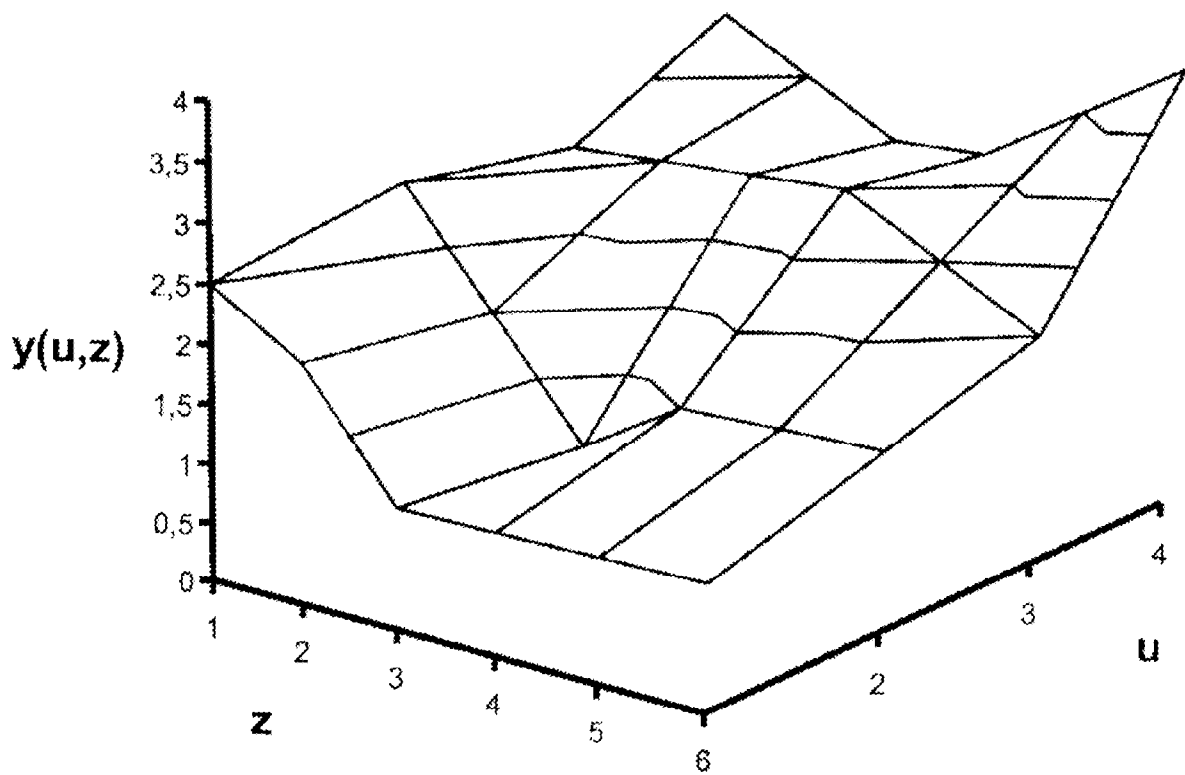


MESS

F00 – H04



Kennfeldinterpolation



FS ETEC
Die Echten

Meßtechnik Klausur vom 20.04.2000

Aufgabe 1: Interpolation (16 Punkte)

An einem Meßsystem soll die ermittelte, stationäre Kennlinie des Systems

$$y(u) = \ln(u+8)$$

im Intervall $-7.5 \leq u \leq 0$ durch ein Newton-Polynom interpoliert werden.

- a) Zunächst werden die folgenden drei Stützstellen zugrunde gelegt:

$$u_0 = -7 \quad u_1 = -6 \quad u_2 = -4$$

Geben Sie das zugehörige Interpolations-Polynom nach dem Newton-Verfahren in der Form

$$p(u) = p_0 + p_1 u + p_2 u^2 \text{ an.}$$

- b) Berechnen Sie den absoluten Interpolationsfehler $y_F(u)$ und bestimmen Sie daraus die Stelle u_F , bei der dieser Interpolationsfehler im vorgegeben Intervall maximal wird. Geben Sie den zugehörigen Fehler an dieser Stelle an.

Hinweis: Geben Sie alle Ergebnisse auf 3 Stellen nach dem Komma an.

- c) Zur Verbesserung der Interpolation soll an der Stelle u_F aus Teilaufgabe b) eine weitere Stützstelle eingefügt werden.

Geben Sie das zugehörige Interpolations-Polynom nach dem Newton-Verfahren in der Form $\tilde{p}(u) = p_0 + p_1 u + p_2 u^2 + p_3 u^3$ an.

- d) Die Güte der Interpolation durch das Einfügen der zusätzlichen Stützstelle soll nun bewertet werden.

Berechnen Sie dazu den absoluten Interpolationsfehler an der Stelle $u = -2$ für beide Polynome. Bestimmen Sie dann die relative Verbesserung der Interpolation an dieser Stelle, bezogen auf den Interpolationsfehler bei vier Stützstellen, und geben Sie das Ergebnis in Prozent an.

Lösung

- a) Der Ansatz für das Newton-Polynom bei drei gegebenen, **nicht-äquidistanten** Stützstellen (Paarabel) lautet:

$$p(u) = a_0 + a_1(u - u_0) + a_2(u - u_1)(u - u_0)$$

Mit

$$y_0 = y(u_0) = 0 \quad y_1 = y(u_1) = \ln(2) \quad y_2 = y(u_2) = 2\ln(2)$$

als Funktionswerten an den Stützstellen ergibt sich daraus für a_0, a_1 und a_2 :

$$y_0 = p(u_0) = a_0 \Rightarrow a_0 = 0$$

$$y_1 = p(u_1) = a_0 + a_1(u_1 - u_0) \Rightarrow a_1 = \ln(2)$$

$$y_2 = p(u_2) = a_0 + a_1(u_2 - u_0) + a_2(u_2 - u_1)(u_2 - u_0) \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{6} \ln(2)$$

Eingesetzt berechnet sich das gesuchte Polynom $p(u)$ zu:

$$p(u) = -\frac{1}{6} \ln(2) u^2 - \frac{7}{6} \ln(2) u$$

1

- b) Der absolute Interpolationsfehler ergibt sich zu:

$$y_F(u) = |y(u) - p(u)| = \left| \ln(u+8) + \frac{1}{6} \ln(2) u(u+7) \right|$$

Um eine Fallunterscheidung bei der Ableitung des Betrages in $y_F(u)$ zu umgehen, betrachtet man alle lokalen Extrema und Randextrema der Funktion $y(u) - p(u)$ im vorgegebenen Intervall und vergleicht die sich ergebenden Fehler. Diejenige Stelle mit dem betragsmäßig größten Fehler ist gleichzeitig die Stelle, an der $y_F(u)$ maximal wird.

$$\frac{d\{y(u) - p(u)\}}{du} = \frac{1}{u+8} + \frac{1}{6} \ln(2)(2u+7) = \frac{\frac{1}{3} \ln(2) [u^2 + \frac{23}{2} u + 28 + \frac{3}{\ln(2)}]}{u+8}$$

Lokale Extrema:

Mögliche Extremstellen ergeben sich aus der notwendigen Bedingung $\frac{d\{y(u) - p(u)\}}{du} = 0$ zu:

$$u_{F1} \approx -4.893 \in]-7.5; 0[\quad y_F(u_{F1}) \approx 0.057$$

$$u_{F2} \approx -6.607 \in]-7.5; 0[\quad y_F(u_{F2}) \approx 0.031$$

Der Vorzeichenwechsel von $\frac{d\{y(u) - p(u)\}}{du}$ weist u_1 bzw. u_2 hinreichend als lokales Minimum bzw. Maximum aus.

Randextrema:

Für den linken bzw. rechten Intervallrand ergeben sich folgende Werte:

$$u_{F3} = -7.5 \quad y_F(u_{F3}) \approx 0.259$$

$$u_{F4} = 0 \quad y_F(u_{F4}) \approx 2.079$$

Maximaler Interpolationsfehler:

Der maximale Interpolationsfehler wird auf dem vorgegebenen Intervall $[-7.5; 0]$ am rechten Intervallrand bei $u_F = u_{F4} = 0$ zu $y_F(u_F) \approx 2.079$ angenommen.

- c) Aus dem rekursiven Ansatz für das Newton-Polynom bei vier gegebenen Stützstellen gemäß:

$$\tilde{p}(u) = p(u) + a_3(u - u_2)(u - u_1)(u - u_0)$$

mit der zusätzlichen Stützstelle aus Aufgabenteil b) laut

$$u_3 = u_F = 0 \quad y_3 = y(u_3) = y(u_F) = 3\ln(2)$$

ergibt sich a_3 wegen $\tilde{p}(u_F) = y(u_F)$ zu:

$$a_3 = \frac{\tilde{p}(u_F) - p(u_F)}{(u_F - u_2)(u_F - u_1)(u_F - u_0)} = \frac{1}{56} \ln(2)$$

Eingesetzt berechnet sich das gesuchte Polynom $\tilde{p}(u)$ zu:

$$\tilde{p}(u) = \frac{\ln(2)}{168} (3u^3 + 23u^2 + 98u + 504)$$

- d) Der absolute Interpolationsfehler bei drei Stützstellen $y_F(u)$ an der Stelle $u = -2$ ergibt sich nach Aufgabenteil b) zu:

$$y_F(-2) \approx 0.637$$

Analog dazu berechnet sich der absolute Interpolationsfehler bei vier Stützstellen $\tilde{y}_F(u)$ an der Stelle $u = -2$ zu:

$$\tilde{y}_F(-2) = |\tilde{y}(-2) - \tilde{p}(-2)| \approx 0.240$$

Die relative Verbesserung der Interpolation, bezogen auf den absoluten Interpolationsfehler bei vier Stützstellen, beträgt daher:

$$\left| \frac{y_F(-2) - \tilde{y}_F(-2)}{\tilde{y}_F(-2)} \right| \approx 165\%$$

Aufgabe 2: Korrelation und Leistungsdichte (16 Punkte)

In Abb. 1 finden Sie die Zeitfunktion $x(t)$, deren Autokorrelation $R_{xx}(\tau)$ sowie deren zugehörige Leistungsdichte $S_{xx}(f)$. Die Bilder sind in ihrer Reihenfolge vertauscht. Ordnen Sie daher den Zeitfunktionen (A-H) die zugehörigen Autokorrelationen (1-8) und die entsprechenden Leistungsdichten (I-VIII) zu und geben Sie eine kurze Begründung.

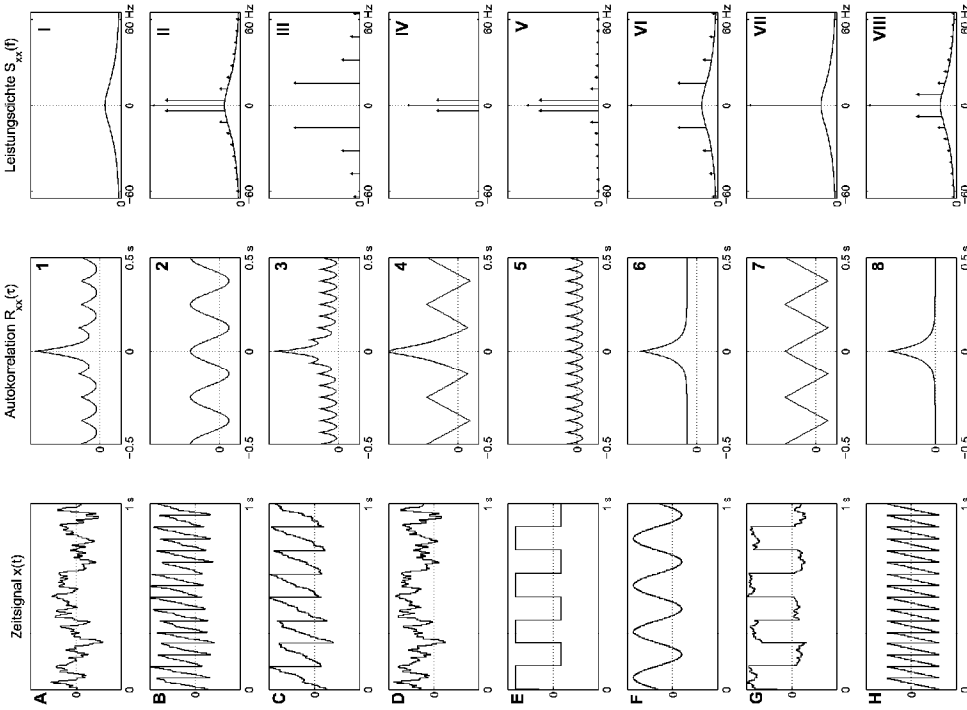


Bild 1: Zeitsignale mit AKF und Leistungsdichten

Lösung

$x(t) - R_{xx}(\tau) - S_{xx}(f)$ – Begründung:

- A – 8 – I – farbiges Rauschen ohne Offset $\rightarrow$ AKF abfallende, symmetrische Exponential-Funktion. $S_{xx}(f)$: Abfallendes Rauschspektrum (Tiefpaß).
- B – 3 – VI – Sägezahn mit farbigen Rauschen und Offset $\rightarrow$ AKF mit Erhöhung um $\tau = 0$ und Offset, periodisch mit derselben Periodendauer, x^3 -förmig. $S_{xx}(f)$: Abfallendes Rauschspektrum überlagert mit Impulsen bei $0, \pm f_0, \pm 2f_0, \dots$
- C – 1 – VIII – Sägezahn mit farbigen Rauschen und Offset, kleinere Frequenz als B $\rightarrow$ AKF mit Erhöhung um $\tau = 0$ und Offset, periodisch mit derselben Periodendauer, x^3 -förmig. $S_{xx}(f)$: Abfallendes Rauschspektrum überlagert mit Impulsen bei $0, \pm f_0, \pm 2f_0, \dots$, kleinere Frequenz als B.
- D – 6 – VII – farbiges Rauschen mit Offset $\rightarrow$ AKF abfallende, symmetrische Exponential-Funktion mit Offset. $S_{xx}(f)$: Abfallendes Rauschspektrum (Tiefpaß) mit Impuls bei $f = 0$.
- E – 7 – V – Rechteck und Offset $\rightarrow$ AKF mit Offset, periodisch mit derselben Periodendauer, dreiecksförmig. $S_{xx}(f)$: Impulse bei $0, \pm f_0, \pm 3f_0, \dots$
- F – 2 – IV – Sinus und Offset $\rightarrow$ AKF mit Offset, periodisch mit derselben Periodendauer, Cosinus. $S_{xx}(f)$: Impulse bei $0, \pm f_0$.
- G – 4 – II – Rechteck mit farbigen Rauschen und Offset $\rightarrow$ AKF mit Erhöhung um $\tau = 0$ und Offset, periodisch mit derselben Periodendauer, dreiecksförmig. $S_{xx}(f)$: Abfallendes Rauschspektrum überlagert mit Impulsen bei $0, \pm f_0, \pm 2f_0, \dots$
- H – 5 – III – Sägezahn hoher Frequenz $\rightarrow$ AKF periodisch mit derselben Periodendauer, x^3 -förmig. $S_{xx}(f)$: Impulse bei $\pm f_0, \pm 2f_0, \dots$

Aufgabe 3: Least-Squares-Schätzer (15 Punkte)

Gegeben ist eine Scheibe (Abb. 2) mit homogener Massenverteilung, die mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega(t) = \text{const}$ rotiert (Horizontale Lage der Drehachse, vertikale Stellung der Scheibe). Auf der Scheibe sei an der Winkelposition θ im Abstand R vom Mittelpunkt eine Masse m angebracht, die durch den Einfluß der Gravitation eine Unwucht bewirkt. Zur Bestimmung der beiden Parameter der Unwucht $[\theta, m \cdot R]$ wird bei konstanter Drehzahl das durch die Unwucht verursachte Störmoment M gemessen.

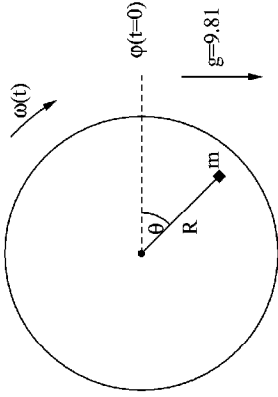


Bild 2: Modell der rotierenden Scheibe mit Unwucht

- Stellen Sie das Signalmodell des Systems (Störmoment in Abhängigkeit von der Zeit) auf. Das Signalmodell enthält dabei zwei Parameter a_1 und a_2 , die jeweils eine Funktion der gesuchten Unwuchtparameter $[\theta, m \cdot R]$ darstellen. Setzen Sie dazu die Momentengleichung im Drehpunkt der Scheibe an und geben Sie die Parameter a_1 und a_2 als Funktionen von $[\theta, m \cdot R]$ an.
- Hinweis: Ersetzen Sie $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$
- Wie lautet der Least-Squares-Ansatz in Matrixform für 4 Meßwerte zu den Zeiten $t_1 \dots t_4$?
- In einer Messung betrage die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{\pi}{s}$. Es werde zu den Zeitpunkten

$$\vec{t} = [t_i] = [0.3s, 0.6s, 0.9s, 1.2s]$$

gemessen. Die sich ergebenden Momente sind

$$\vec{M} = [M_i] = [1.75, -2.67, -4.89, -3.08]$$

Schätzen Sie die Parameter a_1 und a_2 und bestimmen Sie daraus die Schätzwerte für die Unwuchtparameter $[\theta, m \cdot R]$. Geben Sie bei der Berechnung bitte alle Teilergebnisse an.

Lösung

- Für das Signalmodell wird das Störmoment M angesetzt. Dieses ergibt sich aus der Komponente der Gewichtskraft mg , die senkrecht zum Hebelarm R steht (Abb. 3).

$$M(t) = m \cdot g \cdot R \cdot \cos(\omega t + \theta)$$

Die Anwendung des Additionstheorems laut Hinweis ergibt den Zusammenhang:

$$M(t) = mRg \cdot \cos(\omega t) \cos(\theta) - mRg \cdot \sin(\omega t) \sin(\theta)$$

Damit lautet das Signalmodell

$$M(t) = a_1 \cdot \cos(\omega t) - a_2 \cdot \sin(\omega t)$$

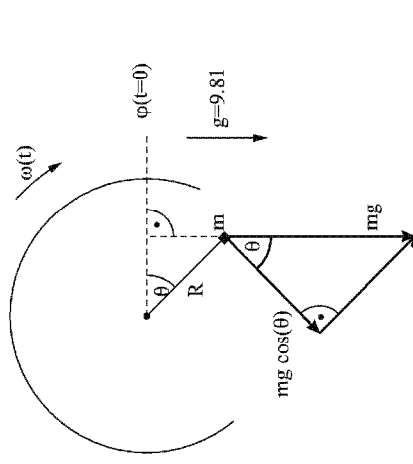


Bild 3: Störmoment der rotierenden Scheibe mit Unwucht

mit den unbekannten Parametern

$$a_1 = mRg \cdot \cos(\theta) \quad \text{und} \quad a_2 = mRg \cdot \sin(\theta)$$

- Der LS-Ansatz hat nun folgende Form:

$$\begin{bmatrix} M(t_1) \\ M(t_2) \\ M(t_3) \\ M(t_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t_1) & -\sin(\omega t_1) \\ \cos(\omega t_2) & -\sin(\omega t_2) \\ \cos(\omega t_3) & -\sin(\omega t_3) \\ \cos(\omega t_4) & -\sin(\omega t_4) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{M} = \vec{\Psi} \vec{a}$$

- Die gesuchten Parameter ergeben sich aus der Pseudoinversen gemäß

$$\vec{a} = (\vec{\Psi}^T \vec{\Psi})^{-1} \vec{\Psi}^T \vec{M}$$

Daraus ergeben sich die folgenden Teilergebnisse:

$$(\vec{\Psi}^T \vec{\Psi}) = \begin{bmatrix} 2 & -0.363 \\ -0.363 & 2 \end{bmatrix} \quad (\vec{\Psi}^T \vec{\Psi})^{-1} = \begin{bmatrix} 0.517 & 0.094 \\ 0.094 & 0.517 \end{bmatrix}$$

$$(\vec{\Psi}^T \vec{\Psi})^{-1} \vec{\Psi}^T = \begin{bmatrix} 0.228 & -0.249 & -0.521 & -0.363 \\ -0.363 & -0.521 & -0.249 & 0.228 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} = (\vec{\Psi}^T \vec{\Psi})^{-1} \vec{\Psi}^T \vec{M} = \begin{bmatrix} 4.729 \\ 1.271 \end{bmatrix}$$

Die gesuchten Parameter ergeben sich daraus zu:

$$mR = \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{g} \approx \frac{1}{2}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{a_1}{mRg}\right) \approx 0.269 \text{ rad} = 15.4^\circ$$

Punkteverteilung: 6-2-7

Aufgabe 4: Statistik (21 Punkte)

In einer Abteilung zur Qualitätssicherung wurden aus einem Prozeß die folgenden 30 Werte einer Stichprobe entnommen (Tab. 1).

2.54	0.21	0.15	1.87	0.46	0.82
0.61	0.33	0.05	4.86	3.74	1.23
1.66	0.90	0.31	0.09	0.89	1.17
1.43	2.86	1.92	1.55	0.23	0.49
0.47	1.25	3.15	0.30	1.10	1.38

Tabelle 1: Werte der Elemente einer Stichprobe

Geben Sie alle Ergebnisse auf 3 Nachkommastellen genau an!

- a) Stellen Sie aus den Werten von Tab. 1 eine Häufigkeitsverteilung auf. Verwenden Sie dazu die folgende Klasseneinteilung und fertigen Sie eine Skizze des Histogramms an.

Klasse	0...0.5	0.5...1	1...2	2...3	3...4	4...6
--------	---------	---------	-------	-------	-------	-------

- b) Gegeben ist die folgende Funktion mit $\lambda > 0$

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Welche Bedingung muß für die Konstante k gelten, damit $f(x)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist?

- c) Gegeben sei die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(x)$ aus der vorherigen Teilaufgabe mit der entsprechenden Bedingung für die Konstante k und dem Parameter $\lambda = 1.1$.

Prüfen Sie, ob der Häufigkeitsverteilung der Stichprobe aus Teilaufgabe a) diese Dichtefunktion zugrunde liegt. Die Irrtumswahrscheinlichkeit soll dabei 10% betragen.

- d) Bestimmen Sie den Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ für die Werte aus Tab. 1.

- e) Durch eine Neustrukturierung der Qualitätssicherung ist die Tab. 1 mit den einzelnen Stichprobenwerten verloren gegangen, das Histogramm aus a) allerdings noch verfügbar.

Bestimmen Sie nun aus dem Histogramm einen neuen Stichprobenmittelwert $\tilde{x}$ und die Stichprobenvarianz $S_{\tilde{x}}^2$. Ordnen Sie dazu den Elementen einer Klasse den Wert der Intervallmitte dieser Klasse zu.

- f) Es soll die Unsicherheit des Stichprobenmittelwertes $\hat{x}$ auf zwei unterschiedliche Weisen ermittelt werden. Die statistische Sicherheit soll dabei 95% betragen.

Legen Sie dazu einmal die Stichprobenvarianz $S_{\tilde{x}}^2$ aus Teilaufgabe e) zugrunde. Für die zweite Berechnungsart wird die theoretische Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(x)$ aus Teilaufgabe c) und deren Varianz σ_x^2 zugrunde gelegt. Berechnen Sie für beide Fälle die Unsicherheit des Stichprobenmittelwertes $\hat{x}$. Geben Sie dabei Zwischenergebnisse an.

Lösung

- a) Die Klasseneinteilung der Stichproben lautet wie folgt:

Klasse	0...0.5	0.5...1	1...2	2...3	3...4	4...6
Anzahl	11	4	10	2	2	1

Das zugehörige Histogramm ist in Abb. 4 dargestellt.

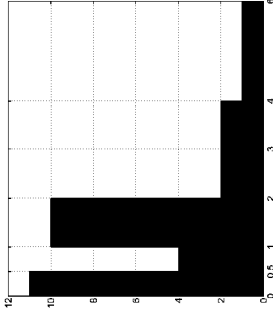


Bild 4: Histogramm der Stichprobe für die gegebenen Klassen

- b) Für jede beliebige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(x)$ muß gelten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Für die vorgegebene Verteilung muß somit gelten:

$$1 = \int_0^{\infty} k \cdot e^{-\lambda x} dx = -\frac{k}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} = \frac{k}{\lambda} \Rightarrow k = \lambda$$

- c) χ^2 -Anpassungstest der Wahrscheinlichkeitsdichte mit Stichprobenumfang $n = 30$, $p_i = 1.1 \cdot \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{-1.1x} dx = -e^{-1.1x} \Big|_{x_i}^{x_{i+1}}$ und x_i, x_{i+1} als jeweilige Ränder laut Klasseneinteilung (wobei in p_i in Klasse 6 aufgerundet wurde, damit $\sum_{i=1}^6 p_i = 1$):

n_i	11	4	10	2	2	1
p_i	0.423	0.244	0.222	0.074	0.025	0.012
np_i	12.692	7.322	6.662	2.218	0.738	0.328
$(\approx np_i)$	12.69	7.32	6.66	2.22	0.75	0.36
$\frac{np_i}{(n_i - np_i)^2}$	0.225	1.507	1.672	0.021	2.157	1.381
$(\approx \frac{np_i}{n_i - np_i})$	0.225	1.506	1.675	0.022	2.083	1.138

$$\chi^2 \approx \sum_{i=1}^6 \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = 6.965 \quad (\approx 6.649)$$

Aus der Irrtumswahrscheinlichkeit α von 10% folgt ein Signifikanzniveau von:

$$P(\chi^2 \leq \chi_{\alpha}^2) \leq 0.90 = 1 - \alpha$$

Man entnimmt dem Schaubild (s. Meßtechnik-Buch) für den χ^2 -Anpassungstest mit $k = 6$ Klassen und $m = k - 1 = 5$ Freiheitsgraden den Wert $\chi^2_d \approx 9$. Wegen

$$\chi^2 \leq \chi^2_d$$

wird die Hypothese (vorgegebene Dichtefunktion liegt zugrunde) angenommen.

