy}(\tau) = r_{xy}(\tau) * g(\tau) \quad \circ \bullet \quad S_{yy}(f) = S_{xy}(f) G(f)$$

$$r_{yy}(\tau) = r_{xx}(\tau) * r_{gg}^E(\tau) \quad \circ \bullet \quad S_{yy}(f) = S_{xx}(f) |G(f)|^2$$

- Die Zusammenhänge entsprechen denen der Energiesignale

# 6.5 Systemidentifikation

## 6.5.1 Schätzung des Leistungsdichtespektrums

## 6.5.2 Systemidentifikation bei geschätzter Leistungsdichte

## 6.5 Systemidentifikation

**Ziel:** Ermittlung des Übertragungsverhaltens eines Systems

- Weißes Rauschen:

$$S_{xx}(f) = a^2$$

- Ohne überlagerte Störung:  $n(t) = 0$

$$S_{yx}(f) = G(f) S_{xx}(f) = a^2 G(f)$$

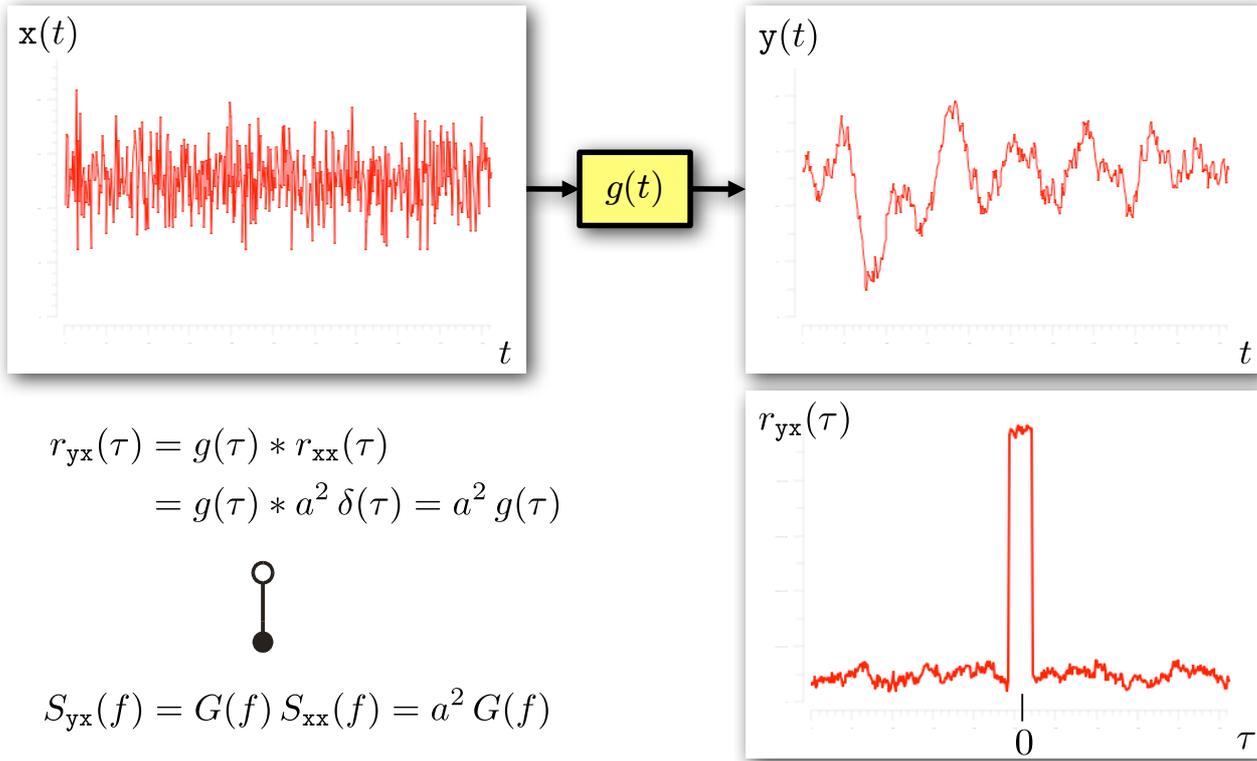


$$r_{yx}(\tau) = g(\tau) * a^2 \delta(\tau) = a^2 g(\tau)$$

- Berücksichtigung der **unabhängigen, mittelwertfreien** Messstörung  $n(t)$ :

$$\begin{aligned}
 r_{\tilde{y}x}(\tau) &= E\{\tilde{y}(t + \tau) x(t)\} \\
 &= E\{[y(t + \tau) + n(t + \tau)] x(t)\} \\
 &= E\{y(t + \tau) x(t)\} + \underbrace{E\{n(t + \tau) x(t)\}}_{=0} = r_{yx}(\tau)
 \end{aligned}$$

