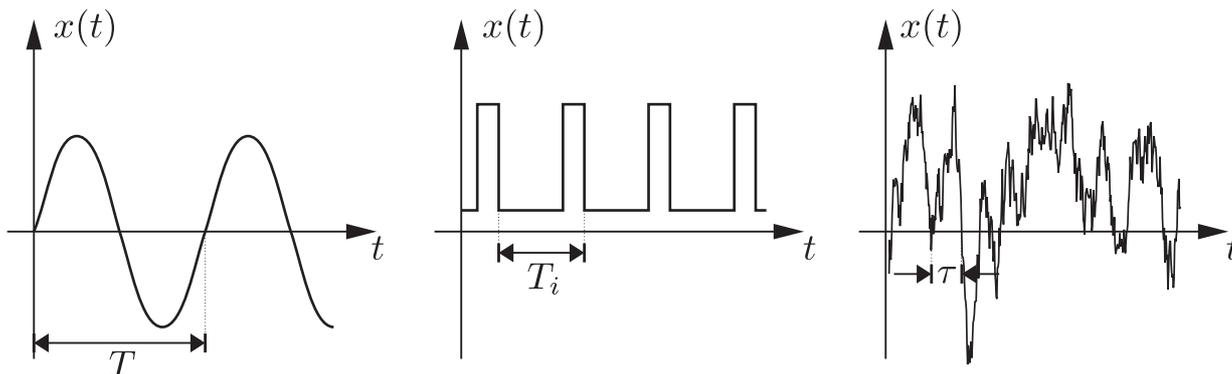


8. Erfassung frequenzanaloger Signale

- 8.1 Allgemeiner Frequenzbegriff
- 8.2 Digitale Drehzahlmessung
- 8.4 Positions- und Richtungserkennung

8. Erfassung frequenzanaloger Signale

Problem: Unterschiedliche Deutungen des Informationsparameters Frequenz



1. Harmonische Signale:

Kreisfrequenz \triangleq Momentanfrequenz:

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt}$$

Konstante Kreisfrequenz $\omega = \text{const}$ über $\varphi = 2\pi$:

$$\omega = 2\pi f$$

→ Ermittlung der Frequenz aus der Periodendauer:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

2. Impulsförmige Signale:

Folgefrequenz aus Periodendauer T_i zwischen den Impulsen:

$$f_F = \frac{1}{T_i}$$

3. Bandbegrenzte stochastische Signale:

Mittlere Dauer zwischen zwei Nulldurchgängen:

$$\bar{\tau} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tau_i$$

„Mittlere“ Frequenz:

$$f = \frac{1}{2\bar{\tau}}$$

Mittlere Zeitdauer $\bar{\tau}$ gleich Beobachtungsintervall T durch die Anzahl N_0 der erwarteten Nulldurchgänge:

$$\bar{\tau} = \frac{T}{E\{N_0(T)\}}$$



$$f = \frac{1}{2\bar{\tau}} = \frac{E\{N_0(T)\}}{2T}$$

8.1 Allgemeiner Frequenzbegriff

8.1 Allgemeiner Frequenzbegriff

- Für eine allgemeine Frequenzdefinition wird eine „Frequenzverteilungsfunktion“ benötigt, wofür die normierte Leistungsdichte geeignet ist

Definition 8.1: Mittlere Frequenz

- Die mittlere Frequenz eines reellen Signals ist das 1. Moment (Schwerpunkt) der normierten Leistungsdichte $f_x(f)$:

$$\bar{f} = \int_0^{\infty} f \cdot f_x(f) \, df = \int_0^{\infty} f \cdot \frac{S_{xx}(f)}{\frac{1}{2}P_x} \, df$$

Definition 8.1: Bandbreite

- Die Bandbreite Δ_f eines reellen Signals berechnet sich aus dem 2. zentralen Moment (Varianz) der normierten Leistungsdichte $f_x(f)$:

$$\Delta_f^2 = \int_0^{\infty} (f - \bar{f})^2 \cdot f_x(f) \, df = \int_0^{\infty} (f - \bar{f})^2 \cdot \frac{S_{xx}(f)}{\frac{1}{2}P_x} \, df$$

8.1 Allgemeiner Frequenzbegriff

- Die „mittlere“ Frequenz, die vorhin intuitiv durch Zählung von Nulldurchgängen ermittelt wurde, entspricht **nicht** der **mittleren Frequenz**, sondern vielmehr der Effektivfrequenz

Satz 8.1: Effektivfrequenz

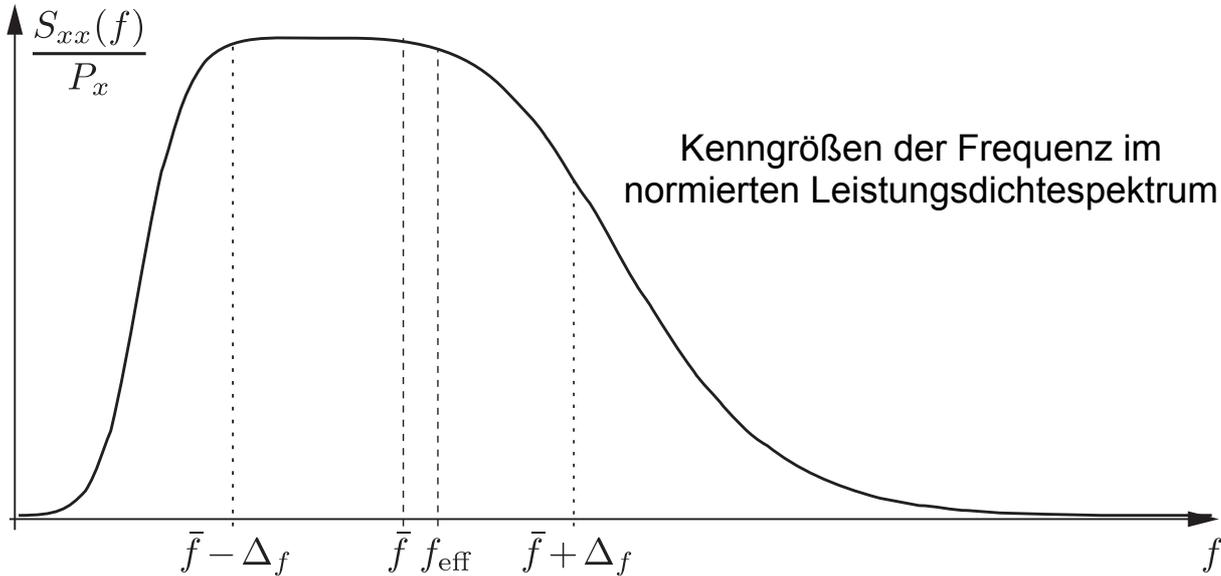
Die mittlere Häufigkeit $E\{N_0(T)\}$ der Nulldurchgänge eines mittelwertfreien Signals $x(t)$ innerhalb eines Intervalls T ist bei Annahme normalverteilter Amplituden gleich der **Effektivfrequenz** f_{eff} , d. h. der Wurzel des 2. Moments der normierten Leistungsdichte $f_x(f)$:

$$\begin{aligned} f_{\text{eff}} &= \frac{E\{N_0(T)\}}{2T} = \sqrt{\int_0^{\infty} f^2 \cdot f_x(f) \, df} = \sqrt{\int_0^{\infty} f^2 \cdot \frac{S_{xx}(f)}{\frac{1}{2}P_x} \, df} \\ &= \sqrt{E\{f^2\}} = \sqrt{\bar{f}^2 + \Delta_f^2} \end{aligned}$$