- d) Der Stichprobenmittelwert berechnet sich aus den Werten x_i der Tabelle 1 zu:

$$\hat{x} = \frac{1}{30} \sum_{i=1}^{30} x_i = \frac{38.02}{30} \approx 1.267$$

- e) Zunächst werden die Werte der Intervallmitten aller Klassen festgelegt, die den Werten der Elemente zugeordnet sind:

Klasse i	0...0.5	0.5...1	1...2	2...3	3...4	4...6
Wert y_i	0.25	0.75	1.5	2.5	3.5	5

Daraus können nun der Stichprobenmittelwert $\tilde{x}$ und die Stichprobenvarianz S_x^2 wie folgt berechnet werden:

$$\tilde{x} = \frac{1}{30} \sum_{i=1}^6 n_i \cdot y_i = 1.258$$

$$S_x^2 = \frac{1}{29} \sum_{i=1}^6 n_i (y_i - \tilde{x})^2 = 1.377$$

- f) Zunächst wird die theoretische Varianz aus $f(x)$ berechnet:

$$\begin{aligned} E\{x\} &= \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[-\frac{1}{\lambda^2} (\lambda x + 1) e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda} \\ E\{x^2\} &= \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[-\frac{1}{\lambda^3} ((\lambda x)^2 + 2\lambda x + 2) e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} = \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Mit $\sigma_x^2 = E\{x^2\} - (E\{x\})^2$ und $\lambda = 1.1$ folgt:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{\lambda^2} \approx 0.826$$

Für eine statistische Sicherheit von 95% ergibt sich der Parameter c für beide Fälle zu 2, da der Umfang n der Stichprobe ausreichend hoch ist ($n > 20$, s. Grafik im Meßtechnik-Buch, Statistische Sicherheit bei geschätzter Fehlerfunktion bzw. Gauß'sche Fehlerfunktion). Damit ergeben sich für die beiden Fälle folgenden Unsicherheiten:

$$I: \quad u_{\tilde{x}} = c \cdot \frac{S_{\tilde{x}}}{\sqrt{n}} \approx 0.428$$

$$II: \quad u_x = c \cdot \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \approx 0.332$$

Punkteverteilung: 2-2-6-2-3-6

Meßtechnik-Klausur vom 19. September 2000

Rechen-Aufgaben

Aufgabe 1: Interpolation (17 Punkte)

Von einem Meßwertaufnehmer sind folgende Stützstellen in einem Kalibrierungsvorgang ermittelt worden:

i	0	1	2
u_i	2	6	8
$y_i = y(u_i)$	4	0	1

Bild 1: Stützstellen der Kennlinie

Hinweis: Geben Sie alle Ergebnisse auf 3 Stellen nach dem Komma an.

- Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrange-Interpolation ein Interpolationspolynom $y(u)$ für die angegebenen Stützstellen in der Form $y(u) = p_0 + p_1 u + p_2 u^2 + \dots$
- Der Meßbereich wird nun auf das Intervall $6 \leq u \leq 8$ beschränkt. Bestimmen Sie für diesen Meßbereich die Ideale Kennlinie bei Fixpunktjustierung.
- Berechnen Sie mit den Ergebnissen aus a) und b) den resultierenden relativen Kennlinienfehler bezogen auf die Anzeigespanne, F_{RSS} .

Zur Verbesserung der Interpolation soll im folgenden an der Stelle $u_3 = 9$, $y_3 = y(u_3) = 0.75$ eine weitere Stützstelle eingefügt werden.

- Bestimmen Sie das zugehörige Interpolations-Polynom in der Form $\tilde{y}(u) = \tilde{p}_0 + \tilde{p}_1 u + \tilde{p}_2 u^2 + \tilde{p}_3 u^3 + \dots$
- Bei der Wahl eines geeigneten Meßbereiches ist sowohl gute Linearität als auch hohe Empfindlichkeit der Kennlinie von Bedeutung. Bestimmen Sie den Punkt der Kennlinie $\tilde{y}(u)$, um den den herum der Meßbereich zur Erfüllung beider Ziele gelegt werden muß.
- Für einen Meßanfang bei $\tilde{u}_a = 6$ von $\tilde{y}(u)$ soll der Meßbereich $\tilde{d} = \tilde{u}_e - \tilde{u}_a$ geeignet beschränkt werden, indem das Gütemaß Q des mittleren quadratischen Fehlers zwischen realer und idealer Kennlinie minimiert wird. Wie groß ist $\tilde{d} > 0$ zu wählen?
- Berechnen Sie mit den Ergebnissen aus d) und f) den resultierenden relativen Kennlinienfehler bezogen auf die Anzeigespanne, $\tilde{F}_{RSS}$.

Lösung

- a) Für die Interpolation nach Lagrange gilt im vorliegenden Fall (3 Stützstellen):

$$y(u) = \sum_{i=0}^2 y_i \cdot L_i(u)$$

Wegen $y_1 = 0$ braucht $L_1(u)$ nicht berechnet werden.

$$L_0(u) = \frac{(u - u_1)(u - u_2)}{(u_0 - u_1)(u_0 - u_2)} = \frac{u^2 - 14u + 48}{24}$$

$$L_2(u) = \frac{(u - u_0)(u - u_1)}{(u_2 - u_0)(u_2 - u_1)} = \frac{u^2 - 8u + 12}{12}$$

Das Interpolationspolynom ergibt sich somit zu

$$y(u) = y_0 \cdot L_0(u) + y_2 \cdot L_2(u) = \frac{1}{4}u^2 - 3u + 9$$

- b) Es ist $u_a = u_1 = 6$ und $u_e = u_2 = 8$. Mit $y_a = y_1 = 0$ und $y_e = y_2 = 1$ kann die ideale Kennlinie bei Fixpunktjustierung (Gerade in 2-Punkte-Form) bestimmt werden zu

$$y_{id}(u) = 0.5u - 3$$

mit der idealen Empfindlichkeit $S_i = 0.5$.

- c) Der relative Kennlinienfehler bezogen auf die Anzeigenspanne berechnet sich zu

$$\begin{aligned} F_{rSS} &= \frac{y(u) - y_i(u)}{y_i(u)} = \frac{y(u) - y_i(u)}{S_i \cdot (u - u_a)} = \frac{y(u) - [S_i \cdot (u - u_a) + y_a]}{S_i \cdot (u - u_a)} \\ &= \frac{y(u) - y_a}{S_i(u - u_a)} - 1 = \frac{(0.25u^2 - 3u + 9) - 0}{0.5 \cdot (u - 6)} - 1 = 0.5u - 4 \end{aligned}$$

- d) Für 3 gegebene Stützstellen und einem Polynom 2. Ordnung gibt es genau eine eindeutige Lösung. Daher liefern Newton- und Lagrange-Interpolation dasselbe Ergebnis für $y(u)$. Aus dem rekursiven Ansatz für das Newton-Polynom bei $n = 4$ gegebenen Stützstellen gemäß

$$\tilde{y}(u) = y(u) + \tilde{p}_3(u - u_2)(u - u_1)(u - u_0)$$

mit der zusätzlichen Stützstelle $u_3 = 9$, $y_3 = y(u_3) = 0.75$ ergibt sich $\tilde{p}_3$ wegen $\tilde{y}(u_3) \equiv y(u_3)$ für $u = u_3$ zu

$$\tilde{p}_3 = \frac{\tilde{y}(u_3) - y(u_3)}{(u_3 - u_2)(u_3 - u_1)(u_3 - u_0)} = \frac{y_3 - (0.25u_3^2 - 3u_3 + 9)}{1 \cdot 3 \cdot 7} = -\frac{1}{14} \approx -0.071$$

Eingesetzt berechnet sich das gesuchte Polynom $\tilde{y}(u)$ zu

$$\tilde{y}(u) \approx -0.071u^3 + 1.393u^2 - 8.429u + 15.857$$

- e) Sofern im Meßbereich überhaupt vorhanden (hier der Fall), sind die gesuchten Punkte u_m die Wendepunkte der Kennlinie $\tilde{y}(u)$, die durch zweimalige bzw. dreimalige Differentiation bestimmt werden:

$$\frac{d^2 \tilde{y}(u)}{du^2} = 6 \cdot \tilde{p}_3 \cdot u + 2 \cdot \tilde{p}_2 \approx -0.429u + 2.786 \quad (\approx -0.426u + 2.786)$$

$$\frac{d^2 \tilde{y}(u_m)}{du^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u_m = -\frac{\tilde{p}_2}{3 \cdot \tilde{p}_3} \approx 6.503 \quad (\approx 6.540)$$

Wegen

$$\frac{d^3 \tilde{y}(u_m)}{du^3} = 6 \cdot \tilde{p}_3 \neq 0$$

ist $u_m \approx 6.503$ (≈ 6.540) der gesuchte (Wende)Punkt.

- f) Das Gütemaß Q wird bei vorhandenem Wendepunkt innerhalb des Meßbereichs minimal, sobald für die Empfindlichkeiten $S(\tilde{u}_a) \equiv S(\tilde{u}_a + \tilde{d})$ gilt:

$$\frac{d \tilde{y}(\tilde{u}_a)}{du} \stackrel{!}{=} \frac{d \tilde{y}(\tilde{u}_a + \tilde{d})}{du}$$

$$\begin{aligned} 3 \cdot \tilde{p}_3 \cdot \tilde{u}_a^2 + 2 \cdot \tilde{p}_2 \cdot \tilde{u}_a + \tilde{p}_1 &\stackrel{!}{=} 3 \cdot \tilde{p}_3 \cdot (\tilde{u}_a + \tilde{d})^2 + 2 \cdot \tilde{p}_2 \cdot (\tilde{u}_a + \tilde{d}) + \tilde{p}_1 \\ 0 &\stackrel{!}{=} \tilde{d} \cdot \left[3 \cdot \tilde{p}_3 \cdot \tilde{d} + (6 \cdot \tilde{p}_3 \cdot \tilde{u}_a + 2 \cdot \tilde{p}_2) \right] \\ \implies (\tilde{d} = 0) \quad \text{oder} \quad \tilde{d} &= -\frac{6 \cdot \tilde{p}_3 \cdot \tilde{u}_a + 2 \cdot \tilde{p}_2}{3 \cdot \tilde{p}_3} \approx 1.000 \quad (\approx 1.080) \end{aligned}$$

Wegen $u_m < \tilde{u}_e (= \tilde{u}_a + \tilde{d})$ liegt der Wendepunkt innerhalb des berechneten Meßbereiches, der Ansatz war somit gerechtfertigt.

- g) Es ist $\tilde{u}_a = 6$ und $\tilde{u}_e = \tilde{u}_a + \tilde{d} \approx 7.000$. Mit $\tilde{y}_a = 0$ und $\tilde{y}_e \approx 0.607$ kann die ideale Empfindlichkeit bei Fixpunktjustierung (Gerade in 2-Punkte-Form) wie in Teilaufgabe b) bestimmt werden zu

$$\tilde{S}_i \approx 0.607 \quad (\approx 0.748)$$

Analog zu Teilaufgabe c) ergibt sich dann der relative Kennlinienfehler bezogen auf die Anzeigenspanne zu

$$F_{rSS} = \frac{y(u) - y_a}{\tilde{S}_i(u - u_a)} - 1 \approx \frac{(-0.071u^3 + 1.393u^2 - 8.429u + 15.857) - 0}{0.607 \cdot (u - 6)} - 1$$

$$F_{rSS} \approx -0.118u^2 + 1.588u - 3.353 \quad (\approx -0.095u^2 + 1.293u - 2.512)$$

Punkteverteilung: 3-1-2-4-2-3-2

Aufgabe 2: Korrelation und Leistungsdichte (16 Punkte)

In Abb. 2 finden Sie die Zeitfunktion $x(t)$, deren Autokorrelation $R_{xx}(\tau)$ sowie deren zugehörige Leistungsdichte $S_{xx}(f)$. Die Bilder sind in ihrer Reihenfolge vertauscht. Ordnen Sie daher den Zeitfunktionen (A-H) die zugehörigen Autokorrelationen (1-8) und die entsprechenden Leistungsdichten (I-VIII) zu und geben Sie jeweils eine kurze Begründung.

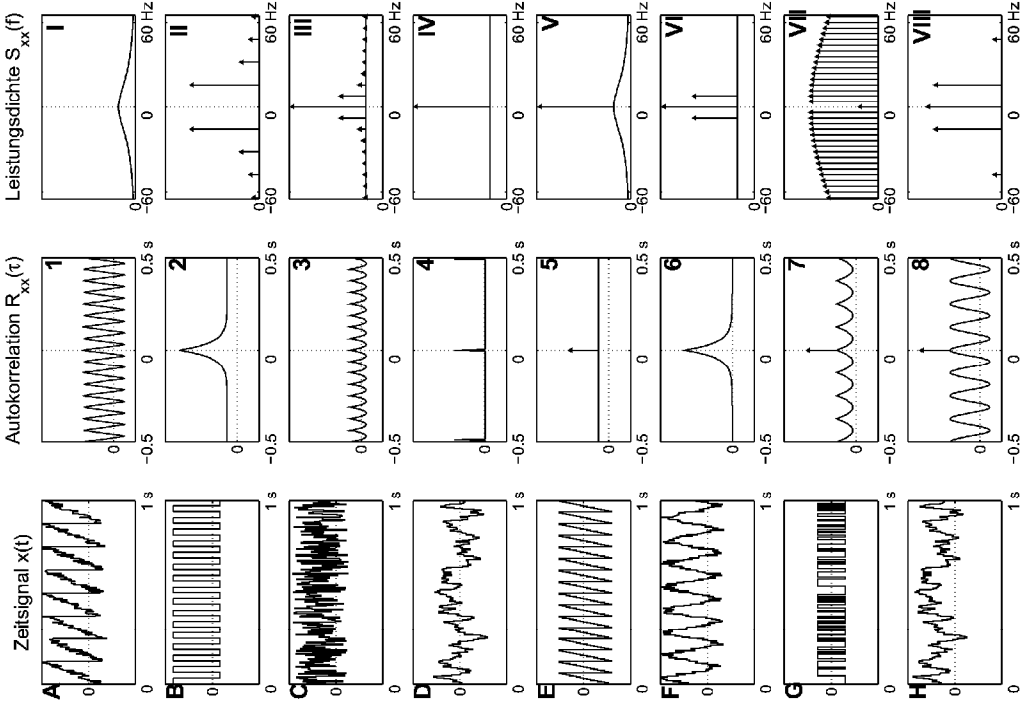


Bild 2: Zeitsignale mit AKF und Leistungsdichten

Lösung

$x(t) - R_{xx}(\tau) - S_{xx}(f)$ – Begründung:

- A – 7 – III – Sägezahn mit weißem Rauschen und Offset $\rightarrow$ AKF mit Impuls bei $\tau = 0$ und Offset, periodisch mit derselben Periodendauer, x^3 -förmig. $S_{xx}(f)$: Konstante überlagert mit Impulsen bei $0, \pm f_0, \pm 2f_0, \dots$
- B – 1 – VIII – Rechteck und Offset $\rightarrow$ AKF mit Offset, periodisch mit derselben Periodendauer, dreiecksförmig. $S_{xx}(f)$: Impulse bei $0, \pm f_0, \pm 3f_0, \dots$
- C – 5 – IV – Weißes Rauschen mit Offset $\rightarrow$ AKF mit Impuls bei $\tau = 0$ und Offset. $S_{xx}(f)$: Konstante überlagert mit Impuls bei 0.
- D – 6 – I – Farbiges Rauschen ohne Offset $\rightarrow$ AKF ohne Offset, abfallende, symmetrische Exponentialfunktion. $S_{xx}(f)$: Abfallendes Rauschspektrum (Tiefpaß) ohne Impuls bei 0.
- E – 3 – II – Sägezahn ohne Offset $\rightarrow$ AKF ohne Offset, periodisch mit derselben Periodendauer, x^3 -förmig. $S_{xx}(f)$: Impulse bei $\pm f_0, \pm 2f_0, \dots$, jedoch nicht bei 0.
- F – 8 – VI – Sinus mit weißem Rauschen und Offset $\rightarrow$ AKF mit Impuls bei $\tau = 0$ und Offset, periodisch mit gleicher Periodendauer, Cosinus. $S_{xx}(f)$: Konstante überlagert mit Impulsen bei 0 und $\pm f_0$.
- G – 4 – VII – PRBS (=Pseudo Random Binary Sequence) $\rightarrow$ AKF periodisch mit gleicher Periodendauer, schmale Peaks. $S_{xx}(f)$: Äquidistante Impulse, breite Ausdehnung.
- H – 2 – V – Farbiges Rauschen mit Offset $\rightarrow$ AKF mit Offset, abfallende, symmetrische Exponentialfunktion. $S_{xx}(f)$: Abfallendes Rauschspektrum (Tiefpaß) überlagert mit Impuls bei 0.

Punkteverteilung: 2-2-2-2-2-2-2-2

Aufgabe 3: Least-Squares-Schätzer (17 Punkte)

Gegeben ist ein Exzenterantrieb (Abb. 3), der mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(t) = \omega(t) = \text{const}$ eine Stange S betreibt. Der Mittelpunkt M der Exzenterscheibe ist zur Einstellung des Arbeitspunktes entlang der horizontalen justierbar gelagert und wurde vor Inbetriebnahme über den Abstand d (gemessen zwischen O und dem rechten Scheibenrand, vgl. Abb. 3) fixiert. Von dem Exzenter selbst ist nur das feste Verhältnis $\lambda = r/l = \text{const}$ bekannt. Zur Bestimmung der Eckdaten dieses Exzenterantriebs sollen zunächst die beiden Parameter $[d, l]$ geschätzt werden, indem der Abstand $x(\varphi(t))$ der Stange S von O bei konstanter Winkelgeschwindigkeit gemessen wird.

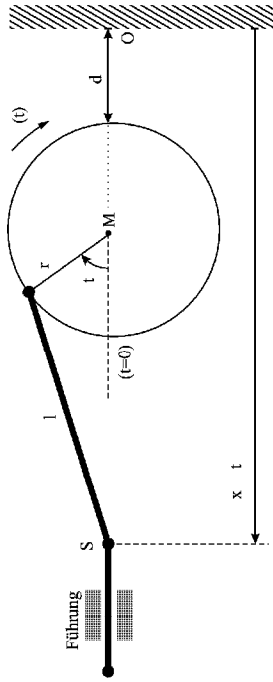


Bild 3: Modell des Exzenterantriebs mit Stange S

- a) Stellen Sie das Signalmodell des Systems (Abstand $x(\varphi(t))$ der Stange S von O in Abhängigkeit von der Zeit t) auf. Das Signalmodell enthalte dabei zwei Schätzparameter $a_1 = d$ und $a_2 = l$. **Hinweis:** Drücken Sie die Teilrecke $z = f(l, h)$ als Funktion von l und h aus und ersetzen Sie anschließend h durch $h = f(r, \varphi)$. Verwenden Sie die Bezeichnungen, die im folgenden Bild skizziert sind:

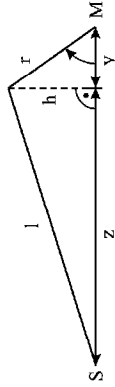


Bild 4: Hinweis

- b) Wie lautet der Least-Squares-Ansatz in Matrixform für 3 Meßwerte zu den Zeiten t_1, t_2, t_3 ?
c) In einer Messung betrage die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{\pi}{s}$ und das Verhältnis $\lambda = 0.25$. Es werde zu den Zeitpunkten

$$t = [t_i] = [0.3s, 0.9s, 1.5s]$$

gemessen. Die sich ergebenden Abstände sind

$$\mathbf{x} = [x_i] = [x(\varphi(t_i))] = [0.638, 0.601, 0.622]$$

Schätzen Sie daraus die Parameter a_1 und a_2 . **Hinweis:** Geben Sie bei der Berechnung bitte alle Teilergebnisse und Matrizen an, gerundet auf drei Stellen nach dem Komma.

- d) Bestimmen Sie nun die Eckdaten des Exzenterantriebs l, r, d sowie x_M als Abstand des Scheibenzentrums M von O .

Lösung

- a) Für das Signalmodell wird der Abstand $x(\varphi(t))$ berechnet. Dieses ergibt sich (von rechts nach links) aus der Summe der Teilstrecken d, r , y und z (Abb. 3 und 4).

$$x(\varphi(t)) = d + r + y(\varphi(t)) + z(\varphi(t))$$

Unter Berücksichtigung der Hinweise ergeben sich mit $\varphi(t) = \omega t$ die folgenden Zusammenhänge:

$$y(\omega t) = r \cdot \cos(\omega t) \quad \text{mit} \quad h(\omega t) = r \cdot \sin(\omega t)$$

Damit lautet das Signalmodell

$$x(\omega t) = d + r + r \cdot \cos(\omega t) + \sqrt{l^2 - r^2} \cdot \sin^2(\omega t)$$

- b) Mit den Schätzparametern $a_1 = d$, $a_2 = l$ sowie $\lambda = r/l$ ergibt sich das Signalmodell schließlich zu

$$\begin{aligned} x(\omega t) &= d + l \cdot \lambda \left(1 + \cos(\omega t) \right) + l \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \right)^2} \cdot \sin^2(\omega t) \\ &= a_1 + a_2 \cdot \left[\lambda \left(1 + \cos(\omega t) \right) + \sqrt{1 - \lambda^2} \sin^2(\omega t) \right] \end{aligned}$$

Der LS-Ansatz hat nun folgende Form:

$$\begin{bmatrix} x(\varphi(t_1)) \\ x(\varphi(t_2)) \\ x(\varphi(t_3)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda(1 + \cos(\omega t_1)) + \sqrt{1 - \lambda^2} \sin^2(\omega t_1) \\ 1 & \lambda(1 + \cos(\omega t_2)) + \sqrt{1 - \lambda^2} \sin^2(\omega t_2) \\ 1 & \lambda(1 + \cos(\omega t_3)) + \sqrt{1 - \lambda^2} \sin^2(\omega t_3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\iff \mathbf{x} = \Psi \mathbf{a}$$

- c) Die gesuchten Parameter ergeben sich aus der Pseudoinversen gemäß

$$\mathbf{a} = (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T \mathbf{x}$$

Daraus ergeben sich die folgenden Teilergebnisse:

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 1.376 \\ 1 & 1.009 \\ 1 & 1.218 \end{bmatrix} \quad (\Psi^T \Psi) = \begin{bmatrix} 3 & 3.604 \\ 3.604 & 4.397 \end{bmatrix}$$

$$(\Psi^T \Psi)^{-1} = \begin{bmatrix} 21.620 & -17.721 \\ -17.721 & 14.752 \end{bmatrix} \quad (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T = \begin{bmatrix} -2.768 & 3.736 & 0.032 \\ 2.582 & -2.833 & 0.251 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} = (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.499 \\ 0.101 \end{bmatrix}$$

Die gesuchten Parameter ergeben sich daraus zu

$$a_1 = d \approx 0.499 \quad a_2 = l \approx 0.101$$

- d) Die Eckdaten des Exzenterantriebs berechnen sich aus der Schätzung zu

$$l \approx 0.101$$

$$r = \lambda \cdot l \approx 0.025$$

$$d \approx 0.499$$

$$x_M = d + r \approx 0.524$$

Aufgabe 4: Fehlerfortpflanzung (20 Punkte)

Zur Messung einer unbekannten Gleichspannung U wird diese mit Hilfe einer bekannten, konstanten Vergleichsspannung U_0 kompensiert, Abb. 5. Dazu wird ein mit der Position x veränderlicher Widerstand $R(x)$ solange verändert, bis der Strom I am idealen Meßgerät Null wird.

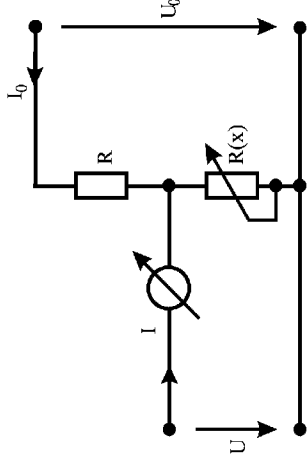


Bild 5: Meßvorrichtung für eine unbekannte Gleichspannung U

- Berechnen Sie allgemein den Strom $I = f(U, U_0, R, R(x))$ als Funktion der beiden Spannungen U, U_0 und der beiden Widerstände $R, R(x)$.
- Es gelte der Zusammenhang $R(x) := K_R \cdot x$. Zunächst sei $K_R = \text{const}$ angenommen. Der ideal gemessene Strom I werde nun über die Position x zu Null geregelt. Wie lautet dann die Meßvorschrift $U = f(U_0, R, K_R, x)$ für die unbekannte Gleichspannung U ?
- Im Meßbetrieb der Schaltung auftretende Temperatur- und Spannungsschwankungen werden nun mittels Kennwerttoleranzen über Zufallsvariablen $\mathcal{R}, \mathcal{K}_R$ und $\mathcal{U}_0$ modelliert. Dabei treten die Kennwerte mit Erwartungswerten R, K_R und U_0 sowie mit Varianzen $\sigma_R^2, \sigma_{K_R}^2$ und $\sigma_{U_0}^2$ auf. Alle Einzelfehler sind zunächst als voneinander statistisch unabhängig zu betrachten. Der abgelesene Positionswert x gelte dabei als deterministisch. Schätzen Sie aus der Meßvorschrift nach Aufgabenteil b) die Varianz der Meßspannung σ_U^2 nach dem Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz ab.

Beim Aufbau der Meßschaltung wurde festgestellt, daß eine statistische Abhängigkeit gemäß $K_R = \lambda \cdot \mathcal{R} + \beta$ zwischen den beiden Zufallsvariablen K_R und $\mathcal{R}$ mit Erwartungswerten K_R und R sowie Varianzen $\sigma_{K_R}^2$ und σ_R^2 besteht (bei deterministischen $\lambda = \text{const}$ und $\beta = \text{const}$).

- Schätzen Sie aufgrund der statistischen Abhängigkeit ($\Rightarrow K_R = \lambda \cdot \mathcal{R} + \beta$) die Varianz $\sigma_{K_R}^2$ in Abhängigkeit von der Varianz σ_R^2 . Setzen Sie diesmal die Definition der Varianz über den Erwartungswert an und bestimmen Sie den gesuchten Zusammenhang schrittweise mit den Regeln der linearen Erwartungswertnotation.
Begründen Sie, warum dieses Ergebnis mit der Schätzung in Aufgabenteil d) übereinstimmt.
Hinweis: Bitte geben Sie ausführlich alle notwendigen Zwischenschritte bei der Erwartungswertberechnung an. Endergebnisse allein sind nicht ausreichend!

Bitte wenden

Aufgabe 4f) Schätzen Sie aus der Meßvorschrift nach Aufgabenteil c) unter Verwendung der Ergebnisse aus Teilaufgabe d) oder e) die Varianz der Meßspannung σ_U^2 nach dem Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz ab. Die gesuchte Varianz σ_U^2 soll dabei weder vom Erwartungswert K_R selbst, noch von der Varianz $\sigma_{K_R}^2$ abhängen. $\mathcal{U}_0$ sei dabei weiterhin statistisch unabhängig von sowohl K_R als auch $\mathcal{R}$.

