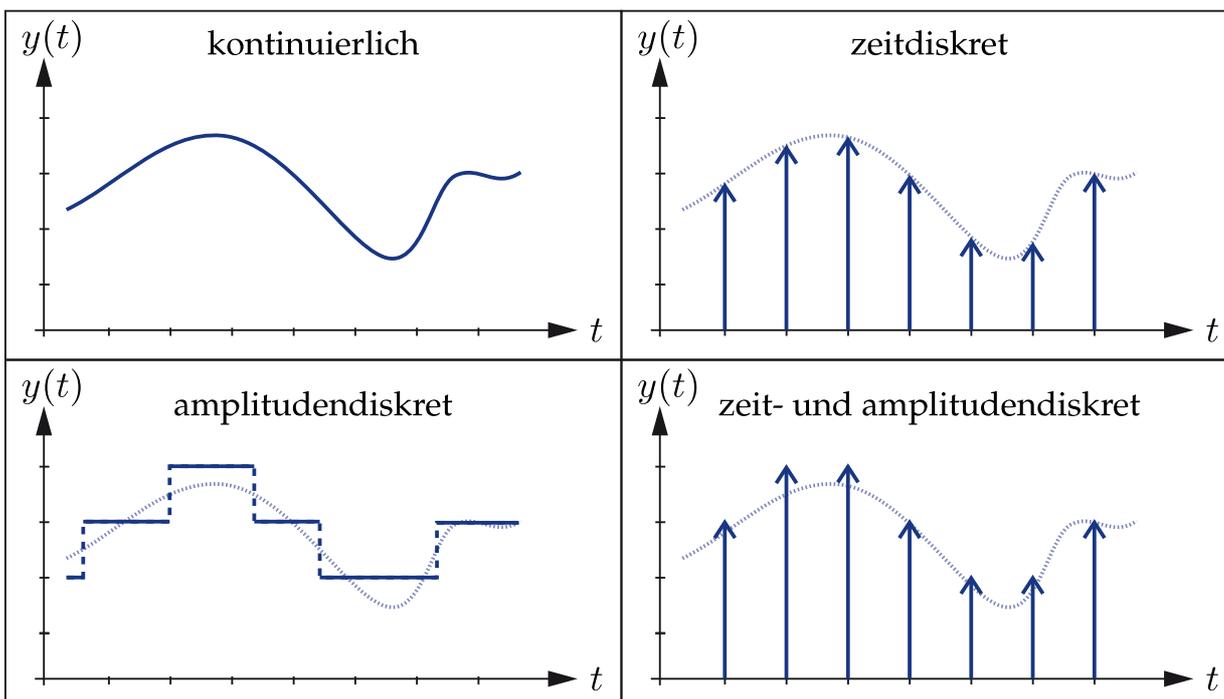


# 7. Erfassung analoger Signale

- 7.1 Abtastung
- 7.2 Quantisierung
- 7.3 Analog-Digital-Umsetzer
- 7.4 Digital-Analog-Umsetzer

## 7. Erfassung analoger Signale

Kontinuierliche und diskrete Signale:



# 7.1 Abtastung

7.1.1 Abtasttheorem

7.1.2 Bandüberlappungsfehler (*Aliasing*)

7.1.3 Anti-Aliasing-Filter

7.1.4 Mittelwertbildung bei endlicher Abtastdauer

7.1.5 Zeitliche Abtastfehler

## 7.1.1 Abtasttheorem

### Wiederholung

- Abtastung: Multiplikation des **zeitkontinuierlichen** Signals mit einer Impulsreihe

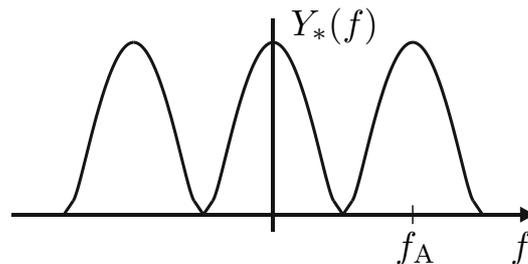
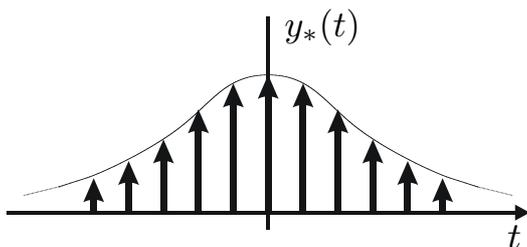
**Zeitdiskretes** Signal:

Spektrum:

$$y_*(t) = y(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n t_A)$$



$$Y_*(f) = \frac{1}{t_A} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y\left(f - \frac{k}{t_A}\right)$$



- Periodische Wiederholung des ursprünglichen Spektrums in Abständen von  $1/t_A = f_A$

## Satz 7.1: Abtasttheorem

Ein bandbegrenzte kontinuierliches Signal  $y(t) \leftrightarrow Y(f)$  mit

$$Y(f) = 0 \quad \text{für} \quad |f| \geq \frac{B}{2}$$

lässt sich fehlerfrei aus seinen äquidistanten Abtastwerten rekonstruieren, falls die Abtastfrequenz  $f_A = 1/t_A$  die folgende Bedingung erfüllt:

$$f_A \geq B$$

- **Rekonstruktion** durch Multiplikation des Spektrums mit einem Rechteckfenster im Frequenzbereich

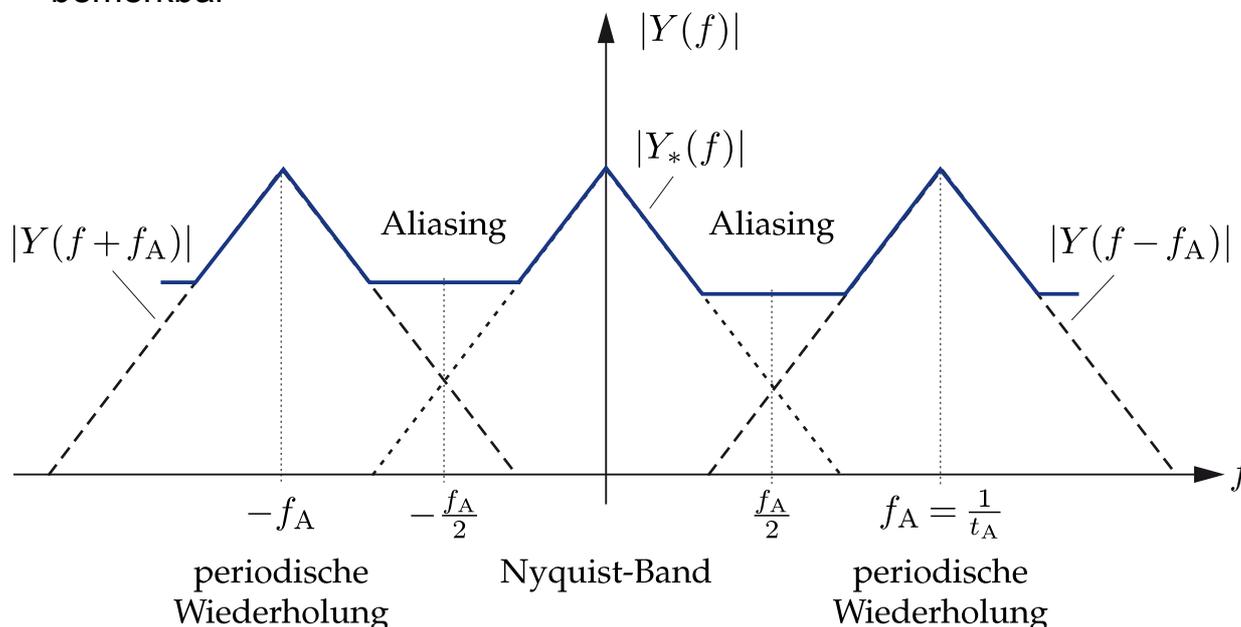
- Zeitbereich:

$$\hat{y}(t) = y_*(t) * \mathcal{F}^{-1}\{t_A \cdot r_{f_A}(f)\}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n t_A) \cdot \frac{\sin \pi f_A (t - n t_A)}{\pi f_A (t - n t_A)}$$

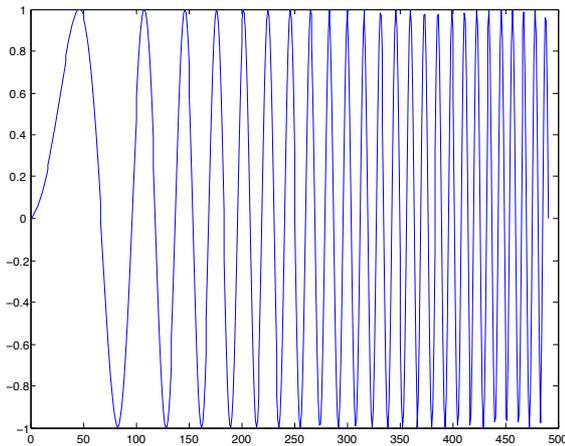
## 7.1.2 Bandüberlappungsfehler (Aliasing)

- Bei Nichteinhaltung des Abtasttheorems kommt es zu spektralen Überlappungen (*Aliasing*)
- Diese machen sich meist im hochfrequenten Bereich des Nyquist-Bandes bemerkbar

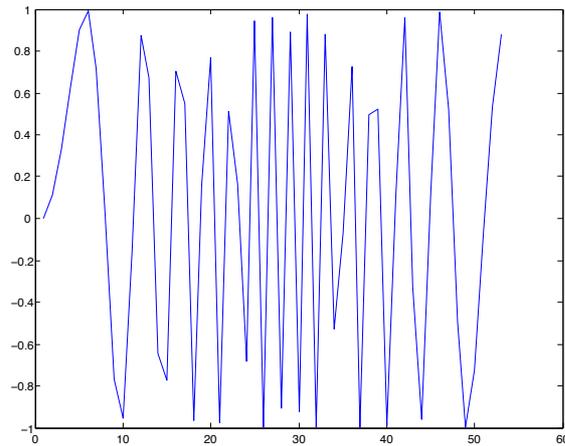


## 7.1.2 Bandüberlappungsfehler (Aliasing)

### Beispiel: Abtastung eines linearen Chirp-Signals



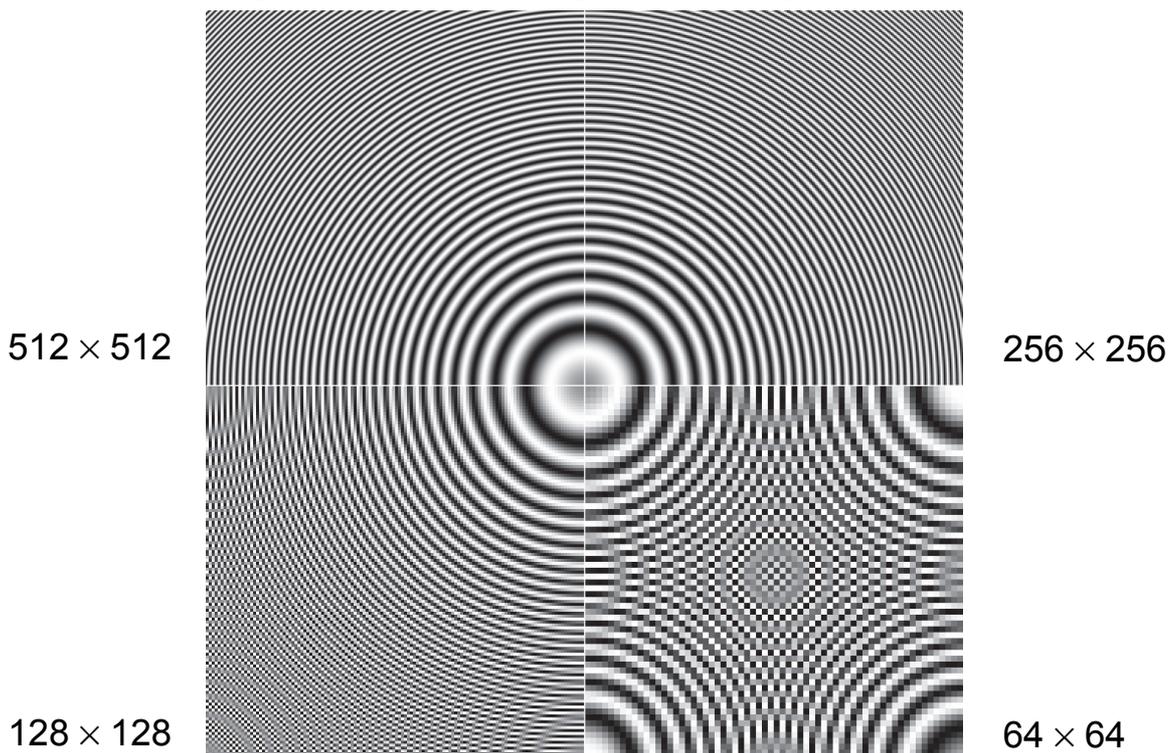
Signal mit linear ansteigender Frequenz bei **Einhaltung** des Abtasttheorems



Signal mit linear ansteigender Frequenz bei **Verletzung** des Abtasttheorems

## 7.1.2 Bandüberlappungsfehler (Aliasing)

### Beispiel: Aliasing bei der Abtastung von Bildsignalen



- Zur Bandbegrenzung werden **Anti-Aliasing-Filter** verwendet
- Idealer Tiefpass nicht realisierbar
- Einfaches realisierbares **Beispiel**: Filter 1. Ordnung

### Beispiel 7.2: Aliasing-Fehler bei Filter 1. Ordnung

- Übertragungsfunktion des Anti-Aliasing-Filters 1. Ordnung:

$$G(f) = \frac{1}{1 + j \cdot \frac{f}{f_g}} \quad \text{Grenzfrequenz } f_g < f_A/2$$

- Als Eingangssignal wird ein weißer Rauschprozess betrachtet:

$$S_{xx}(f) = A^2 = \text{const.}$$

- Für die Leistungsdichte am Ausgang des Filters erhält man:

$$S_{yy}(f) = |G(f)|^2 \cdot S_{xx}(f) = \frac{A^2}{1 + \left(\frac{f}{f_g}\right)^2}$$

$$S_{yy}(f) = |G(f)|^2 \cdot S_{xx}(f) = \frac{A^2}{1 + \left(\frac{f}{f_g}\right)^2}$$

- Zur Bewertung der Signalqualität nach der Abtastung sollen die Leistungen von Nutzsinal und Störsinal (*Aliasing*) verglichen werden
- Für die **Leistung des Nutzsinals** erhält man durch Integration im „Nutzsignalbereich“  $|f| \leq f_g$  (weder Aliasing noch signifikante Dämpfung):

$$P_{\text{Sig}} = 2 \int_0^{f_g} S_{yy}(f) df = 2 \int_0^{f_g} \frac{A^2}{1 + \left(\frac{f}{f_g}\right)^2} df = 2f_g A^2 \arctan\left(\frac{f}{f_g}\right) \Big|_0^{f_g} = \frac{\pi}{2} f_g A^2$$

- Die **Leistung der Störungen infolge von Aliasing** ( $|f| > f_A/2$ ) beträgt:

$$P_{\text{Stör}} = 2 \int_{f_A/2}^{\infty} S_{yy}(f) df = 2f_g A^2 \arctan\left(\frac{f}{f_g}\right) \Big|_{f_A/2}^{\infty} = f_g A^2 \left[ \pi - 2 \arctan\left(\frac{f_A}{2f_g}\right) \right]$$