- Begriff rührt von der Analogie mit Effektivwert eines Amplitudensignals her

- Die Effektivfrequenz besitzt einen **systematischen** Fehler, der von der Signalbandbreite Δ_f abhängt. Für kleine Fehler folgt mit $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$:

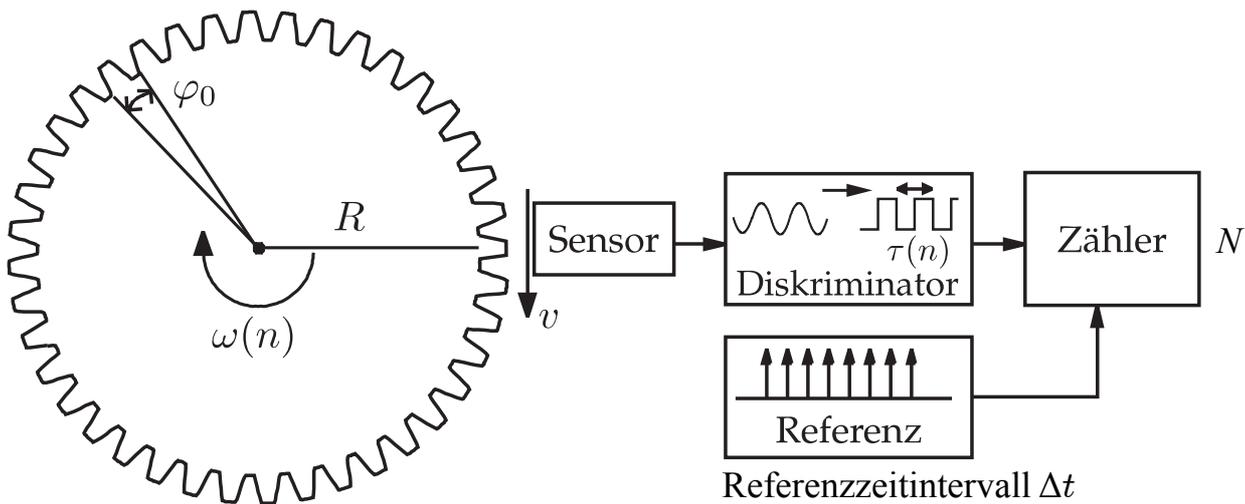
$$f_{\text{eff}} = \sqrt{\bar{f}^2 + \Delta_f^2} \approx \bar{f} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta_f^2}{\bar{f}^2} \right) = \bar{f} + \frac{1}{2} \frac{\Delta_f^2}{\bar{f}} > \bar{f}$$



8.2 Digitale Drehzahlmessung

- 8.2.1 Periodendauermessung
- 8.2.2 Frequenzmessung
- 8.2.3 Maximaler Quantisierungsfehler für einen Zählvorgang
- 8.2.4 Mittelwertbildung bei der Drehzahlmessung
- 8.2.5 Abtastung bei der Drehzahlmessung
- 8.2.6 Quantisierung bei fortlaufenden Drehzahlmessungen

Drehzahl-Messsystem:



Pro Zahn überstrichenes Winkelinkrement:

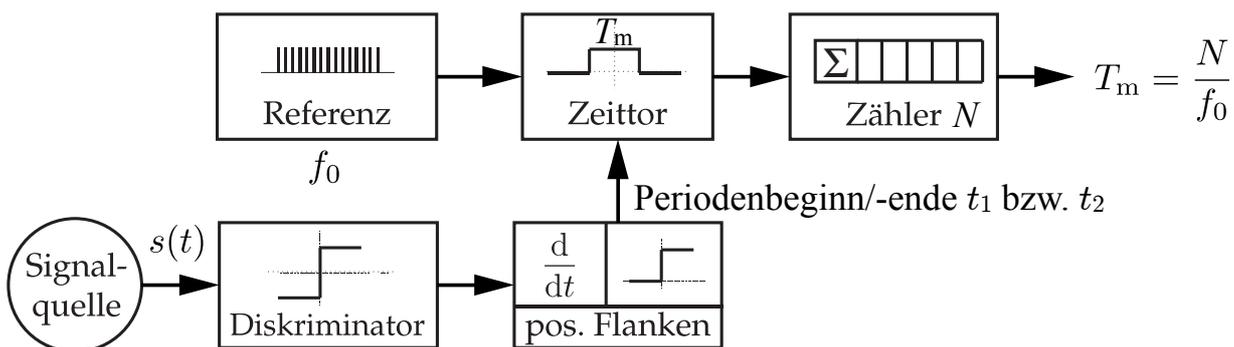
$$\varphi_0 = \frac{2\pi}{Z} \quad Z: \text{Anzahl der Zähne}$$

Gemessene Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega_m = 2\pi n = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1} = \frac{N \varphi_0}{\Delta t}$$

8.2.1 Periodendauermessung

■ Drehzahl durch Messung der Periodendauer **eines** disk. Winkelschrittes:



■ Gemessene Dauer **eines** diskreten Winkelschrittes:

$$t_2 - t_1 = T_m(i)$$

Winkelinkrement:

$$\varphi_0 = \frac{2\pi}{Z}$$

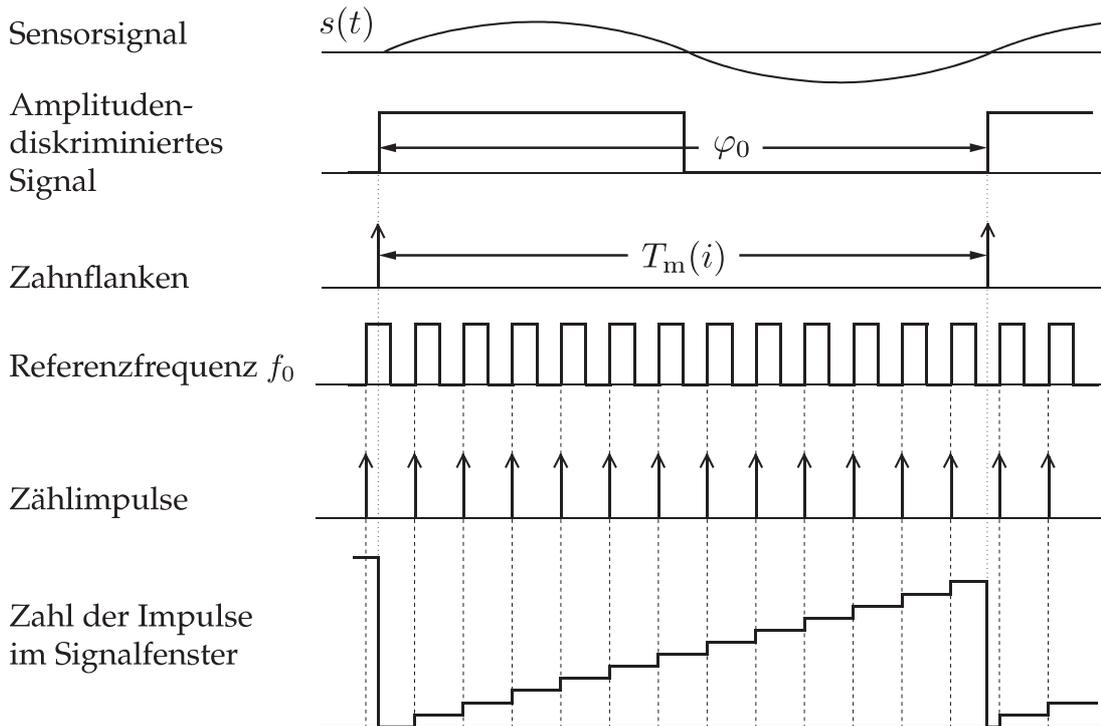
➔ Gemessene Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega_m(i) = \frac{2\pi}{T_m(i) \cdot Z}$$