Lösung

- Aus Abb. 5 erhält man durch Anwendung der Maschen- und Knotenregel die folgenden Zusammenhänge:

$$U_0 = R \cdot I_0 + U \quad U = (I + I_0) \cdot R(x)$$

Umstellen der ersten Beziehung nach I_0

$$I_0 = \frac{U_0 - U}{R}$$

und Einsetzen in die zweite Beziehung ergibt die gesuchte Lösung:

$$I = U \cdot \left(\frac{1}{R(x)} + \frac{1}{R} \right) - \frac{U_0}{R}$$

- Aus dem Ergebnis von Teilaufgabe a) folgt mit $I = 0$, $R(x) = K_R \cdot x$ und Umstellung nach der Meßgröße U die Meßgleichung:

$$U = \frac{U_0}{R} \left(\frac{R(x) \cdot R}{R(x) + R} \right) = U_0 \left(\frac{K_R \cdot x}{K_R \cdot x + R} \right)$$

- Die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung bei voneinander statistisch unabhängigen Zufallsvariablen $\mathcal{R}, K_R$ und $\mathcal{U}_0$ ergibt sich aus der Meßgröße $U = f(U_0, R, K_R, x = \text{const})$, mit deterministischen $\sigma_x = 0$, gemäß Aufgabenteil b) zu:

$$\sigma_U^2 = \left(\frac{\partial f(U_0, R, K_R, x)}{\partial U_0} \right)^2 \sigma_{U_0}^2 + \left(\frac{\partial f(U_0, R, K_R, x)}{\partial R} \right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{\partial f(U_0, R, K_R, x)}{\partial K_R} \right)^2 \sigma_{K_R}^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial U_0} &= \frac{K_R \cdot x}{K_R \cdot x + R} \\ \frac{\partial f}{\partial R} &= -U_0 \cdot \frac{K_R \cdot x}{(K_R \cdot x + R)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial K_R} &= U_0 \cdot \frac{R \cdot x}{(K_R \cdot x + R)^2} \end{aligned}$$

$$\sigma_U^2 = \frac{x^2}{(K_R \cdot x + R)^4} \left[K_R^2 (K_R \cdot x + R)^2 \cdot \sigma_{U_0}^2 + U_0^2 K_R^2 \cdot \sigma_R^2 + U_0^2 R^2 \cdot \sigma_{K_R}^2 \right]$$

- Die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung für

$$K_R = g(R, \lambda = \text{const}, \beta = \text{const}) = \lambda \cdot R + \beta$$

mit deterministischen $\sigma_\lambda = \sigma_\beta = 0$ ergibt sich zu:

$$\sigma_{K_R}^2 = \left(\frac{\partial g(R, \lambda, \beta)}{\partial R} \right)^2 \sigma_R^2 = (\lambda)^2 \cdot \sigma_R^2 = \lambda^2 \cdot \sigma_R^2$$

e) Berechnung über die Erwartungswertnotation:

$$\begin{aligned}\sigma_{K_R}^2 &= E\left\{\left[K_R - E\{K_R\}\right]^2\right\} = E\left\{\left[\lambda \cdot \mathcal{R} + \beta - (\lambda \cdot E\{\mathcal{R}\} + \beta)\right]^2\right\} \\ \sigma_{K_R}^2 &= \lambda^2 \cdot E\left\{\left[\mathcal{R} - E\{\mathcal{R}\}\right]^2\right\} = \lambda^2 \cdot \sigma_R^2\end{aligned}$$

Der statistischen Abhängigkeit $K_R = \lambda \cdot \mathcal{R} + \beta$ liegt ein linearer Zusammenhang zugrunde. Da die Abschätzung mittels Gauß'scher Fehlerfortpflanzung einer mehrdimensionalen Taylor-entwicklung entspricht, die nach den linearen Gliedern einer jeden Variablen abbricht, stimmt in diesem Fall die Schätzung aus Aufgabenteil d) mit dem obigen Ergebnis überein.

f) Die Varianz der Meßgröße $\hat{\sigma}_{\hat{U}}^2$, ergibt sich nun aus dem Ergebnis von Teilaufgabe e), indem zu $\sigma_{\hat{U}}^2$ noch ein additiver Mischterm aufgrund der statistischen Abhängigkeit zwischen K_R und R hinzukommt.

$$\hat{\sigma}_{\hat{U}}^2 = \sigma_U^2 + 2 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial K_R}\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial R}\right) \cdot \sigma_{K_R} \cdot \sigma_R \cdot \tau_{K_R R}$$

Wegen der festen, statistischen Abhängigkeit gilt für den Korrelationskoeffizienten $\tau_{K_R R} = 1$. Unter Verwendung der Zusammenhänge

$$K_R = \lambda \cdot R + \beta \quad \sigma_{K_R}^2 = \lambda^2 \cdot \sigma_R^2$$

aus Aufgabenteil d) oder e) erhält man:

$$\begin{aligned}\bullet \quad \sigma_{\hat{U}}^2 &= \frac{x^2}{[(\lambda x + 1) \cdot R + \beta x]^4} \\ &\quad \cdot [(\lambda \cdot R + \beta)^2 \cdot (\lambda x + 1) \cdot R + \beta x]^2 \cdot \sigma_{U_0}^2 + U_0^2 (2\lambda^2 R^2 + 2\lambda\beta R + \beta^2) \cdot \sigma_R^2 \\ \bullet \quad 2 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial K_R}\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial R}\right) \cdot \sigma_{K_R} \cdot \sigma_R \cdot \tau_{K_R R} &= \frac{x^2 U_0^2 \cdot \sigma_R^2}{[(\lambda x + 1) \cdot R + \beta x]^4} \cdot \left[-2\lambda R(\lambda R + \beta)\right] \\ \sigma_{\hat{U}}^2 &= \frac{x^2}{[(\lambda x + 1) \cdot R + \beta x]^4} \cdot [(\lambda \cdot R + \beta)^2 \cdot ((\lambda x + 1) \cdot R + \beta x)^2 \cdot \sigma_{U_0}^2 + U_0^2 \beta^2 \cdot \sigma_R^2]\end{aligned}$$

Alternativ dazu kann Zusammenhang $K_R = \lambda \cdot R + \beta$ direkt in die Meßvorschrift für U eingesetzt werden und im Anschluß daran erneut die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung auf die resultierende Funktion angewandt werden.

Punkteverteilung: 3-2-5-2-5-3

Meßtechnik-Klausur vom 20. April 2001

Rechen-Aufgaben

Aufgabe 1: Dynamikvereinfachung eines Meßsystems (17 Punkte)

Gegeben sei ein bekanntes Meßsystem der Übertragungsfunktion $G_S(s)$ mit reellen Parametern K , T_1 und T_2 gemäß:

$$G_S(s) = \frac{K}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \quad , \quad K > 0, \quad T_1 > 0, \quad T_2 > 0$$

Zur Vereinfachung im praktischen Einsatz soll $G_S(s)$ durch eine Übertragungsfunktion $G_M(s)$ erster Ordnung gemäß

$$G_M(s) = \frac{V}{R + s} \quad , \quad V > 0, \quad R \geq 0$$

mit noch zu bestimmenden, freien reellen Parametern V und R angenähert werden, vgl. Abb. 1.

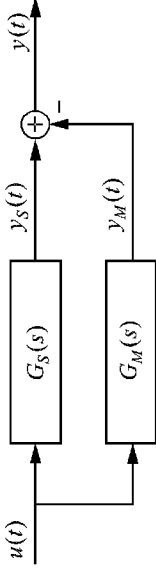


Bild 1: Dynamikvereinfachung eines bekannten Meßsystems $G_S(s)$

Im folgenden sollen, ausgehend von Abb. 1, verschiedene Parameterbelegungen für V und R ermittelt werden, um bestimmte Eigenschaften von $G_S(s)$ in $G_M(s)$ möglichst gut abzubilden.

- Welche Bedingungen müssen für die freien Parameter V und R erfüllt sein, damit bei Einheitsprerregung an den Eingängen das Verhalten von $G_S(s)$ *stationär genau* durch $G_M(s)$ wiedergegeben wird?
- Bestimmen Sie, ausgehend von Abb. 1, die Übertragungsfunktion der Fehlerfunktion

$$G(s) := \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{a_0 + s \cdot a_1 + s^2 \cdot a_2 + \dots}{b_0 + s \cdot b_1 + s^2 \cdot b_2 + \dots}$$

als Funktion der vorliegenden Parameter und der freien Parameter. Führen Sie *explizit* sämtliche (von Null verschiedenen) Zählerkoeffizienten a_i und Nennerkoeffizienten b_i der Übertragungsfunktion $G(s)$ *einzeln* auf.

- Ermitteln Sie für $R = 0$ die Pole der Übertragungsfunktion $G(s)$. Welche Bedingung muß gelten, damit die *von Null verschiedenen Pole* für ein *stabiles* Übertragungsverhalten sorgen?
- Wie müssen V und R gewählt werden, damit sich eine *geschwindigkeitsstreu* Übertragungsfunktion $G(s)$ einstellt? **Gehen Sie dazu für $G(s)$ von der Darstellung in der Form**

$$G(s) = G(0) \cdot \frac{1 + s \cdot \hat{a}_1 - s^2 \cdot \hat{a}_2 + \dots}{1 + s \cdot \hat{b}_1 - s^2 \cdot \hat{b}_2 + \dots}$$

aus und geben Sie $G(0)$ explizit an.

Bitte wenden

- e) Welche Praxisbedingung muß *allgemein* für die Fehlerfunktion $y(t)$ erfüllt sein, damit das *Kriterium Quadratisches Fehlerintegral* analytisch angesetzt werden kann? Überprüfen Sie ausgehend von Abb. 1, ob bei Einheitssprunganregung an den Eingängen diese Bedingung für die Fehlerfunktion $y(t)$ und für eine beliebige Wahl der freien Parameter V und R erfüllt ist.
- f) Der freie Parameter V werde mittels der Beziehung $K = V(T_1 + T_2)$ festgelegt. Wenden Sie für diesen Fall das *Kriterium Konstanter Amplitudengang für kleine Frequenzen* an, um den noch freien Parameter $R \neq f(K)$ von K unabhängig zu bestimmen. Existiert eine eindeutige Lösung dieses Kriteriums zur Bestimmung des Parameters R ? Begründen Sie bitte.

Lösung

- a) Bei Anlegen eines Einheitssprungs $U(s) = 1/s$ an die Eingänge von $G_S(s)$ und $G_M(s)$ muß im Falle stationärer genauer Wiedergabe gelten, daß:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_S(t) \stackrel{!}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} y_M(t) \iff \lim_{t \rightarrow \infty} [y_S(t) - y_M(t)] \stackrel{!}{=} 0$$

Mittels des Endwertsatzes der Laplace-Transformation

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \equiv \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s)$$

bei vorausgesetzter, voneinander unabhängiger Existenz der entsprechenden Grenzwerte erhält man schließlich:

$$\begin{aligned} \iff \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y_S(s) &\stackrel{!}{=} \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y_M(s) \\ \iff \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left[G_S(s) \cdot \frac{1}{s} \right] &\stackrel{!}{=} \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left[G_M(s) \cdot \frac{1}{s} \right] \iff G_S(0) \stackrel{!}{=} G_M(0) \\ \iff K &\stackrel{!}{=} \frac{V}{R} \end{aligned}$$

Die Voraussetzungen des Endwertsatzes sind damit für $R \neq 0$ bzw. $R > 0$ erfüllt.

- b) Für die Gesamtübertragungsfunktion $G(s) := Y(s)/U(s)$ gilt:

$$\begin{aligned} G(s) &= G_S(s) - G_M(s) = \frac{K}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} - \frac{V}{R + s} \\ &= \frac{[KR - V] + s[K - V(T_1 + T_2)] + s^2[-T_1 T_2 V]}{[R] + s[1 + R(T_1 + T_2)] + s^2[T_1 + T_2 + RT_1 T_2] + s^3[T_1 T_2]} \\ &\stackrel{!}{=} \frac{a_0 + s \cdot a_1 + s^2 \cdot a_2}{b_0 + s \cdot b_1 + s^2 \cdot b_2 + s^3 \cdot b_3} \end{aligned}$$

$$\implies \begin{cases} a_0 = KR - V \\ a_1 = K - V(T_1 + T_2) \\ a_2 = -T_1 T_2 V \end{cases} \quad \begin{cases} b_0 = R \\ b_1 = 1 + R(T_1 + T_2) \\ b_2 = T_1 + T_2 + RT_1 T_2 \\ b_3 = T_1 T_2 \end{cases}$$

- c) Zur Ermittlung der von Null verschiedenen Polstellen von $G(s)$ für $R = 0$ müssen die von Null verschiedenen Nullstellen des Nennerpolynoms bestimmt und deren Realteil auf negative Werte hin überprüft werden:

$$0 \stackrel{!}{=} \left([R] + s[1 + R(T_1 + T_2)] + s^2[T_1 + T_2 + RT_1 T_2] + s^3[T_1 T_2] \right) \Big|_{R=0}$$

$$= s \cdot [1 + s(T_1 + T_2) + s^2(T_1 T_2)] = s \cdot (T_1 s + 1) \cdot (T_2 s + 1)$$

$$\iff \begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = -1/T_1 \stackrel{!}{<} 0 \\ s_3 = -1/T_2 \stackrel{!}{<} 0 \end{cases} \iff \begin{cases} T_1 > 0 \\ T_2 > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \text{immer stabil} \\ \text{immer stabil} \end{cases}$$

Aufgrund der Parametervorgaben $T_1 > 0$ und $T_2 > 0$ laut Aufgabenstellung liegen die von Null verschiedene Pole s_2 und s_3 stets als stabile Pole von $G(s)$ vor.

- d) Nach dem *Kriterium verschwindender Momente der Impulsantwort* gilt ein System der Übertragungsfunktion

$$\frac{G(s)}{G(0)} = \frac{1 + s \cdot \tilde{a}_1 + s^2 \cdot \tilde{a}_2 + \dots}{1 + s \cdot \tilde{b}_1 + s^2 \cdot \tilde{b}_2 + \dots} \quad G(0) \neq 0, \pm \infty$$

gemäß Kiencke, Kronmüller: *Messtechnik*, Springer-Verlag, 1995, speziell als geschwindigkeitsstreu, wenn

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 &\stackrel{!}{=} \tilde{b}_1 \\ \text{gefordert wird.} \\ \text{Zur Erfüllung werden die Koeffizienten } \tilde{a}_i \text{ und } \tilde{b}_i \text{ gemäß} \\ \tilde{a}_i &:= a_i / a_0, \quad a_0 \neq 0 \quad \tilde{b}_i := b_i / b_0, \quad b_0 \neq 0 \end{aligned}$$

normiert. Es gilt dann allgemein $\tilde{a}_0 = \tilde{b}_0 \equiv 1$, sofern die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} a_0 = KR - V &\neq 0 \iff KR \neq V \\ b_0 = R &\neq 0 \end{aligned}$$

$G(0)$ ergibt sich unter Beachtung dieser Bedingungen zu:

$$G(0) = \frac{a_0}{b_0} = \frac{KR - V}{R} = K - \frac{V}{R} \quad (\neq 0)$$

Die Forderung nach Geschwindigkeitsstreu lautet dann:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 &\stackrel{!}{=} \tilde{b}_1 \iff a_1 / a_0 \stackrel{!}{=} b_1 / b_0 \iff \frac{K - V(T_1 + T_2)}{KR - V} \stackrel{!}{=} \frac{1 + R(T_1 + T_2)}{R} \\ \iff KR - V &R(T_1 + T_2) \stackrel{!}{=} KR + KR^2(T_1 + T_2) - V - V R(T_1 + T_2) \\ \iff V &= KR^2(T_1 + T_2) \end{aligned}$$

- e) *Allgemein* muß für ein analytisch anwendbares *Kriterium Quadratisches Fehlerintegral* für die Fehlerfunktion $y(t)$ die absolute Integrierbarkeit vorausgesetzt werden. Als Praxisbedingung laut Kiencke, Kronmüller: *Messtechnik*, Springer-Verlag, 1995, ergibt sich daraus die Forderung:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \stackrel{!}{=} 0$$

bzw. über den Endwertsatz der Laplace-Transformation analog dazu die Forderung:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) \stackrel{!}{=} 0$$

Für $Y(s)$ als Fehlerfunktion laut Abb. 1 bei Einheitssprunganregung $U(s) = 1/s$, ergibt sich so:

$$0 \stackrel{!}{=} \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left[G(s) \cdot \frac{1}{s} \right] = G(0) = K - \frac{V}{R}$$

Für beliebige Wahl von $R \neq 0$ erfüllt daher nur die Wahl von $V = KR$ (stationäre Genauigkeit) diese Praxisbedingung. Eine beliebige Wahl der freien Parameter V und R unabhängig voneinander für $V(s)$ ist danach *nicht* möglich.

- f) Nach dem *Kriterium Konstanter Amplitudengang für kleine Frequenzen* laut Kiencke, Kronmüller: *Meßtechnik*, Springer-Verlag, 1995, gilt *allgemein*, daß eine Folge von Gleichungen für die Koeffizienten der Übertragungsfunktion $G(s)$ mit Gleichheit zu erfüllen sind. Da im vorliegenden Fall nur noch ein Freiheitsgrad zu vergeben ist (freier Parameter R), reicht es aus, die erste Bedingung mit Gleichheit zu erfüllen:

$$(a_1)^2 - 2a_2a_0 \stackrel{!}{=} (b_1)^2 - 2b_2b_0$$

Wegen $K = V(T_1 + T_2)$ ergeben sich die Zählerkoeffizienten a_i von $G(s)$ aus Teilaufgabe b) bei gleichzeitiger Elimination von K gemäß

$$\begin{cases} a_0 = KR - V \equiv V \cdot [R(T_1 + T_2) - 1] \\ a_1 = K - V(T_1 + T_2) \equiv 0 \\ a_2 = -T_1T_2V \end{cases}$$

wohingegen die Nennerkoeffizienten b_i unverändert zur Erfüllung des Kriteriums übernommen werden können:

$$\begin{aligned} 0 - 2 \cdot (-T_1T_2V) \cdot V[R(T_1 + T_2) - 1] &\stackrel{!}{=} [1 + R(T_1 + T_2)]^2 - 2 \cdot [T_1 + T_2 + RT_1T_2] \cdot R \\ \Leftrightarrow 2T_1T_2V^2 \cdot [R(T_1 + T_2) - 1] & \\ \stackrel{!}{=} R^2(T_1^2 + 2T_1T_2 + T_2^2) + 2R(T_1 + T_2) + 1 - 2R^2T_1T_2 - 2R(T_1 + T_2) & \\ = 1 + R^2(T_1^2 + T_2^2) & \\ \Leftrightarrow 0 \stackrel{!}{=} R^2[T_1^2 + T_2^2] - R[2T_1T_2V^2(T_1 + T_2)] + [1 + 2T_1T_2V^2] & \\ \Leftrightarrow R_{1,2} = \frac{T_1T_2V^2(T_1 + T_2) \pm \sqrt{T_1^2T_2^2V^4(T_1 + T_2)^2 - [T_1^2 + T_2^2] \cdot [1 + 2T_1T_2V^2]}}{T_1^2 + T_2^2} & \end{aligned}$$

Als einzige Beschränkung für Parameter R aufgrund der Aufgabenstellung läßt sich $R_{1,2} \geq 0$ fordern. Ohne weitere Forderungen sind beide Lösungen R_1 und R_2 als positiv (oder nullwertig) denkbar. Eine eindeutige Lösung dieses Kriteriums zur Bestimmung des Parameters R existiert somit *nicht*.

Punkteverteilung: 2-3-2-4-2-4

Aufgabe 2: Least-Squares-Schätzer (15 Punkte)

Bei der Anordnung einer Balkenwaage mit Aufhängung in Punkt P_4 , wie in Abb. 2 beschrieben, sollen folgende Kräfte in den Punkten P_1 , P_2 und P_3 wirken: während das an Punkt P_3 liegende Ende durch eine lineare Feder gemäß $F_F(t) = c \cdot x(t)$ mit Federkonstante $c > 0$ gefesselt ist, soll an Punkt P_1 ein Gewicht der Masse m befestigt sein und so die Balkenwaage absenken. Zusätzlich gebe es in Punkt P_2 , welcher von den Punkten P_1 und P_4 jeweils den Abstand $(l_1)/2$ besitzt, einen rein vertikalen, dynamischen Kräfteinfluß $F_d(t)$ nach folgendem, zeitlich begrenztem Verlauf:

$$F_d(t) = K \cdot t^3 + B, \quad 0 \leq t \leq T_{\max}$$

für reelle Konstanten B und K . Gehen Sie für die weiteren Betrachtungen davon aus, daß die auf m wirkende Gewichtskraft, ebenso wie die Federkraft, in vertikaler Richtung angreift und daß die Feder sich während des gesamten Zeitverlaufes der Versuchsanordnung $0 \leq t \leq T_{\max}$ in ihrem linearen Bereich befindet. Weitere Kräftewirkungen sollen vernachlässigt werden.

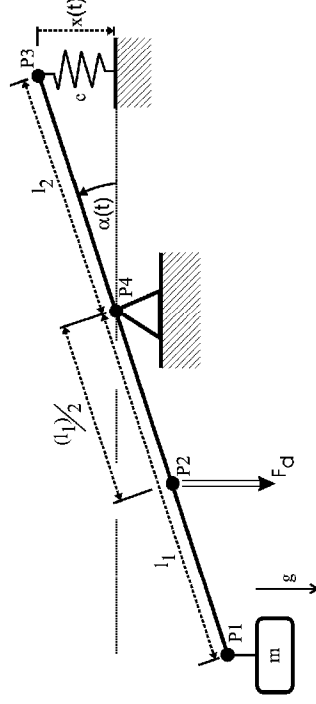


Bild 2: Skizze einer Balkenwaage

- a) Stellen Sie die Momentengleichung im Lagerpunkt P_4 der Balkenwaage als Funktion $M(t)$, $0 \leq t \leq T_{\max}$ in Abhängigkeit der folgenden Größen auf:

$$M(t) = f\left(t, l_1, l_2, K, B, \cos(\alpha(t)), \sin(2\alpha(t)), m, g, c\right)$$

Hinweis: Das resultierende Drehmoment $M(t)$ ist in mathematisch positivem Richtungssinn zu bestimmen, also entgegen des Uhrzeigersinns.

- b) Die unbekannten, noch zu schätzenden Parameter der Modellanordnung von Abb. 2 seien die Federkonstante c sowie die Konstanten K und B der in Punkt P_2 auftretenden Kraft $F_d(t)$. Wie lautet der Least-Squares Ansatz in Matrixform für n Meßwerte $\{M(t_i)\}_{i=1}^n$ zu den Zeitpunkten $t_1, \dots, t_n$?

Hinweise: Die Komponenten des zu schätzenden Parameter- bzw. Schätzvektors sind *nicht explizit* die unbekannten, noch zu schätzenden Größen selbst, sondern *Funktionen* dieser Größen. Die erste Komponente des Schätzvektors soll dabei als Funktion der Federkonstanten c , die zweite Komponente als Funktion des Parameters K dargestellt werden.

Bitte wenden

- c) Bei einer Messung des Drehmoments zu den Zeitpunkten t_1 , t_2 und t_3 ergeben sich Werte, welche der nachfolgenden Tabelle 1 entnommen werden können. Neben dem resultierenden Drehmoment $M(t_i)$ wird zusätzlich der Winkel $\alpha(t_i)$ zu den verschiedenen Zeitpunkten t_i gemessen, da eine analytische Berechnung aufgrund von Störungen nicht sinnvoll erscheint. Die gemessenen Größen des Winkels und des Drehmoments sollen für die weitere Berechnung des Schätzwektors verwendet werden. Weiterhin seien die Balkenlängen mit $l_1 = 6.000$ sowie $l_2 = 5.000$ bekannt, die Größen B , g und m sollen als Variablen in die Rechnung miteingehen. Berechnen Sie aus dem angesetzten Least-Squares Schätzer nach Teilaufgabe b) die sich ergebenden Schätzwerte für die Federkonstante c und die Konstante K .
- Hinweise:** Versuchen Sie, den **Ansatz für den Least-Squares Schätzer zunächst zu vereinfachen, bevor Sie Zahlenwerte einsetzen!** Geben Sie bei der Berechnung bitte alle Teilergebnisse an. **Alle Ergebnisse sind auf 3 Stellen nach dem Komma zu runden.**

i	1	2	3
t_i	0.500	1.414	2.000
$M(t_i)$	0.500	-3.000	0.200
$\alpha(t_i)$	0	$\pi/4$	$\pi/3$

Tabelle 1: Meßwerte zu verschiedenen Zeitpunkten

Lösung

- a) Die Momentengleichung im Lagerpunkt P_4 berechnet sich nach der gegebenen Konvention zu:

$$M(t) = M_{P_1}(t) + M_{P_2}(t) + M_{P_3}(t)$$

wobei für $0 \leq t \leq T_{\max}$ gilt:

$$M_{P_1}(t) = mgl_1 \cdot \cos(\alpha(t))$$

$$M_{P_2}(t) = \frac{l_1}{2} (K \cdot l^3 + B) \cdot \cos(\alpha(t))$$

$$M_{P_3}(t) = -cl_2 \cdot x(t) \cdot \cos(\alpha(t))$$

Über $x(t) = l_2 \cdot \sin(\alpha(t))$ läßt sich $M_{P_3}(t)$ als Funktion der gewünschten Größen darstellen:

$$M_{P_3}(t) = -cl_2^2 \cdot \sin(\alpha(t)) \cdot \cos(\alpha(t)) = -\frac{c}{2}(l_2)^2 \cdot \sin(2\alpha(t))$$

Insgesamt ergibt sich für $0 \leq t \leq T_{\max}$:

$$M(t) = mgl_1 \cdot \cos(\alpha(t)) + \frac{l_1}{2} (K \cdot l^3 + B) \cdot \cos(\alpha(t)) - \frac{c}{2}(l_2)^2 \cdot \sin(2\alpha(t))$$

- b) Der Ansatz für den Least-Squares Schätzer lautet:

$$\begin{pmatrix} M(t_1) \\ M(t_2) \\ \vdots \\ M(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(2\alpha(t_1)) \\ \sin(2\alpha(t_2)) \\ \vdots \\ \sin(2\alpha(t_n)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1^3 \cdot \cos(\alpha(t_1)) \\ t_2^3 \cdot \cos(\alpha(t_2)) \\ \vdots \\ t_n^3 \cdot \cos(\alpha(t_n)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha(t_1)) \\ \cos(\alpha(t_2)) \\ \vdots \\ \cos(\alpha(t_n)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{c}{2}(l_2)^2 \\ \frac{Kl_1}{2} \\ mgl_1 + \frac{B}{2}l_1 \end{pmatrix}$$

oder kurz $M = \Psi \cdot \hat{a}$.