## Beispiel: Systemidentifikation durch Erregung mit weißem Rauschen



### 6.5.1 Schätzung des Leistungsdichtespektrums

- Bei **realen Messungen** ist die Berechnung der Korrelationsfunktionen problematisch, da das Messintervall **endlich** ist
  - **Nachteil:** Nur **Schätzwerte**  $\hat{S}_{xy}(f)$  der Leistungsdichte bestimmbar
  - **Vorteil:** **Schätzwerte** direkt aus der Fourier-Transformierten berechenbar:

$$\hat{S}_{yy}(f) = Y(f) Y^*(f)$$

$$\hat{S}_{xy}(f) = X(f) Y^*(f)$$

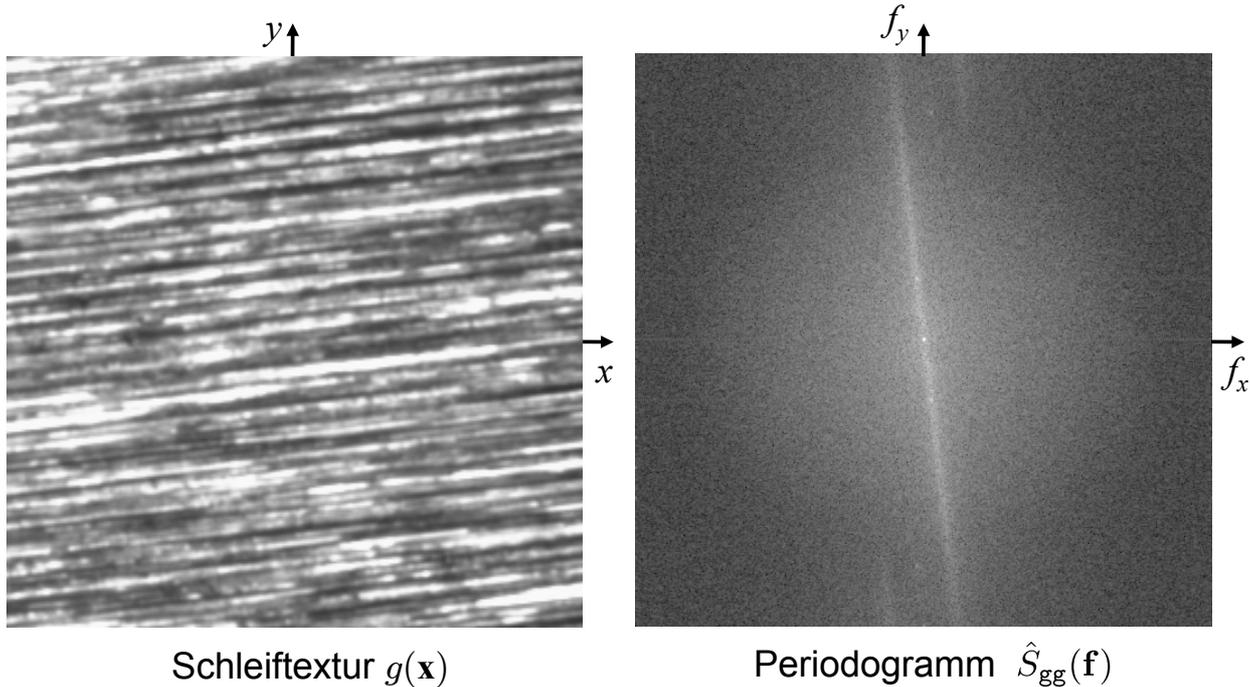
- Schätzwert  $\hat{S}_{yy}(f)$  des **Auto-LDS** wird **Periodogramm** genannt
- Verbesserte Schätzung durch **Mittelung** über mehrere Periodogramme:

$$\overline{\hat{S}_{yy}(f)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{S}_{yy,i}(f) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i(f) Y_i^*(f)$$