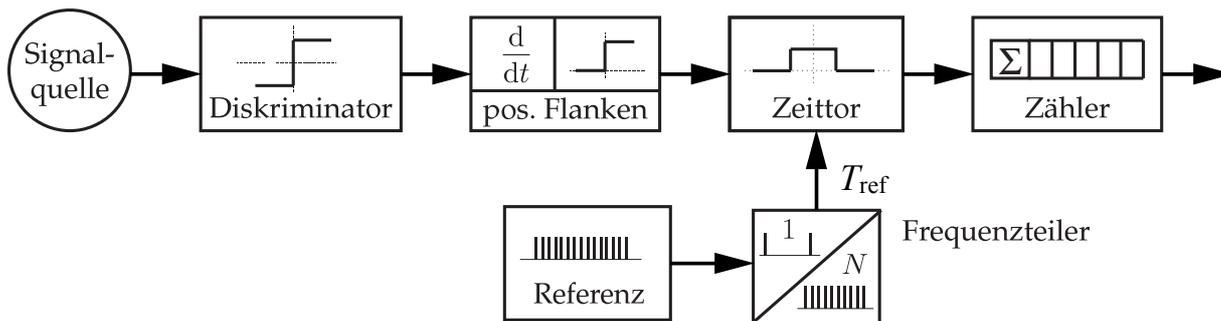
■ **Winkelsynchrone** Abtastung: neuer Messwert mit jeder Zahnflanke

8.2.1 Periodendauermessung

Digitale Drehzahlmessung durch Periodendauermessung (winkelsynchron)



8.2.2 Frequenzmessung



- **Prinzip:** Vorgabe eines **festen** Zeitintervalls T_{ref} durch Referenzoszillator

$$T_{\text{ref}} = t_2 - t_1$$

- Messen des überstrichenen Winkels durch Auszählen der Zahnflanken:

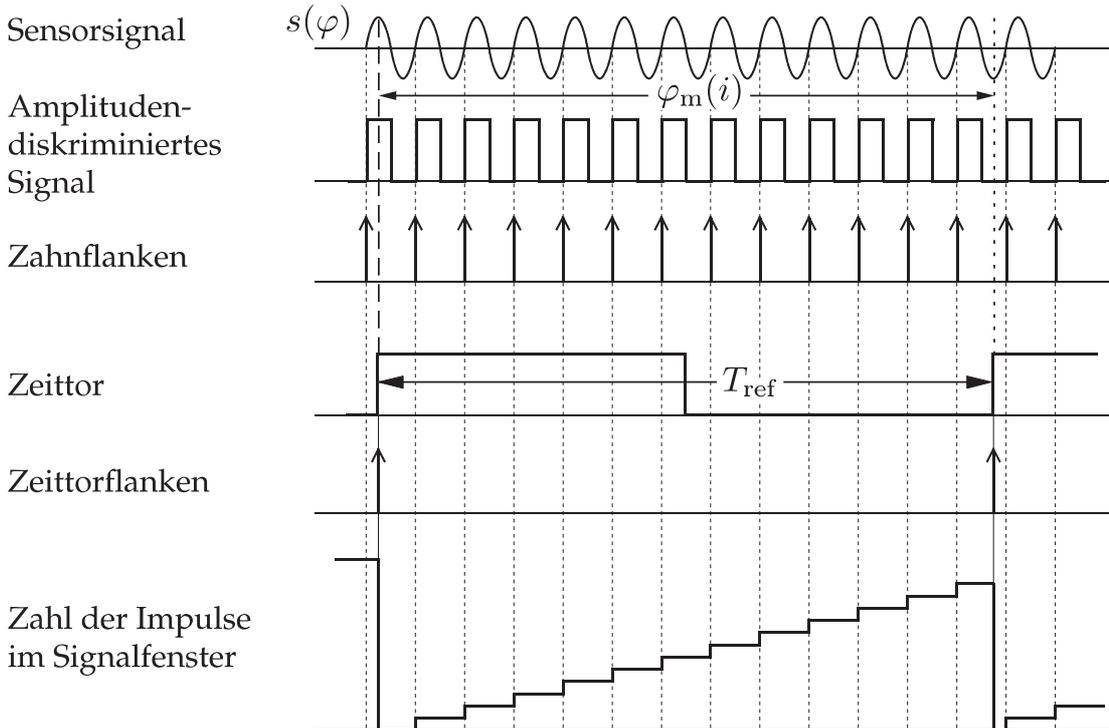
$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_m(i)$$

➔ Gemessene Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega_m(i) = \frac{\varphi_m(i)}{T_{\text{ref}}}$$

- **Quantisierungsfehler** durch feste Zahneinteilung
- **Zeitsynchrone** Abtastung: neuer Messwert mit jedem neuen Zeitintervall

Digitale Drehzahlmessung durch Frequenzmessung (zeitsynchron)



8.2.3 Max. Quantisierungsfehler für einen Zählvorgang

Periodendauermessung

- Ungünstigster Fall: Abweichung der quantisierten Periodendauer $N \cdot T_0$ von der kontinuierlichen Periodendauer T_m beträgt ein **Quantisierungsintervall** $T_0 = 1 / f_0$ (Zählintervall):

$$|T_m - NT_0| \leq T_0 \quad \text{max. Fehler der Zeitmessung}$$

- Mit der quantisierten Winkelgeschwindigkeit $\omega_q = \frac{\varphi_0}{NT_0}$ ergibt sich der **relative Quantisierungsfehler** betragsmäßig zu:

$$F_r = \frac{|\omega_q - \omega_m|}{\omega_m} = \left| \frac{\frac{\varphi_0}{NT_0} - \frac{\varphi_0}{T_m}}{\frac{\varphi_0}{T_m}} \right| = \left| \frac{T_m}{NT_0} - 1 \right|$$