- c) Die Matrix Ψ berechnet sich (auf 3 Stellen gerundet) zu:

$$\Psi \approx \begin{pmatrix} 0.000 & 0.125 & 1.000 \\ 1.000 & 1.999 & 0.707 \\ 0.866 & 4.000 & 0.500 \end{pmatrix}$$

Die Berechnung zeigt, daß $\Psi \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ selbst invertierbar ist. Aus der Schätzmatrix $(\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T$ des Least-Squares Schätzers wird demnach

$$\left[\Psi^T \Psi \right]^{-1} \Psi^T = \left[\Psi^{-1} (\Psi^T)^{-1} \right] \Psi^T = \Psi^{-1} \left[(\Psi^T)^{-1} \Psi^T \right] = \Psi^{-1}$$

Die Inverse von Ψ führt (auf 3 Stellen gerundet) zu

$$\Psi^{-1} \approx \begin{pmatrix} -0.801 & 1.725 & -0.837 \\ 0.049 & -0.379 & 0.438 \\ 0.994 & 0.047 & -0.055 \end{pmatrix}$$

und damit wegen $\hat{a} = (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T \cdot M \equiv \Psi^{-1} \cdot M$ zu:

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} -\frac{c}{2}(l_2)^2 \\ \frac{Kl_1}{2} \\ mgl_1 + \frac{B}{2}l_1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.801 & 1.725 & -0.837 \\ 0.049 & -0.379 & 0.438 \\ 0.994 & 0.047 & -0.055 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.500 \\ -3.000 \\ 0.200 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -5.742 \\ 1.250 \\ 0.344 \end{pmatrix}$$

Einsetzen der Werte $l_1 = 6.000$ und $l_2 = 5.000$ führt auf die gesuchten Parameterschätzwerte:

$$c = -\frac{2}{(l_2)^2} \cdot \hat{a}_1 \approx 0.459$$

$$K = \frac{2}{l_1} \cdot \hat{a}_2 \approx 0.417$$

Punkteverteilung: 6-3-6

Aufgabe 3: Korrelation und Leistungsdichte (18 Punkte)

Hinweis: Die beiden folgenden Teilaufgaben a) und b) sind voneinander unabhängig und können getrennt bearbeitet werden !

- a) Zwei stochastische, stationäre Signale $x(t)$ und $y(t)$ werden zu $z(t) = x(t) - y(t)$ subtrahiert. Geben Sie allgemein die resultierende Autokorrelationsfunktion $R_{zz}(\tau)$ des Signals $z(t)$ an. Dabei darf $R_{zz}(\tau)$ ausschließlich von den entsprechenden Auto - und Kreuzkorrelationsfunktionen der Eingangssignale $x(t)$ und $y(t)$ abhängen.

Hinweis: Bestimmen Sie den gesuchten Zusammenhang schrittweise mit den Rechenregeln der linearen Erwartungswertnotation. Geben Sie bitte ausführlich alle notwendigen Zwischenschritte bei der Erwartungswertberechnung an. Endergebnisse allein sind nicht ausreichend!

Die beiden Signale $x(t)$ und $y(t)$ werden nun gemäß

$$\begin{aligned} x(t) &= A + e(t) & , & \quad R_{ee}(\tau) = \sigma_e^2 \cdot e^{-|\tau|} \\ y(t) &= B + n(t) & , & \quad R_{nn}(\tau) = \sigma_n^2 \cdot e^{-|\tau|} \end{aligned}$$

belegt, wobei die Signale je einen deterministischen Gleichanteil A und B besitzen. Die auftretenden Rauschanteile $e(t)$ und $n(t)$ seien mittelwertfrei und statistisch unabhängig voneinander. Geben Sie die Kreuzkorrelationsfunktionen $R_{en}(\tau)$ und $R_{ne}(\tau)$ an. Wie groß ist die mittlere Leistung $\overline{P_z}$ des resultierenden (subtrahierten) Signals $z(t) = x(t) - y(t)$?

- b) In (der umseitigen) Abb. 3 finden Sie die Zeitfunktion $x(t)$, deren Autokorrelation $R_{xx}(\tau)$ sowie deren zugehörige Leistungsdichte $S_{xx}(f)$. Die Bilder sind in ihrer Reihenfolge vertauscht. Ordnen Sie daher den Zeitfunktionen (A-J) die zugehörigen Autokorrelationen (1-10) und die entsprechenden Leistungsdichten (I-X) zu.

Hinweis: Es werden keine Begründungen gefordert !

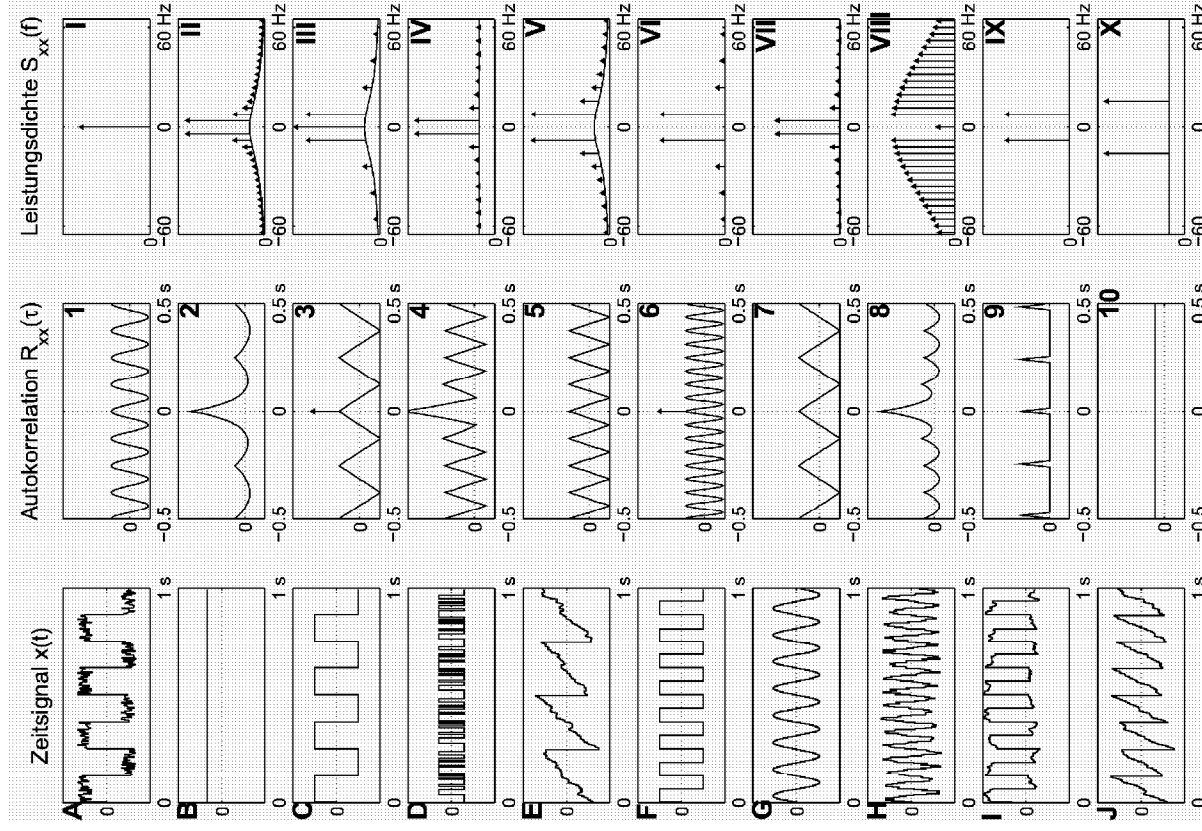


Bild 3: Zeitsignale mit Autokorrelationsfunktionen und Leistungsdichten

Bitte wenden

Lösung

- a) Die resultierende Autokorrelationsfunktion $R_{zz}(\tau)$ des Signals $z(t)$ beträgt:

$$\begin{aligned} R_{zz}(\tau) &= E\{z(t) \cdot z(t+\tau)\} = E\{[x(t) - y(t)] \cdot [x(t+\tau) - y(t+\tau)]\} \\ &= E\{x(t) \cdot x(t+\tau) - x(t) \cdot y(t+\tau) - y(t) \cdot x(t+\tau) + y(t) \cdot y(t+\tau)\} \\ &= E\{x(t) \cdot x(t+\tau)\} - E\{x(t) \cdot y(t+\tau)\} - E\{y(t) \cdot x(t+\tau)\} + E\{y(t) \cdot y(t+\tau)\} \\ &= R_{xx}(\tau) - R_{xy}(\tau) - R_{yx}(\tau) + R_{yy}(\tau) \end{aligned}$$

Da die auftretenden Rauschanteile $e(t)$ und $n(t)$ beide mittelwertfrei sind und statistisch voneinander unabhängig, muß gelten:

$$R_{en}(\tau) \equiv 0, \quad R_{ne}(\tau) \equiv 0$$

Für die mittlere Leistung $\overline{P_z}$ des resultierenden Signals $z(t)$ gilt wegen $\mu_e = \mu_n = 0$:

$$\overline{P_z} = E\{z(t)^2\} = R_{zz}(0) = R_{xx}(0) - R_{xy}(0) - R_{yx}(0) + R_{yy}(0)$$

$$R_{xx}(0) = E\{[A + e(t)] \cdot [A + e(t)]\} = A^2 + 2A \cdot \mu_e + R_{ee}(0) = A^2 + 0 + \sigma_e^2$$

$$R_{yy}(0) = E\{[B + n(t)] \cdot [B + n(t)]\} = B^2 + 2B \cdot \mu_n + R_{nn}(0) = B^2 + 0 + \sigma_n^2$$

$$R_{xy}(0) = E\{[A + e(t)] \cdot [B + n(t)]\} = AB + A \cdot \mu_n + B \cdot \mu_e + R_{en}(0) = AB + 0 + 0 + 0$$

$$R_{yx}(0) = E\{[B + n(t)] \cdot [A + e(t)]\} = BA + B \cdot \mu_e + A \cdot \mu_n + R_{ne}(0) = AB + 0 + 0 + 0$$

$$\Rightarrow \overline{P_z} = R_{zz}(0) = A^2 - 2AB + B^2 + \sigma_e^2 + \sigma_n^2 = (A - B)^2 + \sigma_e^2 + \sigma_n^2$$

- b) Zuordnung:

Zeitfunktion–Autokorrelation–Leistungsdichte		
$x(t)$	$R_{xx}(\tau)$	$S_{xx}(f)$
A	– 3	– IV
B	– 10	– I
C	– 7	– VII
D	– 9	– VIII
E	– 2	– II
F	– 5	– VI
G	– 1	– IX
H	– 6	– X
I	– 4	– III
J	– 8	– V

Punkteverteilung: 8–10

Aufgabe 4: Statistik (20 Punkte)

Hinweis: Die folgenden Teilaufgaben a) bis d) sind unabhängig von den Teilaufgaben e) bis h) und können getrennt bearbeitet werden! **Geben Sie alle Rechenergebnisse auf 3 Nachkommastellen gerundet an!**

–1.0	0.4	2.25	0.1	–0.5
–0.1	–2.75	–0.75	1.1	–1.4
–0.2	–1.3	0.1	–1.8	0.25
–2.2	1.4	–0.5	0.6	–2.1

Tabelle 2: Werte der Elemente einer Stichprobe

Aus einem Fertigungsprozeß wurden im Rahmen einer Qualitätssicherung $n = 20$ Werte einer Stichprobe entnommen, vgl. Tabelle 2.

- a) Welche Voraussetzungen bzw. Bedingungen müssen *allgemein* vorliegen, damit ein χ^2 -Anpassungstest (als repräsentativ) durchgeführt werden darf? Geben Sie zwei verschiedene Bedingungen an.
- b) Stellen Sie aus den Werten der Tabelle 2 eine (tabellarische) Häufigkeitsverteilung auf. Verwenden Sie dazu die folgende Klasseneinteilung:
- | | | | | | |
|---------------|------------------|-----------------|----------------|----------------|-------------------|
| Klasse i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Intervall i | $-3 \leq x < -2$ | $-2 \leq x < 0$ | $0 \leq x < 1$ | $1 \leq x < 2$ | $2 \leq x \leq 3$ |
- c) Geben Sie *allgemein* die Berechnungsvorschrift für den Stichprobenmittelwert $\hat{x}$ und die Stichprobenvarianz S_x^2 einer Stichprobe des Umfangs n an. Bestimmen Sie daraus Stichprobenmittelwert $\hat{x}$ und Stichprobenvarianz S_x^2 für die Stichprobe laut Tabelle 2.
- d) Die vorliegende Stichprobe folge einer Normalverteilung mit den (in Teilaufgabe c)) geschätzten Parametern $\mu_x = \hat{x}$ und $\sigma_x^2 = S_x^2$. Prüfen Sie, ob dann für die theoretische Wahrscheinlichkeit p_5 der Randklasse 5 der Einteilung von Teilaufgabe b) die Ungleichung

$$n \cdot p_5 \geq 1$$

erfüllt ist. Wie beurteilen Sie dieses Ergebnis für die Durchführung eines χ^2 -Anpassungstests auf die angenommene Normalverteilung?

Hinweis: Benutzen Sie die (umseitigen) tabellierten Werte der Standardisierten Normalverteilung $\Phi(x)$, Abb. 5.

Es soll mittels eines χ^2 -Anpassungstests bei einer statistischen Sicherheit von 93% die Hypothese geprüft werden, daß dem Fertigungsprozeß die folgende Wahrscheinlichkeitsdichte zugrunde liegt, wobei k ein reeller, fester Parameter ist:

$$f_x(x) = \begin{cases} k \cdot (x+3) & , -3 \leq x < -2 \\ k & , -2 \leq x < 0 \\ k \cdot (x+1)^{-2} & , 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Der Stichprobe von Tabelle 2 liege dabei die Klasseneinteilung von Teilaufgabe b) zugrunde mit dem Unterschied, daß die beiden Klassen 4 und 5 zu einer neuen (Rand)Klasse 4' zusammengefaßt werden.

Bitte wenden

- e) Stellen Sie aus den Werten der Tabelle 2 eine (tabellarische) Häufigkeitsverteilung auf. Verwenden Sie dazu eine zum Aufgabenteil b) analoge Darstellung der neuen Klasseneinteilung.
- f) Bestimmen Sie Konstante k so, daß $f_x(x)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion darstellt.
- g) Führen Sie den beschriebenen χ^2 -Anpassungstest durch und prüfen Sie die Hypothese, ob der Häufigkeitsverteilung der Stichprobe aus Teilaufgabe e) die gegebene Dichtefunktion $f_x(x)$ zugrunde liegt. Der Parameter k werde dabei auf den Wert aus Teilaufgabe f) gesetzt.
- Hinweis:** Erläutern Sie bitte jeweils kurz Ihre Vorgehensweise. Benutzen Sie bei der Durchführung die Abbildung 4.
- h) Prüfen Sie, ob für die theoretische Wahrscheinlichkeit p_i , der Randklasse 4^i von Teilaufgabe e) die Ungleichung
- $$n \cdot p_i \geq 1$$

erfüllt ist. Welche Aussage bezüglich des in Teilaufgabe g) durchgeführten χ^2 -Anpassungstests läßt sich daraus ableiten?

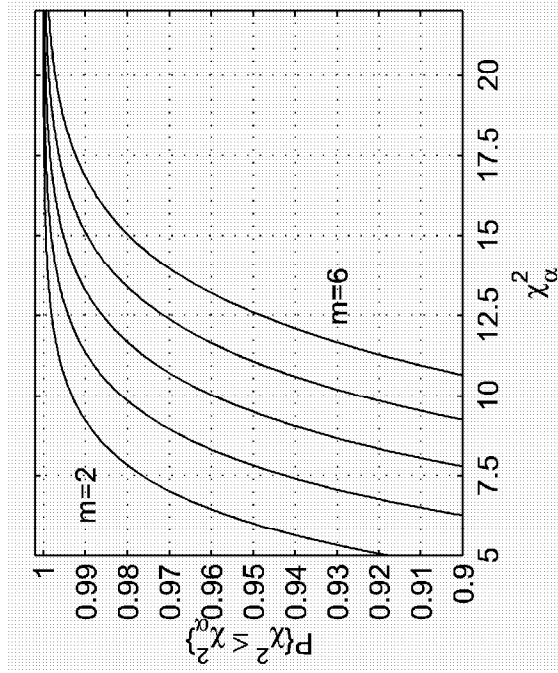


Bild 4: Wahrscheinlichkeit $P\{\chi^2 \leq \chi_\alpha^2\}$ für $m = 2, \dots, 6$ Freiheitsgrade

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.50000	0.20	0.57930	0.40	0.65544	0.60	0.72577	0.80	0.78810
0.01	0.50400	0.21	0.58320	0.41	0.65939	0.61	0.72971	0.81	0.79100
0.02	0.50800	0.22	0.58710	0.42	0.66334	0.62	0.73366	0.82	0.79390
0.03	0.51200	0.23	0.59100	0.43	0.66729	0.63	0.73761	0.83	0.79679
0.04	0.51600	0.24	0.59490	0.44	0.67124	0.64	0.74156	0.84	0.79969
0.05	0.51990	0.25	0.59880	0.45	0.67519	0.65	0.74551	0.85	0.80259
0.06	0.52390	0.26	0.60270	0.46	0.67914	0.66	0.74946	0.86	0.80549
0.07	0.52780	0.27	0.60660	0.47	0.68309	0.67	0.75341	0.87	0.80839
0.08	0.53170	0.28	0.61050	0.48	0.68704	0.68	0.75736	0.88	0.81129
0.09	0.53560	0.29	0.61440	0.49	0.69099	0.69	0.76131	0.89	0.81419
0.10	0.53950	0.30	0.61830	0.50	0.69494	0.70	0.76529	0.90	0.81709
0.11	0.54340	0.31	0.62220	0.51	0.69889	0.71	0.76924	0.91	0.81999
0.12	0.54730	0.32	0.62610	0.52	0.70284	0.72	0.77319	0.92	0.82289
0.13	0.55120	0.33	0.63000	0.53	0.70679	0.73	0.77714	0.93	0.82579
0.14	0.55510	0.34	0.63390	0.54	0.71074	0.74	0.78109	0.94	0.82869
0.15	0.55900	0.35	0.63780	0.55	0.71469	0.75	0.78504	0.95	0.83159
0.16	0.56290	0.36	0.64170	0.56	0.71864	0.76	0.78899	0.96	0.83449
0.17	0.56680	0.37	0.64560	0.57	0.72259	0.77	0.79294	0.97	0.83739
0.18	0.57070	0.38	0.64950	0.58	0.72654	0.78	0.79689	0.98	0.84029
0.19	0.57460	0.39	0.65340	0.59	0.73049	0.79	0.80084	0.99	0.84319
0.20	0.57850	0.40	0.65730	0.60	0.73444	0.80	0.80479	1.00	0.84609
0.21	0.58240	0.41	0.66120	0.61	0.73839	0.81	0.80874	1.01	0.84899
0.22	0.58630	0.42	0.66510	0.62	0.74234	0.82	0.81269	1.02	0.85189
0.23	0.59020	0.43	0.66900	0.63	0.74629	0.83	0.81664	1.03	0.85479
0.24	0.59410	0.44	0.67290	0.64	0.75024	0.84	0.82059	1.04	0.85769
0.25	0.59800	0.45	0.67680	0.65	0.75419	0.85	0.82454	1.05	0.86059
0.26	0.60190	0.46	0.68070	0.66	0.75814	0.86	0.82849	1.06	0.86349
0.27	0.60580	0.47	0.68460	0.67	0.76209	0.87	0.83244	1.07	0.86639
0.28	0.60970	0.48	0.68850	0.68	0.76604	0.88	0.83639	1.08	0.86929
0.29	0.61360	0.49	0.69240	0.69	0.76999	0.89	0.84034	1.09	0.87219
0.30	0.61750	0.50	0.69630	0.70	0.77394	0.90	0.84429	1.10	0.87509
0.31	0.62140	0.51	0.70020	0.71	0.77789	0.91	0.84824	1.11	0.87799
0.32	0.62530	0.52	0.70410	0.72	0.78184	0.92	0.85219	1.12	0.88089
0.33	0.62920	0.53	0.70800	0.73	0.78579	0.93	0.85614	1.13	0.88379
0.34	0.63310	0.54	0.71190	0.74	0.78974	0.94	0.86009	1.14	0.88669
0.35	0.63700	0.55	0.71580	0.75	0.79369	0.95	0.86404	1.15	0.88959
0.36	0.64090	0.56	0.71970	0.76	0.79764	0.96	0.86799	1.16	0.89249
0.37	0.64480	0.57	0.72360	0.77	0.80159	0.97	0.87194	1.17	0.89539
0.38	0.64870	0.58	0.72750	0.78	0.80554	0.98	0.87589	1.18	0.89829
0.39	0.65260	0.59	0.73140	0.79	0.80949	0.99	0.87984	1.19	0.90119
0.40	0.65650	0.60	0.73530	0.80	0.81339	1.00	0.88379	1.20	0.90409
0.41	0.66040	0.61	0.73920	0.81	0.81734	1.01	0.88774	1.21	0.90699
0.42	0.66430	0.62	0.74310	0.82	0.82129	1.02	0.89169	1.22	0.90989
0.43	0.66820	0.63	0.74700	0.83	0.82524	1.03	0.89564	1.23	0.91279
0.44	0.67210	0.64	0.75090	0.84	0.82919	1.04	0.89959	1.24	0.91569
0.45	0.67600	0.65	0.75480	0.85	0.83314	1.05	0.90354	1.25	0.91859
0.46	0.67990	0.66	0.75870	0.86	0.83709	1.06	0.90749	1.26	0.92149
0.47	0.68380	0.67	0.76260	0.87	0.84104	1.07	0.91144	1.27	0.92439
0.48	0.68770	0.68	0.76650	0.88	0.84499	1.08	0.91539	1.28	0.92729
0.49	0.69160	0.69	0.77040	0.89	0.84894	1.09	0.91934	1.29	0.93019
0.50	0.69550	0.70	0.77430	0.90	0.85289	1.10	0.92329	1.30	0.93309
0.51	0.69940	0.71	0.77820	0.91	0.85684	1.11	0.92724	1.31	0.93599
0.52	0.70330	0.72	0.78210	0.92	0.86079	1.12	0.93119	1.32	0.93889
0.53	0.70720	0.73	0.78600	0.93	0.86474	1.13	0.93514	1.33	0.94179
0.54	0.71110	0.74	0.78990	0.94	0.86869	1.14	0.93909	1.34	0.94469
0.55	0.71500	0.75	0.79380	0.95	0.87264	1.15	0.94304	1.35	0.94759
0.56	0.71890	0.76	0.79770	0.96	0.87659	1.16	0.94699	1.36	0.95049
0.57	0.72280	0.77	0.80160	0.97	0.88054	1.17	0.95094	1.37	0.95339
0.58	0.72670	0.78	0.80550	0.98	0.88449	1.18	0.95489	1.38	0.95629
0.59	0.73060	0.79	0.80940	0.99	0.88844	1.19	0.95884	1.39	0.95919
0.60	0.73450	0.80	0.81330	1.00	0.89239	1.20	0.96279	1.40	0.96209
0.61	0.73840	0.81	0.81720	1.01	0.89634	1.21	0.96674	1.41	0.96499
0.62	0.74230	0.82	0.82110	1.02	0.90029	1.22	0.97069	1.42	0.96789
0.63	0.74620	0.83	0.82500	1.03	0.90424	1.23	0.97464	1.43	0.97079
0.64	0.75010	0.84	0.82890	1.04	0.90819	1.24	0.97859	1.44	0.97369
0.65	0.75400	0.85	0.83280	1.05	0.91214	1.25	0.98254	1.45	0.97659
0.66	0.75790	0.86	0.83670	1.06	0.91609	1.26	0.98649	1.46	0.97949
0.67	0.76180	0.87	0.84060	1.07	0.92004	1.27	0.99044	1.47	0.98239
0.68	0.76570	0.88	0.84450	1.08	0.92399	1.28	0.99439	1.48	0.98529
0.69	0.76960	0.89	0.84840	1.09	0.92794	1.29	0.99834	1.49	0.98819
0.70	0.77350	0.90	0.85230	1.10	0.93189	1.30	0.99999	1.50	0.99109
0.71	0.77740	0.91	0.85620	1.11	0.93584	1.31	0.99999	1.51	0.99399
0.72	0.78130	0.92	0.86010	1.12	0.93979	1.32	0.99999	1.52	0.99689
0.73	0.78520	0.93	0.86400	1.13	0.94374	1.33	0.99999	1.53	0.99979
0.74	0.78910	0.94	0.86790	1.14	0.94769	1.34	0.99999	1.54	1.00269
0.75	0.79300	0.95	0.87180	1.15	0.95164	1.35	0.99999	1.55	1.00559
0.76	0.79690	0.96	0.87570	1.16	0.95559	1.36	0.99999	1.56	1.00849
0.77	0.80080	0.97	0.87960	1.17	0.95954	1.37	0.99999	1.57	1.01139
0.78	0.80470	0.98	0.88350	1.18	0.96349	1.38	0.99999	1.58	1.01429
0.79	0.80860	0.99	0.88740	1.19	0.96744	1.39	0.99999	1.59	1.01719
0.80	0.81250	1.00	0.89130	1.20	0.97139	1.40	0.99999	1.60	1.02009
0.81	0.81640	1.01	0.89520	1.21	0.97534	1.41	0.99999	1.61	1.02299
0.82	0.82030	1.02	0.89910	1.22	0.97929	1.42	0.99999	1.62	1.02589
0.83	0.82420	1.03	0.90300	1.23	0.98324	1.43	0.99999	1.63	1.02879
0.84	0.82810	1.04	0.90690	1.24	0.98719	1.44	0.99999	1.64	1.03169
0.85	0.83200	1.05	0.91080	1.25	0.99114	1.45	0.99999	1.65	1.03459
0.86	0.83590	1.06	0.91470	1.26	0.99509	1.46	0.99999	1.66	1.03749
0.87	0.83980	1.07	0.91860	1.27	0.99904	1.47	0.99999	1.67	1.04039
0.88	0.84370	1.08	0.92250	1.28	0.99999	1.48	0.99999	1.68	1.04329
0.89	0.84760	1.09	0.92640	1.29	0.99999	1.49	0.99999	1.69	1.04619
0.90	0.85150	1.10	0.93030	1.30	0.99999	1.50	0.99999	1.70	1.04909
0.91	0.85540	1.11	0.93420	1.31	0.99999	1.51	0.99999	1.71	1.05199
0.92	0.85930	1.12	0.93810	1.32	0.99999	1.52	0.99999	1.72	1.05489
0.93	0.86320	1.13	0.94200	1.33	0.99999	1.53	0.99999	1.73	1.05779
0.94	0.86710	1.14	0.94590	1.34	0.99999	1.54	0.99999	1.74	1.06069
0.95	0.87100	1.15	0.94980	1.35	0.99999	1.55	0.99999	1.75	1.06359
0.96	0.87490	1.16	0.95370	1.36	0.99999	1.56	0.99999	1.76	1.06649
0.97	0.87880	1.17	0.95760	1.37	0.99999	1.57	0.99999	1.77	1.06939
0.98	0.88270	1.18	0.96150	1.38	0.99999	1.58	0.99999	1.78	1.07229
0.99	0.88660	1.19	0.96540	1.39	0.99999	1.59	0.99999	1.79	1.07519
1.00	0.89050	1.20	0.96930	1.40	0.99999	1.60	0.99999	1.80	1.07809
1.01	0.89440	1.21	0.97320	1.41	0.99999	1.61	0.99999	1.81	1.08099
1.02	0.89830	1.22	0.97710	1.42	0.99999	1.62	0.99999	1.82	1.08389
1.03	0.90220	1.23	0.98100	1.43	0.99999	1.63	0.99999	1.83	1.08679
1.04	0.90610	1.24	0.98490	1.44	0.99999	1.64	0.99999	1.84	1.08969
1.05	0.91000	1.25	0.98880	1.45	0.99999	1.65	0.99999	1.85	1.09259
1.06	0.91390	1.26	0.99270	1.46	0.99999	1.66	0.99999	1.86	1.09549
1.07	0.91780	1.27	0.99660	1.47	0.99999	1.67	0.99999	1.87	1.09839
1.08	0.92170	1.28	0.99999	1.48	0.99999	1.68	0.99999	1.88	1.10129
1.09	0.92560	1.29	0.99999	1.49	0.99999	1.69	0.99999	1.89	1.10419
1.10									