- Für das Signal-Rausch-Verhältnis (SNR) folgt:

$$\frac{P_{\text{Sig}}}{P_{\text{Stör}}} = \frac{\pi/2}{\pi - 2 \arctan\left(\frac{f_A}{2f_g}\right)}$$

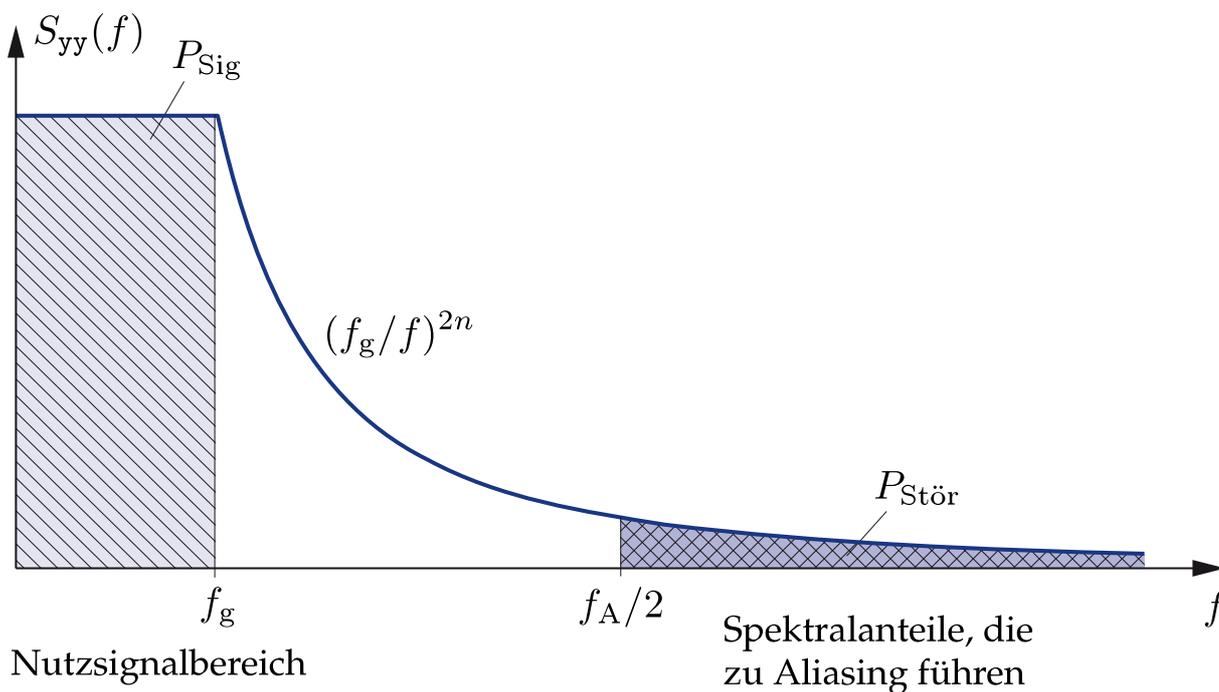
- Für  $f_g = f_A/(2 \cdot 4)$  ergibt sich exemplarisch:

$$\frac{P_{\text{Sig}}}{P_{\text{Stör}}} = \text{SNR} = \frac{\pi/2}{\pi - 2 \arctan(4)} \approx 3,205 = 5,1 \text{ dB}$$

- ➔ Filter 1. Ordnung i. d. R. nicht ausreichend

Für große Störabstände ist es erforderlich, die Nyquist-Frequenz  $f_A/2$  erheblich größer als die Signalbandbreite  $f_g$  zu wählen (Überabtastung)

Aliasing-Fehler durch nicht-ideales Filter  $n$ -ter Ordnung



Filter  $n$ -ter Ordnung:

$$G(f) = \frac{1}{\left(1 + j \cdot \frac{f}{f_g}\right)^n} \rightarrow$$

$$|G(f)|^2 \approx \begin{cases} 1 & \text{für } |f| \leq f_g \\ \left(\frac{f_g}{f}\right)^{2n} & \text{für } |f| > f_g \end{cases}$$

■ Nutzsignal:  $P_{\text{Sig}} \approx 2 \int_0^{f_g} S_{yy}(f) df = 2 \int_0^{f_g} A^2 df = 2f_g A^2$

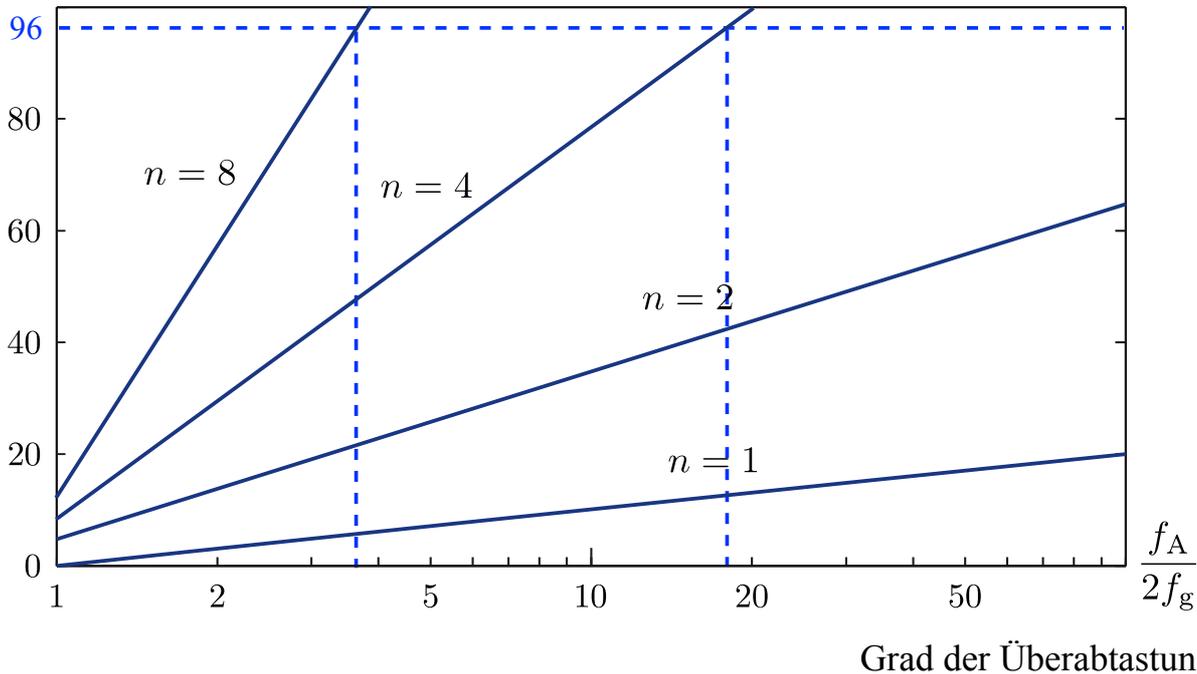
■ Aliasing:  $P_{\text{Stör}} \approx 2 \int_{f_A/2}^{\infty} S_{yy}(f) df = 2 \int_{f_A/2}^{\infty} \frac{A^2 f_g^{2n}}{f^{2n}} df$

$$= -2A^2 \frac{f_g^{2n}}{(2n-1) \cdot f^{2n-1}} \Big|_{f_A/2}^{\infty} = A^2 \frac{(2f_g)^{2n}}{(2n-1) \cdot f_A^{2n-1}}$$

$$\rightarrow \text{SNR} = \frac{P_{\text{Sig}}}{P_{\text{Stör}}} \approx (2n-1) \cdot \left(\frac{f_A}{2f_g}\right)^{2n-1}$$

Signal-Rausch-Verhältnisse bei Anti-Aliasing-Filtern  $n$ -ter Ordnung:

SNR/dB



- Abtastung mit idealen Dirac-Impulsen in der Praxis nicht möglich
- Endliche Integrationszeit des A/D-Umsetzers bewirkt **zeitliche Mittelung** des Signals
- Kann diese Filterung das Anti-Aliasing-Filter ersetzen?

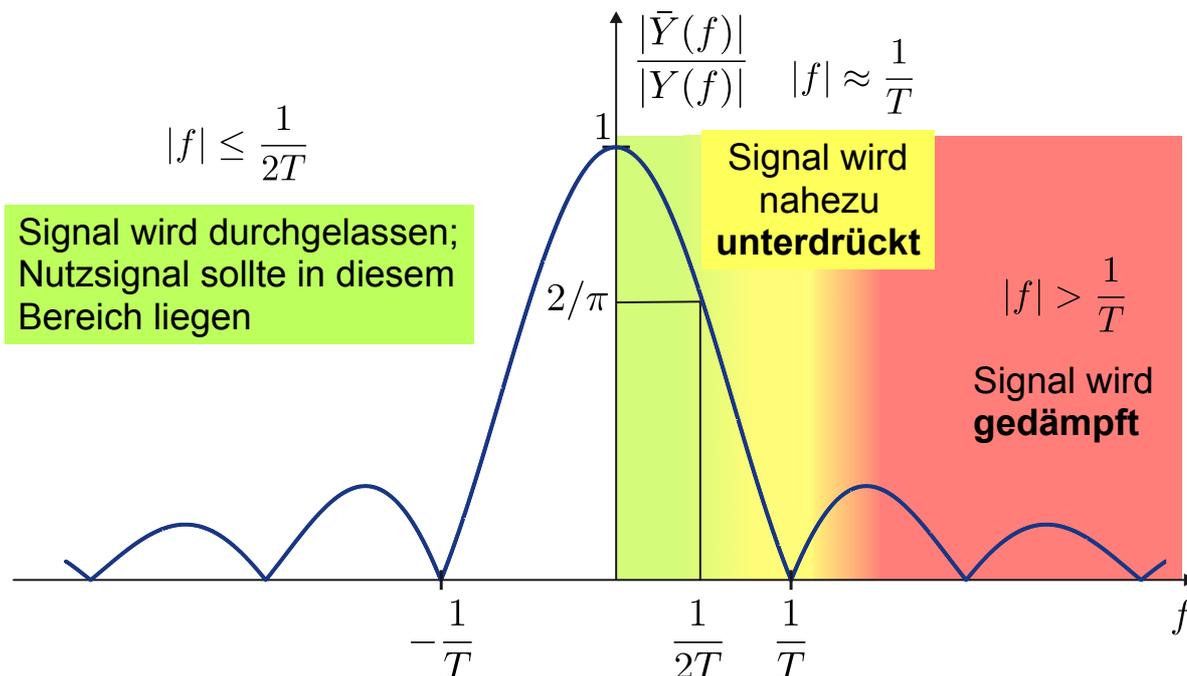
**Gleitender Mittelwert** (*moving average*):

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} y(\tau) d\tau = y(t) * g(t) \quad \text{mit} \quad g(t) = \frac{1}{T} \cdot r_T(t)$$



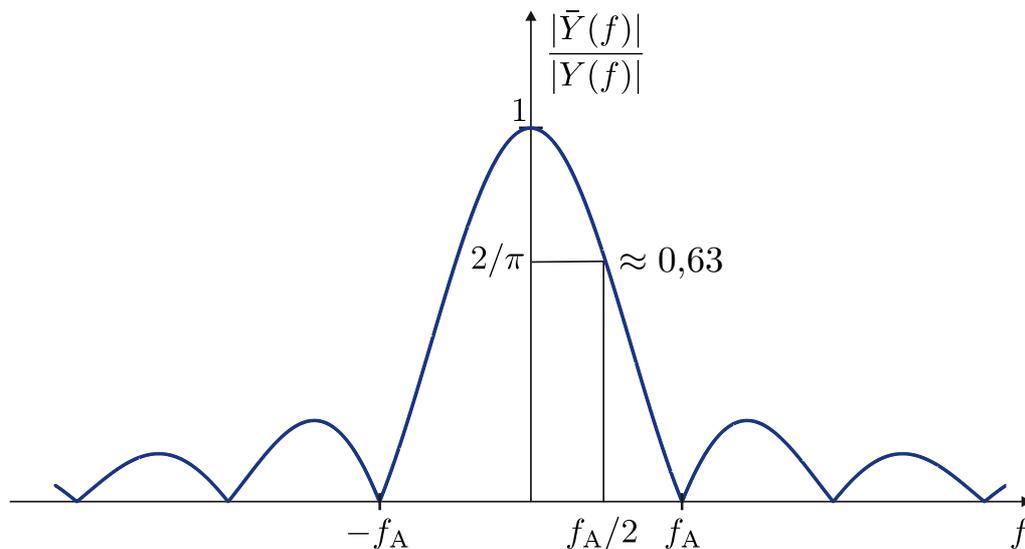
$$\bar{Y}(f) = \frac{1}{T} Y(f) \cdot R_T(f) = Y(f) \cdot \frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f}$$

**Amplitudengang der Mittelwertbildung:**



### Beispiel 7.3: Mittelwertbildung als Anti-Aliasing-Filter

- Bei vielen integrierenden A/D-Umsetzern erstreckt sich die Mittelwertbildung über die **gesamte Abtastzeit**:  $T = t_A = 1/f_A$



- Spektralanteile oberhalb von  $f_A/2$  werden nur schlecht gedämpft  
→ trotz Mittelung **Anti-Aliasing-Filter notwendig!**

## 7.1.5 Zeitliche Abtastfehler

- In realen Systemen kommt es zu **zeitlichen** Fehlern bei der Abtastung (**Jitter**)
- Ideales** Abtastsignal:

$$y_n = y(n t_A)$$

- Tatsächliche Abtastzeitpunkte:

$$t_n = n t_A + \tau_n \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

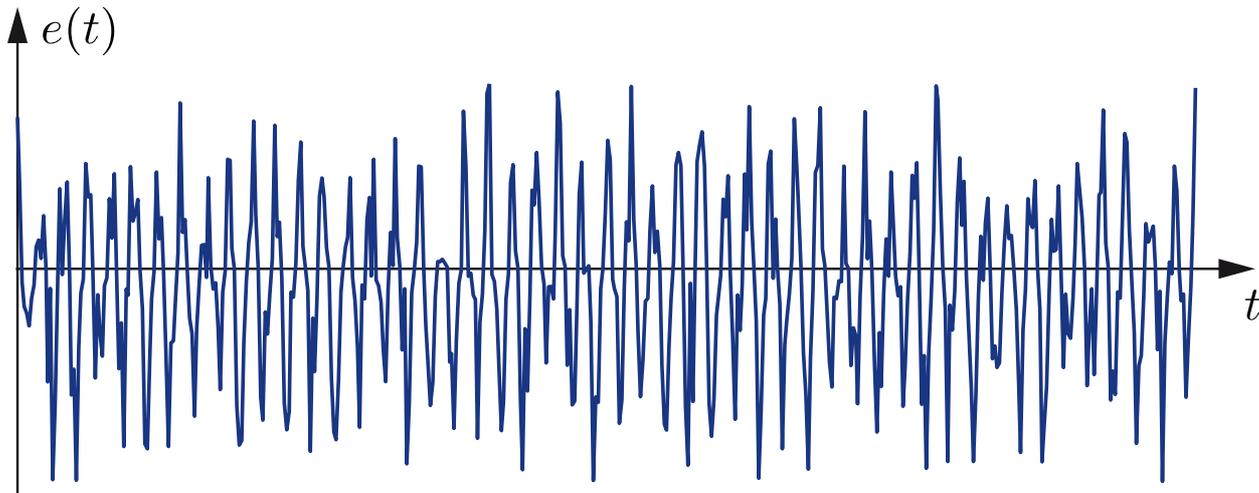
- Tatsächlich abgetastetes Signal:

$$\tilde{y}_n = y(n t_A + \tau_n)$$

- Fehler durch zeitlich falsches Abtasten (**Jitter-Fehler**):

$$e_n = \tilde{y}_n - y_n$$

### Fehlersignal infolge des Jitters bei der Abtastung einer harmonischen Schwingung



- Um den Jitter-Fehler **quantitativ** zu beschreiben, wird zunächst eine Abschätzung für die Ableitung eines bandbegrenzten Signals hergeleitet
- Der **Differentiationssatz** der Fourier-Transformation lautet:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \mathcal{F}^{-1} \{ (j2\pi f) Y(f) \} = \int_{-\infty}^{\infty} (j2\pi f) Y(f) e^{j2\pi f t} df$$