- Bei einer Abweichung von höchstens einem Zählintervall erhält man:

$$F_r \leq \frac{1}{N} = \frac{1}{NT_0 \cdot f_0} = \frac{\omega_q}{\varphi_0 f_0} \quad \sim \text{Drehzahl}$$

Frequenzmessung

- Ungünstigster Fall: Abweichung des wirklichen Winkels vom gemessenen Wert um ein Winkelinkrement φ_0 (1 Zahn):

$$|\varphi_m - N \cdot \varphi_0| \leq \varphi_0 \quad \text{max. Winkelfehler}$$

- Mit der quantisierten Winkelgeschwindigkeit $\omega_q = \varphi_0 \frac{N}{T_{\text{ref}}}$

folgt für den Betrag des relativen Quantisierungsfehlers:

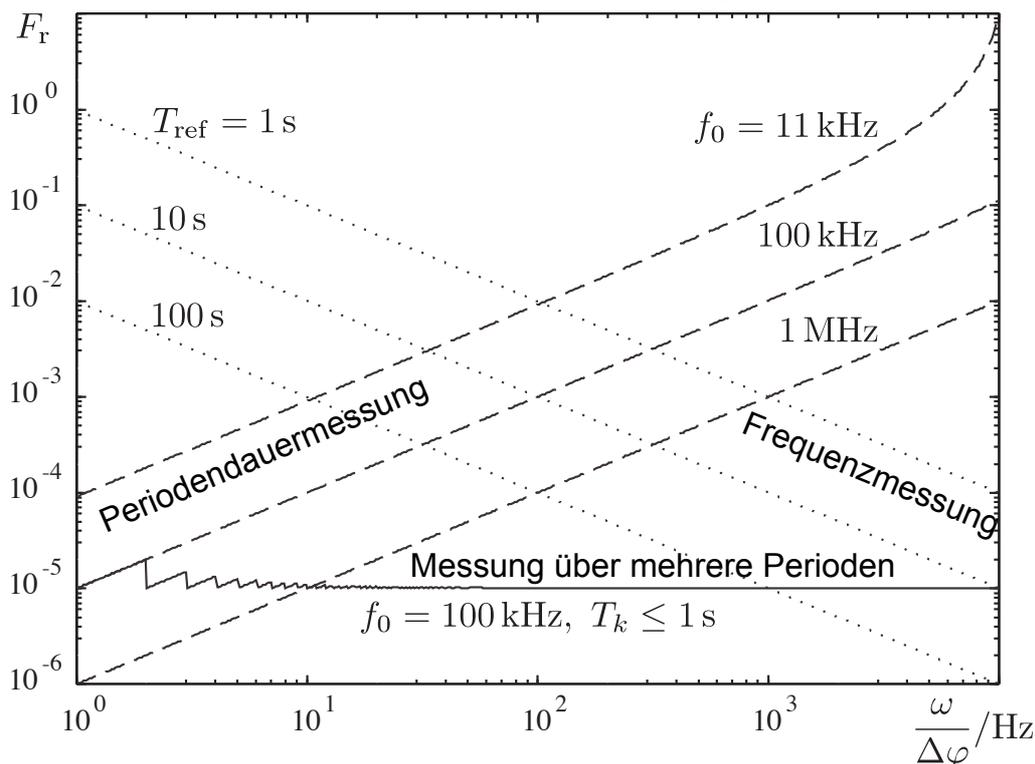
$$F_r = \frac{|\omega_q - \omega_m|}{\omega_m} = \left| \frac{\varphi_0 \frac{N}{T_{\text{ref}}} - \frac{\varphi_m}{T_{\text{ref}}}}{\frac{\varphi_m}{T_{\text{ref}}}} \right| = \left| \frac{\varphi_0 \cdot N - \varphi_m}{\varphi_m} \right| \approx \left| \frac{\varphi_0 \cdot N - \varphi_m}{\varphi_0 \cdot N} \right|$$

- Bei einer Abweichung von höchstens einem Winkelinkrement erhält man:

$$F_r \leq \frac{1}{N} = \frac{\varphi_0}{\omega_q T_{\text{ref}}} \quad \sim \text{Drehzahl}^{-1}$$

8.2.3 Max. Quantisierungsfehler für einen Zählvorgang

Maximaler relativer Quantisierungsfehler:



8.2.4 Mittelwertbildung bei der Drehzahlmessung

- Verfahren zur Drehzahlmessung haben **mittelwertbildenden** Charakter

Periodendauermessung (PM):

$$\hat{\omega}(\varphi) = \frac{1}{\varphi_0} \int_{\varphi - \frac{\varphi_0}{2}}^{\varphi + \frac{\varphi_0}{2}} \omega(\varphi) d\varphi$$

Mittelung
zwischen 2
Zahnflanken
(Abstand φ_0)

Frequenzmessung (FM):

$$\hat{\omega}(t) = \frac{1}{T_{\text{ref}}} \int_{t - \frac{T_{\text{ref}}}{2}}^{t + \frac{T_{\text{ref}}}{2}} \omega(t) dt$$

Mittelung
über Referenz-
intervall T_{ref}

- Untersuchung des Fehlers im Winkelfrequenz- bzw. Zeitfrequenzbereich:

PM:

$$\hat{\omega}(\varphi) = \omega(\varphi) * r_{\varphi_0}(\varphi)$$



$$\hat{\Omega}(f_\varphi) = \Omega(f_\varphi) \cdot R_{\varphi_0}(f_\varphi)$$

FM:

$$\hat{\omega}(t) = \omega(t) * r_{T_{\text{ref}}}(t)$$

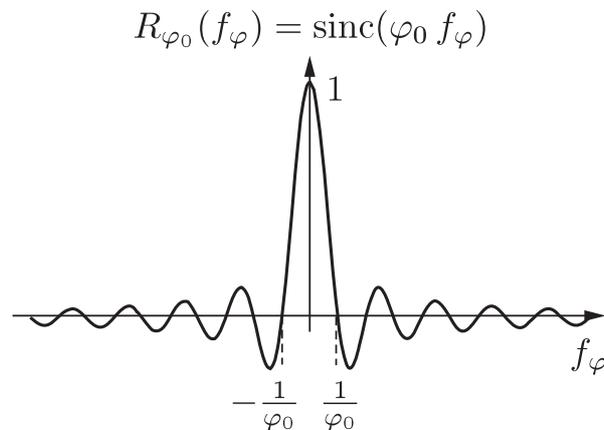
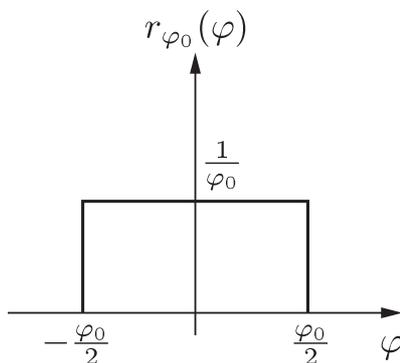


$$\hat{\Omega}(f) = \Omega(f) \cdot R_{T_{\text{ref}}}(f)$$

- Originalspektrum wird bei der Mittelwertbildung durch die Multiplikation mit einer Sinc-Funktion verfälscht