Lösung

a) Voraussetzungen zur Durchführung eines als repräsentativ geltenden χ^2 -Anpassungstests sind:

- Unabhängigkeit der Messwerte
- Hinreichend großer Stichprobenumfang n
- Disjunkte Klasseneinteilung
- „Faustregeln“ als Anforderung an die Randklassen ($n \cdot p_{\text{rand}} \geq 1$) bzw. an die übrigen Klassen ($n \cdot p_i \geq 5$)

b) Häufigkeitsverteilung:

Klasse i	1	2	3	4	5
Intervall i	$-3 \leq x < -2$	$-2 \leq x < 0$	$0 \leq x < 1$	$1 \leq x < 2$	$2 \leq x \leq 3$
Anzahl n_i	3	9	5	2	1

c) Stichprobenmittelwert $\hat{x}$ und Stichprobenvarianz S_x^2 berechnen sich mit den Werten x_i der Tabelle 2 bei gegebenem Umfang $n = 20$ zu:

$$\hat{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{-8.4}{20} = -0.42$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x})^2 = \frac{1}{20-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x})^2 \approx 1.638$$

d) Bei einer angenommenen Normalverteilung $f_x(x) = N(\mu_x, \sigma_x)$ der Stichprobe mit den Parametern $\mu_x = \hat{x} = -0.42$ und $\sigma_x^2 = S_x^2 = 1.638$ gilt für die theoretische Wahrscheinlichkeit p_5 der Randklasse 5 mit den Klassengrenzen 2 und 3:

$$p_5 = \int_2^3 f_x(x) dx = \int_{-\infty}^3 f_x(x) dx - \int_{-\infty}^2 f_x(x) dx$$

Mittels einer Variablentransformation

$$z = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{x - (-0.42)}{\sqrt{1.638}}$$

ergibt sich so für tabellierte Werte der Standard-Normalverteilung $N(0,1)$ von $\Phi(z)$ laut Tabelle 5:

$$\begin{aligned} p_5 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{3+0.42}{\sqrt{1.638}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{2+0.42}{\sqrt{1.638}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= \Phi\left(\frac{3+0.42}{\sqrt{1.638}}\right) - \Phi\left(\frac{2+0.42}{\sqrt{1.638}}\right) \approx \Phi(2.67) - \Phi(1.89) \approx 0.9962 - 0.9706 \\ &= 0.0256 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow n \cdot p_5 \approx 0.512 < 1$$

Da die gegebene Ungleichung *nicht* erfüllt ist, ist die „Faustregel“ für die Randklassen zur Anwendung des χ^2 -Anpassungstest auf die angenommenen Normalverteilung verletzt. Es empfiehlt sich, die beiden Randklassen 4 und 5 der Klasseneinteilung von Teilaufgabe b) zusammenzulegen.

e) Neue Häufigkeitsverteilung:

Klasse i	1	2	3	4'
Intervall i	$-3 \leq x < -2$	$-2 \leq x < 0$	$0 \leq x < 1$	$1 \leq x \leq 3$
Anzahl n_i	3	9	5	3

f) Für jede beliebige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_x(x)$ muß *allgemein* gelten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) dx \stackrel{!}{=} 1$$

Für die vorgegebene Verteilung muß somit gelten:

$$\begin{aligned} 1 &\stackrel{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) dx = \int_{-3}^{-2} k \cdot (x+3) dx + \int_{-2}^0 k dx + \int_0^3 k \cdot (x+1)^{-2} dx \\ &= \frac{k}{2} (x+3)^2 \Big|_{-3}^{-2} + kx \Big|_{-2}^0 + \frac{-k}{x+1} \Big|_{-2}^3 = \frac{k}{2} + 2k + \frac{3}{4}k = \frac{13}{4}k \\ &\Rightarrow k = \frac{4}{13} \end{aligned}$$

g) χ^2 -Anpassungstest: Die Voraussetzungen zur Durchführung (s. Teilaufgabe a)) gelten als erfüllt, wobei die „Faustregeln“ als Anforderung erst nach Durchführung überprüft werden können. Die Nullhypothese H_0 lautet: „Die Verteilung der vorliegenden Stichprobe ($n = 20$) folgt einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_x(x)$ mit $k = \frac{4}{13}$.“ Die geforderte (maximale) statistische Sicherheit von $1 - \alpha = 93\%$ bedeutet für den Anpassungstest ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0.07$. Die Prüfgröße χ^2 läßt sich anhand der folgenden Tabelle erstellen, wobei zur Berechnung der theoretischen Wahrscheinlichkeit p_i die gegebene Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion gemäß

$$p_i = P\{m_i \leq x \leq m_{i+1}\} = \int_{m_i}^{m_{i+1}} f_x(x) dx \quad \text{Berechnung: vgl. Teilaufgabe f)}$$

angesetzt wurde und m_i, m_{i+1} als jeweilige Intervall- bzw. Klassenränder zu verstehen sind.

Klasse i	1	2	3	4'
Intervall i	$-3 \leq x < -2$	$-2 \leq x < 0$	$0 \leq x < 1$	$1 \leq x \leq 3$
Anzahl n_i	3	9	5	3
Theor. Wahrschl. p_i	$\frac{2}{13} \approx 0.154$	$\frac{8}{13} \approx 0.615$	$\frac{2}{13} \approx 0.154$	$\frac{1}{13} \approx 0.077$
Produkt $n \cdot p_i$	3.077	12.308	3.077	1.539
$\frac{n \cdot p_i}{n \cdot p_i + 2}$	≈ 3.08	≈ 12.3	≈ 3.08	≈ 1.54
$\frac{n \cdot p_i}{n \cdot p_i + 2}$	0.002	0.889	1.202	1.389
$\frac{n \cdot p_i}{n \cdot p_i + 2}$				3.482 $\approx \chi^2$

Die Anzahl der Freiheitsgrade beträgt aufgrund der Abwesenheit von Schätzparametern $m = 3$ (= {Klassenanzahl 4} - 1). Daraus läßt sich, zusammen mit dem geforderten Signifikanzniveau von $\alpha = 0.07$, mittels Abbildung 4 aus der Forderung

$$P\{\chi^2 \leq \chi_\alpha^2\} \stackrel{!}{=} 1 - \alpha = 93\%$$

der Parameter zu $\chi_\alpha^2 \approx 7$ ablesen. Wegen $\chi^2 \approx 3.482 \leq \chi_\alpha^2 \approx 7$ wird die Hypothese H_0 des Anpassungstests angenommen.

- h) Es gilt laut Tabelle aus Teilaufgabe g):

$$n \cdot p_1 \approx 1.54 \geq 1$$

Da die gegebene Ungleichung erfüllt ist, ist auch die „Faustregel“ für die Randklassen zur Anwendung des χ^2 -Anpassungstest auf die angenommene Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion erfüllt. Die letzte Voraussetzung zur Durchführung des Anpassungstests ist damit gegeben (vgl. Teilaufgabe g)), da im übrigen auch $n \cdot p_1 \geq 1$ für die andere Randklasse 1 gilt.

Hinweis: Die „Faustregel“ $n \cdot p_3 \geq 5$ für Klasse 3 ist hier verletzt, im Rahmen einer Prüfungsaufgabe bei vermindertem Umfang $n = 20$ aber zu vertreten !

Punkteverteilung: 1–1–2–3–3–1–2–8–2

Meßtechnik-Klausur vom 17. September 2001

Rechen-Aufgaben

Aufgabe 1: Least-Square Schätzer (18 Punkte)

Gegeben sei ein Modellfahrzeug der Masse m auf einer schiefen Ebene, welches zum Zeitpunkt $t = 0$ aus der Ruhe heraus beginnt, nach unten zu beschleunigen, siehe Bild 1. Neben der Hangabtriebskraft und der Reibungskraft erfährt das Fahrzeug eine zusätzliche Beschleunigungskraft $F_B(t)$ parallel zur schiefen Ebene, welche sich über die Gleichung

$$F_B(t) = m \left[A - \frac{c_1}{\sqrt{t}} + c_2 t^2 (\sigma(t) - \sigma(t - T)) \right], \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, A, T > 0,$$

beschreiben läßt. Zur Vereinfachung des Modells werde angenommen, daß der Haftreibungskoeffizient f_h dem Gleitreibungskoeffizienten f_g gleichgesetzt werden kann, $f := f_h = f_g$. Weitere Kräfte sollen vernachlässigt werden.

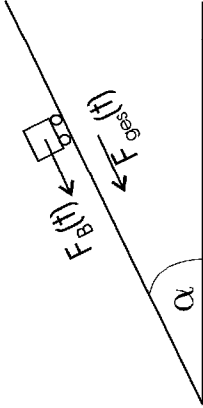


Bild 1: Fahrzeug auf einer schiefen Ebene

- a) Berechnen Sie die am Fahrzeug wirkende Kraftkomponente $F_{ges}(t)$, welche parallel der schiefen Ebene wirkt ($t > 0$). Die Kraft $F_{ges}(t)$ soll dabei hangabwärts wirken. Berechnen Sie anschließend ausgehend von der Kräftegleichung $F_{ges}(t)$ zuerst die momentane Beschleunigung $a(t)$ des Fahrzeugs, danach seine momentane Geschwindigkeit $v(t)$ (es sei davon auszugehen, daß die Reibungskraft geringer ist als die Hangabtriebskraft, das Fahrzeug für $t > 0$ also in Bewegung ist).

- b) Durch eine Meßreihe $M1$ sollen die Parameter A, c_1, c_2 der Beschleunigungskraft $F_B(t)$ bestimmt werden. Der Winkel α sowie die Gewichtskraft g werden als bekannt vorausgesetzt. Folgende Auswertung ergibt sich ($n \in \mathbb{N}$):

t	$t_1 = T/n$	$t_2 = 2T/n$	$t_3 = 3T/n$	$\dots$	$t_n = T$
$v(t)$	v_1	v_2	v_3	$\dots$	v_n

Wie lautet der Least-Square Ansatz in Matrixform?

- c) Eine hochgenaue Untersuchung des Parameters c_2 ergab den Wert $c_2 = 0.300$, welcher als korrekt angesehen werden soll. Eine zweite Meßreihe $M2$ besitze folgende Werte:

t	$t_1 = T$	$t_2 = 2T$	$t_3 = 3T$	$t_4 = 4T$
$v(t)$	23	26.5	31.5	36

Desweiteren gelte für die Gravitationskonstante $g = 9.81$ sowie $T = 5$ und $\alpha = 30^\circ$. Der Reibungskoeffizient betrage $f = 1/\sqrt{3}$. Schätzen Sie die unbekannten Parameter A, c_1 mit

Hilfe des Least-Square-Schätzers. Alle Ergebnisse sind auf 3 Stellen nach dem Komma zu runden.

Hinweis: Verwenden Sie einen Ansatz der Form $\mathbf{v} - \mathbf{f}(c_2) = \Psi \hat{\mathbf{a}}$, $\Psi \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$, wobei $\mathbf{f}(c_2)$ ein von c_2 abhängiger Vektor ist.

- d) Berechnen Sie die Summe der quadratischen Meßfehler unter der Annahme, daß die geschätzten Parameter mit der Realität übereinstimmen. Führt eine andere Parameterwahl von A, c_1 unter den gegebenen Umständen zu einem geringeren quadratischen Fehler (Begründung)?
- e) Es soll untersucht werden, ob der Modellansatz

$$F_R(t) = m \left[A - \frac{c_1}{\sqrt{t}} + \frac{2c_2 T}{3} t (\sigma(t) - \sigma(t - T)) \right], \quad T > 0,$$

für die Schätzung besser geeignet ist. Die Faktoren A, c_1, c_2 sollen erneut geschätzt werden. Ist eine weitere LS-Schätzung mit dem neuen Ansatz zu den gegebenen Zeitpunkten der Tabelle $M/2$ sinnvoll? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung

- a) Am Fahrzeug greifen folgende Kräfte parallel zum Hang an:

- die Hangabtriebskraft $F_H = mg \sin \alpha$.
- Die Reibungskraft $F_R = f mg \cos \alpha$, welche entgegengesetzt der Hangabtriebskraft wirkt.
- Die Beschleunigungskraft $F_R(t) = m[A - c_1/\sqrt{t} + c_2 t^2 (\sigma(t) - \sigma(t - T))]$.

Insgesamt ergibt sich die Kräftegleichung zu

$$F_{ges}(t) = F_H - F_R + F_R(t) = mg \sin \alpha - f mg \cos \alpha + m \left[A - \frac{c_1}{\sqrt{t}} + c_2 t^2 (\sigma(t) - \sigma(t - T)) \right]. \quad (1)$$

Nach der Grundgleichung der Mechanik gilt weiterhin

$$a(t) = \frac{F_{ges}(t)}{m} = g \sin \alpha - f g \cos \alpha + A - \frac{c_1}{\sqrt{t}} + c_2 t^2 [\sigma(t) - \sigma(t - T)]. \quad (2)$$

Die Integration der Beschleunigung führt auf die Geschwindigkeit, $v(t) = a(t)$. Folglich ergibt sich

$$v(t) = \int_0^t a(\tau) d\tau = \begin{cases} (g \sin \alpha - f g \cos \alpha + A)t - 2c_1 \sqrt{t} + \frac{1}{3} c_2 t^3 & \text{für } 0 \leq t \leq T, \\ (g \sin \alpha - f g \cos \alpha + A)t - 2c_1 \sqrt{t} + \frac{1}{3} c_2 T^3 & \text{für } t \geq T. \end{cases} \quad (3)$$

- b) Der LS-Ansatz in Matrixform lautet

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T/n & \sqrt{T/n} & (T/n)^3 \\ 2T/n & \sqrt{2T/n} & (2T/n)^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ T & \sqrt{T} & T^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g \sin \alpha - f g \cos \alpha + A \\ -2c_1 \\ c_2/3 \end{pmatrix}$$

- c) Für Meßzeitpunkte $t_i \geq T$ gilt

$$v(t) = (g \sin \alpha - f g \cos \alpha + A)t - 2c_1 \sqrt{t} + \frac{1}{3} c_2 T^3,$$

oder mit eingesetzten Werten

$$v(t) = At - 2c_1 \sqrt{t} + 12.5.$$

Dies führt auf den LS-Ansatz

$$\begin{pmatrix} v_1 - 12.5 \\ v_2 - 12.5 \\ v_3 - 12.5 \\ v_4 - 12.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.5 \\ 14 \\ 19 \\ 23.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{5} \\ 10 & \sqrt{10} \\ 15 & \sqrt{15} \\ 20 & \sqrt{20} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ -2c_1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{v} - 12.5 = \Psi \hat{\mathbf{a}}.$$

Die Berechnung der Schätzmatrix ergibt

$$(\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T = \begin{bmatrix} -0.138 & -0.080 & 0.010 & 0.117 \\ -0.571 & 0.369 & 0.039 & -0.356 \end{bmatrix}.$$

Für den Schätzvektor folgt

$$\hat{\mathbf{a}} = (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T \cdot (\mathbf{v} - 12.5) = \begin{pmatrix} 0.367 \\ 3.522 \end{pmatrix}$$

und somit die Schätzung $A = 0.367, c_1 = -1.761$.

- d) Unter der Annahme, daß die geschätzten Parameter der Wirklichkeit entsprechen, gilt für die reale Geschwindigkeit:

$$v(t) = 0.367t + 3.522\sqrt{t} + 12.5.$$

Dies führt zu

t	$t_1 = T$	$t_2 = 2T$	$t_3 = 3T$	$t_4 = 4T$
$v_{gemessen}(t)$	23	26.5	31.5	36
$v_{real}(t)$	22.210	27.308	31.646	35.591

Der quadratische Fehler wird zu $\epsilon^2(t) = 1.466$. Ein kleinerer Wert kann nicht erzielt werden, da der LS-Schätzer genau diesen quadratischen Fehler über die freien Parameter minimiert!

- e) Eine weitere LS-Schätzung ist nicht sinnvoll. Bei der zweiten Meßreihe $M/2$ liegen die Meßzeitpunkte später als $t = T$. Da der den Faktor c_2 enthaltene Term in die Geschwindigkeitsgleichung für Zeitpunkte $t \geq T$ ebenfalls mit $v(t) = \dots + \frac{1}{3} c_2 T^3$ eingeht, zeigen beide Modelle im LS-Ansatz für $t \geq T$ keine Unterschiede auf.

Punkteverteilung: 5-2-6-3-2

Aufgabe 2: Korrelation (20 Punkte)

Gegeben sei ein stochastischer Prozeß $X(t, \xi) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} X_i(\xi) \delta(t - iT)$, $T > 0$. Die Zufallsvariablen $X_i(\xi)$ seien voneinander unabhängig und normalverteilt mit Erwartungswert $\mu_i > 0$ und Varianz σ_i^2 , also $X_i(\xi) \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$.

- a) Bestimmen Sie die Autokorrelationsfunktion $R_{XX}(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\}$.

Hinweis: Überlegen Sie, welche Terme von $X(t, \xi)$ aus der Erwartungswertbildung herausgezogen werden können.

- b) Ist der Prozeß X schwach stationär, d.h. gilt $R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_1 + \tau, t_2 + \tau)$, $\forall \tau \in \mathbb{R}$? Begründen Sie Ihre Antwort!

- c) Ein weiterer stochastischer Prozeß Y besitze die ähnliche Form

$$Y(t, \xi) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} X_i(\xi) [\sigma(t - iT) - \sigma(t - (i+1)T)], \quad T > 0.$$

Dabei bezeichnet $\sigma(t)$ die Sprungfunktion, also $\sigma(t) = 1 \quad \forall t > 0$ sowie 0 sonst. Bestimmen Sie die Autokorrelationsfunktion $R_{YY}(t_1, t_2)$.

- d) Sind die Prozesse $X(t, \xi)$ und $Y(t, \xi)$ unkorreliert, d.h. gilt

$$E\{X(t_1, \xi)Y(t_2, \xi)\} = E\{X(t_1, \xi)\}E\{Y(t_2, \xi)\} \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}?$$

Begründen Sie Ihre Antwort!

- e) Unter welcher der folgenden Bedingungen A)-D) besitzt der Prozeß Y schwache Stationarität:

A) $\forall i, j \in \mathbb{K} : \mu_i = \mu_j$ und $\sigma_i^2 = e^{-|i|}$?

B) $\forall i, j \in \mathbb{K} : \mu_i = \mu_j$ und $\sigma_i^2 = 0$?

C) $\mu_i = e^{-|i|}$ und $\forall i, j \in \mathbb{K} : \sigma_i^2 = \sigma_j^2$?

Berechnen Sie im Falle der Stationarität ebenfalls das Leistungsdichtespektrum von Y .

Lösung

- a) Es gilt

$$\begin{aligned} R_{XX}(t_1, t_2) &= E\{X(t_1)X(t_2)\} \\ &= E\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty} X_i(\xi) \sum_{j=-\infty}^{\infty} X_j(\xi) \delta(t_1 - iT) \delta(t_2 - jT)\right\} \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(t_1 - iT) \delta(t_2 - jT) E\{X_i(\xi)X_j(\xi)\} \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(t_1 - iT) \delta(t_2 - jT) [\mu_i \mu_j + \sigma_i^2 \delta_{ij}]. \end{aligned}$$

- b) Der Prozeß X ist nicht schwach stationär, denn es gilt nicht $R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_1 + \tau, t_2 + \tau)$. Gegenbeispiel: Für $t_1 = t_2 = 0$ und $\tau = T/2$ ergibt sich:

$$R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(0, 0) = \mu_0^2 + \sigma_0^2 \neq R_{XX}(t_1 + \tau, t_2 + \tau) = R_{XX}(T/2, T/2) = 0.$$

- c) Analog den Berechnungen aus Teilaufgabe a) folgt für die Autokorrelationsfunktion von Y :

$$R_{YY}(t_1, t_2) = E\{Y(t_1)Y(t_2)\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} [\sigma(t_1 - iT) - \sigma(t_1 - (i+1)T)][\sigma(t_2 - jT) - \sigma(t_2 - (j+1)T)][\mu_i \mu_j + \sigma_i^2 \delta_{ij}]$$

- d) X und Y sind normalerweise nicht unkorreliert, denn $X(t, \xi)$ greift zu dem Zeitpunkt $t_i := iT$ auf dieselbe Zufallsvariable $X_i(\xi)$ zu wie $Y(t, \xi)$ zu dem Zeitpunkt $t_{i-1} := (i-1)T$. So gilt

$$E\{X(t_i)Y(t_{i-1})\} = E\{X_i^2\} = \mu_i^2 + \sigma_i^2,$$

$$\text{jedoch } E\{X(t_i)\}E\{Y(t_{i-1})\} = E\{X_i\}^2 = \mu_i^2.$$

- e) Anmerkung: Die Funktion $\sigma(t - iT) - \sigma(t - (i+1)T)$ besitzt das Aussehen nach Abb. 2. Somit folgt $\sum_{i=-\infty}^{\infty} [\sigma(t - iT) - \sigma(t - (i+1)T)] = 1$. Entsprechend nimmt für $t_1 \in (iT, (i+1)T]$, $t_2 \in (jT, (j+1)T]$ die Autokorrelationsfunktion den Wert $R_{YY}(t_1, t_2) = \mu_i \mu_j + \sigma_i^2 \delta_{ij}$ an.

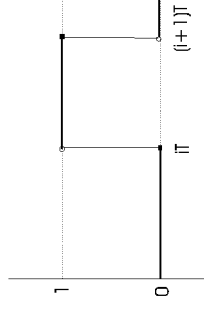


Bild 2: Die Funktion $\sigma(t - iT) - \sigma(t - (i+1)T)$

Für die einzelnen Normalverteilungen folgt:

- A) Keine schwache Stationarität. Gegenbeispiel:

$$R_{YY}(1/2, 1/2) = \mu_0^2 + 1 \neq R_{YY}(3/2, 3/2) = \mu_0^2 + e^{-1}.$$

- B) Schwache Stationarität.

Beweis: Für $t_1 \in (iT, (i+1)T]$, $t_2 \in (jT, (j+1)T]$ sowie $t_1 + \tau \in (kT, (k+1)T]$, $t_2 + \tau \in (lT, (l+1)T]$ folgt

$$R_{YY}(t_1, t_2) = \mu_i \mu_j = \mu_k \mu_l = R_{YY}(t_1 + \tau, t_2 + \tau).$$

- C) Keine schwache Stationarität. Gegenbeispiel:

$$R_{YY}(1/2, 1/2) = 1 + \sigma_0^2 \neq R_{YY}(3/2, 3/2) = e^{-1} + \sigma_0^2.$$

Für Fall B) ergibt sich das Leistungsdichtespektrum zu

$$S_{YY}(f) = \mathcal{F}\{R_{YY}(t_1 - t_2)\} = \mathcal{F}\{\mu_0^2\delta(f)\} = \mu_0^2\delta(f).$$

Punkteverteilung: 5-3-3-4-5

Aufgabe 3: Dynamische Optimierung eines Meßsystems (14 Punkte)

Gegeben sei ein Meßsystem mit Impulsantwort $g(t)$, dessen dynamisches Verhalten durch Serien-schaltung eines Kompensationsgliedes $g_K(t)$ und einer Rückkopplung optimiert werden soll, siehe Bild 3.

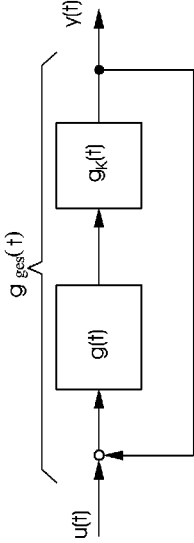


Bild 3: Anordnung zur dynamischen Optimierung des Meßsystems

Für die Impulsantwort des Meßsystems gelte

$$g(t) = \frac{C}{T} e^{-t/T} \sigma(t), \quad T, C > 0,$$

für die Impulsantwort des Kompensationsgliedes

$$g_K(t) = V[\delta(t) + (s_1 - s_0)e^{s_1 t} \sigma(t)], \quad V > 0, \quad s_0, s_1 \in \mathbb{C}.$$

Weitere Einflußgrößen sollen nicht vorhanden sein.

- Es werden Stabilitätsbetrachtungen durchgeführt. Ist das Meßsystem $g(t)$ stabil? Welche Forderung muß an die freien Parameter s_0, s_1 des Kompensationsgliedes $g_K(t)$ gestellt werden, damit dieses ein stabiles Verhalten aufweist? Geben Sie bitte jeweils eine Begründung zu Ihren Antworten an!
- Der Optimierungsparameter s_0 soll für den Rest der Aufgabe auf $s_0 = -1/T$ festgelegt werden. Bei welchen Werten von s_1 besitzt das Gesamtsystem $g_{ges}(t)$ ein stabiles Verhalten?
- Am Eingang des Systems liegt nun ein Signal $u_1(t) = e^{\alpha t} \sigma(t)$ mit reellem $\alpha \leq 0$ an. Berechnen Sie die Laplacetransformierte $Y(s)$ des Ausgangssignals $y(t)$. Pendelt sich $y(t)$ auf einen stationären Wert ein, falls der Realteil von s_1 negativ gehalten werden soll? Falls ja, wie groß ist dieser, falls nein, geben sie eine Begründung für das Verhalten an!

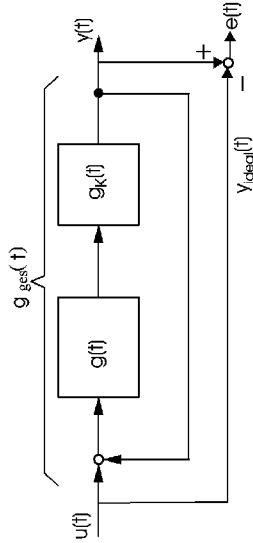


Bild 4: Anordnung zur Fehleranalyse

- Nun liegt am Eingang des Systems ein Impuls der Form $u_2(t) = A\delta(t)$ vor, $A \in \mathbb{R}$. Eine Fehleranalyse des Systems soll vollzogen werden, indem das vorhandene Ausgangssignal $y(t)$

mit dem idealen Ausgangssignal $y_{ideal}(t) = u_2(t)$ verglichen wird, s. Bild 4. Berechnen Sie den Integranden $E(s)E(-s)$, welcher sich bei dem Kriterium *Quadratisches Fehlerintegral* für die Gütefunktion

$$Q = \int_0^\infty e^{2t} dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} E(s)E(-s) ds$$

ergibt. Stellen Sie hierzu den Fehler $E(s)$ in der Form

$$E(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i s^i}{\sum_{j=0}^m b_j s^j}$$

dar.