- Mit der Dreiecksungleichung erhält man daraus die folgende Abschätzung für das **erste Moment**  $M_1$  des auf  $f_g$  bandbegrenzten Spektrums  $Y(f)$ :

$$\left| \frac{dy(t)}{dt} \right| \leq \int_{-f_g}^{f_g} |2\pi f| |Y(f)| df = M_1$$

- Über den Differenzenquotienten im Abtastzeitpunkt  $t_n$

$$|y(t_n) - y(n t_A)| \leq M_1 |t_n - n t_A| = M_1 |\tau_n|$$

lässt sich daraus der Jitter-Fehler abschätzen:

$$|e_n| \leq M_1 \cdot |\tau_n|$$

- **Annahme:** Zeitfehler  $\tau_n$  sei **mittelwertfrei** und habe die Varianz

$$E\{\tau_n^2\} = \sigma_\tau^2$$

$$|e_n| \leq M_1 \cdot |\tau_n|$$



$$E\{e_n^2\} \leq M_1^2 \sigma_\tau^2$$

Leistung des Jitter-Fehlers

- **Annahme:** bandbegrenztetes Eingangssignal habe ein **konstantes Spektrum**  $|Y(f)| = A_{\max}$  für  $|f| < f_g$

→ 1. Moment: 
$$M_1 = \int_{-f_g}^{f_g} |2\pi f| \cdot |Y(f)| df = 2\pi f_g^2 A_{\max}$$

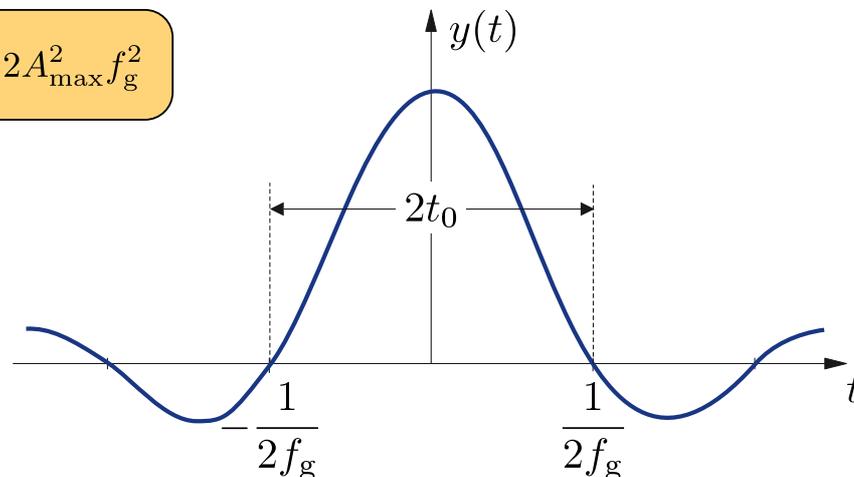
→ **Fehlerleistung:** 
$$E\{e_n^2\} \leq M_1^2 \sigma_\tau^2 = 4\pi^2 f_g^4 A_{\max}^2 \sigma_\tau^2 \approx P_{\text{Stör}}$$

- Nutzsinal  $y(t)$  ist jedoch Energiesignal → **Signalenergie** über Parseval:

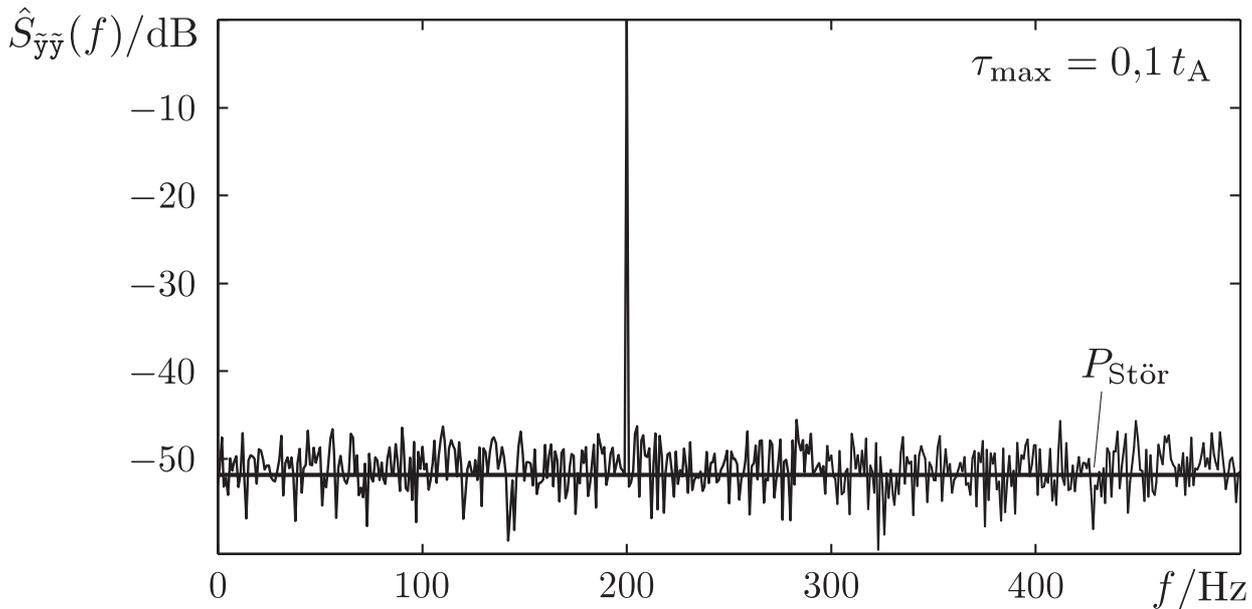
$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df = \int_{-f_g}^{f_g} A_{\max}^2 df = 2A_{\max}^2 f_g$$

- Der wesentliche Teil der Signalenergie ist im Hauptgipfel enthalten
- Daher wird die Gesamtenergie  $E_y$  auf das Zeitintervall  $[-t_0, t_0]$  um den Hauptgipfel bezogen (Abschätzung der max. Signalleistung nach oben):

$$P_{\text{Sig}} \approx \frac{E_y}{2t_0} = 2A_{\max}^2 f_g^2$$



→ Signal-Rausch-Verhältnis: 
$$\text{SNR} = \frac{P_{\text{Sig}}}{P_{\text{Stör}}} \approx \frac{2A_{\max}^2 f_g^2}{4\pi^2 f_g^4 A_{\max}^2 \sigma_\tau^2} = \frac{2}{(2\pi f_g \sigma_\tau)^2}$$



Spektrale Leistungsdichte einer harmonischen Schwingung der Frequenz  $f = 200$  Hz mit Jitter. Das Signal wurde einem gleichverteilten Zeitfehler  $\tau_n$  unterworfen mit  $\tau_{\max} = 0,1 t_A$  bei  $t_A = 1$  ms ( $f_A = 1$  kHz).

### Beispiel 7.5: Jitter-Fehler bei der Digitalisierung von Audiosignalen

- **A/D-Umsetzer:**  $N = 16$ ,  $f_A = 44,1$  kHz – **Musiksignale:**  $f_g = 20$  kHz
- Rauschen infolge des Abtast-Jitters soll kleiner als das **Quantisierungsrauschen** sein. Das SNR infolge der Quantisierung ist nach Abschn. 7.2:

$$\text{SNR/dB} = 6,02 N \approx 96$$

- Zulässige Varianz des Zeitfehlers:

$$\sigma_{\tau}^2 = \frac{2}{(2\pi f_g)^2 \cdot \text{SNR}}$$

- **Gleichverteilter** Zeitfehler:  $-\tau_{\max} \leq \tau \leq \tau_{\max}$

$$\rightarrow \sigma_{\tau}^2 = \frac{\tau_{\max}^2}{3}$$

- ➔ Maximal zulässiger Zeitfehler:

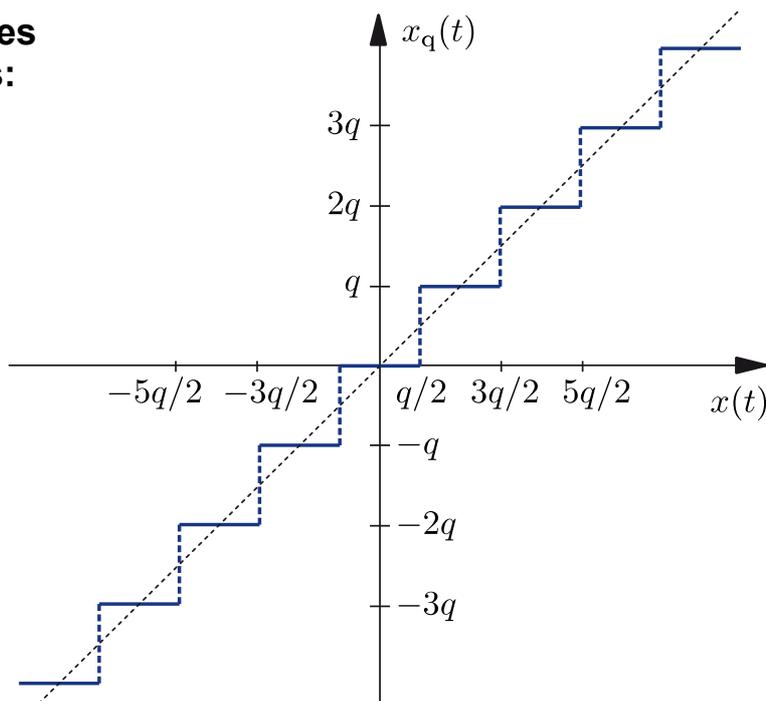
$$\tau_{\max} = \frac{1}{2\pi f_g} \sqrt{\frac{6}{\text{SNR}}} \approx 297 \text{ ps} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\tau_{\max}}{t_A} \approx 1,31 \cdot 10^{-5}$$

# 7.2 Quantisierung

- 7.2.1 Wahrscheinlichkeitsdichte der Signalwerte
- 7.2.2 Amplitudendichte einer Fourier-Reihe
- 7.2.3 Quantisierungstheorem
- 7.2.4 Wahrscheinlichkeitsdichte des Quantisierungsfehlers
- 7.2.5 Signal-Rausch-Verhältnis infolge der Quantisierung
- 7.2.7 Minimierung des relativen Quantisierungsfehlers
- 7.2.8 Dithering