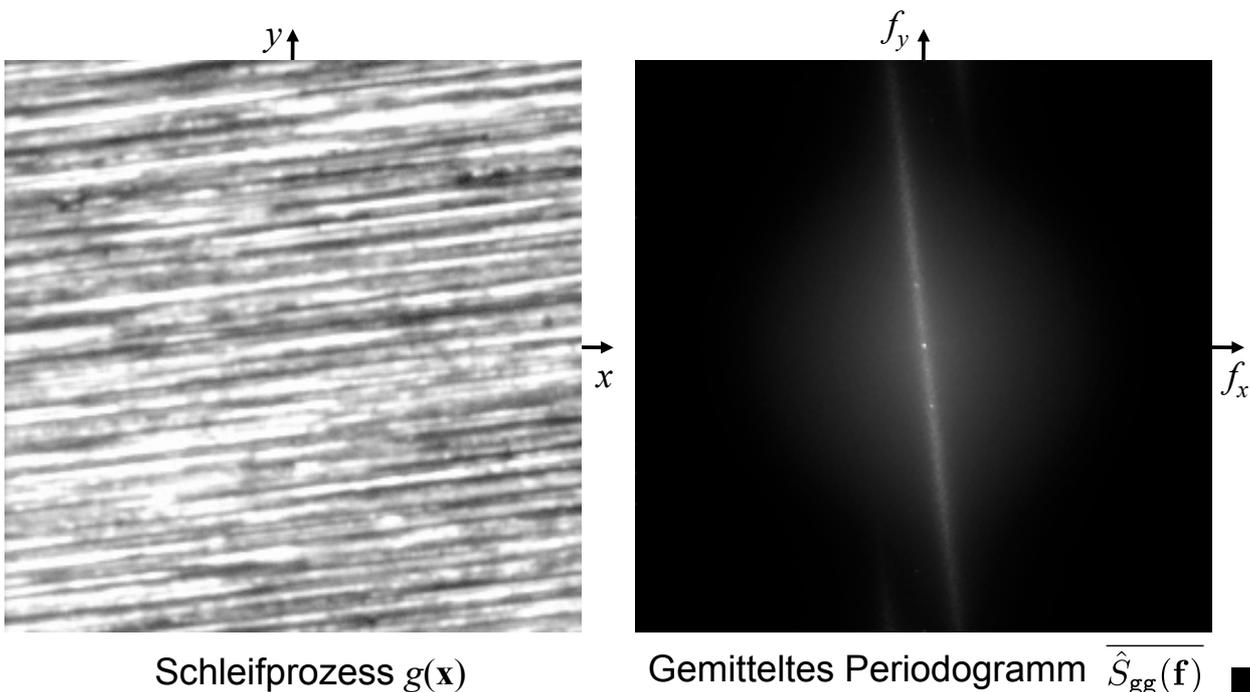
$$\overline{\hat{S}_{xy}(f)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{S}_{xy,i}(f) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i(f) Y_i^*(f)$$

### Beispiel 6.14: Erkennung periodischer Strukturen in Bildern

- Überlagerung periodischer Drallriefen und stochastischer Schleifriefen



- Aufnahme von  $N = 120$  Bildern der Textur unter ähnlichen Bedingungen
- Im Periodogramm erscheinen periodische Strukturen als  $\delta$ -Impulse



### 1. Quotientenbildung der gemittelten Periodogramme:

- Für das Periodogramm des Ausgangssignals gilt:

$$\begin{aligned}\hat{S}_{yy}(f) &= Y(f) Y^*(f) = [G(f) X(f) + N(f)] \cdot [G(f) X(f) + N(f)]^* \\ &= |G(f)|^2 \hat{S}_{xx}(f) + G(f) \hat{S}_{xn}(f) + G^*(f) \hat{S}_{nx}(f) + \hat{S}_{nn}(f) \\ &= |G(f)|^2 \hat{S}_{xx}(f) + 2\Re\{G(f) \hat{S}_{xn}(f)\} + \hat{S}_{nn}(f)\end{aligned}$$

- Durch die Mittelung verschwindet der Kreuzterm:

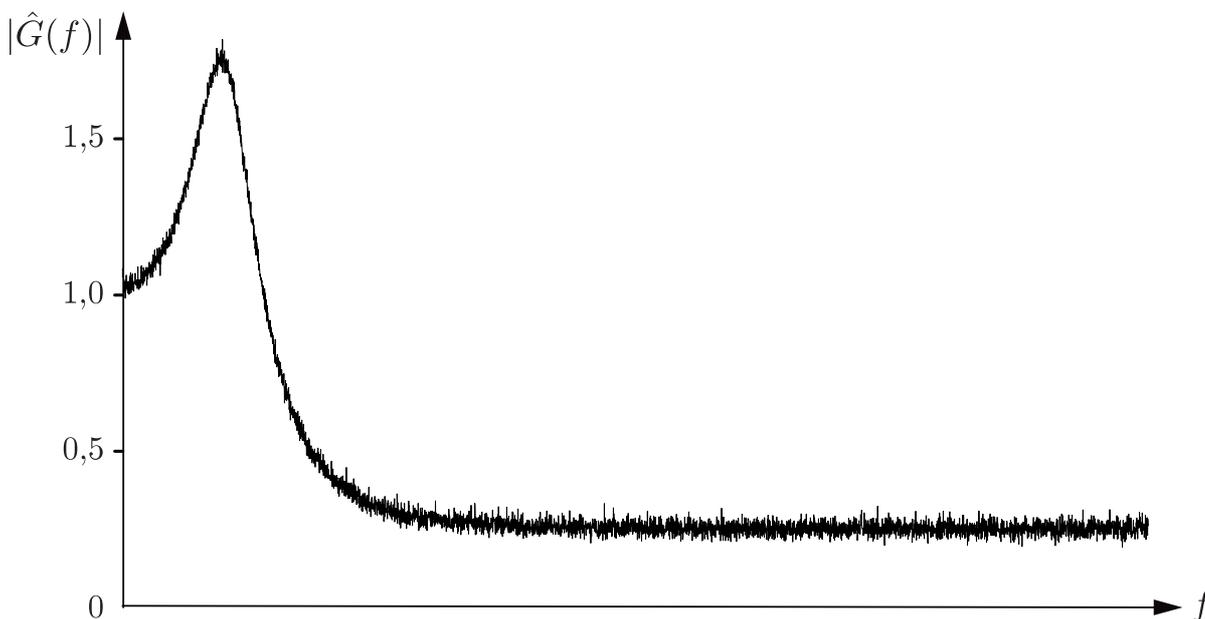
$$\overline{\hat{S}_{yy}(f)} = |G(f)|^2 \overline{\hat{S}_{xx}(f)} + 2\Re\left\{G(f) \underbrace{\overline{\hat{S}_{xn}(f)}}_{\approx 0}\right\} + \overline{\hat{S}_{nn}(f)}$$

- Die Übertragungsfunktion wird durch folgenden Quotienten geschätzt:

$$|\hat{G}(f)|^2 = \frac{\overline{\hat{S}_{yy}(f)}}{\overline{\hat{S}_{xx}(f)}} = |G(f)|^2 + \frac{\overline{\hat{S}_{nn}(f)}}{\overline{\hat{S}_{xx}(f)}}$$

- Nachteile:** keine Phaseninformation; ÜF bei Störungen zu groß geschätzt

**Geschätzter** Amplitudengang  $|\hat{G}(f)|$  eines PT<sub>2</sub>-Gliedes durch Mittelung von  $N = 100$  Periodogrammen:



### 2. Quotientenbildung der gemittelten Kreuzleistungsdichten:

- Das **Kreuzleistungsdichtespektrum** ist eine komplexe Funktion:

$$\hat{S}_{yx}(f) = Y(f) X^*(f) = [G(f) X(f) + N(f)] X^*(f) = G(f) \hat{S}_{xx}(f) + \hat{S}_{nx}(f)$$

- Die Mittelung bringt daher einen höheren Rechenaufwand mit sich:

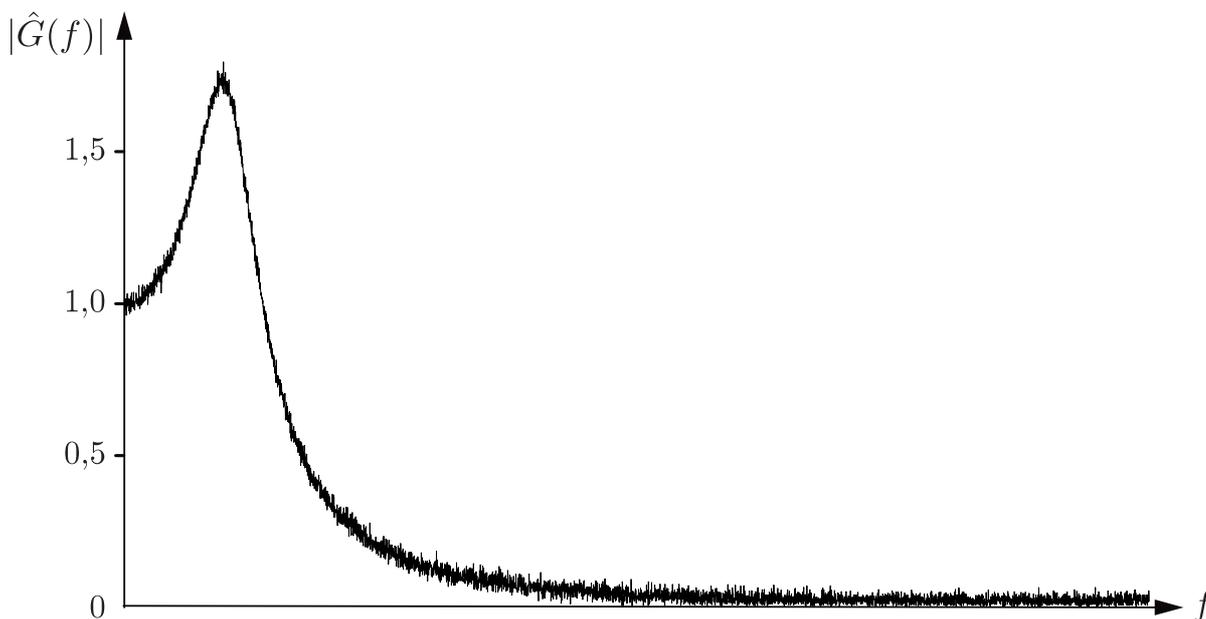
$$\overline{\hat{S}_{yx}(f)} = \overline{G(f) \hat{S}_{xx}(f)} + \underbrace{\overline{\hat{S}_{nx}(f)}}_{\approx 0}$$