8.2.4 Mittelwertbildung bei der Drehzahlmessung

Auswirkung der Mittelung bei der **Periodendauermessung**: Rechteckfenster (Winkelbereich) und Fourier-Transformierte (Winkelfrequenzbereich)



- Veränderliche Drehzahlen nicht messbar
- nur Gleichanteil messbar (mittlere Drehzahl)

Beispiel 8.1: Drehzahlmessung an einem Verbrennungsmotor

- **Aufgabe:** Bestimmung der Drehzahl n eines Verbrennungsmotors mit $N_{\text{Zyl}} = 6$ Zylindern durch **Periodendauermessung** zwischen zwei Zahnflanken bei einem Zahnrad mit $Z = 60$ Zähnen.
- Der Drehzahl sind durch die Verbrennungsvorgänge Störungen mit der folgenden Winkelfrequenz überlagert (3 Störhübe pro Umdrehung):

$$f_{\varphi, \text{stör}} \approx \frac{N_{\text{Zyl}}}{2} \text{ rad}^{-1} = 3 \text{ rad}^{-1}$$

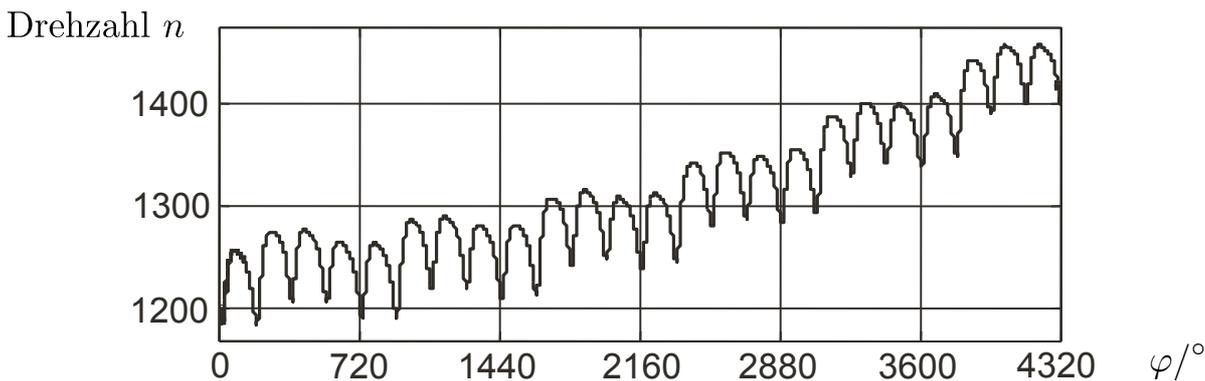
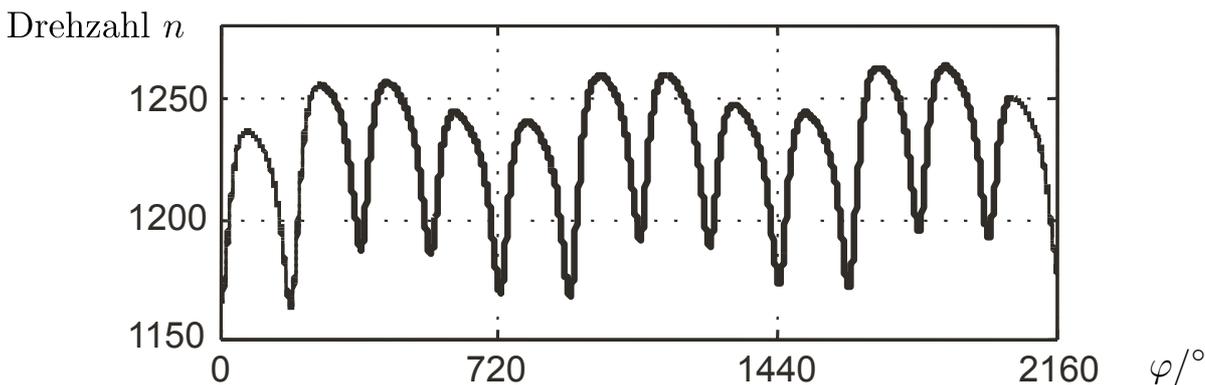
Abtastfrequenz des Sensors:

$$f_{\varphi, A} = 60 \frac{1}{\text{rad}}$$

- Es gilt:

$$f_{\varphi, \text{stör}} \leq \frac{f_{\varphi, A}}{2}$$

→ Störungen werden **kaum unterdrückt**; daher kann aus der gemessenen Drehzahl das **Verbrennungsmoment** geschätzt werden



8.2.5 Abtastung bei der Drehzahlmessung

- Nach der Mittelwertbildung wird die Drehzahl $\hat{\omega}(t)$ bzw. $\hat{\omega}(\varphi)$ abgetastet
→ periodische Wiederholung der Spektren

Frequenzmessung: Abtastung erfolgt mit der Referenzperiode T_{ref}

$$\hat{\omega}(n T_{\text{ref}}) = \hat{\omega}(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n T_{\text{ref}})$$



$$\hat{\Omega}_*(f) = \frac{1}{T_{\text{ref}}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\Omega}(f - k/T_{\text{ref}})$$

Zeitfrequenzspektrum

Periodendauermessung: Abtastung erfolgt winkeldiskret

$$\hat{\omega}(n \varphi_0) = \hat{\omega}(\varphi) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\varphi - n \varphi_0)$$



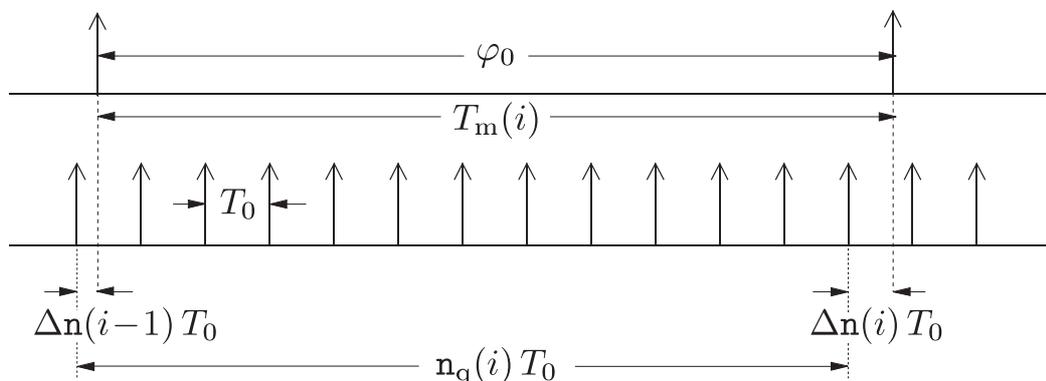
$$\hat{\Omega}_*(f_\varphi) = \frac{1}{\varphi_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\Omega}(f_\varphi - k/\varphi_0)$$

Winkelfrequenzspektrum

- **Abtasttheorem** muss eingehalten werden
- Selbst bei „konst.“ Drehzahl können harm. Störungen zu **Aliasing** führen!