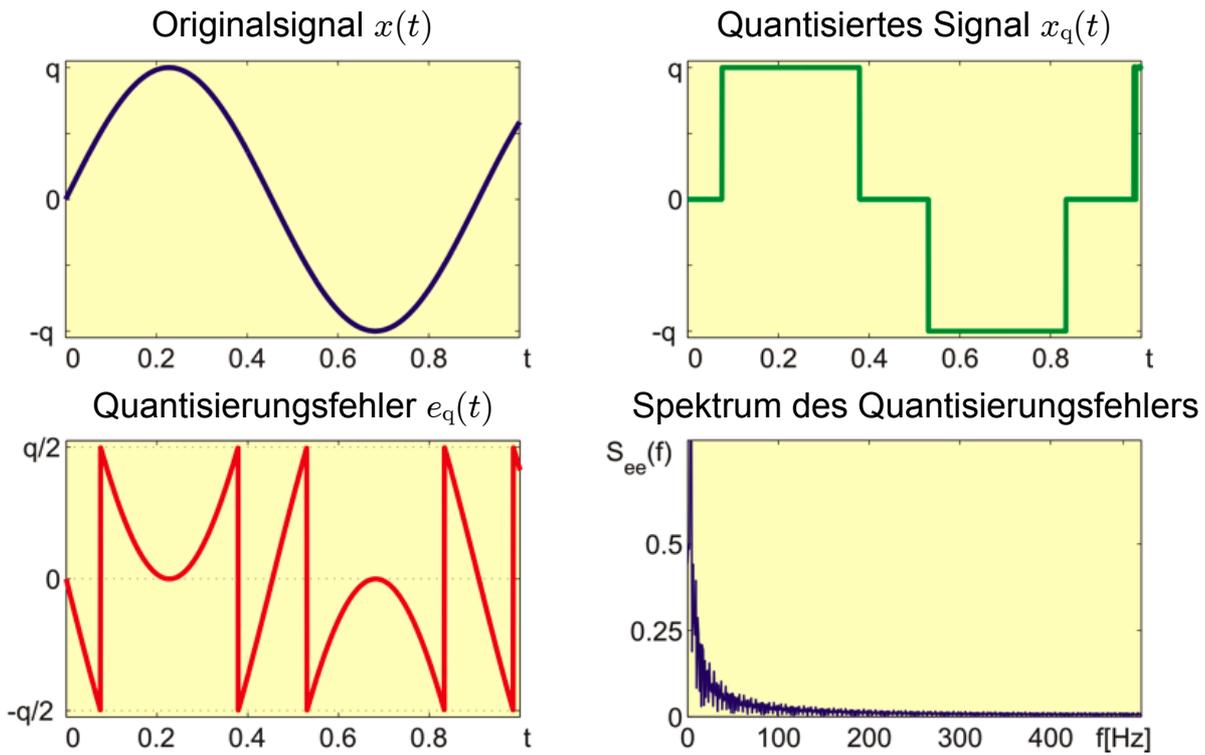
## 7.2 Quantisierung

**Kennlinie eines  
 Quantisierers:**

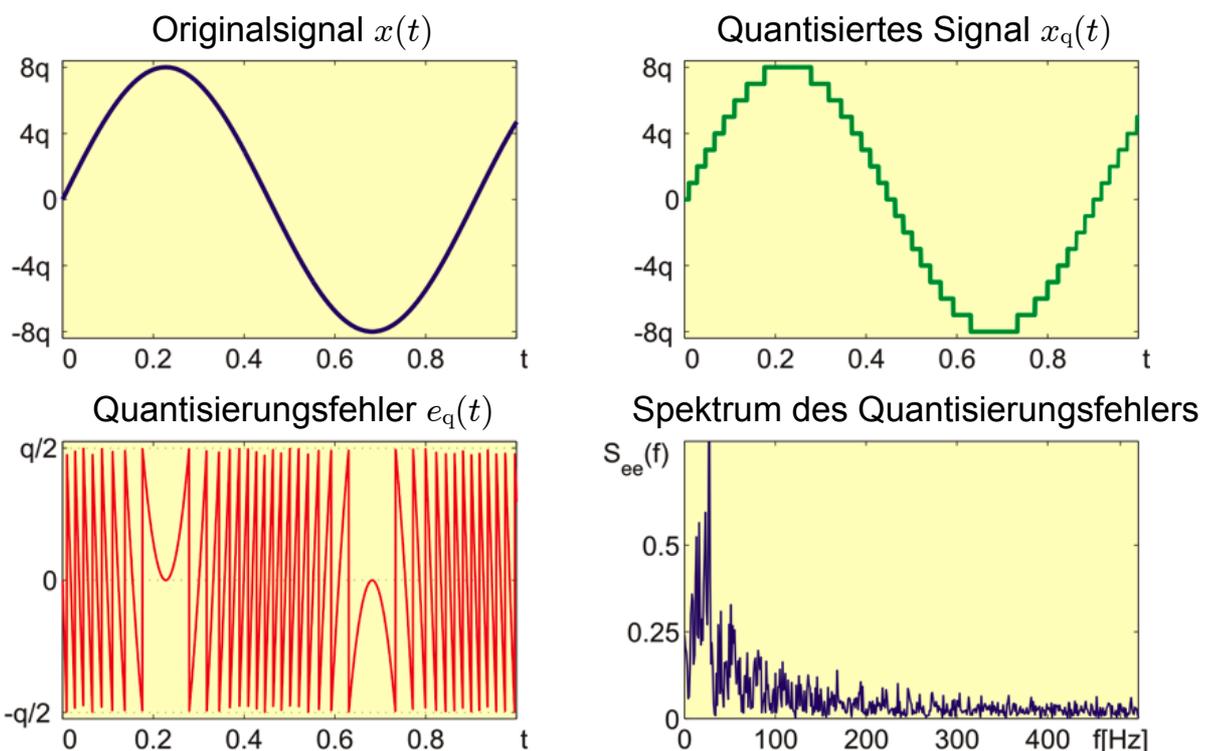


→ Quantisierungsfehler:  $|e_q(t)| = |x_q(t) - x(t)| \leq \frac{q}{2}$

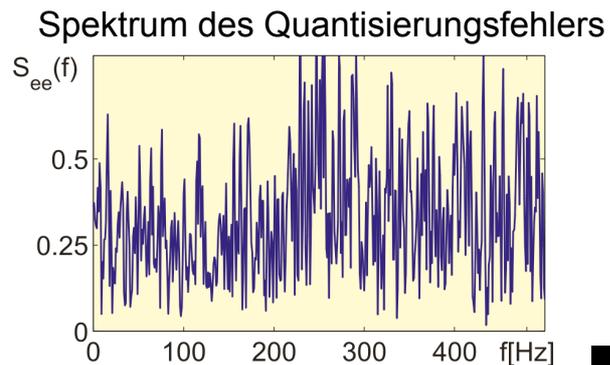
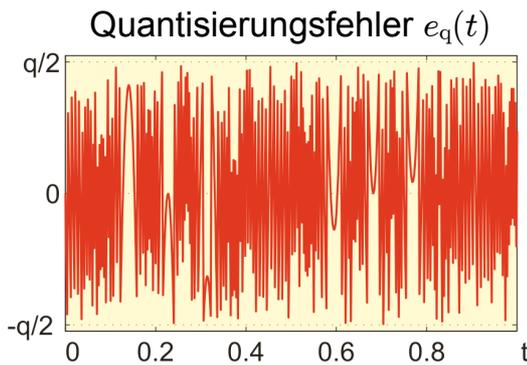
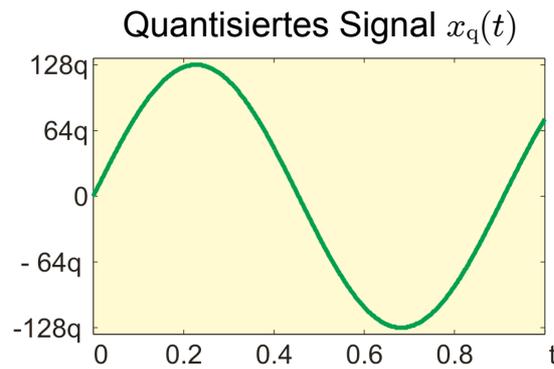
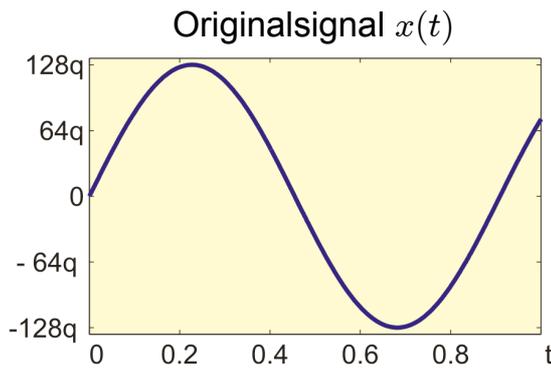
## Beispiel 7.6: Quantisierung einer harmonischen Schwingung $N = 2$



$N = 4$



$N = 8$



- Aus diesen Beobachtungen heraus werden **Quantisierungsfehler** als **weißes Rauschen**  $e_q(t)$  angenommen, das innerhalb einer Quantisierungsstufe **gleichverteilt** ist:

$$f_{e_q}(e_q) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{für } -\frac{q}{2} \leq e_q \leq \frac{q}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Voraussetzung dafür ist ein **veränderliches** Eingangssignal  $x(t)$ , das genügend viele Quantisierungsstufen überstreicht
- ➔ **Lineares Modell** mit additiver Überlagerung des Eingangssignals durch ein **Quantisierungsrauschen**:



- **Vorteil:** Vermeidung der expliziten Behandlung der Nichtlinearität

- Zur **statistischen** Beschreibung der Quantisierung benötigt man die Wahrscheinlichkeitsdichte der Signalwerte („**Amplitudendichte**“) des Eingangssignals
- Vereinfachung der Berechnung der Amplitudendichte durch Rückführung auf **Transformation von Zufallsvariablen** (Abschn. 4.1)
- Annahme: Gleichverteilung der Zeit im Beobachtungsintervall  $[0, T_0]$ :

$$f_{\tau}(t) = \begin{cases} \frac{1}{T_0} & \text{für } 0 \leq t \leq T_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- **Transformation** der Zufallsvariablen  $\tau$  in die Zufallsvariable  $x$  für die Amplitude nach Satz 4.2:

$$x = g(\tau)$$

→ **Amplitudendichte:**

$$f_x(x) = \sum_{i=1}^n f_{\tau}(t_i) \left| \frac{dg(t)}{dt} \right|_{t=t_i}^{-1}$$

### Beispiel 7.7: Amplitudendichte einer harmonischen Schwingung

- Gegeben sei eine allgemeine harmonische Schwingung:

$$x = g(t) = a_m \cos\left(2\pi \frac{m}{T_0} t\right)$$

mit der inversen Funktion

$$t_i = g^{-1}(x) = \frac{T_0}{2\pi m} \arccos\left(\frac{x}{a_m}\right), \quad i = 1, \dots, 2m$$

- Da  $g(t)$   $m$  Perioden im Intervall  $[0, T_0]$  hat, ergeben sich  $n = 2m$  Lösungen für die inverse Funktion. Einsetzen der  $2m$  Lösungen in

$$\frac{dg(t)}{dt} = -2\pi \frac{m}{T_0} a_m \sin\left(2\pi \frac{m}{T_0} t\right)$$

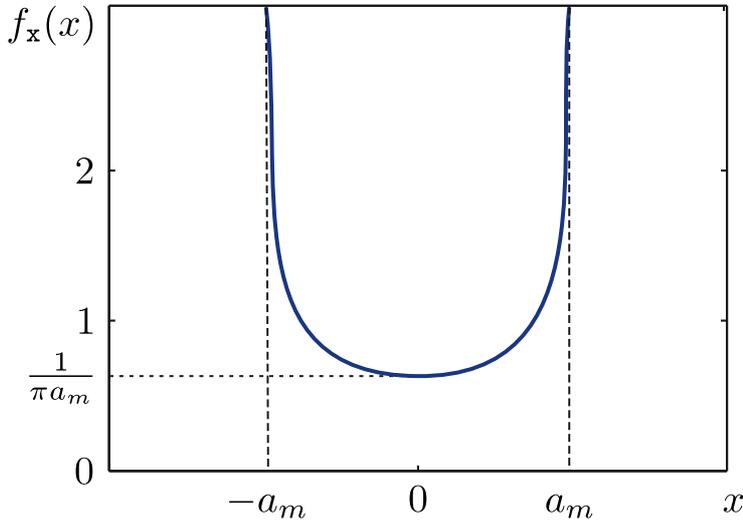
ergibt mit  $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$  :

$$\left| \frac{dg(t)}{dt} \right|_{t=t_i} = 2\pi \frac{m}{T_0} \sqrt{a_m^2 - x^2}$$

## 7.2.1 Wahrscheinlichkeitsdichte der Signalwerte

- Bei einer Gleichverteilung der Zeit im Intervall  $T_0$  resultiert mit  $f_t(t) = 1/T_0$  für die **Amplitudendichte** der harmonischen Schwingung:

$$f_x(x) = \sum_{n=1}^{2m} \frac{1}{T_0} \frac{T_0}{2\pi m \sqrt{a_m^2 - x^2}} = \frac{1}{\pi \sqrt{a_m^2 - x^2}} \quad |x| \leq a_m$$



## 7.2.2 Amplitudendichte einer Fourier-Reihe

- Periodische** Signale lassen sich in eine Fourier-Reihe entwickeln:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(2\pi \frac{k}{T_0} t\right)$$

- Wegen der Begrenztheit von Messsignalen wird Symmetrie zu  $t = 0$  angenommen. Die Sinusterme fallen damit heraus.
- Die einzelnen Schwingungen werden als voneinander **unabhängige** Zufallsgrößen  $x_k$  betrachtet:

$$x = x_0 + x_1 + \dots + x_n + \dots$$

- Amplitudendichte der Fourier-Reihe erhält man durch Faltung der Wahrscheinlichkeitsdichten der Teilsignale:

$$f_x(x) = f_{x_0}(x) * f_{x_1}(x) * \dots * f_{x_n}(x) * \dots$$

Nach dem **zentralen Grenzwertsatz** ist die resultierende Amplitudendichte  $f_x(x)$  näherungsweise **normalverteilt**

### Beispiel 7.8: Amplitudendichte eines Summensignals

- Summe von vier harmonischen Signalen:

$$x(t) = \sum_{k=1}^4 \left( \frac{6-k}{5} \right) \cos(2\pi kt)$$

- Der **Erwartungswert** der einzelnen Amplitudendichten  $x_k$  verschwindet:

$$\mu_{x_k} = E\{x_k\} = \int_{-a_k}^{a_k} \frac{1}{\pi \sqrt{a_k^2 - x_k^2}} x_k dx_k = 0$$

- Die **Varianz** berechnet sich zu:

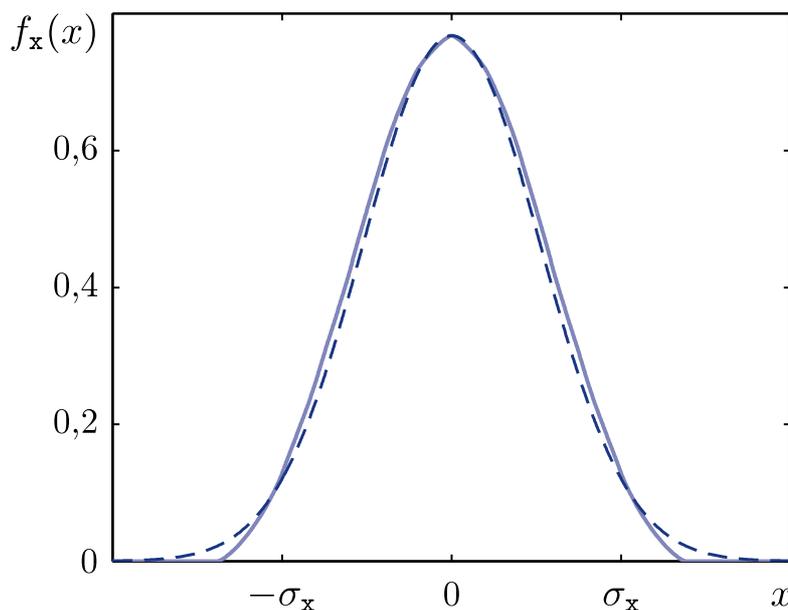
$$\sigma_{x_k}^2 = E\{(x_k - \mu_{x_k})^2\} = \int_{-a_k}^{a_k} \frac{x_k^2}{\pi \sqrt{a_k^2 - x_k^2}} dx_k = \dots = \frac{a_k^2}{2}$$

**Anmerkung:** Die Standardabweichung stimmt erwartungsgemäß mit dem Effektivwert (quadr. Mittelwert) eines sinusförmigen Signals überein:

$$\sigma_{x_k} = U_{\text{eff}} = \frac{a_k}{\sqrt{2}}$$

## 7.2.2 Amplitudendichte einer Fourier-Reihe

- Die Varianz des Summensignals ergibt sich nach dem zentralen Grenzwertsatz als die Summe der Varianzen der einzelnen Amplitudendichten:



Wahrscheinlichkeitsdichte des Summensignals (—) und der Normalverteilung (---)

## 7.2.3 Quantisierungstheorem

- Bei der **Quantisierung** werden den **kontinuierlichen Amplituden diskrete Werte** zugeordnet („Abtastung im Amplitudenbereich“)
- Gibt es ein **Analogon zum Abtasttheorem** für die „Abtastung“ der Amplituden?
  - ➔ Eine Antwort existiert für den Fall der „äquidistanten“ Quantisierung (gleich breite Quantisierungsstufen)

- Die **Quantisierung** ist zwar **nichtlinear**,

mit Hilfe des **Quantisierungstheorems** sind jedoch Aussagen über die Wahrscheinlichkeitsverteilung quantisierter Größen mit Hilfe der **linearen Systemtheorie** möglich

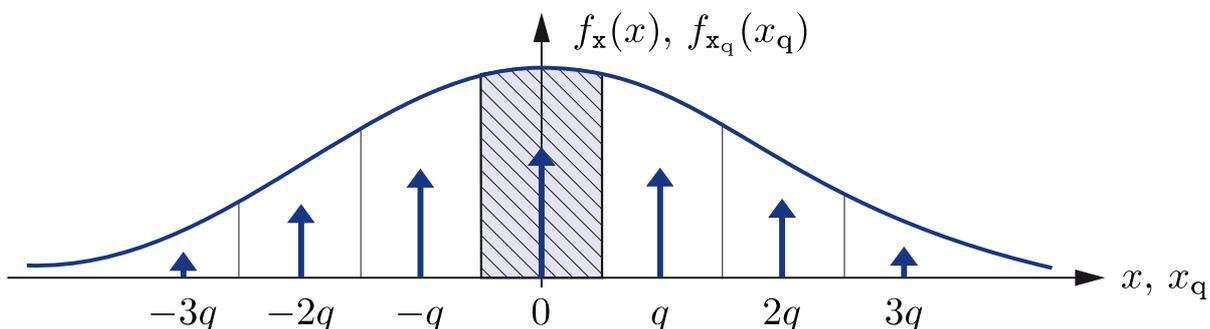
## 7.2.3 Quantisierungstheorem

- Die Amplitudendichte eines **quantisierten** Signals besteht aus  $\delta$ -Impulsen:

$$f_{x_q}(x_q) = \int_{x-\frac{q}{2}}^{x+\frac{q}{2}} f_x(\alpha) d\alpha \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - kq)$$