- Die **Übertragungsfunktion** wird durch folgenden Quotienten geschätzt:

$$\hat{G}(f) = \frac{\overline{\hat{S}_{yx}(f)}}{\overline{\hat{S}_{xx}(f)}} = \frac{\overline{G(f) \hat{S}_{xx}(f)}}{\overline{\hat{S}_{xx}(f)}}$$

- Vorteile:** Phaseninformation verfügbar; geringerer Einfluss der Störung  $n(t)$

**Geschätzte Übertragungsfunktion**  $|\hat{G}(f)|$  eines  $PT_2$ -Gliedes durch Mittelung von  $N = 100$  Kreuzleistungsdichtespektren:



## 6.6 Wiener-Filter

6.6.1 Signalmodell

6.6.2 Herleitung des Wiener-Filters

6.6.3 Wiener-Filter bei linearer Verzerrung und additivem Rauschen

## 6.6 Wiener-Filter

### Signalschätzung

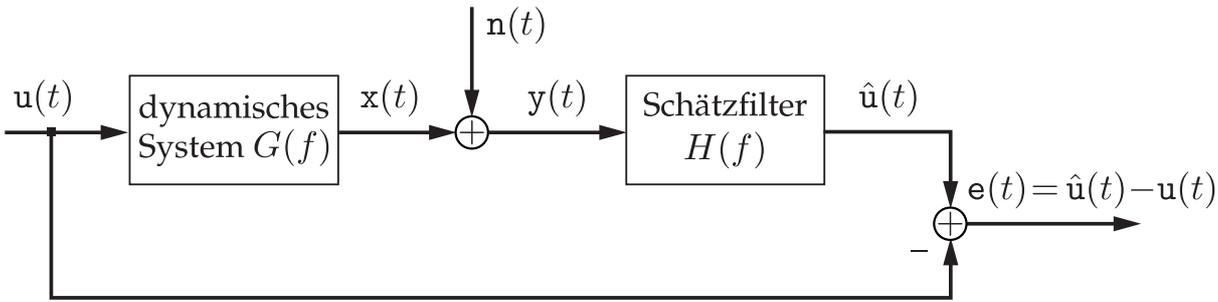
- Die Signalschätzung befasst sich mit der Rekonstruktion von Signalen, die durch ein nichtideales System verändert und durch überlagerte Störungen verfälscht wurden. Das Wiener-Filter ist ein Optimalfilter dafür.

### Anwendungsgebiete:

**Messtechnik:** Messung des Zeitverlaufes des Messsignals. Jede Messung beeinflusst den zu messenden Vorgang und verfälscht somit das Originalsignal. Ferner treten Messfehler (Rauschen) auf.

**Signalübertragung:** Verfälschung des Sendesignals durch die nicht-idealen Eigenschaften des Übertragungskanal. Zusätzlich kommen Störungen hinzu.

**Speicherung:** Veränderung eines Signals, um den Erfordernissen des Datenträgers zu genügen (Abtastung, Quantisierung). Diese Effekte können durch Rauschen modelliert werden.