Lösung

- Damit Systeme ein stabiles Verhalten aufweisen, müssen die Polstellen der Übertragungsfunktion $G(s)$ in der offenen linken Halbebene liegen. Mit Hilfe der Korrespondenzen

$$g(t) \leftrightarrow G(s) = \frac{C}{T(s + 1/T)} = \frac{C}{1 + Ts},$$

$$g_K(t) \leftrightarrow G_K(s) = V[1 + (s_1 - s_0) \frac{1}{s - s_1}] = V \frac{s - s_0}{s - s_1}$$

folgt, daß $g(t)$ stabil ist. Die Parameter s_0, s_1 müssen die Forderung $\text{Re}(s_1) < 0$ oder $s_0 = s_1$ für Stabilität von $g_K(t)$ erfüllen.

- Es ist

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)G_K(s)[U(s) - Y(s)] \\ \Leftrightarrow Y(s) &= \frac{G(s)G_K(s)}{1 + G(s)G_K(s)} U(s) = G_{ges}(s)U(s). \end{aligned}$$

Die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems ergibt sich somit zu

$$G_{ges}(s) = \frac{G(s)G_K(s)}{1 + G(s)G_K(s)} = \frac{CV(s - s_0)}{T(s + 1/T)(s - s_1) + CV(s - s_0) + V}.$$

Ein stabiles Gesamtsystem liegt bei

$$\text{Re}(s_1) < -\frac{VC}{T} \quad \text{vor.} \quad (4)$$

- Die Laplacetransformation des Eingangssignals liefert

$$U_1(s) = \frac{1}{s - \alpha}.$$

Für $Y(s)$ folgt

$$Y(s) = \frac{VC}{[T(s - s_1) + VC](s - \alpha)}.$$

Sei $\alpha < 0$: Mit Hilfe des Endwertsatzes der Laplacetransformation pendelt sich das System auf den stationären Wert Null ein, denn es gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = 0.$$

$$sY(s) = \frac{o(s)}{\alpha(Ts_1 - VC) + o(s)} \rightarrow 0 \quad (s \rightarrow 0).$$

Dabei beschreibt $o(s)$ die Landau-Symbolik, also eine bel. $f(s)$ mit $\lim_{s \rightarrow 0} \left| \frac{f(s)}{s} \right| = 0$.

Sei $\alpha = 0$; Bei konstantem Eingangssignal ergibt sich als stationäre Wert

$$sY(s) = \frac{VC}{T(s - s_1) + VC} \rightarrow \frac{VC}{VC - Ts_1}, \quad s \rightarrow 0.$$

d) Es ist $E(s) = Y(s) - Y_{ideal}(s)$ sowie

$$Y(s) = \frac{AVC}{T(s - s_1) + VC}.$$

Hiermit folgt

$$E(s) = \frac{ATs_1 - ATs}{(VC - Ts_1) + Ts} =: \frac{a_0 + a_1s}{b_0 + b_1s} = \frac{A(s)}{B(s)}.$$

Für den Integranden folgt mittels

$$E(s)E(-s) = \frac{a_0^2 - a_1^2s^2}{b_0^2 - b_1^2s^2}$$

das Resultat

$$E(s)E(-s) = \frac{(ATs_1)^2 - (AT)^2s^2}{(VC - Ts_1)^2 - T^2s^2}.$$

Punkteverteilung: 5-4-3-2

Aufgabe 4: Statistik (18 Punkte)

Zur Qualitätssicherung eines bestimmten Produktes wurden aus dem Herstellungsprozeß die folgenden 30 Stichprobenwerte entnommen (Tabelle 1).

1.50	1.70	1.40	2.50	0.30	2.00
2.60	2.70	1.50	1.10	1.20	2.50
1.30	2.40	2.70	2.70	0.50	2.50
2.30	1.80	1.00	2.30	2.10	0.70
1.90	2.90	2.30	2.80	2.20	1.60

Tabelle 1: Stichprobenwerte

- a) Stellen Sie aus den Werten von Tabelle 1 eine Häufigkeitsverteilung auf. Verwenden Sie dazu die folgende Klasseneinteilung und fertigen Sie eine Skizze des Histogramms an. Die y-Achse gibt dabei die relative Häufigkeit der einzelnen Klassen an, d. h. die Gesamtfläche der Kurve besitzt den Wert 1.

Klasse	(0.00, 1.00]	(1.00, 2.00]	(2.00, 2.60]	(2.60, 3.00]
--------	--------------	--------------	--------------	--------------

- b) Es soll untersucht werden, ob die entnommenen Stichprobenwerte einer Verteilung

$$f(x) = \sum_{i=1}^3 ik1_{(i-1,i]}$$

der Zufallsvariablen X folgen. Dabei bezeichnet 1_A die Indikatorfunktion, d. h.

$$1_{(i-1,i]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in (i-1, i], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Welche Bedingung muß für die Konstante k gelten, damit $f(x)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist? Berechnen Sie weiterhin den Erwartungswert von X .

- c) Prüfen Sie, ob die Häufigkeitsverteilung der Stichprobe aus Teilaufgabe a) der Dichtefunktion von X folgt. Verwenden Sie hierzu einen χ^2 -Anpassungstest mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 10%. Verwenden Sie bei der Durchführung die Abbildung 5. Sind die Voraussetzungen zur Durchführung des Tests erfüllt?

- d) Es werde im folgenden angenommen, die Ware folge der Verteilung X . Dabei sollen $1 - \hat{\alpha} = 0.80$ der hergestellten Stücke für die Weiterverarbeitung verwendet werden. Bestimmen Sie das Konfidenzintervall, so daß jeweils $(1 - \hat{\alpha})/2$ aller angenommenen Stücke kleiner bzw. größer als der Erwartungswert $E\{X\}$ sind. Welcher Prozentsatz der untersuchten Stücke aus Tabelle 1 fallen aus dem Intervall heraus?

Lösung

- a) Die Klasseneinteilung der Stichproben lautet wie folgt:

Klasse	(0.00, 1.00]	(1.00, 2.00]	(2.00, 2.60]	(2.60, 3.00]
relative Häufigkeit	4/30	11/30	10/30	5/30

Das zugehörige Histogramm ist in Abb. 6 dargestellt. Damit die Gesamtfläche den Wert 1 ergibt, folgt für den Skalierungsfaktor c :

$$\frac{4}{30} \cdot c \cdot 1 + \frac{11}{30} \cdot c \cdot 1 + \frac{10}{30} \cdot c \cdot \frac{6}{10} + \frac{5}{30} \cdot c \cdot \frac{4}{10} = 1.$$

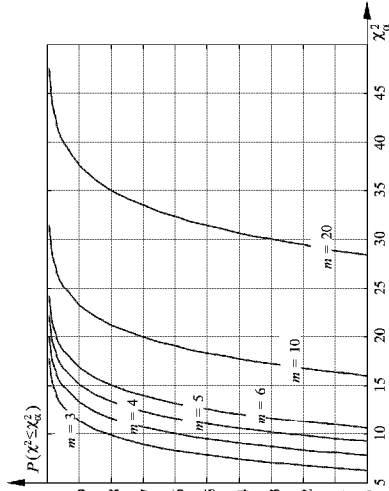


Bild 5: Wahrscheinlichkeit von $\chi^2 \leq \chi^2_\alpha$ bei m Freiheitsgraden

Es folgt $c = 30/23$.

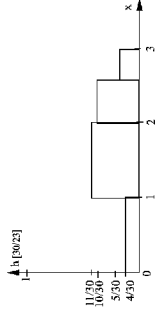


Bild 6: Histogramm der Stichprobe für die gegebenen Klassen

Anmerkung: Da die Klassenbreite nicht konstant ist, wird der Skalierungsfaktor c oft weggelassen. Das entsprechende Schaubild ist ebenfalls unter dem Namen *Histogramm* bekannt.

- b) Für jede beliebige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(x)$ muß gelten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Für die vorgegebene Verteilung muß somit gelten:

$$1k + 2k + 3k = 1 \Rightarrow k = 1/6.$$

Für den Erwartungswert ergibt sich

$$E\{X\} = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = \frac{1}{6} \left[\frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + 2 \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 + 3 \frac{x^2}{2} \Big|_2^3 \right] = \frac{11}{6}.$$

- c) Als Faustregel sollten die inneren Klassen i der Häufigkeitsverteilung die Bedingung $np_i > 5$ erfüllen, für die Randklassen $np_i > 1$ zu prüfen. Die einzelnen Werte von p_i ergeben sich zu

$$p_1 = \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{(0,1]} dx = \frac{1}{6}, p_2 = \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{\infty} 2 \mathbf{1}_{(1,2]} dx = \frac{1}{3},$$

$$p_3 = \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{\infty} 3 \mathbf{1}_{(2,6]} dx = \frac{3}{10} p_4 = \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{\infty} 3 \mathbf{1}_{(2,6,3]} dx = \frac{2}{10}$$

Wegen $np_1 = 5$, $np_2 = 10$, $np_3 = 9$, $np_4 = 6$ ist eine Durchführung des Tests sinnvoll. Folgende Werte ergeben sich bei dem χ^2 -Anpassungstest mit Stichprobenumfang $n = 30$:

n_i	4	11	10	5
p_i	1/6	1/3	3/10	2/10
np_i	5	10	9	6
$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$	1/5	1/10	1/9	1/6

$$\chi^2 \approx \sum_{i=1}^4 \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = 26/45 \quad (\approx 0.578).$$

Aus der Irrtumswahrscheinlichkeit α von 10% folgt ein Signifikanzniveau von:

$$P(\chi^2 \leq \chi^2_\alpha) \leq 0.90 = 1 - \alpha$$

Man entnimmt dem Schaubild (s. Meßtechnik-Buch) für den χ^2 -Anpassungstest mit $k = 4$ Klassen und $m = k - 1 = 3$ Freiheitsgraden den Wert $\chi^2_\alpha \approx 6.3$. Wegen

$$\chi^2 \leq \chi^2_\alpha$$

wird die Hypothese (vorgegebene Dichtefunktion liegt zugrunde) angenommen.

- d) 40% der Ware sollen unter bzw. über dem Erwartungswert $E\{X\} = 11/6$ liegen. Die Bestimmung der linken Intervallgrenze c_1 erfolgt über

$$\int_1^{11/6} f(x)dx = \frac{5}{18} = 0.277 \Rightarrow \int_{c_1}^1 f(x)dx \stackrel{!}{=} 0.400 - 0.277 = 0.123,$$

woraus $c_1 = 0.262$ folgt.

Entsprechend gilt

$$\int_{11/6}^2 f(x)dx = \frac{1}{18} = 0.056 \Rightarrow \int_2^{c_2} f(x)dx \stackrel{!}{=} 0.400 - 0.056 = 0.344$$

und $c_2 = 2.688$. Für die untersuchte Stichprobe ergeben sich 5 Ausfälle, also $1/6 = 16.66\%$ Stücke werden aussortiert.

Punkteverteilung: 3-5-6-4

Rechen-Aufgaben

Aufgabe 1: Meßsysteme/LS-Schätzer (18 Punkte)

Gegeben sei ein elektrisches Schaltbild nach Abbildung 1. Dabei stellt U_0 eine konstante Gleichspannungsquelle dar, das Meßgerät zur Messung des Stroms $I_{ges}(\vartheta)$ sei von der Temperatur ϑ abhängig und besitze den Widerstand $R_M(\vartheta)$. Die weiteren Widerstände R_1, R_2, R_3 werden als konstant angenommen.

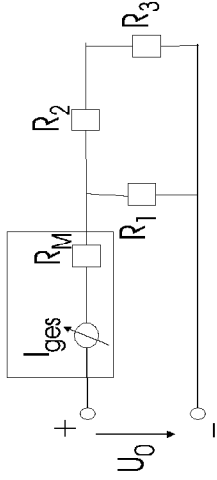


Bild 1: Elektrisches Schaltbild.

- Berechnen Sie den Gesamtstrom $I_{ges}(\vartheta)$ in Abhängigkeit von der Temperatur ϑ .
- Für den weiteren Verlauf der Aufgabe gelte $R = R_1/2 = R_2 = R_3$ sowie $R_M(\vartheta) = a\vartheta + b\vartheta^2$. Berechnen Sie die physikalische Kennlinie $I_{ges}(\vartheta)$ des Strommessers in Abhängigkeit dieser Werte.
- Es ist eine linearisierte Darstellung der Meßkennlinie in Umgebung der Normtemperatur ϑ_0 erwünscht. Nähern Sie dazu $I_{ges}(\vartheta)$ über das Taylorpolynom 1. Grades, $I_{lin}(\vartheta)$, um den Arbeitspunkt ϑ_0 herum an.
- Folgende Werte sollen gegeben sein: $U_0 = 121$, $R = 1$, $a = 1/10$, $b = 1/1000$ sowie die Normtemperatur $\vartheta_0 = 300$. Stellen Sie unter Verwendung dieser Angaben die Gesamtstromstärke $I_{ges}(\vartheta)$ sowie die im letzten Aufgabenteil gefundene Näherung $I_{lin}(\vartheta)$ dar.
- Eine zusätzliche Linearisierung der Meßkennlinie soll mittels Regression erfolgen. Die Regressionsgerade soll dabei in der Form $I_{reg}(\vartheta - \vartheta_0) = m(\vartheta - \vartheta_0) + c$ mit den unbekannten Parametern m, c dargestellt werden. Stellen Sie den LS-Schätzer unter Verwendung der nachfolgenden Tabelle auf und berechnen Sie die unbekannten Parameter m, c . Runden Sie dabei alle Zwischenergebnisse auf 3 Nachkommastellen.

Index i	1	2	3
$\vartheta_i - \vartheta_0$	-20	0	20
$I = I(\vartheta_i - \vartheta_0)$	1.200	1.100	0.900

- Welche der Geraden $I_{reg}(\vartheta)$, $I_{lin}(\vartheta)$ besitzt den geringeren quadratischen Abstand zur physikalischen Kennlinie $I_{ges}(\vartheta)$ im Normpunkt ϑ_0 (Begründung). Welche der Geraden $I_{reg}(\vartheta)$, $I_{lin}(\vartheta)$ besitzt die geringere Summe von quadratischen Abweichungen in den vorhandenen 3 Meßpunkten $\vartheta - \vartheta_0 = -20, 0, 20$. Geben Sie ebenfalls eine kurze Begründung.

- Es ergibt sich das Ersatzschaltbild nach Abbildung 2. Dabei gilt für den Widerstand R_e :

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3} = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_1(R_2 + R_3)}$$

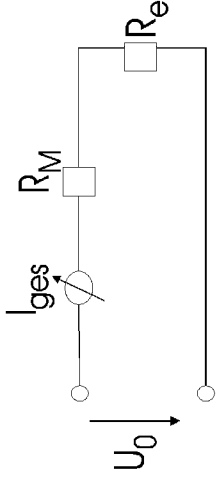


Bild 2: Ersatzschaltbild.

Damit folgt

$$R_{ges}(\vartheta) = R_M(\vartheta) + R_e = \frac{R_M(\vartheta)(R_1 + R_2 + R_3) + R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

sowie

$$I_{ges}(\vartheta) = \frac{U_0}{R_{ges}(\vartheta)} = \frac{U_0(R_1 + R_2 + R_3)}{R_M(\vartheta)(R_1 + R_2 + R_3) + R_1(R_2 + R_3)}$$

- Unter Verwendung der gegebenen Werte ergibt sich

$$I_{ges}(\vartheta) = \frac{U_0}{R_{ges}(\vartheta)} = \frac{U_0(4R)}{(a\vartheta + b\vartheta^2)4R + 4R^2} = \frac{U_0}{a\vartheta + b\vartheta^2 + R}$$

- Es ist $I_{lin}(\vartheta) = I_{ges}(\vartheta_0) + I'_{ges}(\vartheta_0)(\vartheta - \vartheta_0)$. Mit

$$I'_{ges}(\vartheta) = \frac{-U_0(a + 2b\vartheta)}{(a\vartheta + b\vartheta^2 + R)^2}$$

folgt als linearisierte Kennlinie

$$I_{lin}(\vartheta) = \frac{U_0}{a\vartheta_0 + b\vartheta_0^2 + R} - \frac{U_0(a + 2b\vartheta_0)}{(R + a\vartheta_0 + b\vartheta_0^2)^2}(\vartheta - \vartheta_0).$$

- Es gilt

$$I_{ges}(\vartheta) = \frac{121}{(\vartheta/10) + (\vartheta^2/1000) + 1},$$

$$I_{lin}(\vartheta) = 1 - \frac{7}{1210}(\vartheta - 300).$$

- Der LS-Ansatz in Matrixform lautet

$$\begin{pmatrix} 1.200 \\ 1.100 \\ 0.900 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 1 \\ 0 & 1 \\ 20 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ c \end{pmatrix}$$

Es folgt mit Hilfe von

$$(M^T * M)^{-1} * M^T = \begin{pmatrix} -0.025 & 0 & 0.025 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 \end{pmatrix}$$

für die gesuchten Parameter

$$\begin{pmatrix} m \\ c \end{pmatrix} = (M^t * M)^{-1} * M^t \hat{I} = \begin{pmatrix} -0.008 \\ 1.067 \end{pmatrix}$$

Demnach ist $I_{reg}(\vartheta - \vartheta_0) = -0.008(\vartheta - 300) + 1.067$.

- f)** Im Entwicklungspunkt ϑ_0 stimmt die Taylorentwicklung mit der physikalischen Kennlinie überein, hat folglich die geringere Abweichung. Bezüglich der Summe der quadratischen Abweichungen ist der LS-Schätzer $I_{reg}(\vartheta)$ ideal und $I_{lin}(\vartheta)$ vorzuziehen.

Punkteverteilung: 3-1-3-2-5-4.

Aufgabe 2: Interpolationsaufgabe (18 Punkte)

Zur Bestimmung der physikalischen Kennlinie $y(p)$ eines Drucksensors stehen folgende Meßauswertungen zu Verfügung:

Index i	0	1	2
p_i	1	2	4
$y_i \approx y(p_i)$	0.000	0.700	1.400

- a)** Berechnen Sie das Interpolationspolynom $\hat{y}_N(p) = a_0 + a_1(p - p_0) + a_2(p - p_0)(p - p_1)$ mit Hilfe des Newton-Interpolationsverfahrens. Wie lauten die Parameter a_0, a_1, a_2 ? Alle Zwischenergebnisse sind auf 3 Nachkommastellen zu runden.

Hinweis: Bei nicht-äquidistantem Stützstellenabstand ergeben sich die Werte im Differenzen-schema zu

$$\Delta^0 y_k = y_k, \Delta^{i+1} y_k = \frac{\Delta^i y_{k+1} - \Delta^i y_k}{p_{k+i+1} - p_k}, a_i = \Delta^i y_0, \quad k = 0, 1, 2.$$

- b)** Eine weitere Festlegung der Kennlinie soll über die kubische Spline-Interpolation erfolgen. Für eine genauere Bestimmung wird dazu ein zusätzlicher Meßwert $\hat{y}_3 = 1.100$ an der Stelle $\hat{p}_3$ gewonnen, also:

Index j	0	1	2	3
$\hat{p}_j$	1	2	3	4
$\hat{y}_j \approx y(\hat{p}_j)$	0.000	0.700	1.100	1.400

Stellen Sie das lineare Gleichungssystem zur Berechnung der Werte $\hat{y}_j^*$, $j = 1, 2$, auf, welche zur Berechnung der Spline-Polynome $s_j(p) = a_j(p - \hat{p}_j)^3 + b_j(p - \hat{p}_j)^2 + c_j(p - \hat{p}_j) + d_j$ benötigt werden. Welche Werte besitzen y_0^* und y_3^* ? Berechnen Sie anschließend für $j = 0, 1$ die Werte a_j, b_j, c_j, d_j und daraus $s_j(p)$, $j = 0, 1$.

- c)** Was ergibt ein Vergleich der 2. Ableitungen von $s_0(p)$ und $s_1(p)$ an der Stelle $p_1 = 2$? Desweiteren set die physikalische Kennlinie des Drucksensors über die Werte $\hat{y}_i$ fehlerfrei abgetastet worden, $\hat{y}_i = y(\hat{p}_i)$. Stimmt unter dieser Annahme die 1. Ableitung der physikalischen Kennlinie mit den 1. Ableitungen der Spline-Polynome an den Stützstellen $\hat{p}_0, \hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3$ überein?
- d)** Wie lautet das neue Interpolationspolynom $y_N(p)$ vom Grad 3 bezüglich der Abtastwerte $\hat{y}_i$, $i = 0, 1, 2, 3$?
- e)** Es wird ein Vergleich der Spline-Interpolation mit der Newton-Interpolation vorgenommen. Stimmen die beiden Kurve überein? Was ergibt sich speziell für die Funktionswerte und die ersten beiden Ableitungen an den Stützstellen?

Lösung

- a)** Das Newton-Differenzenschema ergibt

	$\Delta^0 y$	$\Delta^1 y$	$\Delta^2 y$
$p_0 = 1$	0.000		
$p_1 = 2$	0.700	0.700	-0.117
$p_2 = 4$	1.400	0.350	

Damit folgt

$$\hat{y}_N(p) = 0.700(p-1) - 0.117(p-1)(p-2) = -0.117p^2 + 1.051p - 0.934.$$

b) Das LGS ergibt sich zu

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{y}_1'' \\ \hat{y}_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.8 \\ -0.6 \end{pmatrix}$$

und damit $(\hat{y}_1'', \hat{y}_2'') = (-0.4 \pm 0, -0.040)$. Die Randbedingungen lauten $\hat{y}_0'' = \hat{y}_3'' = 0$. Bei $j = 0$ folgt für die Parameter:

$$a_0 = -0.073, \quad b_0 = 0, \quad c_0 = 0.773, \quad d_0 = 0.$$

Damit folgt

$$s_0(p) = -0.073(p-1)^3 + 0.773(p-1) = -0.073p^3 + 0.219p^2 + 0.554p - 0.700.$$

Analog berechnet sich für $j = 1$:

$$a_1 = 0.067, \quad b_1 = -0.220, \quad c_1 = 0.553, \quad d_1 = 0.700.$$

Damit folgt

$$s_1(p) = 0.067(p-2)^3 - 0.220(p-2)^2 + 0.553(p-2) + 0.700.$$

c) Bei der Spline-Interpolation stimmen die ersten beiden Ableitungen der angrenzenden Intervalle an der Stützstelle überein, also $s_0'(2) = s_1'(2)$. Jedoch müssen die Ableitungen nicht gleich der Ableitung der physikalischen Kennlinie sein. Wie zu sehen ist, erfolgt die Spline-Interpolation allein über die Werte der Kennlinie an den Stützstellen, egal welches Aussehen die Kurve in der Umgebung besitzt.

d) Unter Hinzunahme des neuen Meßwertes an der Stelle $\hat{p}_2 = 3$ kann das Differenzenschema aus Teilaufgabe (a) fortgesetzt werden:

	$\Delta^0 y$	$\Delta^1 y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
$\hat{p}_0 = \hat{p}_0 = 1$	0.000			
$\hat{p}_1 = \hat{p}_1 = 2$	0.700	0.700	-0.117	
$\hat{p}_2 = \hat{p}_3 = 4$	1.400	0.350	-0.050	0.034
$\hat{p}_3 = \hat{p}_2 = 3$	1.100	0.300		

Damit folgt das neue Interpolationspolynom

$$y_N(p) = 0.034(p-1)(p-2)(p-4) + \hat{y}_N(p).$$

e) Die Kurven stimmen i.a. nicht überein. An den Stützstellen werden die Meßwerte in beiden Verfahren interpoliert, sind also identisch. Für die Ableitungen liefern die Verfahren in den Stützstellen i.a. unterschiedliche Werte.

Punkteverteilung: 4-5-3-3-3

Aufgabe 3: Stochastische Signale (20 Punkte)

Im Rahmen einer Meßauswertung sollen zwei Zufallsgrößen X, Y näher analysiert werden. Die gemeinsame Dichte der beiden Größen ist bekannt:

$$f(x, y) = K 1_B(x, y), \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < 1, \quad y - 2 < x < y\}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Die Variable 1_B bezeichnet hierbei die Indikatorfunktion, also

$$1_B(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in B, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Skizzieren Sie den Bereich, in welchem die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen ungleich Null ist.
- Geben Sie den Wert der Konstante K an. Begründen Sie Ihre Antwort!
- Berechnen Sie die Randdichten $f_X(x), f_Y(y)$ der Zufallsvariablen X, Y . Berechnen und skizzieren Sie zudem den Verlauf der dazugehörigen Verteilungsfunktionen.
- Berechnen Sie die Erwartungswerte $E\{X\}, E\{Y\}, E\{XY\}$. Sind die Variablen X, Y voneinander unabhängig (Begründung)?
- Besitzen die Variablen X, Y einen positiven Korrelationskoeffizienten, einen negativen Korrelationskoeffizienten oder nimmt dieser den Wert Null an? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe der Skizze aus Teil a).
- Eine Meßauswertung des Variablenpells (X, Y) ergibt die voneinander unabhängigen Wertepaare $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n-1}$. Geben Sie hiermit einen erwartungstreuen Schätzer S_n für die Funktion $f(X, Y) = XY$ an. Welche Gründe für eine Vergrößerung des Stichprobenumfangs n gibt es, obwohl der Schätzer S_n für alle $n \in \mathbb{N}$ erwartungstreu ist?

Lösung

a) Die gemeinsame Dichte $f(x, y)$ nimmt im schraffierten Bereich den Wert 1 an, ansonsten den Wert 0.