- Die Gewichtungsfaktoren der  $\delta$ -Impulse beschreiben dabei die **diskrete** Wahrscheinlichkeit, dass  $x$  innerhalb eines Quantisierungsstreifens liegt:

$$P\left(x - \frac{q}{2} \leq x \leq x + \frac{q}{2}\right) = \int_{x-\frac{q}{2}}^{x+\frac{q}{2}} f_x(\alpha) d\alpha$$



- **Flächenabtastung** lässt sich als Faltung von  $f_x(x)$  mit einem Rechteckfilter

$$r_q(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leq \frac{q}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit anschließender Abtastung darstellen:

$$f_{x_q}(x_q) = (f_x(x) * r_q(x)) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - kq)$$

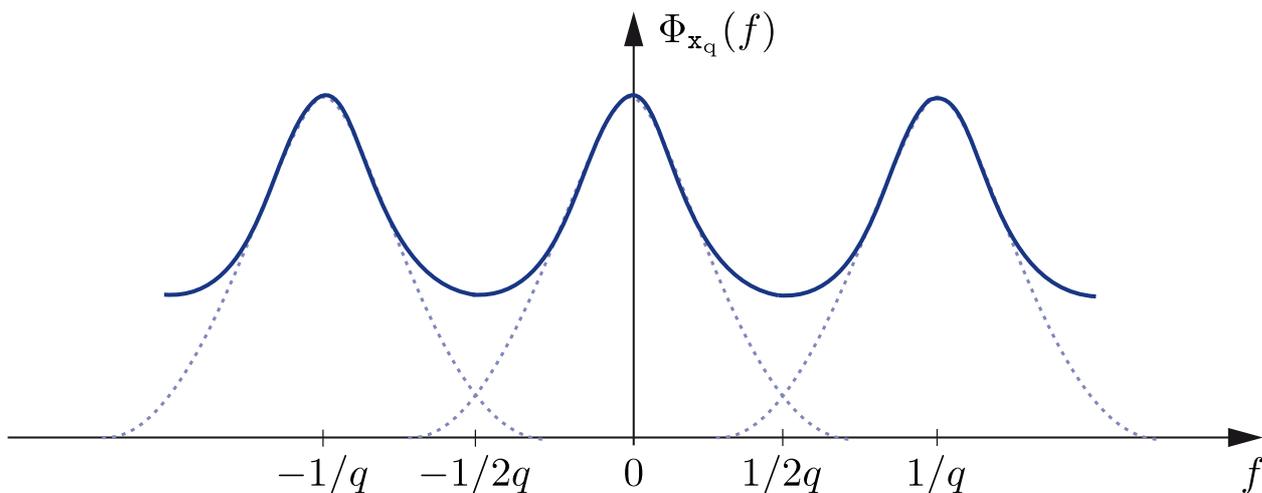


- Im Frequenzbereich entspricht dies der **charakteristischen Funktion**:

$$\Phi_{x_q}(f) = [\Phi_x(f) \cdot R_q(f)] * \frac{1}{q} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{q}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_x\left(f - \frac{k}{q}\right) \cdot \frac{\sin \pi q \left(f - \frac{k}{q}\right)}{\pi q \left(f - \frac{k}{q}\right)}$$

- Die charakteristische Funktion des **quantisierten** Signals  $\Phi_{x_q}(f)$  entspricht einer **periodischen Wiederholung** der sinc-gefilterten charakteristischen Funktion des **kontinuierlichen** Signals  $\Phi_x(f)$

Charakteristische Funktion eines quantisierten Signals



$1/q$  : Quantisierungsfrequenz

### Satz 7.2: Quantisierungstheorem

- Ist die Wahrscheinlichkeitsdichte  $f_x(x)$  eines amplitudenkontinuierlichen Signals  $x(t)$  bandbegrenzt, d. h. besitzt die charakteristische Funktion  $\Phi_x(f)$  nur Komponenten unterhalb der halben Quantisierungsfrequenz  $1/2q$ ,

$$\Phi_x(f) = 0 \quad \text{für} \quad |f| \geq \frac{1}{2q},$$

so lässt sich aus der Wahrscheinlichkeitsdichte  $f_{x_q}(x_q)$  des quantisierten Signals die ursprüngliche **Wahrscheinlichkeitsdichte** des kontinuierlichen Signals fehlerfrei rekonstruieren.

- Für eine fehlerfreie Rekonstruktion der **Momente der Wahrscheinlichkeitsdichte** genügt die schwächere Bedingung

$$\Phi_x(f) = 0 \quad \text{für} \quad |f| \geq \frac{1}{q},$$

da diese für  $f = 0$  berechnet werden.

## 7.2.3 Quantisierungstheorem

### Anmerkungen:

- Spektrum bei der **Zeitdiskretisierung**:  $Y_*(f) = \frac{1}{t_A} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y\left(f - \frac{k}{t_A}\right)$

Quantisierung ist hingegen eine **Flächenabtastung**; daher ergibt sich ein zusätzlicher Gewichtungsfaktor:

$$\frac{\sin \pi q \left(f - \frac{k}{q}\right)}{\pi q \left(f - \frac{k}{q}\right)}$$

- Müssen nur die **Momente** bestimmt werden, genügt die Einhaltung von:

$$\Phi_x(f) = 0 \quad \text{für} \quad |f| \geq \frac{1}{q},$$

da nur an der Stelle  $f = 0$  *Aliasing* vermieden werden muss.

- Amplitudendichten** sind **beschränkt** auf ein Intervall:  $-a_{\max} \leq x \leq a_{\max}$

→ reale charakteristische Funktionen sind **nicht** bandbegrenzt

### Berechnung der Momente (Annahme: Quantisierungstheorem eingehalten)

■ Erwartungswert:

$$\begin{aligned}
 E\{x_q\} &= \frac{1}{j2\pi} \left. \frac{d\Phi_{x_q}(f)}{df} \right|_{f=0} = \frac{1}{j2\pi} \left. \frac{d}{df} \left( \Phi_x(f) \cdot \frac{\sin \pi q f}{\pi q f} \right) \right|_{f=0} \\
 &= \frac{1}{j2\pi} \left[ \left. \frac{d\Phi_x(f)}{df} \frac{\sin \pi q f}{\pi q f} + \Phi_x(f) \frac{\pi q f \cos \pi q f - \sin \pi q f}{\pi q f^2} \right]_{f=0} \\
 &= \frac{1}{j2\pi} \left[ \left. \frac{d\Phi_x(f)}{df} \right|_{f=0} \cdot \underbrace{\left. \frac{\sin \pi q f}{\pi q f} \right|_{f=0}}_{=1} \right. \\
 &\quad \left. + \Phi_x(f) \Big|_{f=0} \cdot \underbrace{\left. \frac{\pi q f \cos \pi q f - \sin \pi q f}{\pi q f^2} \right|_{f=0}}_{=0} \right] \\
 &= \frac{1}{j2\pi} \left. \frac{d\Phi_x(f)}{df} \right|_{f=0} = E\{x\} \quad \text{Keine Korrektur erforderlich!}
 \end{aligned}$$

### Berechnung der Momente

■ 2. Moment:

$$\begin{aligned}
 E\{x_q^2\} &= \frac{1}{(j2\pi)^2} \left. \frac{d^2\Phi_{x_q}(f)}{df^2} \right|_{f=0} = \frac{1}{j2\pi} \left. \frac{d^2}{df^2} \left( \Phi_x(f) \cdot \frac{\sin \pi q f}{\pi q f} \right) \right|_{f=0} \\
 &= \frac{1}{(j2\pi)^2} \left[ \left. \frac{d^2\Phi_x(f)}{df^2} \frac{\sin \pi q f}{\pi q f} + 2 \frac{d\Phi_x(f)}{df} \frac{\pi q f \cos \pi q f - \sin \pi q f}{\pi q f^2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \Phi_x(f) \frac{[2 - (\pi q f)^2] \sin \pi q f - 2\pi q f \cos \pi q f}{\pi q f^3} \right]_{f=0} \\
 &\quad \xrightarrow{f=0} 1 \quad \quad \quad \xrightarrow{f=0} -(q\pi)^2/3 \\
 &= \frac{1}{(j2\pi)^2} \left. \frac{d^2\Phi_x(f)}{df^2} \right|_{f=0} + \frac{q^2}{12} = E\{x^2\} + \frac{q^2}{12} \quad \text{Korrektur!}
 \end{aligned}$$

■ Auch die **Varianz** wird bei Quantisierung um  $q^2/12$  zu groß geschätzt

- Ist das **Quantisierungstheorem erfüllt**, so kommt es zu **keinen spektralen Überlappungen** der charakteristischen Funktion
- Im Nyquist-Band  $-\frac{1}{2q} \leq f \leq \frac{1}{2q}$  ist dann die char. Funktion ein Produkt:

$$\Phi_{x_q}(f) = \Phi_x(f) \cdot \frac{1}{q} R_q(f) = \Phi_x(f) \cdot \frac{\sin(\pi q f)}{\pi q f}$$

- Die Multiplikation zweier charakteristischer Funktionen entspricht einer Summation zweier **unabhängiger** Zufallsgrößen:

$$x_q = x + e_q$$

### ➔ Charakteristische Funktion und Wahrscheinlichkeitsdichte des Quantisierungsrauschens:

$$\Phi_{e_q}(f) = \frac{1}{q} \cdot R_q(f) = \frac{\sin(\pi q f)}{\pi q f}$$



$$f_{e_q}(e_q) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{für } -\frac{q}{2} \leq e_q \leq \frac{q}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

### Satz 7.3: Lineares Quantisierungsmodell

- Ist das Quantisierungstheorem erfüllt, so lässt sich die Quantisierung durch ein **lineares Modell** beschreiben. Dem Eingangssignal  $x(t)$  wird ein im Intervall  $[-q/2, q/2]$  gleichverteiltes Quantisierungsrauschen  $e_q(t)$  additiv überlagert:

$$x_q(t) = x(t) + e_q(t)$$

- Die Momente des quantisierten Signals ergeben sich aus der Summe der Momente des kontinuierlichen Signals und des Quantisierungsrauschens:

$$E\{x_q^m(t)\} = E\{x^m(t)\} + E\{e_q^m(t)\}$$

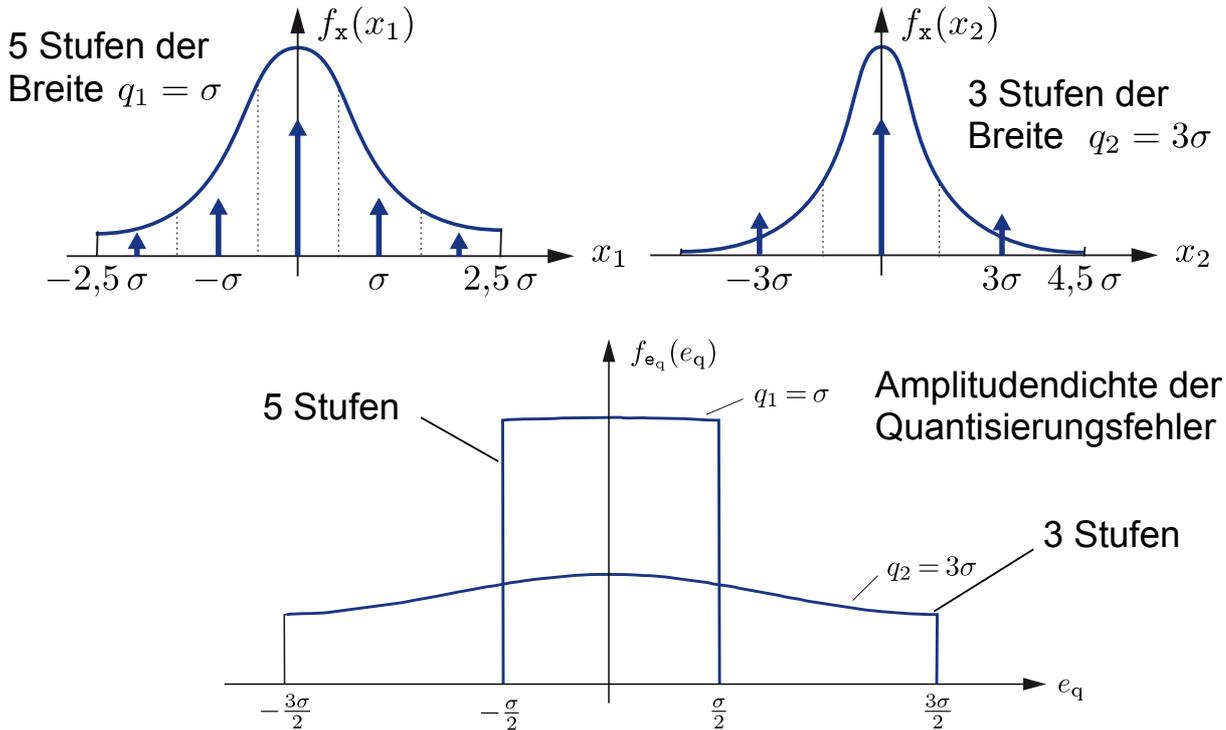
Erwartungswert des Quantisierungsrauschens:

$$E\{e_q(t)\} = \frac{1}{q} \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} e_q \, de_q = 0$$

Varianz:

$$E\{e_q^2(t)\} = \frac{1}{q} \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} e_q^2 \, de_q = \frac{q^2}{12}$$

### Beispiel 7.9: Grobe Quantisierung normalverteilter Größen



47

Prof. Dr.-Ing. F. Puente León – Messtechnik

Institut für Industrielle  
Informationstechnik

## 7.2.5 SNR infolge der Quantisierung

- Aus der Varianz des Quantisierungsrauschens lässt sich, bei gegebener Auflösung  $N$  des Quantisierers in Bit, ein **Signal-Rausch-Verhältnis** angeben

### Sinusförmige Signale

- Es soll exemplarisch die Quantisierung einer **sinusförmigen** Spannung mit  $2^N$  Stufen betrachtet werden
- Der **Effektivwert** der Eingangsspannung ist:

$$u_{\text{eff}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} = \frac{2^{N-1} q}{\sqrt{2}} \quad \hat{u} : \text{Scheitelwert}$$

$$\rightarrow \text{SNR} = \frac{P_{\text{sig}}}{P_{\text{stör}}} = \frac{u_{\text{eff}}^2}{\sigma_{e_q}^2} = \frac{2^{2N-2} q^2 / 2}{q^2 / 12} = 2^{2N} \cdot 1,5$$

$$\text{SNR}|_{\text{dB}} = 10 \lg(2^{2N} \cdot 1,5) = 6,02 \cdot N + 1,76$$

48

Prof. Dr.-Ing. F. Puente León – Messtechnik

Institut für Industrielle  
Informationstechnik

- Bei großem Messbereich und kleinem Messwert ist der relative Quantisierungsfehler groß:

$$F_r = \frac{u_q - u}{u} = \frac{\Delta u}{u} \quad \begin{array}{l} u_q : \text{quantisierter Messwert} \\ u : \text{wahrer Messwert} \end{array}$$

- Lösung:** nichtlineare ADU-Kennlinie, um rel. Fehler konstant zu halten:

**Konstanter** relativer Fehler:  $\frac{\Delta u}{u} = F_r = \text{const} \Rightarrow \frac{\Delta u}{u} \cdot \frac{1}{F_r} = 1$

Konstante rel. Quantisierung:  $q = \frac{\Delta Z}{Z_{\max}} = \text{const} \Rightarrow \frac{\Delta Z}{Z_{\max}} \cdot \frac{1}{q} = 1$

- Durch Verknüpfung der Gleichungen und anschließende Integration folgt:

$$\frac{\Delta Z}{Z_{\max}} \cdot \frac{1}{q} = \frac{\Delta u}{u} \cdot \frac{1}{F_r}$$

$$\rightarrow \frac{Z}{Z_{\max}} = \frac{q}{F_r} \cdot \ln u + C \quad \text{Nichtlineare Kennlinie}$$

$$\frac{Z}{Z_{\max}} = \frac{q}{F_r} \cdot \ln u + C$$

- Abgleich der Kennlinie zur Bestimmung von  $C$ :

$$Z = Z_{\max} \text{ bei } u = u_{\text{ref}} \rightarrow C = 1 - \frac{q}{F_r} \ln u_{\text{ref}}$$

$$Z = 0 \text{ bei } u = u_{\min} \rightarrow \frac{F_r}{q} = \ln \frac{u_{\text{ref}}}{u_{\min}}$$

- Damit erhält man für den ADU die folgende **nichtlineare Kennlinie**:

$$\frac{Z}{Z_{\max}} = \frac{q}{F_r} \ln \frac{u}{u_{\text{ref}}} + 1$$

### Beispiel 7.10: Nichtlineare Quantisierung

- Ein Messsignal soll bei einem Messbereich von

$$\frac{u_{\max}}{u_{\min}} = \frac{u_{\text{ref}}}{u_{\min}} = 100$$

eine relative Genauigkeit von mindestens  $F_r = 10^{-2}$  aufweisen

- Quantisierung mit „linearer“ Kennlinie:

Quantisierung:  $q_{\text{lin}} \leq \frac{F_r}{u_{\text{ref}}/u_{\min}} = 10^{-4}$

Wortlänge:  $\text{ld}(1/q_{\text{lin}}) \approx 13$

- Quantisierung mit logarithmischer Kennlinie:

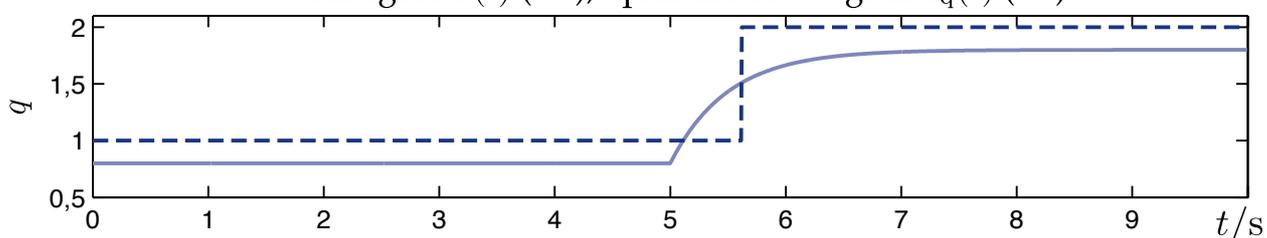
Quantisierung:  $q_{\text{nl}} \leq \frac{F_r}{\ln(u_{\text{ref}}/u_{\min})} = \frac{10^{-2}}{4,61} = 2,2 \cdot 10^{-3}$

Wortlänge:  $\text{ld}(1/q_{\text{nl}}) \approx 9$

## 7.2.8 Dithering

- Voraussetzung für die Erfüllung des Quantisierungstheorems ist das dynamische **Durchlaufen mehrerer Quantisierungsstufen**
- Bei langsam veränderlichen Signalen  $u(t) \approx \text{const.}$  ist die charakteristische Funktion nicht bandbegrenzt, und es treten spektrale Überlappungen auf

Nutzsignal  $u(t)$  (—), quantisiertes Signal  $u_q(t)$  (---)

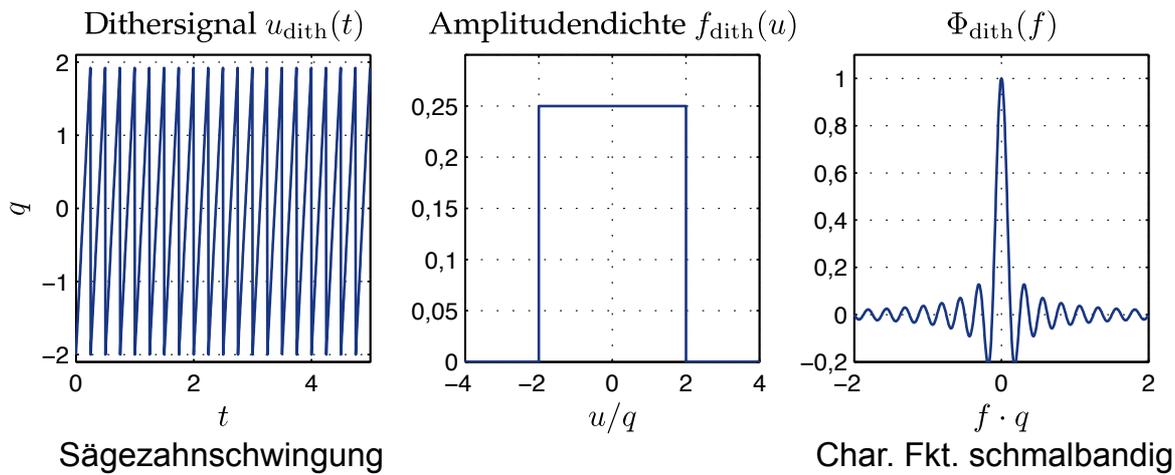


### Dithering

- Dithering verhindert spektrale Überlappungen durch die Multiplikation mit einer bandbegrenzten charakteristischen Funktion
- Idee: Addition eines **mittelwertfreien Dithersignals** zum Nutzsignal **vor** der Quantisierung (→ Multiplikation ihrer charakteristischen Funktionen)
- Rekonstruktion des Nutzsignals nach d. Quantisierung durch TP-Filterung
- Dithering entspricht der „Anti-Aliasing-Filterung“ für die Quantisierung

## Beispiel 7.11: Digitale Temperaturmessung

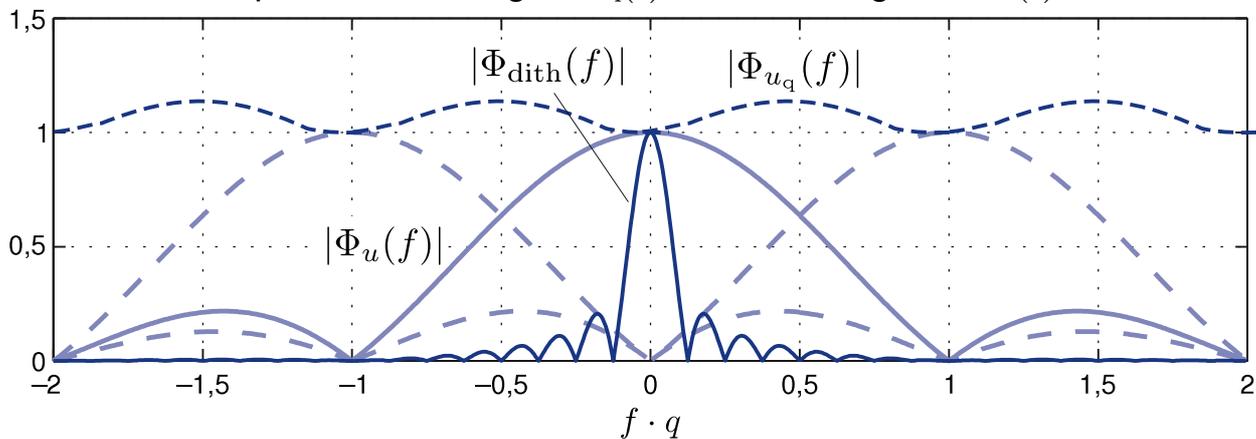
### Eigenschaften des Dithersignals:



### Wahrscheinlichkeitsdichte und charakteristische Fkt. des Dithersignals:

$$f_{\text{dith}}(u) = \begin{cases} \frac{1}{2u_{\text{max}}} = \frac{1}{4q} & -2q \leq u \leq 2q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \bullet \quad \Phi_{\text{dith}}(f) = \frac{\sin(4\pi qf)}{4\pi qf}$$

Beträge der charakteristischen Funktionen von Nutzsinal  $u(t)$ , quantisiertem Signal  $u_q(t)$  und Dithersignal  $u_{\text{dith}}(t)$

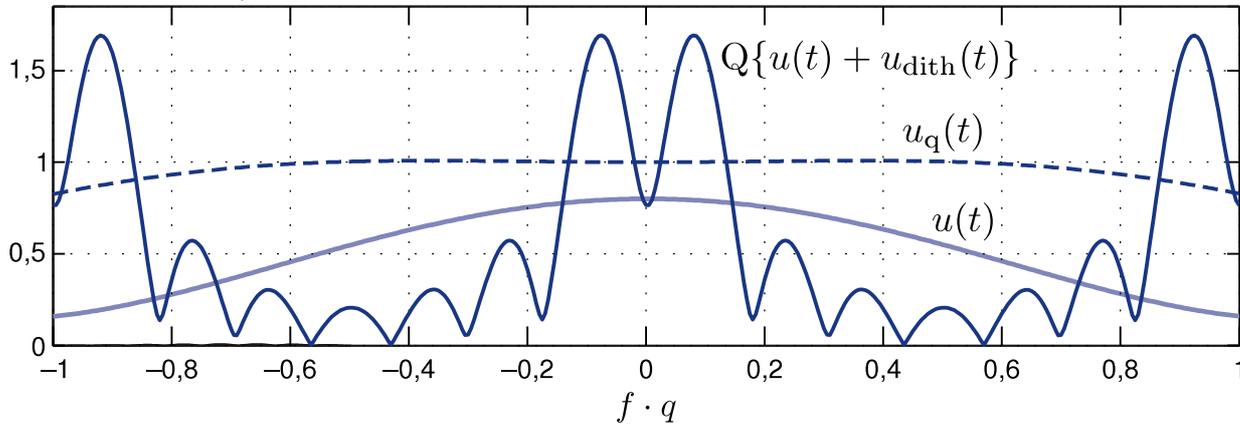


## 7.2.8 Dithering

- Der **Erwartungswert** der Temperatur resultiert aus der Ableitung der charakteristischen Funktion für  $f = 0$ :

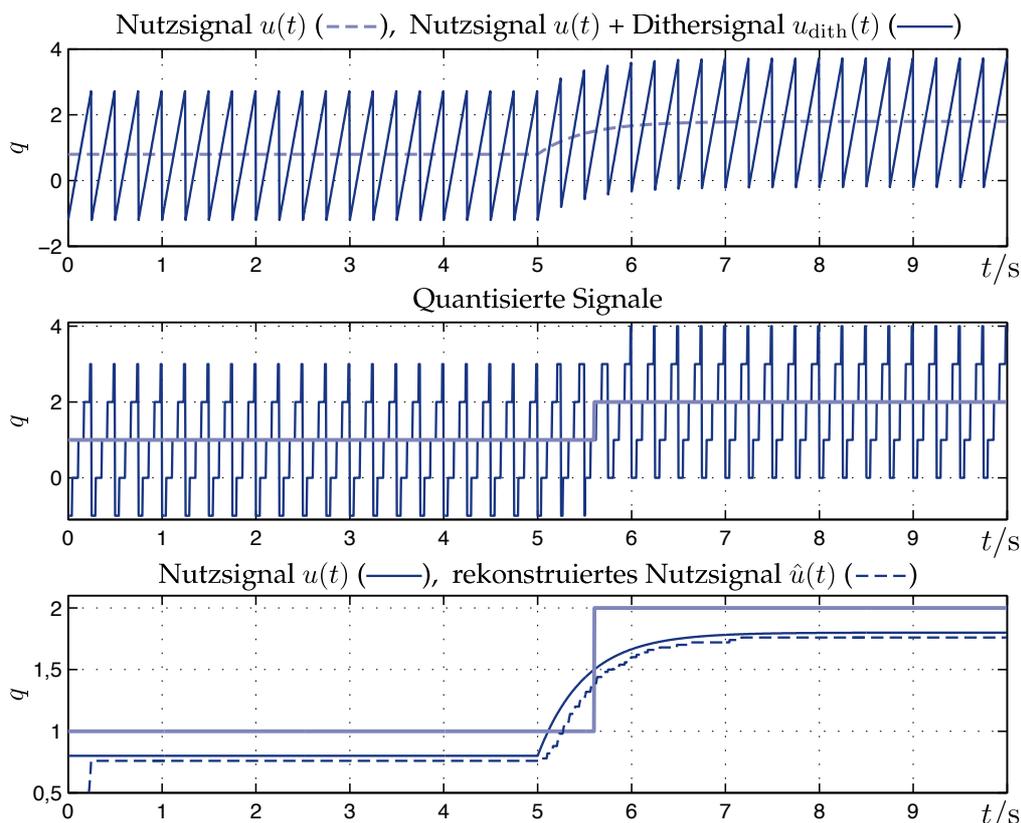
$$E\{u_q\} = \frac{1}{j2\pi} \left. \frac{d\Phi_{u_q}(f)}{df} \right|_{f=0}$$

Beträge  $\left| \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi(f)}{df} \right|$  der gewichteten Ableitungen der charakteristischen Funktionen



Betrag der gewichteten Ableitung zur Bestimmung des Erwartungswertes für das kontinuierliche Signal (—), mit Dithering (—) und ohne Dithering (- - -).

## 7.2.8 Dithering



# 7.3 Analog-Digital-Umsetzer

- 7.3.1 A/D-Nachlaufumsetzer
- 7.3.2 A/D-Umsetzer mit sukzessiver Approximation
- 7.3.3 Integrierende A/D-Umsetzer
- 7.3.4 Delta-Sigma-Umsetzer
- 7.3.5 Ratiometrische Messung

## 7.3 Analog-Digital-Umsetzer

### A/D- und D/A-Umsetzer

Analog-Digital- und Digital-Analog-Umsetzer sind außerordentlich wichtige Komponenten: Sie verbinden die analoge Welt der Messgrößen, Sensoren und Verstärker mit der digitalen Welt der Computer.