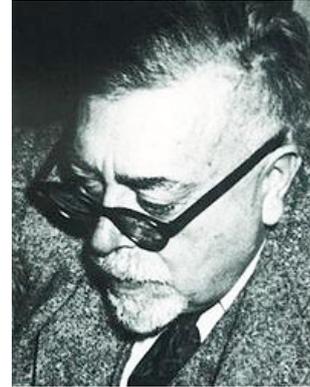


- **Annahme:** Kreuzleistungsdichte  $S_{yu}(f)$  bekannt
- **Schätzfilter  $H(f)$ :** Ausgangssignal  $\hat{u}(t)$  soll dem Originalsignal  $u(t)$  möglichst nahe kommen:

$$e(t) = \hat{u}(t) - u(t)$$

$$E\{e^2(t)\} = E\{[\hat{u}(t) - u(t)]^2\} \rightarrow \min$$

➔ **Optimalfilter oder Wiener-Filter**



N. Wiener, 1894-1964

# 6.6.2 Herleitung des Wiener-Filters

**Ansatz:**

$$E\{e^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{ee}(f) df \rightarrow \min \quad \rightarrow \quad S_{ee}(f) \rightarrow \min$$

- **Leistungsdichte des Rekonstruktionsfehlers:**

$$\begin{aligned} S_{ee}(f) &= (\hat{U} - U)(\hat{U} - U)^* \\ &= \hat{U}\hat{U}^* - \hat{U}U^* - U\hat{U}^* - UU^* \\ &= YH(YH)^* - YHU^* - U(YH)^* - UU^* \\ &= S_{yy}(f) |H(f)|^2 - S_{yu}(f) H(f) - S_{uy}(f) H^*(f) + S_{uu}(f) \end{aligned}$$

- Das Schätzfilter  $H(f)$  mit kleinster Fehlerleistung erhält man durch Ableiten von  $S_{ee}(f)$  nach  $H(f)$  getrennt nach **Betrag** und **Phase**:

$$H = |H| e^{j\varphi} \quad \rightarrow \quad S_{ee} = S_{yy} |H|^2 - S_{yu} |H| e^{j\varphi} - S_{uy} |H| e^{-j\varphi} + S_{uu}$$

## 6.6.2 Herleitung des Wiener-Filters

- Ableitung nach dem **Betrag**  $|H|$  liefert den optimalen **Amplitudengang**:

$$\frac{dS_{ee}}{d|H|} = 2|H|S_{yy} - S_{yu}e^{j\varphi} - S_{yu}^*e^{-j\varphi} = 2|H|S_{yy} - 2\Re\{S_{yu}e^{j\varphi}\} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow |H| = \frac{\Re\{S_{yu}e^{j\varphi}\}}{S_{yy}}$$

- Ableitung nach der **Phase**  $\varphi$  liefert den optimalen **Phasengang**:

$$\frac{dS_{ee}}{d\varphi} = -j|H|e^{j\varphi}S_{yu} + j|H|e^{-j\varphi}S_{yu}^* = -j2|H|\underbrace{\Im\{S_{yu}e^{j\varphi}\}}_{\stackrel{!}{=} 0} \stackrel{!}{=} 0$$

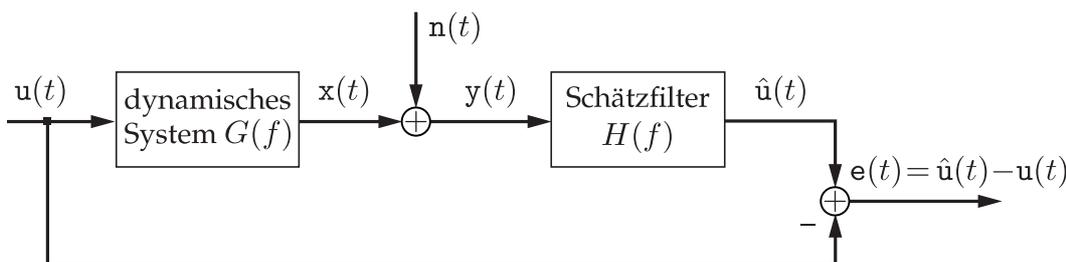
$$\Leftrightarrow \text{Im} = 0 \Leftrightarrow \text{Phase} = 0 \Leftrightarrow \varphi = -\arg\{S_{yu}\}$$

→ Betrag:  $|H| = \frac{\Re\{S_{yu}e^{j\varphi}\}}{S_{yy}} = \frac{\Re\{|S_{yu}|e^{j(\arg\{S_{yu}\}+\varphi)}\}}{S_{yy}} = \frac{|S_{yu}|}{S_{yy}}$

→ Wiener-Optimalfilter:  $H(f) = \frac{S_{yu}^*(f)}{S_{yy}(f)} = \frac{S_{uy}(f)}{S_{yy}(f)}$