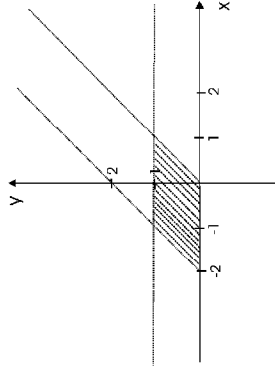


Bild 3: Wertebereich der gemeinsamen Dichte

b) Damit $f(x, y)$ eine Dichte ist, muß $\int \int f(x, y) dx dy = 1$ gelten. Die schraffierte Fläche aus Abbildung 3 besitzt den Wert 2, folglich gilt $K = 1/2$.

c) Die Berechnung der Randdichten ergibt:

$$f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} 1_B(x,y) dy = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -2 \text{ und } x > 1, \\ (x+2)/2 & \text{für } -2 \leq x < -1, \\ 1/2 & \text{für } -1 \leq x < 0, \\ (1-x)/2 & \text{für } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} 1_B(x,y) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } y < 0 \text{ und } y > 1, \\ 1 & \text{für } 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Mit

$$F_X(x) = \int_{t=-\infty}^x f_X(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -2, \\ x^2/4 + x + 1 & \text{für } -2 \leq x \leq -1, \\ x/2 + 3/4 & \text{für } -1 \leq x \leq 0, \\ 3/4 + x/2 - x^2/4 & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y < 0, \\ y & \text{für } -1 \leq y \leq 1, \\ 1 & \text{für } y > 1, \end{cases}$$

ergeben sich folgende Skizzen für die Verteilungsfunktionen $F_X(x)$, $F_Y(y)$:

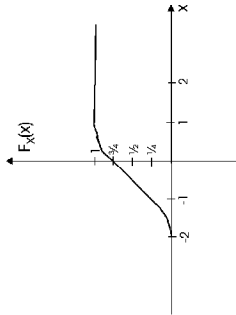


Bild 4: Verteilungsfunktion von X.

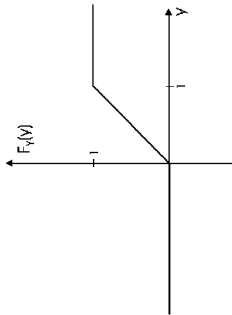


Bild 5: Verteilungsfunktion von Y.

d) Für die Erwartungswerte ergibt sich:

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_{-2}^{-1} \frac{x^2 + 2x}{2} dx + \int_{-1}^0 \frac{x}{2} dx + \int_0^1 \frac{(x-x^2)}{2} dx = \frac{-1}{2}$$
$$E\{Y\} = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^1 y dy = \frac{1}{2}$$

Mit der Beziehung

$$1_B(x,y) = 1_{\{0 \leq y \leq 1\}} 1_{\{y-2 < x < y\}}$$

folgt

$$E\{XY\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x,y) dx dy = \int_{y=0}^1 \frac{y}{2} \int_{x=y-2}^y x dx dy = \frac{-1}{6}.$$

Da $E\{X\}E\{Y\} \neq E\{XY\}$, liegt keine Unabhängigkeit vor!

e) Anhand der Skizze erkennt man, daß bei wachsenden (realisierbaren) Werten von Y die Dichtefunktion von X weiter rechts liegt, deswegen tendenziell ebenfalls zu relativ hohen Werten neigt. Dies impliziert einen positiven Korrelationskoeffizienten.

f) Der Schätzer $S_n := (\sum_{i=0}^{n-1} x_i y_i)/n$ ist erwartungstreu, denn $E\{S_n\} = (\sum_{i=0}^{n-1} E\{X_i Y_i\})/n = E\{XY\}$. Eine Vergrößerung des Stichprobenumfangs hat den Vorteil, daß der Schätzer weniger um den Erwartungswert streut (beispielsweise einzusehen über die Tschbyscheffsche Ungleichung).

Punkteverteilung: 2-2-5-5-3-3

Aufgabe 4: Korrelationsmeßtechnik (14 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden!

- a) Abbildung 6 zeigt drei Zeitsignale $x(t)$ (linke Spalte), deren Autokorrelationsfunktionen $R_{xx}(\tau)$ (mittlere Spalte) und Leistungsdichtespektren $S_{xx}(f)$ (rechte Spalte). Die Bilder sind in ihrer Reihenfolge vertauscht. Ordnen Sie den Zeitfunktionen (I-3) die zugehörigen Autokorrelationsfunktionen (A-C) und die entsprechenden Leistungsdichten (I-III) zu. Geben Sie für Ihre Zuordnung jeweils eine kurze Begründung an.

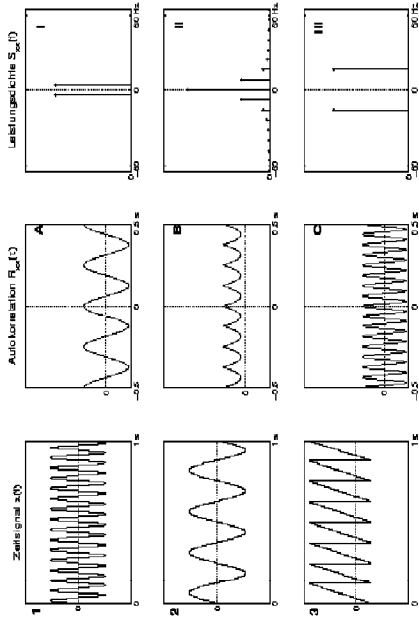


Bild 6: Zeitsignale mit Autokorrelationen und Leistungsdichten.

- b) Es seien für $t \in \mathbb{R}$ die folgenden Meßsignale gegeben:

$$x(t) = \sin(2t) \quad , \quad y(t) = e^{-|t|}.$$

Handelt es sich bei den Signalen um Energiesignale bzw. Leistungssignale (Begründung)? Sind die Korrelationsfunktionen $R_{xx}(\tau)$, $R_{xy}(\tau)$ periodisch? Falls ja, berechnen Sie die Periodendauer (Rechnung).

- c) Gegeben seien die stationären stochastischen Prozesse $x_1(t)$, $x_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Zu verschiedenen Zeitpunkten $t_1 \neq t_2$ seien die Zufallsvariablen $x_1(t_1)$, $x_1(t_2)$ unabhängig, zudem besitze $x_1(0) \sim \mathcal{N}(2, 1)$ Normalverteilung. Für die Kreuzkorrelationsfunktion gelte

$$R_{x_1 x_2}(\tau) = E\{x_1(t + \tau)x_2(t)\} = \frac{4\tau^2 + 3}{3\tau^2 + 5}.$$

Die Signale $x_1(t)$, $x_2(t)$ dienen als Eingangssignale des Meßsystems nach Abb. 7 mit den Ausgängen $y_1(t)$, $y_2(t)$ und den reellen Parametern $A, B \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Kreuzkorrelation $R_{y_1 y_2}(\tau)$. Beachten Sie dabei die Unkorreliertheit stochastischer Prozesse $x_1(t)$, $x_2(t)$ für $|\tau| \rightarrow \infty$.

Hinweis: Stellen Sie $y_i(t)$, $i = 1, 2$, als Funktion der Eingangsgrößen $A, B, x_i(t)$, $i = 1, 2$, dar und berechnen Sie somit die relevanten Größen.

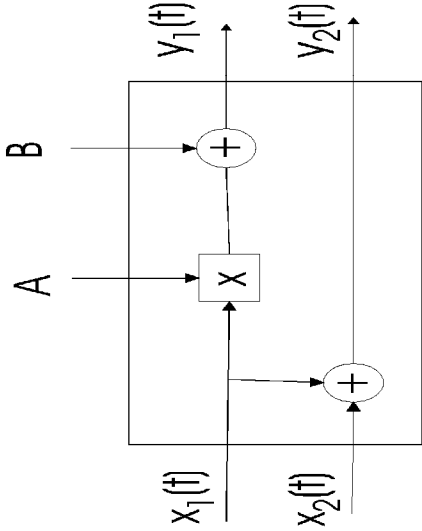


Bild 7: Meßsystem mit Eingängen $x_i(t)$ und Ausgängen $y_i(t)$.

Lösung

- a) Es gilt 1-C-III: Die Frequenz $f_0 = 16\text{ Hz}$ gilt für $x(t)$ und $R_{xx}(\tau)$. Die Fouriertransformation liefert Impulse bei $f = +f_0, -f_0$.
Es gilt 2-A-I: Die Frequenz $f_0 = 4\text{ Hz}$ gilt für $x(t)$ und $R_{xx}(\tau)$. Die Fouriertransformation liefert Impulse bei $f = +f_0, -f_0$.
Es gilt 3-B-II: Ein Offset ist für $x(t)$ sowie $R_{xx}(\tau)$ vorhanden. Dies führt zu $\delta(f)$ im Leistungsdichtespektrum.

- b) $x(t)$ ist Leistungssignal und kein Energiesignal, denn

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \infty, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T x^2(t) dt < \infty$$

$y(t)$ ist Energiesignal wegen $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|t|} dt < \infty$.

Die Autokorrelation $R_{xx}(\tau)$ ist periodisch mit $T = \pi$, denn

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T \sin(2t) \sin(2(t - \tau)) dt.$$

Da $\sin(2(t - \tau)) = \sin(2(t - \tau - k\pi))$, $k \in \mathbb{Z}$, gilt Periodizität mit $T = \pi$.

Die Kreuzkorrelation $R_{xy}(\tau)$ ist periodisch mit $T = \pi$, denn

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(2t) e^{-|t - \tau|} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(2(t + \tau)) e^{-|t|} dt$$

Da $\sin(2(t + \tau)) = \sin(2(t + \tau + k\pi))$, $k \in \mathbb{Z}$, gilt Periodizität mit $T = \pi$.

- c) Für die Kreuzkorrelationsfunktion der Meßausgänge gilt

$$\begin{aligned} R_{y_1 y_2}(\tau) &= E\{y_1(t + \tau)y_2(t)\} = E\{(Ax_1(t + \tau) + B)(x_1(t) + x_2(t))\} \\ &= AR_{x_1 x_1}(\tau) + AR_{x_1 x_2}(\tau) + BE\{x_1(t)\} + BE\{x_2(t)\}. \end{aligned}$$

Die Berechnung der unbekannten Größen ergibt sich zu

$$R_{x_1 x_1}(\tau) = \begin{cases} E^2\{x_1(t)\} = 4 & \text{für } \tau \neq 0, \\ E\{x_1^2(t)\} = Var(x_1(t)) + E^2\{x_1(t)\} = 5 & \text{für } \tau = 0, \end{cases}$$

aufgrund der Unabhängigkeit von $x_1(\cdot)$ zu verschiedenen Zeitpunkten. Weiter gilt

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_{x_1 x_2}(\tau) = \frac{4}{3} = E\{x_1(t)\}E\{x_2(t)\} = 2E\{x_2(t)\}$$

und folglich $E\{x_2(t)\} = 2/3$. Das Einsetzen in $R_{y_1 y_2}(\tau)$ führt zu

$$A \frac{4\tau^2 + 3}{3\tau^2 + 5} + 8B/3 + A \begin{cases} 4 & \text{für } \tau \neq 0, \\ 5 & \text{für } \tau = 0. \end{cases}$$

Punkteverteilung: 3-4-7.

Meßtechnik-Klausur vom 27.09.2002

Rechen-Aufgaben

Aufgabe 1: Zufällige Meßfehler und Korrelation (18 Punkte)

Die Aufgabenteile a)-c) sind unabhängig von den Aufgabenteilen d)-g)

Die Zufallsvariablen $e_1, \dots, e_n$ beschreiben den auftretenden Fehler bei Auswertungen in einem Meßsystem. Dabei sind $e_1, \dots, e_n$ voneinander unabhängig und besitzen identische Verteilungen mit $E\{e_1\} = \mu_e$, $Var(e_1) = \sigma_e^2$.

- a) Es soll der Erwartungswert des Meßfehlers geschätzt werden. Dazu stehen die folgenden beiden Schätzer zu Verfügung:

$$S_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i, \quad S_2 = \frac{1}{2n-2} \sum_{i=1}^{n-1} (e_i + e_{i+1}).$$

Berechnen Sie die Erwartungswerte der beiden Schätzer S_1, S_2 . Sind die Schätzer erwartungstreu?

- b) Welche Werte ergeben sich für die Varianzen $Var(S_1), Var(S_2)$? Welchen Schätzer würden Sie für die Bestimmung des Erwartungswerts vorziehen (Begründung)?

Hinweis: Verwenden Sie die Beziehungen $Var(x) = C_{xx}$ sowie

$$C(\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{j=1}^n y_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{xyij}.$$

- c) In dieser Teilaufgabe wird von einer starren Bindung der Meßfehler mit der Beziehung

$$e_i = e_j, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

ausgegangen. Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen die Varianz des Schätzers S_2 . Was ergibt ein Vergleich der Varianzen beider Schätzer unter der gegebenen starren Bindung.

Hinweis: Wiederum sind die Beziehungen aus Teilaufgabe b) sinnvoll.

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den oberen Fragestellungen.

Die Auswertung eines Signalraumdiagramms ergibt die folgende diskrete zweidimensionale Zufallsvariable:

$$P(x = -1, y = 1) = P(x = 0, y = 1) = P(x = 1, y = -1) = P(x = 0, y = -1) = 1/8, \\ P(x = 1, y = 0) = P(x = -1, y = 0) = 1/4.$$

- d) Zeichnen Sie die Punkte positiver Dichte in der x-y Ebene ein und beschriften Sie diese mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten.
- e) Berechnen Sie $E\{X\}$, $E\{Y\}$, $E\{XY\}$ sowie C_{xy} .
- f) Ist aufgrund der Punktsymmetrie der zweidimensionalen Wahrscheinlichkeitsdichte zum Ursprung eine starre Bindung $x = y$ oder $x = -y$ gegeben? Begründen Sie Ihre Antwort!

- g) Die Meßauswertung einer weiteren Signalraumdarstellung führt auf die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$P(X = 1, Y = 3) = 1/4, \quad P(X = -2, Y = 0) = 3/4.$$

Ist es möglich, daß y aus einer Variablentransformation von x hervorgehen kann, also eine Funktion g besteht mit $g(x) = y$ (Begründung!)?

Lösung

- a) Es gilt

$$E\{S_1\} = \frac{1}{n}nE\{e\} = \mu_e,$$

$$E\{S_2\} = \frac{1}{2n-2} \sum_{i=1}^{n-1} E\{e_i + e_{i+1}\} = \mu_e.$$

Beide Schätzer sind erwartungstreu.

- b) Nach dem Buch *Meßtechnik*, 5. Auflage, Autor: Kiencke, Abschnitt 5.2, gilt $Var(S_1) = \sigma_e^2/n$.

Für den Schätzer S_2 folgt

$$\begin{aligned} Var(S_2) &= \frac{1}{(2n-2)^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n-1} (e_i + e_{i+1})\right) \\ &= \frac{1}{(2n-2)^2} C\left(\sum_{i=1}^{n-1} (e_i + e_{i+1})\right) \left(\sum_{j=1}^{n-1} (e_j + e_{j+1})\right) \\ &= \frac{1}{(2n-2)^2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} C_{(e_i+e_{i+1})(e_j+e_{j+1})}. \end{aligned}$$

Für $i = j$ gilt $C_{(e_i+e_{i+1})(e_j+e_{j+1})} = 2\sigma_e^2$.

Für $|i - j| = 1$ gilt $C_{(e_i+e_{i+1})(e_j+e_{j+1})} = \sigma_e^2$.

Für $|i - j| > 1$ gilt $C_{(e_i+e_{i+1})(e_j+e_{j+1})} = 0$.

Damit folgt für die Varianz:

$$\begin{aligned} Var(S_2) &= \frac{1}{(2n-2)^2} [(n-1)2\sigma_e^2 + 2(n-2)\sigma_e^2] \\ &= \frac{2(n-1) + 2n-4}{4(n-1)^2} \sigma_e^2 = \frac{2n-3}{2(n-1)^2} \sigma_e^2. \end{aligned}$$

Beide Schätzer sind erwartungstreu und die Varianz strebt für $n \rightarrow \infty$ jeweils proportional zu $1/n$ gegen 0. Da der Schätzer S_1 leichter handzuhaben ist, ist dieser vorzuziehen.

- c)

$$\begin{aligned} Var(S_2) &= \frac{1}{(2n-2)^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n-1} (e_i + e_{i+1})\right) \\ &= \frac{1}{(2n-2)^2} C\left(\sum_{i=1}^{n-1} (e_i + e_{i+1})\right) \left(\sum_{j=1}^{n-1} (e_j + e_{j+1})\right) \\ &= \frac{1}{(2n-2)^2} (n-1)^2 Var(2e) = \frac{(n-1)^2}{4(n-1)^2} 4\sigma_e^2 = \sigma_e^2. \end{aligned}$$

Vergleicht man die Varianzen, so erkennt man, daß bei beiden Schätzern die Varianz für $n \rightarrow \infty$ jeweils gleich der Varianz σ_e^2 ist (und somit nicht gegen 0 strebt) (die Berechnung der Varianz von S_1 findet sich im Meßtechnik Buch).

- d) Es ergibt sich folgende Skizze:

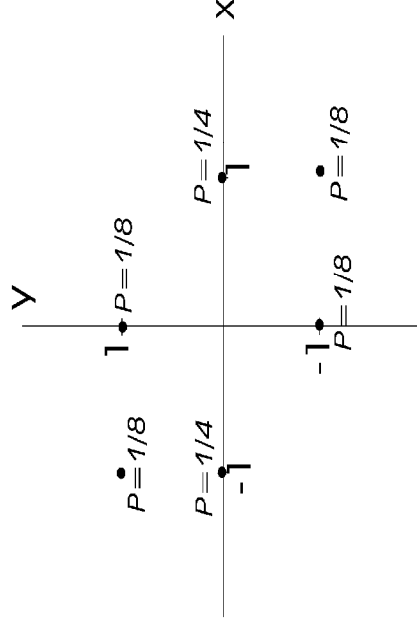


Bild 1: Punkte positiver Wahrscheinlichkeiten im Signalraum.

e) $E\{X\} = (-1)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) + 1\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 0.$

$$E\{Y\} = (-1)\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + 1\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 0.$$

$$E\{XY\} = (-1)\left(\frac{1}{8}\right) - 1\left(\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{4}.$$

$$C_{XY} = E\{XY\} = -\frac{1}{4}.$$

- f) Es herrscht keine starre Bindung $x = y$ oder $x = -y$ der Zufallsvariablen x, y . Beispielsweise dürften bei einer Beziehung $x = y$ lediglich Punktepaare auf der 1. Winkelhalbierenden positive Wahrscheinlichkeiten besitzen.

- g) Wird $g(s) = s + 2$ gewählt, so führt die Variablentransformation $y = g(x)$ von x (mit der Verteilung $P(x = -2) = 3/4, P(x = 0) = 1/4$) auf die gegebene zweidimensionale ZV (x, y) .

Punkteverteilung: 3-4-3-1-2-2-3

Aufgabe 2: Frequenzanaloge Signale (14 Punkte)

Ein Frequenzzählverfahren ermittelt die in einer festen Periode T_0 gezählten Rasterimpulse, welche in Abbildung 2 durch den Übergang von den weißen auf die schwarzen Markierungen registriert werden. Die Länge des periodisch wiederkehrenden Musters beträgt s_0 (vgl. Skizze), der Zählstreifen bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v(t)$ am Impulszähler vorbei.

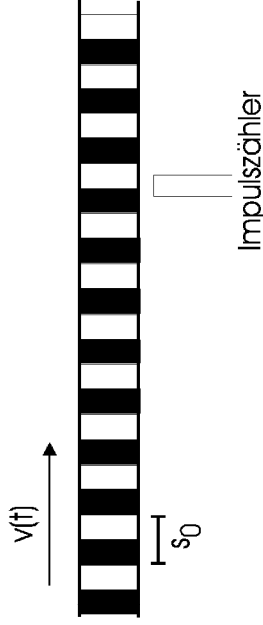


Bild 2: Skizze des Frequenzzählers.

- Wie groß ist die minimale durchschnittliche Geschwindigkeit $v_{\min} > 0$, welche das System anzeigen kann? Wie groß ist der Betrag $|\hat{v}_F|$ des maximalen Fehlers bei der Ermittlung der Durchschnittsgeschwindigkeit v_0 ?
- Die Phasenlage Δs des Meßstreifens zu Beginn des Meßintervalls sei im Intervall $\Delta s \in [0, s_0]$ gleichverteilt. Berechnen Sie die Erwartungswert und Varianz der Phasenlage.
- Berechnen Sie mit Hilfe der Verteilung von Δs die Dichte des Geschwindigkeitsfehlers Δv , wobei $\Delta v = \Delta s/T_0$. Verifizieren Sie Ihr Ergebnis, indem Sie über die Dichte integrieren: $\int_{\mathbb{R}} f_Y(y) = 1$.

Hinweis: Die Transformationsformel für Dichten $f_X(x), f_Y(y)$ von Zufallsvariablen X, Y lautet unter den gegebenen Bedingungen für eine Funktion T :

$$Y = T(X) \Rightarrow [f_Y(y) = \frac{1}{| \frac{dT}{dx}(T^{-1}(y)) |} f_X(T^{-1}(y))].$$

- v_0 bezeichnet die vom Frequenzzähler angezeigte Durchschnittsgeschwindigkeit. Wieviele Impulse $n_{\min}$ muß die Meßeinheit mindestens zählen, damit der relative Fehler $|v_F|/v_0$ sicher kleiner als 10^{-3} ist?
- Ein weiterer Impulszähler registriert neben den Übergängen von den weißen auf die schwarzen Flächen auch die Übergänge von den schwarzen auf die weißen Flächen. Was bedeutet dies für den maximalen Fehler bei der Ermittlung der Durchschnittsgeschwindigkeit v_0 ? Wieviele Impulse $\tilde{n}_{\min}$ müssen nun mindestens gezählt werden, damit der relative Fehler $|v_F|/v_0$ sicher kleiner als 10^{-3} ist?

Lösung

- Es muß mindestens ein Rasterimpuls während der Zeit T_0 die Meßeinheit durchlaufen. Daraus ergibt sich die minimale Geschwindigkeit zu $v_{\min} = s_0/T_0$. Der maximale Fehler $|\hat{v}_F|$ entsteht, wenn der nächste zu zählende Rasterimpuls gerade außerhalb der Zählperiode auftritt. Das Band

legt einen Weg von s_0 zurück, welcher nicht registriert wird. Für den Geschwindigkeitsfehler bedeutet dies $v_F \leq |\hat{v}_F| = s_0/T_0$.

- Die Phasenlage ist eine im Intervall $[0, s_0]$ gleichverteilte Zufallsvariable. Daraus resultiert ein Erwartungswert von $E\{\Delta s\} = s_0/2$ und eine Varianz von $\text{Var}(\Delta s) = s_0^2/12$.
- Für lineare Abbildungen $y = T(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ folgt mit Hilfe des Hinweises:

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Es ist $\Delta v = T(\Delta s) = \Delta s/T_0$ und somit

$$f_{\Delta v}(v) = |T_0| f_{\Delta s}(T_0|v).$$

Mit $f_{\Delta s}(s) = (1/s_0) \mathbf{1}_{[0, s_0]}(s)$ folgt schließlich

$$f_{\Delta v}(v) = |T_0| \frac{1}{s_0} \mathbf{1}_{[0, s_0]}(|T_0|v) = \frac{T_0}{s_0} \mathbf{1}_{[0, s_0/T_0]}(v).$$

Die Integration $\int_{\mathbb{R}} f_{\Delta v}(v) = 1$ liefert das gewünschte Resultat.

- Es ist $v_0 = n s_0/T_0$ die angezeigte Geschwindigkeit, der Geschwindigkeitsfehler ist sicher kleiner als s_0/T_0 . Damit gilt:

$$|v_F|/v_0 \leq \frac{s_0}{T_0} \frac{T_0}{n s_0} \leq 10^{-3},$$

womit eine Mindestgröße $n_{\min} = 10^3$ gefunden wird.

- Der maximale Fehler resultiert zu $|\hat{v}_F| = s_0/2T_0$. Die angezeigte Durchschnittsgeschwindigkeit ist $v_0 = n s_0/2T_0$, für den relativen Fehler findet man

$$|v_F|/v_0 \leq \frac{s_0}{2T_0} \frac{2T_0}{n s_0} \leq 10^{-3},$$

also müssen wiederum mindestens $\tilde{n}_{\min} \geq 10^3$ gezählt werden (allerdings in der halben Zeit).

Punkteverteilung: 2-2-5-2-3

Aufgabe 3: Interpolation (18 Punkte)

Der Wert $z = f(x, y)$ einer Kraft ist von den Eingangsgrößen x, y abhängig. Zur Bestimmung der Kennlinie sind folgende Werte an den Stützstellen $(x_i; y_i)$, $i, j = 1, \dots, 4$, ermittelt worden:

	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$
$y_1 = 2$	1	3	5
$y_2 = 3$	2	4	6
$y_3 = 4$	4	6	8

Tabelle 3: Meßwerte zur Kennfeldinterpolation

Runden Sie alle erzielten Ergebnisse auf 3 Nachkommastellen.

- a) Das Intervall $\{(x; y) | 0 \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 3\}$ soll durch Kennfeldinterpolation näher untersucht werden. Berechnen Sie die Kennfeldwerte $g(x, y)$ an folgenden Punkten:

$$(x; y) = (0, 3; 2, 5),$$

$$(x; y) = (0, 3; 2, 7),$$

$$(x; y) = (0, 5; 2, 5).$$

Benützen Sie hierzu die Differenzenquotienten 1. Ordnung sowie den gemischten partiellen Differenzenquotienten $\Delta^2 f / (\Delta x \Delta y)$ zweiter Ordnung. Die weiteren Differenzenquotienten zweiter und höherer Ordnung sind zu vernachlässigen.

- b) Berechnen Sie die Kennfeldinterpolation $\tilde{g}(x, y)$ im Punkt $(x; y) = (0, 5; 2, 5)$ unter Verwendung aller 2. Differenzenquotienten $\Delta^2 f / (\Delta x \Delta y)$, $\Delta^2 f / (\Delta x)^2$, $\Delta^2 f / (\Delta y)^2$ (die Differenzenquotienten 3. Ordnung und höher sind zu vernachlässigen). Wie groß ist der Betrag des relativen Fehlers aus Aufgabenteil a) bezogen auf den hier ermittelten Wert?

- c) Es wird vermutet, daß die Kennlinie der Gleichung

$$t(x, y) = x^3 + x^2 y + \frac{2^y}{4} - x$$

gehört. Berechnen Sie das dazugehörige Taylorpolynom $\tilde{t}(x, y)$ in der Stützstelle $(x_0; y_0) = (0, 5; 2, 5)$. Vernachlässigen Sie hierzu die Ableitungen 2. Ordnung und höher (die gemischte partielle Ableitung $\delta f / (\delta x \delta y)$ ist 2. Ordnung). Welche Werte ergeben sich für die in Aufgabenteil a) angegebenen Punkte

$$(x; y) = (0, 3; 2, 5), (x; y) = (0, 3; 2, 7), (x; y) = (0, 5; 2, 5)?$$

- d) Warum ist bei einer Taylorapproximation der 3 Punkte aus Teilaufgabe a) die gewählte Stützstelle $(x_0; y_0) = (0, 5; 2, 5)$ besser geeignet als die Stelle $(x_1 = 0; y_1 = 2)$? Warum wird $(x_0; y_0)$ nicht bei der Kennfeldinterpolation mit Hilfe von Tabelle 3 verwendet?