8.2.6 Quantisierung bei fortlaufenden Drehzahlmessungen

- Für jeden Zahn erfolgt fortlaufend eine Periodendauermessung → $T_m(i)$
- **Quantisierungsfehler** im i -ten Intervall am Anfang und Ende einer Periode $T_m(i)$ soll statistisch beschrieben werden



- Für beide Quantisierungsfehler Δn am Anfang und am Ende einer Periode kann eine **Gleichverteilung** angenommen werden:

$$f_{\Delta n}(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq n \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Das Zählergebnis ist bei **Quantisierung** am Intervallanfang und -ende:

$$n_q(i) = n(i) + \Delta n_q(i)$$

mit dem kontinuierlichen Verhältnis

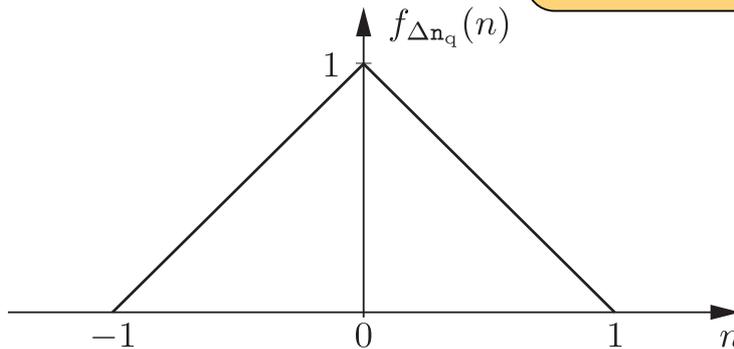
$$n(i) = \frac{T_m(i)}{T_0}$$

- Resultierender Quantisierungsfehler:

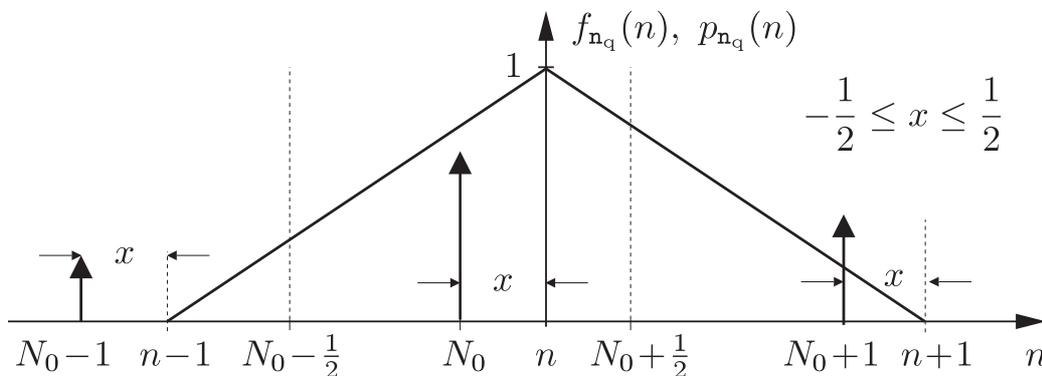
$$\Delta n_q(i) = \Delta n(i-1) - \Delta n(i)$$

- Wahrscheinlichkeitsdichte des resultierenden Fehlers:

$$f_{\Delta n_q}(n) = f_{\Delta n}(n) * f_{\Delta n}(n)$$



- Kontinuierliches Verhältnis $n(i)$ ist bei **konstanter Drehzahl** ein δ -Impuls
- Addition des Quantisierungsfehlers $\Delta n_q(i)$ ergibt Dreiecksfunktion für die Wahrscheinlichkeitsdichte des **diskreten Zählergebnisses** $n_q(i)$



- Allerdings kann das Zählergebnis $n_q(i)$ nur **diskrete** Werte annehmen
- Quantisierung von $n_q(i)$ → Integration der Dichte (**Flächenabtastung**)

- Kontinuierlicher Wert:

$$n(i) = N_0 + x$$

$$-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$n(i) = N_0 + x$$

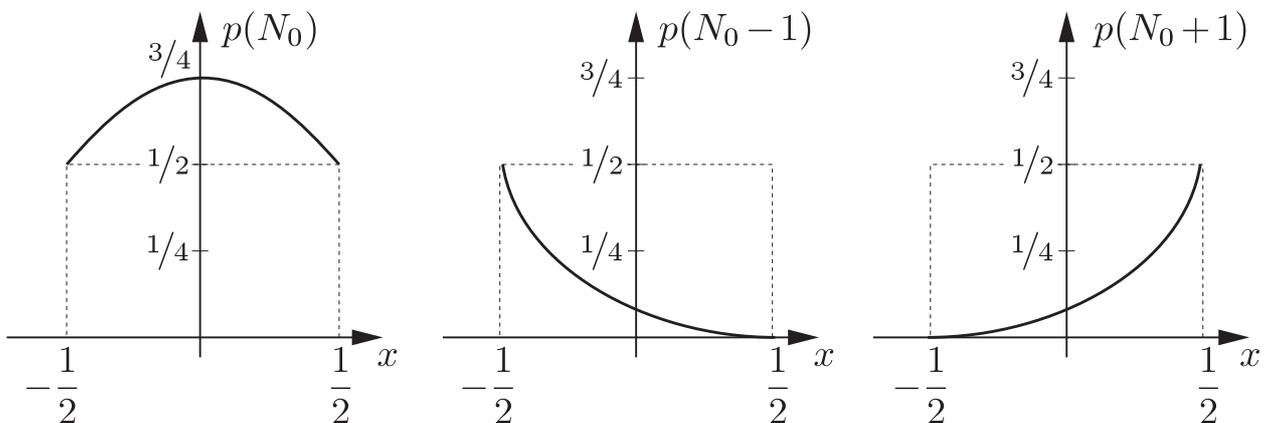
- Durch Integration der Dichte erhält man die Einzelwahrscheinlichkeiten:

$$p(N_0) = \int_{N_0 - \frac{1}{2}}^{N_0 + \frac{1}{2}} f_{n_q}(n) \, dn = \int_{-x - \frac{1}{2}}^{-x + \frac{1}{2}} f_{\Delta n_q}(n) \, dn = \frac{3}{4} - x^2$$

$$p(N_0 - 1) = \int_{N_0 - \frac{3}{2}}^{N_0 - \frac{1}{2}} f_{n_q}(n) \, dn = \int_{-1}^{-x - \frac{1}{2}} f_{\Delta n_q}(n) \, dn = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - x \right)^2$$

$$p(N_0 + 1) = \int_{N_0 + \frac{1}{2}}^{N_0 + \frac{3}{2}} f_{n_q}(n) \, dn = \int_{-x + \frac{1}{2}}^1 f_{\Delta n_q}(n) \, dn = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + x \right)^2$$

- Einzelwahrscheinlichkeiten der diskreten Zählergebnisse:



- Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zählergebnisse:

$$p_{n_q}(n) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - x \right)^2 \delta(n - (N_0 - 1)) + \left(\frac{3}{4} - x^2 \right) \delta(n - N_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + x \right)^2 \delta(n - (N_0 + 1))$$

- Erwartungswert des quantisierten Zählergebnisses:

$$E\{n_q\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \cdot p_{n_q}(n) = \sum_{i=-1}^1 (N_0 + i) \cdot p(N_0 + i) = N_0 + x = n$$