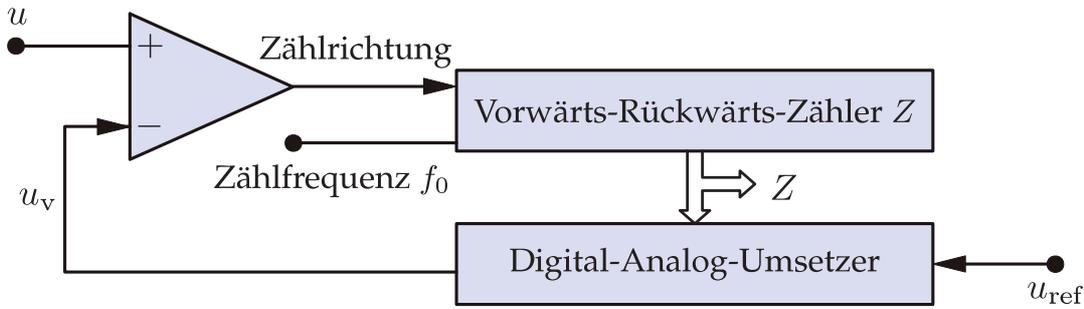
- **A/D-Umsetzer** (ADU) machen aus analogen Signalen (i.d.R. elektrische Spannungen) digitale Folgen:



- **D/A-Umsetzer** (DAU) überführen digitale Größen in analoge Spannungs- oder Stromsignale:



## 7.3.1 A/D-Nachlaufumsetzer

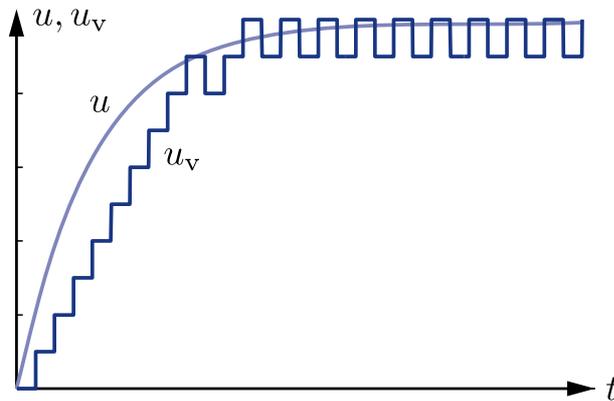


### Digital-Analog-Umsetzung:

$$\frac{u_v}{u_{ref}} = \frac{Z}{Z_{max}} \rightarrow Z = \frac{Z_{max}}{u_{ref}} \cdot u_v$$

### Integrationszeitkonstante des Zählers:

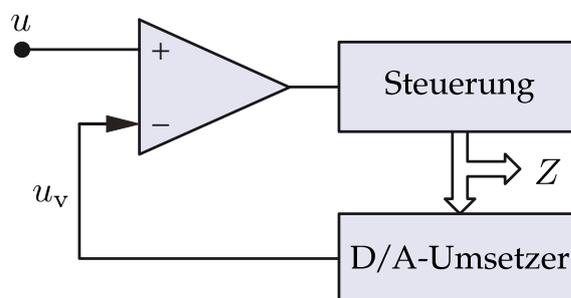
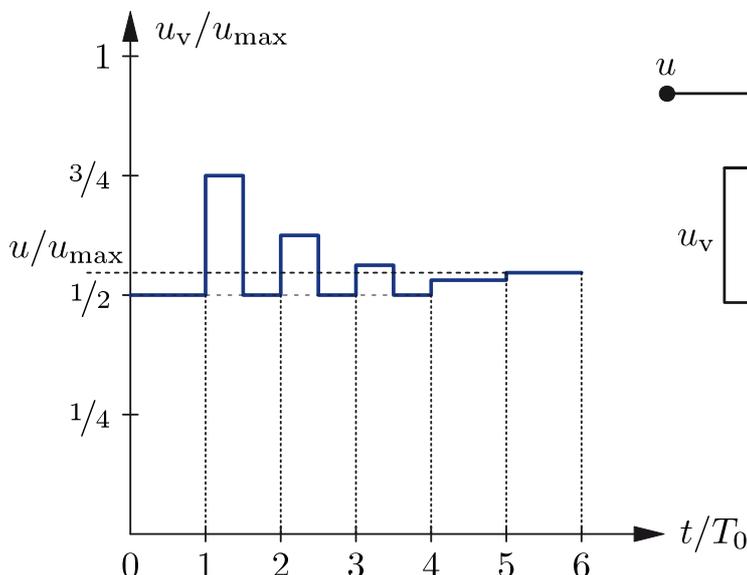
$$T_i = \frac{Z_{max}}{f_0} = \frac{2^N}{f_0}$$



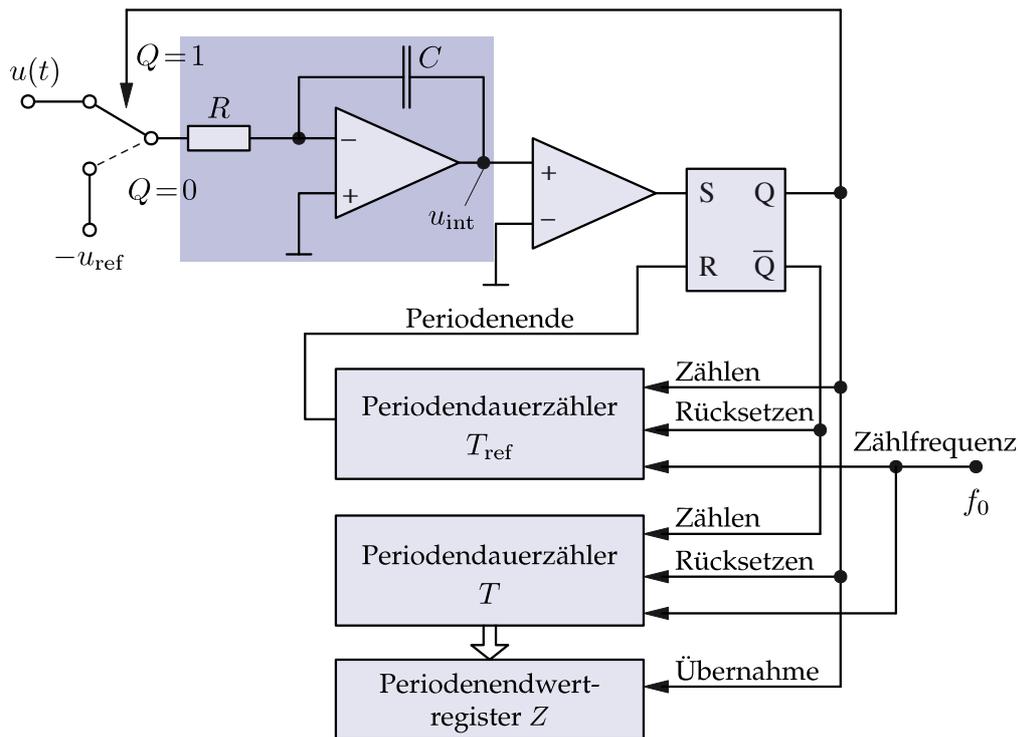
## 7.3.2 A/D-Umsetzer mit sukzessiver Approximation

- Bei diesem ADU wird die Vergleichsspannung nicht in gleichen, sondern in **binär abgestuften** Quantisierungsstufen erhöht. Die Bits des Zählers Z werden nacheinander probeweise auf 1 gesetzt (zuerst das MSB).

### Beispiel 7.12: A/D-Umsetzung mit 6 Bit



### Zweirampen-A/D-Umsetzer (*dual-slope A/D converter*)



## 7.3.3 Integrierende A/D-Umsetzer

- Ausgangsspannung des Integrators:

$$u_{\text{int}}(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t u(t) dt$$

- Am Ende des Referenzintervalls ( $t = T_{\text{ref}}$ ) erhält man:

$$u_{\text{int}}(T_{\text{ref}}) = -\frac{T_{\text{ref}}}{RC} \bar{u}$$

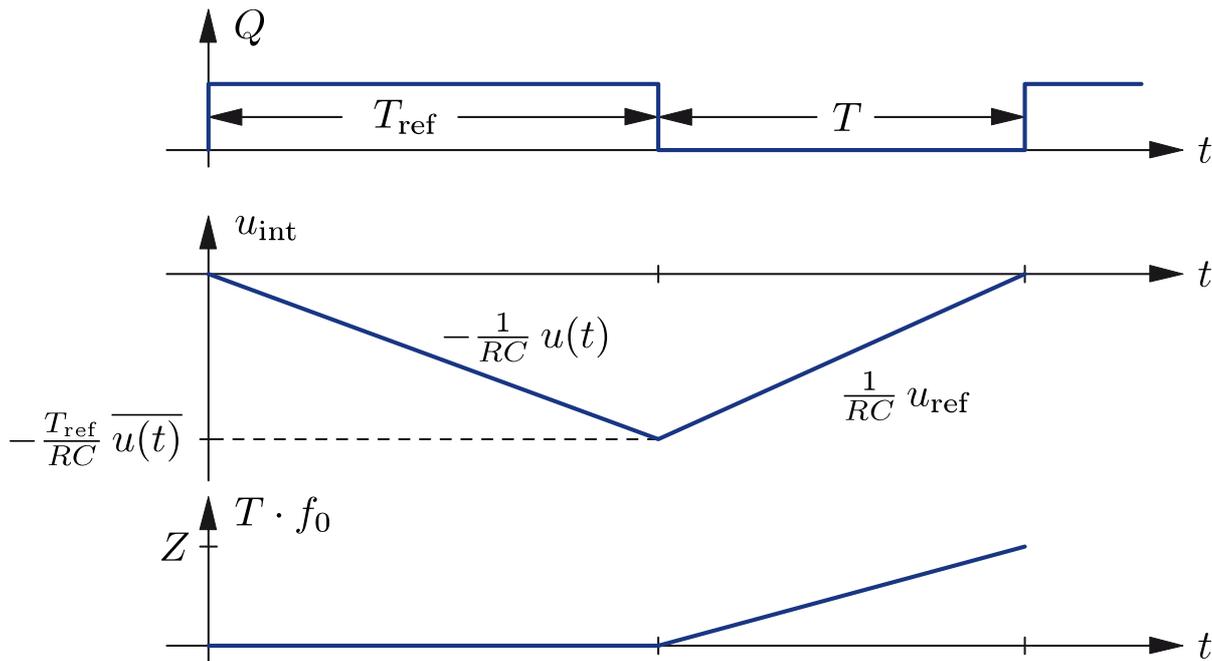
- Da  $Q = 0$ , wird der Eingang des Integrators auf die Referenzspannung  $-u_{\text{ref}}$  umgeschaltet, bis die Ausgangsspannung null ist (s. Komparator):

$$u_{\text{int}}(T_{\text{ref}} + T) = -\frac{T_{\text{ref}}}{RC} \bar{u} + \frac{1}{RC} \int_0^T u_{\text{ref}} dt = -\frac{T_{\text{ref}}}{RC} \bar{u} + \frac{T}{RC} u_{\text{ref}} = 0$$

- Übernahme des Zählerwertes  $Z = T \cdot f_0$  in das Periodenendwertregister:

$$\frac{\bar{u}}{u_{\text{ref}}} = \frac{T}{T_{\text{ref}}} = \frac{T \cdot f_0}{T_{\text{ref}} \cdot f_0} = \frac{Z}{Z_{\text{ref}}} \quad \rightarrow \quad \bar{u} = \frac{u_{\text{ref}}}{Z_{\text{ref}}} \cdot Z$$

Spannungsverlauf:



## 7.3.3 Integrierende A/D-Umsetzer

### Eigenschaften des Zweirampen-ADU

- + höhere Genauigkeit als bei Momentanwertumsetzern (Einsatz bei Digitalvoltmetern)
- +  $R$  und  $C$  beeinflussen das digitale Ergebnis nicht; lediglich die Referenzspannung  $u_{\text{ref}}$  ist entscheidend
- + Fehler von Taktgenerator und Integrator gehen in Messergebnis nicht ein
- + Abtastung beschränkt sich nicht auf einzelne Werte der Eingangsspannung, sondern es wird eine zeitliche Mittelung durchgeführt
- + Optimum an Störsicherheit erreichbar, wenn Integrationszeit einer oder mehreren Perioden der Störfrequenz entspricht (kein Netzbrummen!)
- wesentlich höhere Umsetzungszeit als bei Momentanwertumsetzern
- Messzeit wird durch die Frequenz des Taktgenerators  $f_0 = 1 / T_0$  und durch die Zählkapazität des Zählers  $Z_{\text{max}}$  vorgegeben
- Integrationskondensator kann Nachwirkungen haben (Restladung)
- Schaltung nur für Gleichspannungen mit positiver Polarität geeignet

## 7.3.4 Delta-Sigma-Umsetzer

- **Delta-Sigma-Umsetzer** ( $\Delta$ - $\Sigma$ -Umsetzer) lassen sich einfach integrieren und erlauben **hohe Umsetzungsgenauigkeiten**
- Sie werden häufig in Systemen mit dynamischen Signalen eingesetzt (Audio-Technik, Signalprozessoren), aber auch bei stationären Signalen in der Messtechnik



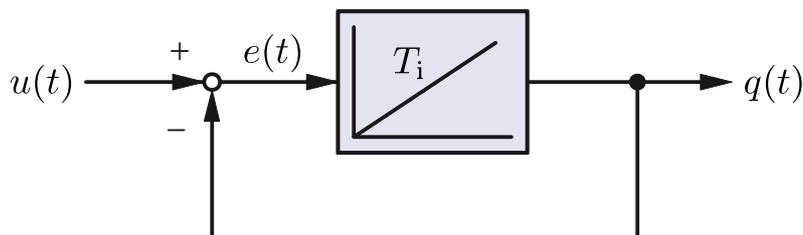
Ein  $\Delta$ - $\Sigma$ -Umsetzer besteht aus einem Modulator und einem Digitalfilter:

- Der **Modulator** erzeugt eine binäre Impulsfolge  $q(n)$ , wobei die Häufigkeit der Impulse in  $q(n)$  proportional zur Eingangsspannung  $u(t)$  ist
- Das **Digitalfilter** setzt die Impulsfolge in einen digitalen Zahlenwert um, der dem Eingangssignal entspricht

## 7.3.4 Delta-Sigma-Umsetzer

**Grundidee des  $\Delta$ - $\Sigma$ -Modulators:**

- **Integralregelkreis**, der die Spannungs-Zeit-Flächendifferenz  $e(t)$  von Eingangssignal  $u(t)$  und (zu modulierendem) Ausgangssignal  $q(t)$  zu null regelt:



- Laplace-Transformierte des Fehlers:

$$E(s) = \frac{T_i s}{T_i s + 1} \cdot U(s)$$

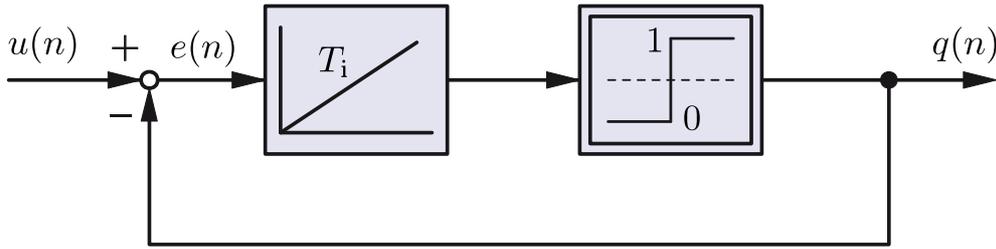
- Sprunghafte Änderung als Eingangssignal:

$$U(s) = \frac{u_{\max}}{s}$$

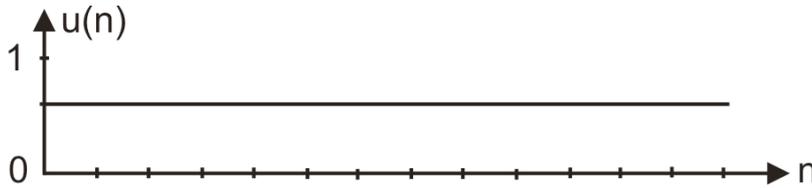
- RK ist stationär genau:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{T_i s}{T_i s + 1} u_{\max} = 0$$