## 6.6.3 WF bei linearer Verzerrung & additivem Rauschen

### Rekonstruktion bei linearer Verzerrung und additivem Rauschen:



- Leistungsdichte des Systemausgangs (Summe **unkorrelierter** Größen):

$$S_{yy}(f) = S_{xx}(f) + S_{nn}(f) = S_{uu}(f)|G(f)|^2 + S_{nn}(f)$$

- Kreuzleistungsdichte:  $S_{uy}(f) = S_{uu}(f)G^*(f) + \underbrace{S_{un}(f)}_{=0}$

→ Wiener-Filter:  $H(f) = \frac{S_{uy}(f)}{S_{yy}(f)} = \frac{S_{uu}(f)G^*(f)}{S_{uu}(f)|G(f)|^2 + S_{nn}(f)}$

Rückführung auf die Leistungsdichten des Messsignals und der Störung.  $G(f)$  kann bekannt sein oder durch eine **Identifikation** bestimmt werden.

## Optimalfilter nach Wiener:

$$H(f) = \frac{S_{uu}(f) G^*(f)}{S_{uu}(f) |G(f)|^2 + S_{nn}(f)} = \frac{1}{G(f)} \cdot \frac{|G(f)|^2}{|G(f)|^2 + \underbrace{\frac{S_{nn}(f)}{S_{uu}(f)}}_{\text{SNR}^{-1}(f)}}$$

Inverses  
Filter

angepasstes Störungs-  
unterdrückungsfilter  
(meist TP-Charakter)

## Diskussion

- Filter „öffnet“ bei Frequenzen, wo Nutzsignal stark gegenüber Störung
- Filter „schließt“ bei Frequenzen, wo Störung stark gegenüber Nutzsignal
- Für  $n(t) \equiv 0$ :  $H(f) \rightarrow$  Inverses Filter
- Nachteil: Kriterium des minimalen quadratischen Fehlers bei manchen Anwendungen nicht zielführend

## Beispiel 6.15: Rauschunterdrückung

- Als Messsignal wird ein TP-Signal mit folgender Leistungsdichte betrachtet:

$$S_{uu}(f) = \frac{U^2}{1 + (b \cdot 2\pi f)^2}$$

- Der überlagerte Rauschprozess sei weiß:

$$S_{nn}(f) = a^2$$

- Es erfolgt **keine** Verzerrung durch das dynamische System:

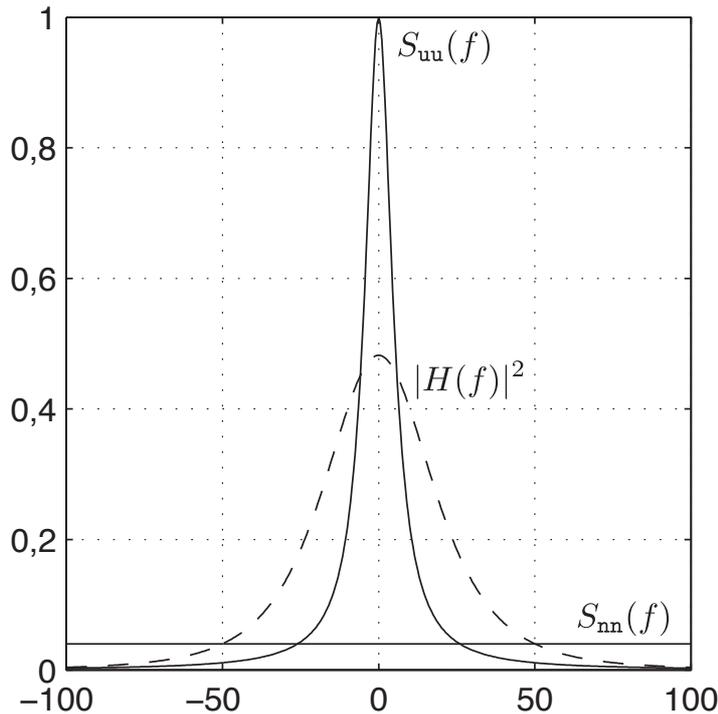
$$G(f) = 1$$

- **Ziel** ist eine Rauschunterdrückung, ohne das Messsignal zu stark zu verfälschen. Die Übertragungsfunktion des Wiener-Filters lautet:

$$H(f) = \frac{S_{uu}(f)}{S_{uu}(f) + S_{nn}(f)} = \frac{U^2}{U^2 + a^2 + (b \cdot a \cdot 2\pi f)^2}$$