- Schätzung der Periode ist **erwartungstreu**:

$$E\{n_q \cdot T_0\} = n T_0 = T_m(i)$$

- 2. Moment:

$$\begin{aligned} E\{n_q^2\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 \cdot p_{n_q}(n) \\ &= (N_0 - 1)^2 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - x \right)^2 + N_0^2 \left(\frac{3}{4} - x^2 \right) + (N_0 + 1)^2 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + x \right)^2 \\ &= n^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- **Varianz** des quantisierten Zählergebnisses:

$$\sigma_{n_q}^2 = E\{n_q^2\} - \underbrace{E\{n_q\}^2}_{n^2} = \frac{1}{4}$$

Messung der Winkelgeschwindigkeit mit dem Periodendauerverfahren

■ Winkelgeschwindigkeit ohne Quantisierung: $\omega_m(i) = \frac{\varphi_0}{T_m(i)} = \frac{\varphi_0}{n(i) \cdot T_0}$

■ Schätzwert nach der Quantisierung:

$$\hat{\omega}_m(i) = \frac{\varphi_0}{n_q(i) \cdot T_0} = \frac{\varphi_0}{[n(i) + \Delta n_q(i)] T_0}$$

Zufallsgröße $\Delta n_q(i)$ geht **nichtlinear** in den Schätzwert ein

→ Taylor-Reihe um den kontinuierlichen Wert $\omega_m(i)$:

$$\hat{\omega}_m(i) \approx \omega_m(i) \left(1 - \frac{\Delta n_q(i)}{n(i)} + \frac{\Delta n_q^2(i)}{n^2(i)} \right)$$

8.2.6 Quantisierung bei fortlaufenden Drehzahlmessungen

■ Erwartungswert der Schätzung:

$$E\{\hat{\omega}_m(i)\} = \omega_m(i) \left(1 + \frac{\sigma_{n_q}^2}{n^2(i)} \right) = \omega_m(i) \left(1 + \frac{1}{4n^2(i)} \right)$$

Schätzung lediglich **asymptotisch erwartungstreu** ($n \rightarrow \infty$)

■ Schätzfehlervarianz:

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{\omega}_m}^2 &= E\{(\hat{\omega}_m - \omega_m)^2\} \approx \omega_m^2 \frac{\sigma_{n_q}^2}{n^2(i)} \left(1 - 2 \frac{E\{\Delta n_q\}}{n} + \frac{\sigma_{n_q}^2}{n^2(i)} \right) \\ &= \omega_m^2 \frac{1}{4n^2(i)} \left(1 + \frac{1}{4n^2(i)} \right) \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\hat{\omega}_m}^2 = 0$$

→ Schätzung ist **konsistent**

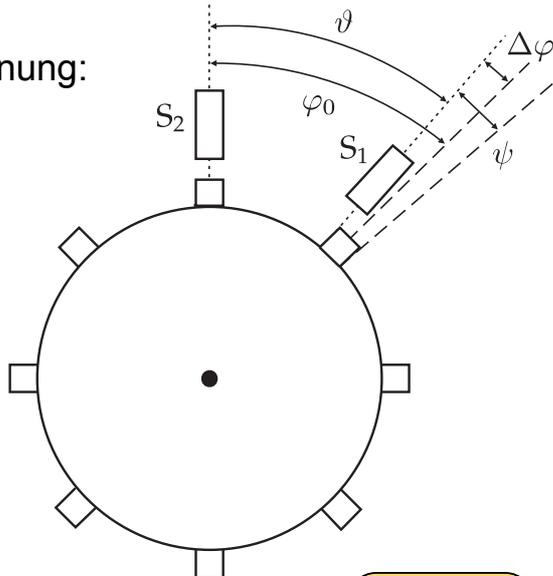
8.4 Positions- und Richtungserkennung

8.4.1 Drehrichtungserkennung

8.4.2 Positionsbestimmung mit Inkrementalgebern

8.4.1 Drehrichtungserkennung

Einrichtung zur
 Drehrichtungserkennung:



Winkel zwischen zwei Zähnen:

$$\varphi_0 = \frac{2\pi}{Z}$$

Winkelabstand zwischen den Sensoren:

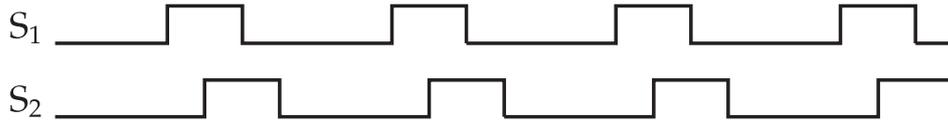
$$\vartheta = k\varphi_0 \pm \Delta\varphi$$

$$0 < \Delta\varphi < \psi/2$$

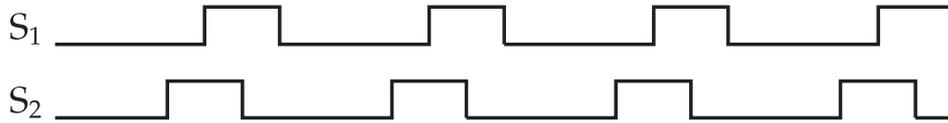
$$k \in \mathbb{N}$$

8.4.1 Drehrichtungserkennung

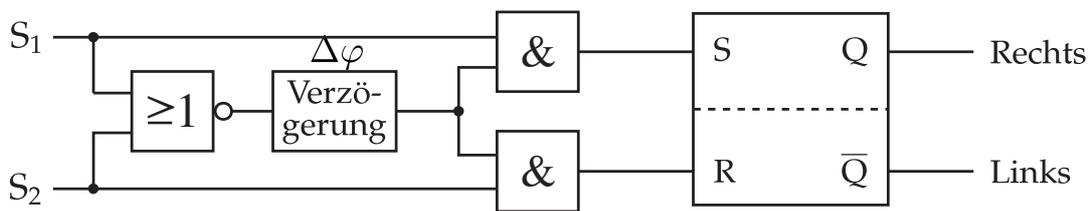
- Sensorsignale bei einer **Rechtsdrehung**:



- Sensorsignale bei einer **Linksdrehung**:

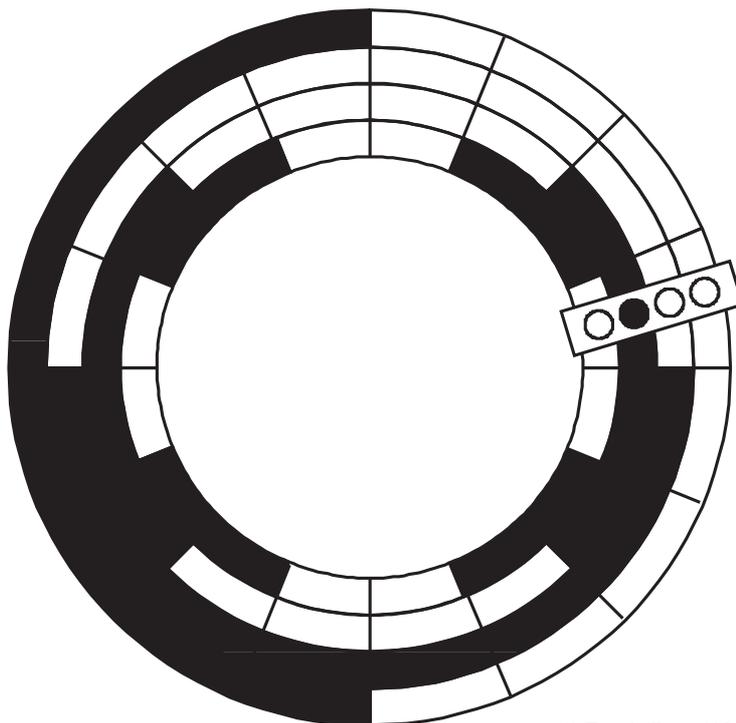


- Logische Schaltung zur Erkennung der Drehrichtung:



8.4.2 Positionsbestimmung mit Inkrementalgebern

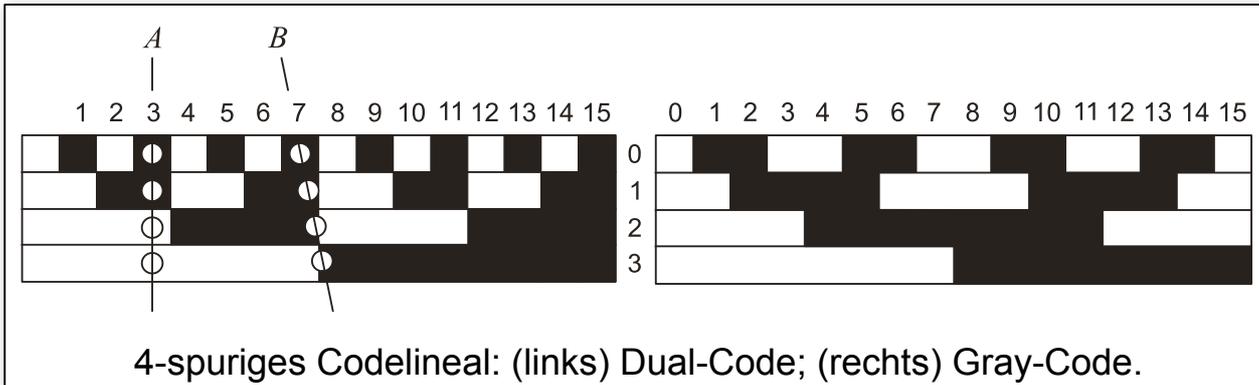
- **Gray*-Code-codierter Absolutwinkelgeber**:



*) Frank Gray (1953), amerikanischer Physiker

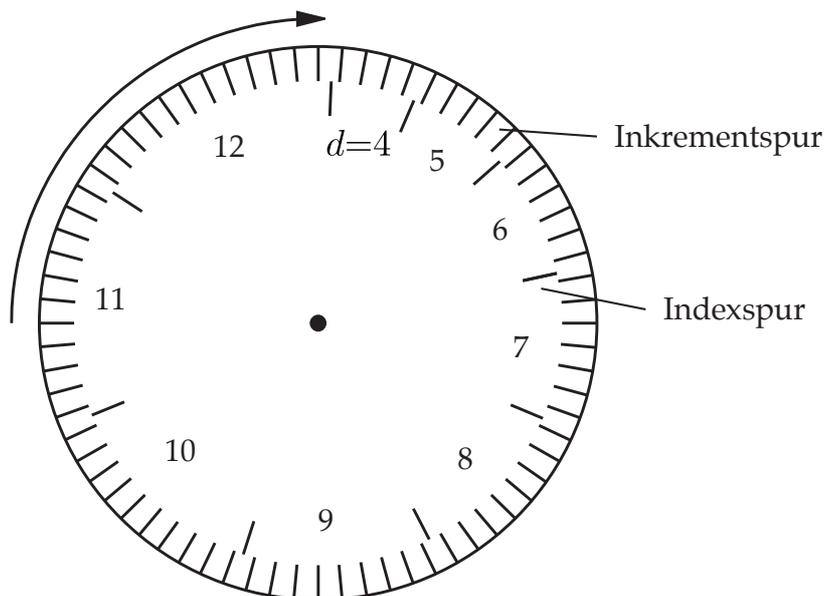
8.4.2 Positionsbestimmung mit Inkrementalgebern

- Der **Gray-Code** ist ein **einschrittiger binärer** Code (d. h. aufeinander folgende Gray-Zahlen unterscheiden sich jeweils nur in einem Bit)
- Anders als der Dual-Code weist er keine feste Wertigkeit auf
- Da sich nur ein Bit ändert, ergeben sich wenige Fehlermöglichkeiten in den Übergängen von einer Stufe zur nächsten
- Daher wird dieser Code bevorzugt bei der Nachrichtenübermittlung sowie bei weg- und winkelgebenden Messungen eingesetzt



8.4.2 Positionsbestimmung mit Inkrementalgebern

- Beispiel einer **abstandscodierten** Scheibe mit 9 Positions- und 72 Inkrementmarken:

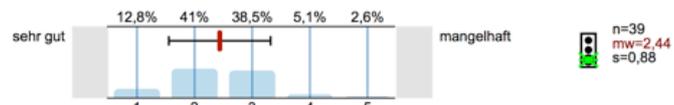


➔ Nach spätestens 12 Impulsen kann die absolute Position erkannt werden

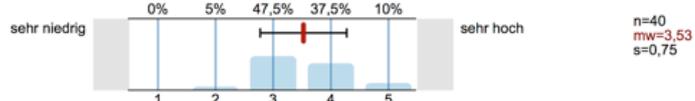
Evaluierungsergebnisse 2012/13

Evaluierung 2012/13 – Qualitätsrichtlinien

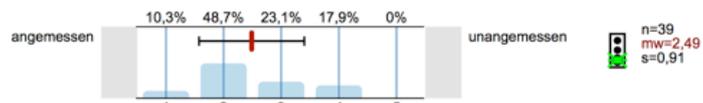
Bitte benoten Sie die Lehrveranstaltung insgesamt.



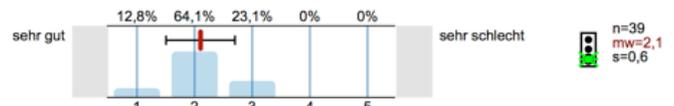
Wie hoch ist der notwendige Arbeitsaufwand für diese Lehrveranstaltung?



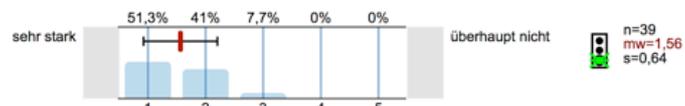
Der notwendige Arbeitsaufwand für die Lehrveranstaltung ist...



Wie ist die Lehrveranstaltung strukturiert?



Wirkt der/die Dozent/in engagiert und motiviert bei der Durchführung der Lehrveranstaltung?



Geht der/die Dozent/in auf Fragen und Belange der Studierenden ein?