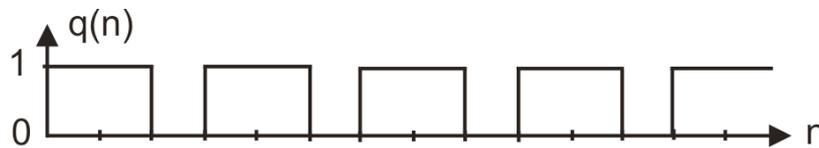
## Beispiel Eingangssignal und Ausgangsimpulsfolge:



■ Eingangssignal:



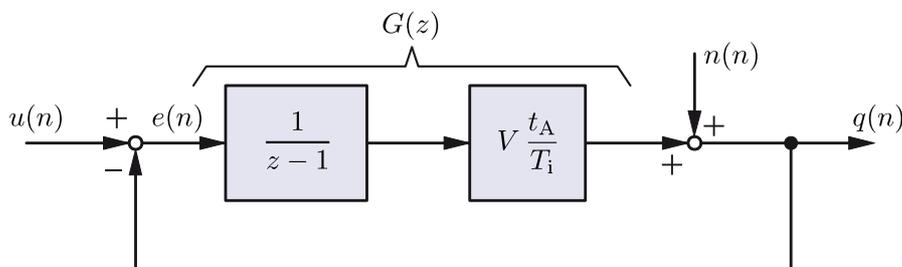
■ Ausgangsimpulsfolge:



# 7.3.4 Delta-Sigma-Umsetzer

## Zeitdiskrete Beschreibung:

- **Getakteter** Komparator hinter dem Integrierglied → 1-Bit-Quantisierung
- **Lineares Quantisierungsmodell:** additives Quantisierungsrauschen  $n(n)$
- **Zeitdiskretes** Integrierglied („Rechteckregel vorwärts“):  $y_n = y_{n-1} + t_A e_{n-1} \iff G_I(z) = \frac{t_A}{z-1}$



➔ z-Ausgangsfunktion des  $\Delta$ - $\Sigma$ -Modulators einschließlich der Störung:

$$\begin{aligned}
 Q(z) &= \frac{G(z)}{1 + G(z)} U(z) + \frac{1}{1 + G(z)} N(z) \\
 &= \frac{V \cdot t_A / T_i}{(z - 1) + V \cdot t_A / T_i} U(z) + \frac{z - 1}{(z - 1) + V \cdot t_A / T_i} N(z)
 \end{aligned}$$

## 7.3.4 Delta-Sigma-Umsetzer

$$Q(z) = \frac{V \cdot t_A / T_i}{z - 1 + V \cdot t_A / T_i} U(z) + \frac{z - 1}{z - 1 + V \cdot t_A / T_i} N(z)$$

- Regelkreise können instabil werden → **Stabilitätsbetrachtung**
- Stabilitätsbedingung** für zeitdiskrete Systeme:

$$|z_\infty| < 1 \Leftrightarrow |z_\infty| = |1 - V \cdot t_A / T_i| < 1$$

→ stabil für:  $0 < V \cdot \frac{t_A}{T_i} < 2 \Leftrightarrow T_i > V \cdot t_A / 2$

- Für  $T_i = V \cdot t_A$  ergibt sich:

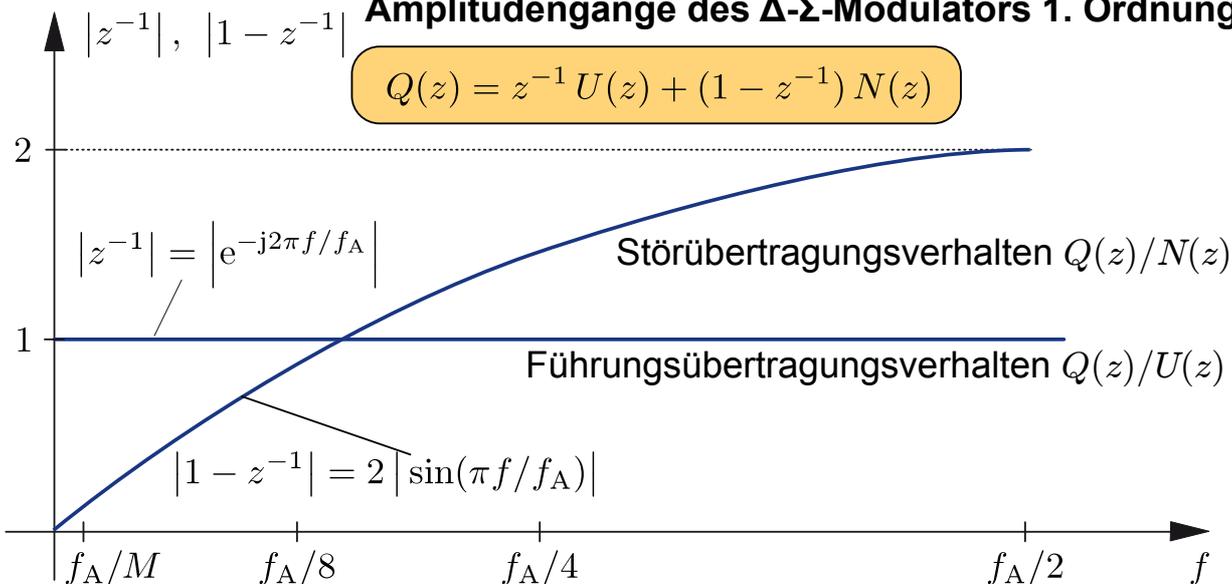
$$Q(z) = z^{-1} U(z) + (1 - z^{-1}) N(z)$$

- Mit  $z = e^{j2\pi f t_A}$  lassen sich die zugehörigen Frequenzgänge (Führungs- und Störübertragungsverhalten) berechnen

## 7.3.4 Delta-Sigma-Umsetzer

### Amplitudengänge des $\Delta$ - $\Sigma$ -Modulators 1. Ordnung

$$Q(z) = z^{-1} U(z) + (1 - z^{-1}) N(z)$$

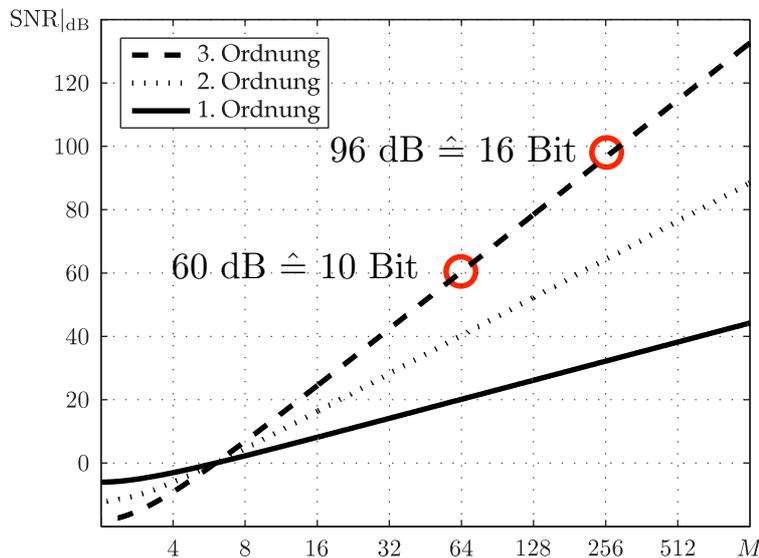


- Eingangssignal wird nicht gedämpft, nur um 1 Abtastperiode verzögert
- Quantisierungsrauschen wird hochpassgefiltert: „**Rauschformung**“
- Nutzsignal kann anschließend durch TP-Filterung isoliert werden; für einen großen Störabstand muss allerdings  $f_g \ll f_A/2$  gelten

Überabtasten (*oversampling*):  $f_A = M f_g$      $f_g = f_A/M$

- **SNR** für einen  $\Delta$ - $\Sigma$ -Modulator 1. Ordnung ist abhängig von  $M$  [PK12]:

$$\text{SNR} = \frac{P_{\text{sig}}}{P_{\text{Stör}}} \approx \frac{1}{4 \sin^2(\pi f_g / f_A)}$$



### Aufgaben des Digitalfilters:

- **TP-Filterung** zur Trennung von Nutzsignal und Quantisierungsrauschen sowie **Umsetzung** der binären Impulsfolge in eine digitale Zahl
- Zum Einsatz kommen **FIR-Filter** hoher Ordnung  $N$  mit folgender Struktur:

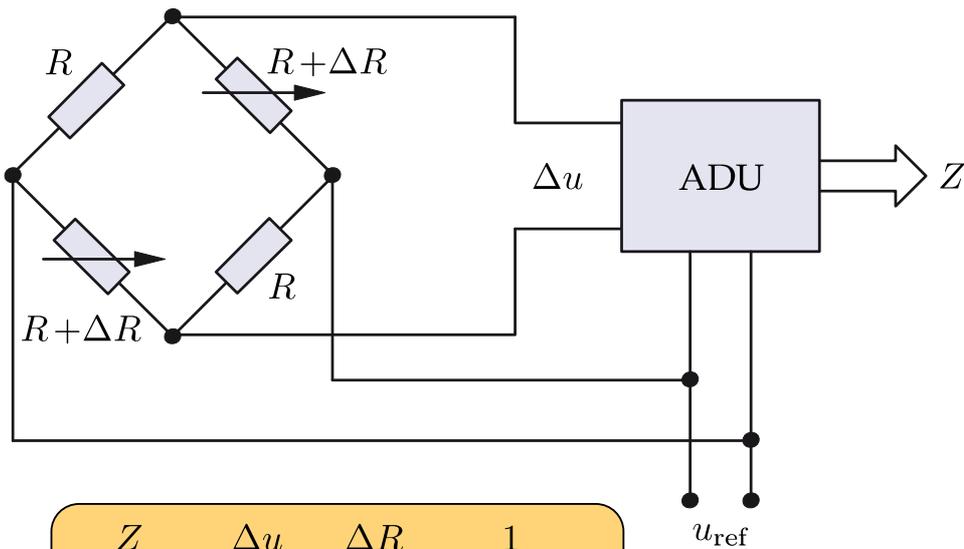
$$y_n = \sum_{i=0}^{N-1} b_i \cdot q_{n-i}$$

- Wählt man alle Koeffizienten  $b_i$  gleich, so ergibt sich als Sonderfall ein einfaches **Mittelwertfilter**, das sich durch einen Zähler implementieren lässt:

$$y_n = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} q_{n-i}$$

- Das Filter rekonstruiert den Erwartungswert des Eingangssignals
- Delta-Sigma-Umsetzer erreichen Auflösungen von bis zu 24 Bit; dazu wird eine entsprechende Überabtastung benötigt

- Einfluss der Speisespannung  $u_{\text{ref}}$  von Sensoren kann vielfach eliminiert werden, wenn man dafür die Referenzspannung des ADUs verwendet



- Zahlenwert:

$$\frac{Z}{Z_{\text{max}}} = \frac{\Delta u}{u_{\text{ref}}} = \frac{\Delta R}{2R} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta R}{2R}\right)}$$

ausschließlich abhängig von den Widerstandsverhältnissen

## 7.4 Digital-Analog-Umsetzer

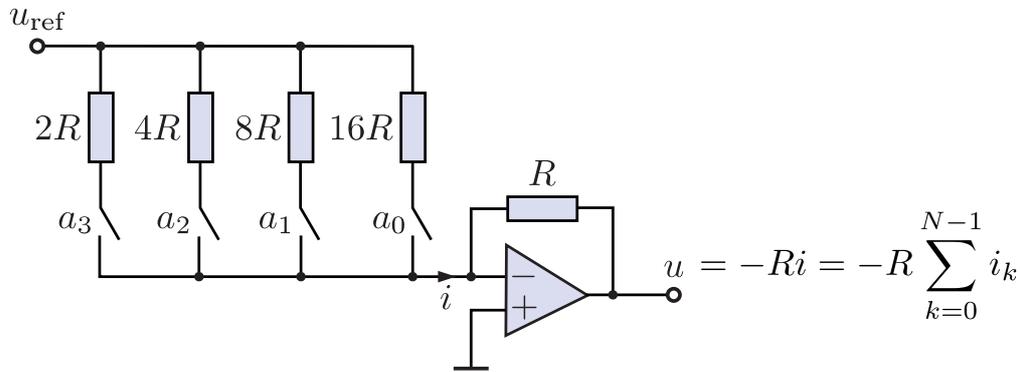
### 7.4.1 Parallele D/A-Umsetzer

### D/A-Umsetzer mit dyadisch gestuften Widerständen

- Entsprechend den Leitwerten ergeben sich dyadisch gestufte Ströme:

$$i_k = a_k \cdot \frac{u_{\text{ref}}}{2^{N-k} R}$$

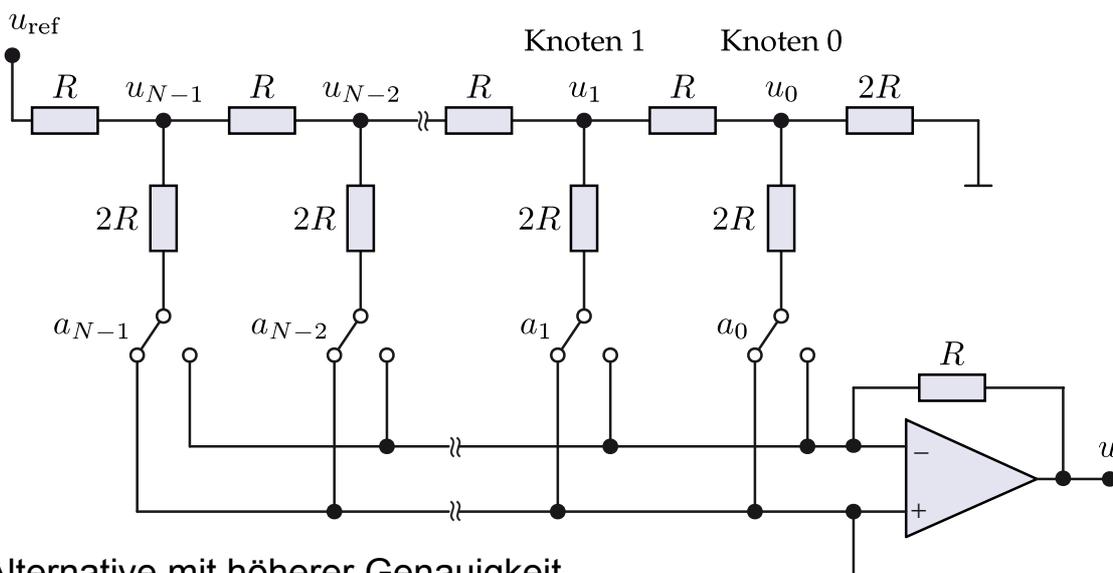
- Summation und  $i/u$ -Wandlung über invertierenden I/U-Verstärker



**Nachteil:** toleranzbedingt begrenzte Genauigkeit

## 7.4.1 Parallele D/A-Umsetzer

### D/A-Umsetzer mit $R/2R$ -Kettenleiternetzwerk



- Alternative mit höherer Genauigkeit
- Umsetzer besteht aus Widerständen  $R$  und  $2R$
- Stellenwertigkeit des Bits ist durch den Knotenpunkt vorgegeben, an welchem das Digitalsignal in das Netzwerk eingespeist wird