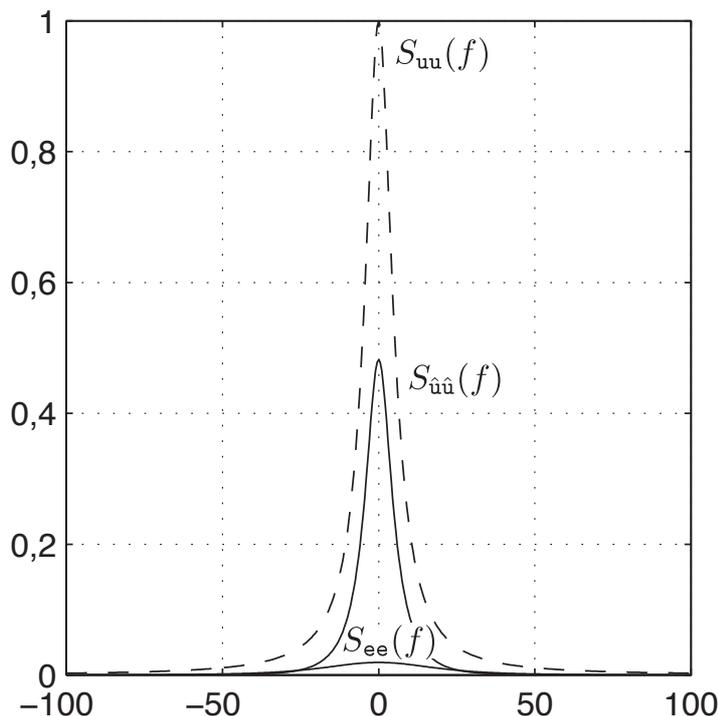
### 6.6.3 WF bei linearer Verzerrung & additivem Rauschen

Leistungsdichtespektren des Messsignals  $S_{uu}(f)$  und der Störung  $S_{nn}(f)$  vor der Filterung sowie Amplitudengang des Wiener-Filters  $|H(f)|^2$



### 6.6.3 WF bei linearer Verzerrung & additivem Rauschen

Leistungsdichtespektren der verbleibenden Störung  $S_{ee}(f)$  und des Messsignals  $S_{\hat{u}\hat{u}}(f)$  am Ausgang des Optimalfilters



#### Beispiel 6.17: Wiener-Filter zur Bildrestauration

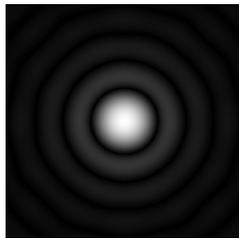


Messsignal  $y(\mathbf{x})$ ;  $S_{nn}(\mathbf{f}) = \text{const.}$

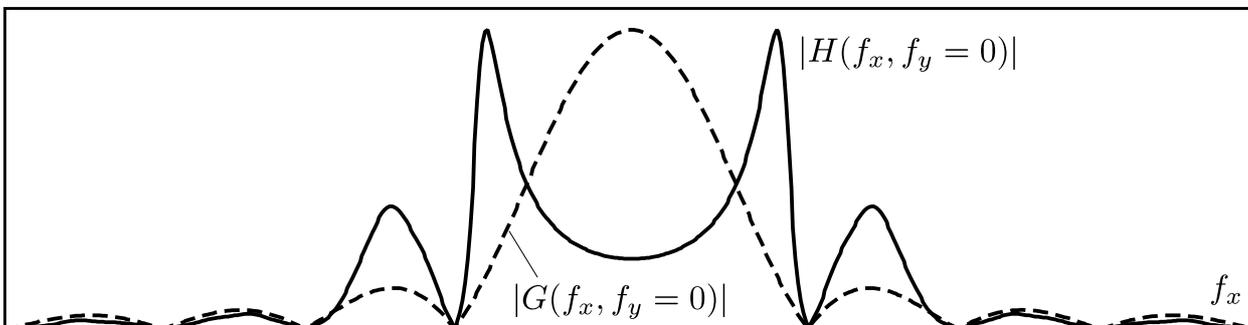
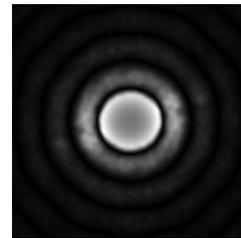


Ergebnis der Filterung

Amplitudengang  $|G(\mathbf{f})|$  der unscharfen optischen Abbildung;  
 $g(\mathbf{x}) = k \cdot \text{rect}(\|\mathbf{x}\| / 9)$



Amplitudengang  $|H(\mathbf{f})|$  des Wiener-Filters



Vergleich der Amplitudengänge von unscharfer Abbildung  $|G(\mathbf{f})|$  und Wiener-Filter  $|H(\mathbf{f})|$ . Das Leistungsdichtespektrum  $S_{uu}(\mathbf{x})$  des Originalsignals wurde aus dem Messsignal  $y(\mathbf{x})$  geschätzt.