- e) Nähere Untersuchungen ergeben eine theoretische Kennlinie der Kraft von

$$\tilde{f}(x, y) = ax^3 + bx^2 y + \left(\frac{2^y}{4} - x\right), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Stellen Sie den LS-Ansatz $z = Mc$ für den unbekannten Vektor $c = (a, b)^t$ und die drei Messwerte in

$$(x; y) \in \{(0; 2), (1; 2), (2; 2)\}$$

auf. Berechnen Sie anschließend die Werte a, b über den LS-Schätzer.

Hinweis: Es ist möglich, den LS-Schätzer über Operationen von 3×2 Matrizen zu erhalten, $M \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$.

- f) Wie groß ist die Summe des quadratischen Fehlers des LS-Schätzers zu den Messwerten in den Punkten

$$(x; y) \in \{(0; 2), (1; 2), (2; 2)\}?$$

Was ist die Ursache dieses geringen Fehlers?

Lösung

- a) Im Intervall $\{(x; y) | 0 \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 3\}$ ergibt sich die Kennfeldinterpolation zu:

$$g(x, y) = f(x_1, y_1) + \frac{f(x_2, y_1) - f(x_1, y_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1) + \frac{f(x_1, y_2) - f(x_1, y_1)}{y_2 - y_1} (y - y_1) + \frac{f(x_2, y_2) - f(x_1, y_2) - f(x_2, y_1) + f(x_1, y_1)}{(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)} (x - x_1)(y - y_1).$$

Es folgt

$$g(0, 3; 2, 5) = 2, 1, \quad g(0, 3; 2, 7) = 2, 3, \quad g(0, 5; 2, 5) = 2, 5.$$

- b) Die Verwendung der 2. Differenzenquotienten führt auf

$$\frac{\Delta^2 f}{2(\Delta x)^2} (x - x_1)^2 = 0,$$

$$\frac{\Delta^2 f}{2(\Delta y)^2} (y - y_1)^2 = \frac{(y - y_1)^2}{2}.$$

Somit ist

$$\tilde{g}(x, y) = g(x, y) + \frac{(y - y_1)^2}{2}$$

und $\tilde{g}(0, 5; 2, 5) = 2, 625$. Der Betrag des relativen Fehlers aus Teilaufgabe a) beträgt $0, 125 / 2, 625 \approx 4, 8\%$ bezogen auf das hier ermittelte Ergebnis.

- c) Das Taylorpolynom bestimmt sich zu

$$\tilde{t}(x, y) = t(x_0, y_0) + \frac{\delta f}{\delta x} \Big|_{(x; y)=(x_0; y_0)} (x - x_0) + \frac{\delta f}{\delta y} \Big|_{(x; y)=(x_0; y_0)} (y - y_0).$$

Dabei gelten die Aussagen $t(x_0, y_0) = 1, 664$,

$$\frac{\delta t}{\delta x} = 3x^2 + 2xy - 1,$$

$$\frac{\delta t}{\delta x} (0, 5; 2, 5) = 2, 250,$$

über

$$2^y = e^{y \ln 2}$$

folgt mit Hilfe der Kettenregel

$$\frac{\delta t}{\delta y} = x^2 + \ln 2 \frac{2^y}{4}$$

sowie

$$\frac{\delta t}{\delta y} (0, 5; 2, 5) = 1, 230.$$

Das Taylorpolynom lautet somit

$$\tilde{t}(x, y) = 1,664 + 2,250(x - 0,5) + 1,230(y - 2,5).$$

Für die in Aufgabenteil a) angegebenen Werte gilt:

$$\tilde{t}(0,3;2,5) = 1,214, \quad \tilde{t}(0,3;2,7) = 1,460, \quad \tilde{t}(0,5;2,5) = 1,664.$$

- d) Die Stelle $(x_0; y_0)$ ist besser geeignet, weil sie näher an den 3 Punkten liegt als $(0; 2)$. In Tabelle 3 ist der Wert $\langle x_0; y_0 \rangle$ nicht gemessen worden, auch wird bei Kernfeldinterpolation immer auf den nächst kleineren Meßwert (in allen Variablen) des zu approximierenden Intervalls zurückgegriffen.

- e) Es ist

$$(x^3 \ x^2 y)(a \ b)^t = \tilde{f}(x, y) + x - \frac{2y}{4}.$$

Dadurch kann die Matrixgleichung $Mc = z$ in folgender Form dargestellt werden:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Die Berechnung von $c = (M^t M)^{-1} M^t z$ ergibt die Werte $a = -1,5$ und $b = 2,25$.

- f) Die Summe des quadratischen LS-Fehlers ist Null. Dies liegt daran, daß das Gleichungssystem exakt bestimmt ist, die Überbestimmtheit fällt durch die erste Zeile $0a + 0b = 0$ weg.

Punkteverteilung: 3-3-4-2-4-2

Aufgabe 4: Leistungsdichtespektrum und Autokorrelation (20 Punkte)

Die Aufgabenteile b), c) sind unabhängig von Aufgabenteil a)!

- a) In Abbildung 3 (siehe Rückseite) finden sich die Zeitfunktion $x(t)$, deren Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ sowie deren zugehörige Leistungsdichte $S_{xx}(f)$. Die Bilder sind in ihrer Reihenfolge vertauscht. Ordnen Sie daher den Zeitfunktionen $(A - J)$ die zugehörigen Autokorrelationen (1-10) und die entsprechenden Leistungsdichtespektren $(I - X)$ zu. Es werden keine Begründungen gefordert!
- b) Die Übertragungsfunktion eines linearen, zeitinvarianten Meßsystems ist durch

$$G(s) = \frac{s-1}{s^2 + s - 2}$$

gekennzeichnet. Das System werde durch die Musterfunktion

$$x(t) = a + \sin(2\pi f_0 t), \quad a > 0$$

eines ergodischen Zufallsprozesses angeregt. Berechnen Sie das Leistungsdichtespektrum $S_{xx}(f)$ von $x(t)$.

Hinweis: Die Autokorrelationsfunktion eines Leistungssignals $x(t)$ ist gegeben über

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t-\tau) dt.$$

- c) Berechnen Sie die Autokorrelation $R_{yq}(\tau)$ des Ausgangssignals $y(t) = x(t) * g(t)$.

Lösung

- a) Es gilt:

$$\begin{array}{ll} A - & 6 - I \\ B - & 7 - VII \\ C - & 3 - IX \\ D - & 8 - VI \\ E - & 9 - XIII \\ F - & 2 - III \\ G - & 1 - IV \\ H - & 4 - V \\ I - & 5 - II \\ J - & 10 - X \end{array}$$

- b) Es ist

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [a + \sin(2\pi f_0 t)][a + \sin(2\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau)] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [a^2 + a \sin(2\pi f_0 t) + a \sin(2\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau) \\ &\quad + \sin(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau)] dt \end{aligned}$$

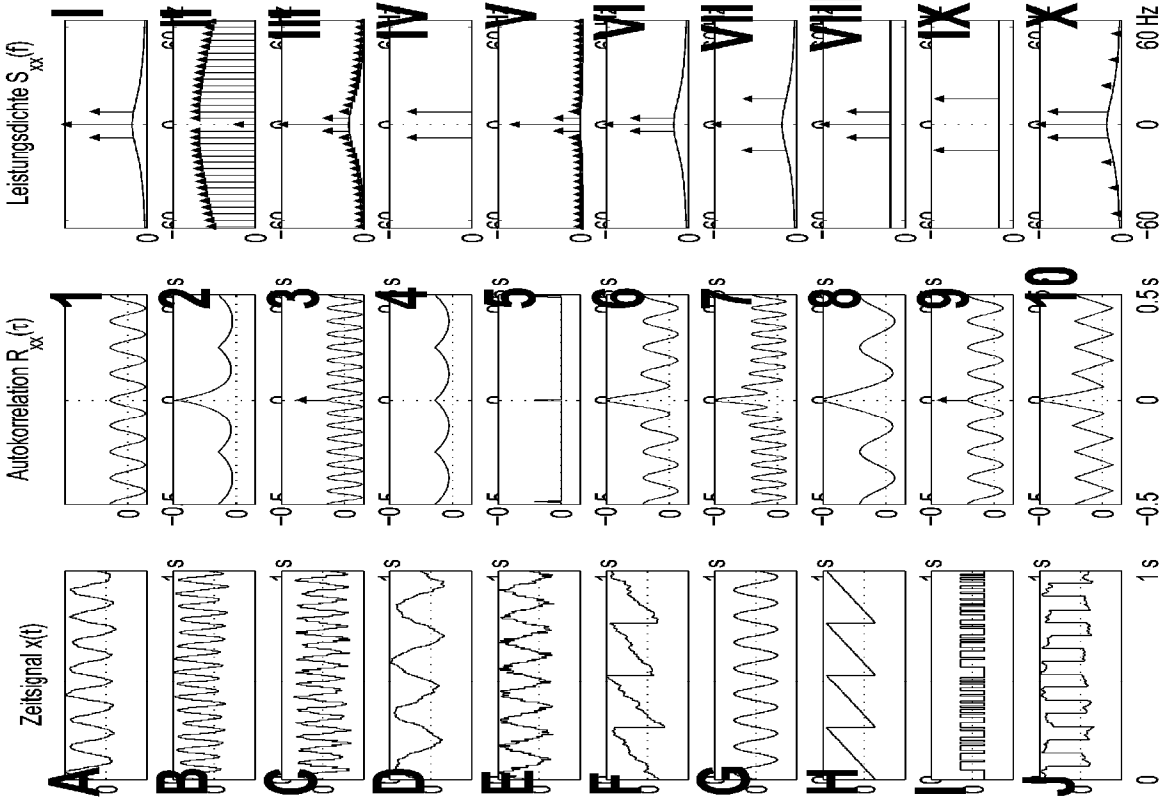


Bild 3: Zeitsignale mit Autokorrelationsfunktion und Leistungsdichten.

Mit

$$\sin(2\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau) = \sin(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0 \tau) - \sin(2\pi f_0 \tau) \cos(2\pi f_0 t)$$

folgt weiter, daß

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= a^2 + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \underbrace{a \sin(2\pi f_0 t)}_{=0} + \underbrace{a \sin(2\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau)}_{=0} \\ &+ \underbrace{\sin^2(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0 \tau) - \sin(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0 \tau) \sin(2\pi f_0 \tau)}_{=0} dt. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= a^2 + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sin^2(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0 \tau) dt \\ &= a^2 + \cos(2\pi f_0 \tau) \frac{1}{2T} \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4(2\pi f_0)} \sin(4\pi f_0 t) \right]_{-T}^T \\ &= a^2 + \cos(2\pi f_0 \tau) / 2 \end{aligned}$$

und schließlich als Resultat

$$\mathcal{F}(R_{xx}(\tau)) = S_{xx}(f) = a^2 \delta(f) + \frac{1}{4} [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)].$$

c) Nach Gleichung (6.27) des Meßtechnikbuchs folgt

$$S_{yy}(f) = S_{xx}(f) |G(f)|^2.$$

Für die Übertragungsfunktion ermittelt man

$$G(f) = \frac{1}{s + 2} \Big|_{s=j2\pi f} = \frac{1}{j2\pi f + 2}$$

sowie die Leistungsdichte

$$\begin{aligned} S_{yy}(f) &= (a^2 \delta(f) + \frac{1}{4} [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]) \frac{1}{4 + (2\pi f)^2} \\ &= \frac{a^2}{4[4 + (2\pi f_0)^2]} \delta(f) + \frac{1}{4} \frac{\delta(f + f_0)}{[4 + (2\pi f_0)^2]} + \frac{1}{4} \frac{\delta(f - f_0)}{[4 + (2\pi f_0)^2]}. \end{aligned}$$

Damit ist die Autokorrelation bestimmt über

$$\begin{aligned} R_{yy}(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}(S_{yy}(f)) = \frac{a^2}{4[4 + (2\pi f_0)^2]} + \frac{1}{4[4 + (2\pi f_0)^2]} (e^{j2\pi f_0 \tau} + e^{j2\pi f_0 (-\tau)}) \\ &= \frac{a^2}{4[4 + (2\pi f_0)^2]} + \frac{1}{2[4 + (2\pi f_0)^2]} \cos(2\pi f_0 \tau). \end{aligned}$$

Punkteverteilung: 10-5-5

Aufgabe 1: Approximation/Interpolation (20 Punkte)

Die Teilaufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden.

- a) Mit den Materialkonstanten K_0 (Ohm $[\Omega]$) und B (°Celsius $[C]$) läßt sich der Widerstand eines Heißleiters in Abhängigkeit von der Temperatur T ($[C]$) modellieren über $R(T) = K_0 \exp(B/T)$. Zur Bestimmung der Konstanten K_0, B wurde eine Messreihe nach Tabelle 1 durchgeführt

Temperatur T $[^{\circ}C]$	10	20	30	40
Widerstand $R(T)$ $[\Omega]$	5710	3905	2780	1466

Berechnen Sie die Least-Square Schätzwerte für die unbekannten Parameter K_0, B . Runden Sie dabei alle Ergebnisse auf 3 Nachkommastellen.

Hinweis: Für die Bestimmung der gesuchten Parameter müssen diese im LS-Ansatz in separaten Termen auftreten. Dies gelingt beispielsweise über eine Logarithmierung.

- b) Zur Beschreibung von Signalen im Intervall $[-1, 1]$ werden häufig Legendre-Polynome $P_i(t)$ eingesetzt, da sie ein Orthogonalsystem bilden:

$$\int_{-1}^1 P_n(t) P_m(t) dt = \frac{2}{2m+1} \delta_{nm} \quad (n, m \in \mathbb{N}_0, \delta_{nm} = \begin{cases} 1: & , n = m \\ 0: & , sonst \end{cases})$$

Mit Hilfe der ersten 3 Legendre-Polynome

$$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = t, \quad P_2(t) = (3t^2 - 1)/2$$

kann das Signal $y(t) = 3t^2 + 5t + 1$ dargestellt werden, welches auf dem Intervall $[-1, 1]$ mittels einer Gerade approximiert werden soll. Geben Sie die Parameter a_0, a_1 der Regressionsgerade $\hat{y}(t) = a_0 P_0(t) + a_1 P_1(t)$ an, welche den quadratischen Fehler $\int_{-1}^1 (y(t) - \hat{y}(t))^2 dt$ minimiert.

- c) Wie lautet das Newtonsche Interpolationspolynom $y_N(t)$, wenn das Signal $y(t) = 3t^2 + 5t + 1$ an den äquidistanten Stützstellen $0, 1/3, 2/3, 1$, fehlerfrei abgetastet wird? Stellen Sie dazu $y_N(t)$ in der Form $y_N(t) = n_0 + n_1 t + n_2 t^2$ dar.

- d) Für die folgenden Abtastwerte soll eine kubische Spline-Interpolation vorgenommen werden:

Index j	0	1	2	3
Stützstelle t_j	-1	0	1	4
y_j	-1	1	2	3

Geben Sie das Gleichungssystem zur Berechnung der Werte $y_j, j = 1, 2$, an, die für die Spline-Polynome $s_j(t) = a_j(t - t_j)^3 + b_j(t - t_j)^2 + c_j(t - t_j) + d_j$ benötigt werden. Berechnen Sie anschließend für $j = 1$ die Werte a_j, b_j, c_j, d_j und daraus $s_1(t)$. Wie groß sind die Ableitungen $s_0'(t_1), s_1'(t_1)$ in der Stützstelle t_1 , wie groß ist $s_0''(-1)$? Runden Sie bei Ihren Berechnungen alle Ergebnisse auf 3 Nachkommastellen.

Lösung

- a) Eine Logarithmierung der Modellgleichung führt auf

$$\ln(R(T)) = \ln(K_0) + B/T.$$

Mit Hilfe der Tabelle

Temperatur T $[^{\circ}C]$	10	20	30	40
Widerstand $R(T)$ $[\Omega]$	5710	3905	2780	1466
$\ln(R(T))$ $[\Omega]$	8,650	8,270	7,930	7,290

und dem allgemeinen Schätzansatz $y = M\hat{c}$ folgt

$$\begin{pmatrix} 8,650 \\ 8,270 \\ 7,930 \\ 7,290 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,1 \\ 1 & 0,05 \\ 1 & 0,033 \\ 1 & 0,025 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ln(K_0) \\ B \end{pmatrix}$$

Die Schätzwerte ergeben sich über die Berechnungsvorschrift

$$\hat{c} = (M^T \cdot M)^{-1} M^T \cdot y$$

zu $B = 15,056, \ln(K_0) = 7,252, K_0 = 1411$.

- b) Das Signal $y(t)$ kann dargestellt werden über $y(t) = 2P_0(t) + 5P_1(t) + 2P_2(t)$. Für die quadratische Fehlerminimierung gilt bei orthogonalen Funktionen

$$\begin{aligned} &< y(t) - \hat{y}(t), y(t) - \hat{y}(t) > \\ &= < 2P_0(t) + 5P_1(t) + 2P_2(t) - a_0P_0(t) - a_1P_1(t), \\ &\quad 2P_0(t) + 5P_1(t) + 2P_2(t) - a_0P_0(t) - a_1P_1(t) > \\ &= (2 - a_0)^2 < P_0(t), P_0(t) > + (5 - a_1)^2 < P_1(t), P_1(t) > + 4 < P_2(t), P_2(t) > . \end{aligned}$$

Entsprechend wird der quadratische Fehler am geringsten, wenn eine Projektion auf den Vektorraum $< P_0(t), P_1(t) >$ stattfindet. Damit folgt $\hat{y}(t) = 2P_0(t) + 5P_1(t) = 2 + 5t$.

- c) Das Newtonsche Interpolationspolynom interpoliert die Kurve an den 4 Stützstellen (und ist entsprechend höchstens von Grad 3). Da es genau ein Polynom von Grad 3 mit dieser Eigenschaft gibt, gilt $y_N(t) = y(t) = 3t^2 + 5t + 1$.

- d) Das LGS ergibt sich zu

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1'' \\ y_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

und damit $y_1'' = -1,419, y_2'' = -0,323$. Für $j = 1$ gilt

$$a_1 = 0,183, b_1 = -0,710, c_1 = 1,527, d_1 = 1$$

und weiter

$$s_1(t) = 0,183t^3 - 0,710t^2 + 1,527t + 1.$$

Die Ableitungen $s_0'(t), s_1'(t)$ stimmen in der Stützstelle überein, es folgt $s_0'(t_1) = s_1'(t_1) = 1,527$. Die zweite Ableitung $s_0''(-1) = 0$ kann sofort angegeben werden, da die Werte y_j genau die zweiten Ableitungen in den Stützstellen t_j angeben.

Punkteverteilung: 6-5-3-6

Aufgabe 2: Korrelation & χ^2 -Anpassungstest (17 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

- a) Georg Mendel hat 1865 verschiedene Versuchsergebnisse im Zusammenhang mit seiner Vererbungslehre publiziert. Er beobachtete in einem Experiment simultan die Form (rund [r], kantig [k]) und Farbe (gelb [ge], grün [gr]) von Erbsen, die er gezüchtet hat. Nach seiner Theorie sollen sich die Wahrscheinlichkeiten für die Merkmalprägungen (r,ge), (r,gr), (k,ge), (k,gr) verhalten wie 9:3:3:1. Er zählte unter $n = 556$ Erbsen 315 mal (r,ge), 108 mal (r,gr), 101 mal (k,ge) und 32 mal (k,gr). Prüfen Sie mit Hilfe des χ^2 -Anpassungstests zum Niveau $\alpha = 0,05$, ob diese Beobachtungen seiner Theorie entsprechen. Der Stichprobenumfang n wird dabei nach einer Faustregel als hinreichend groß angenommen, falls $n \cdot \min\{p_{(r,ge)}, \dots, p_{(k,gr)}\} > 5$ ist (wobei $p_{(r,ge)}$ die theoretisch zugrundgelegte Wahrscheinlichkeit für eine Erbse in Klasse (r,ge) ist). Runden Sie die Ergebnisse auf 2 Nachkommastellen.

Hinweis: Abbildung 1 beschreibt die Quantile der χ^2 -Verteilung mit m Freiheitsgraden.

- b) In Abbildung 2 (siehe Rückseite) finden sich die Zeitfunktion $x(t)$, deren Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ sowie deren zugehörige Leistungsdichte $S_{xx}(f)$. Die Bilder sind in ihrer Reihenfolge vertauscht. Ordnen Sie daher den Zeitfunktionen (A–J) die zugehörigen Autokorrelationen (1–10) und die entsprechenden Leistungsdichtespektren ($I - X$) zu. Es werden keine Begründungen gefordert!

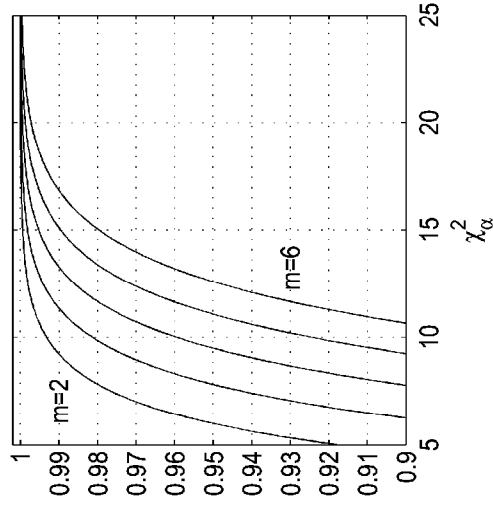


Bild 1: Wahrscheinlichkeit $P\{\chi^2 \leq \chi_\alpha^2\}$ für $m = 2, \dots, 6$ Freiheitsgrade

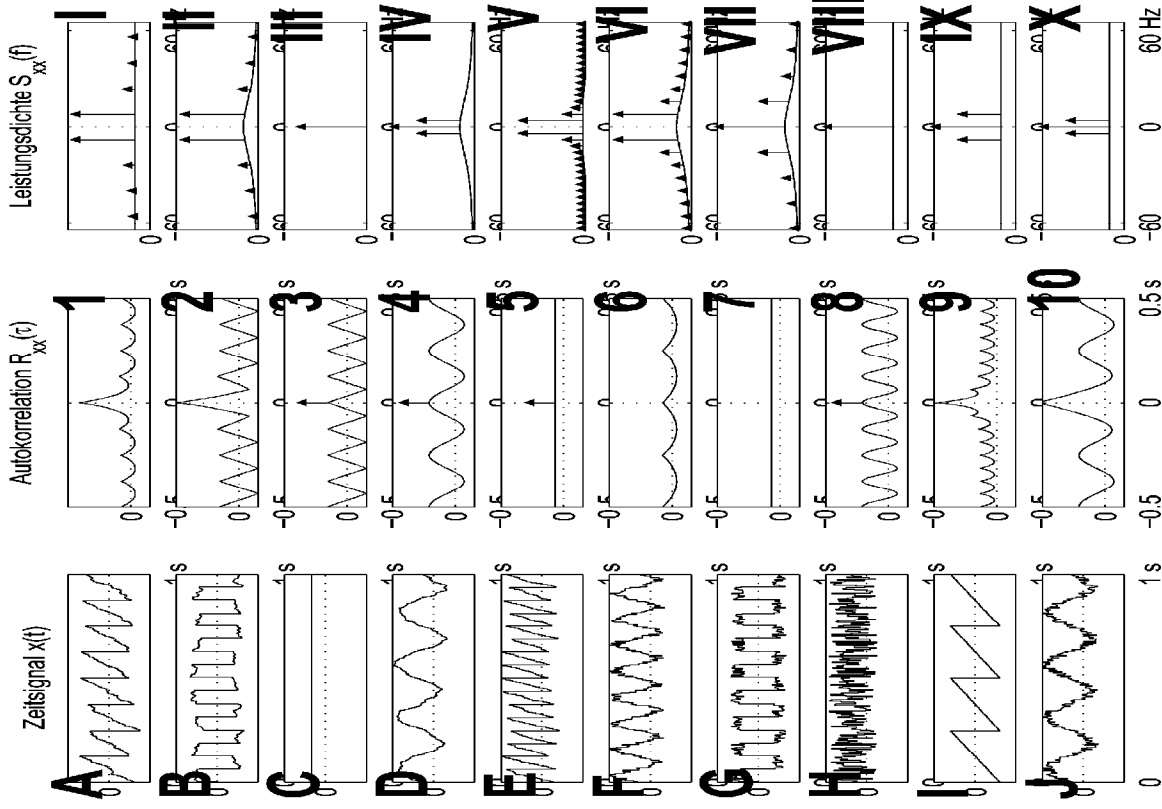


Bild 2: Zeitsignale, Autokorrelationsfunktionen und Leistungsdichten.

Lösung

- a) Die theoretisch zugrundegelegten Wahrscheinlichkeiten bei einem gegebenen Verhältnis von 9:3:3:1 für die Klassen (r,ge), (r,gr), (k,ge), (k,gr) sind

Klasse	(r,ge)	(r,gr)	(k,ge)	(k,gr)
W-keit $p_{(i,j)}$	9/16	3/16	3/16	1/16

Demonstreichend ist der Stichprobenumfang der Erbsen hinreichend hoch. Für den χ^2 -Anpassungstest ergibt sich weiterhin folgende Tabelle

Klasse	(r,ge)	(r,gr)	(k,ge)	(k,gr)
$p_{(i,j)}$	9/16	3/16	3/16	1/16
$n_{(i,j)}$	315	108	101	32
$n \cdot p_{(i,j)}$	312,75	104,25	104,25	34,75
$\chi^2_{(i,j)} = \frac{(n_{(i,j)} - n \cdot p_{(i,j)})^2}{n \cdot p_{(i,j)}}$	0,02	0,13	0,10	0,22

Die Summe $\chi^2 = \chi^2_{(r,ge)} + \chi^2_{(r,gr)} + \chi^2_{(k,ge)} + \chi^2_{(k,gr)} = 0,47$ ist geringer als das Quantil $\chi^2_{\alpha} \approx 7,8$ für $m = 3$ Freiheitsgrade (bei $k = 4$ Kombinationen und $m = k - 1$), also bestätigt der Test Mendels Theorie.

- b) Es gilt:

- A – 1 – VI
- B – 2 – II
- C – 7 – III
- D – 10 – IV
- E – 9 – XII
- F – 8 – IX
- G – 3 – I
- H – 5 – VIII
- I – 6 – V
- J – 4 – X

Punkteverteilung: 7-10

Aufgabe 3: Kennlinienfehler (20 Punkte)

Die von einer Lampe der Temperatur T_L ausgehende Strahlung fällt auf einen Temperatursensor der Fläche A (Abbildung 3), der die Leistung $P_a = \epsilon \sigma A (T_L^4 - T_U^4)$ bei vorhandener Umgebungstemperatur T_U absorbiert und selber die Temperatur T_1 annimmt (ϵ : Emissionskoeffizient, σ : Stefan-Boltzmann Konstante). Aufgrund der Energiebilanz ist die absorbierte Leistung P_a gleich der an die Umgebung abgegebene Leistung $P_u = \alpha A (T_1 - T_u)$, wobei α den Wärmeübergangskoeffizienten darstellt. Die am Ausgang des Sensors liegende Spannung $U = c(T_1 - T_U)$ wird gemessen, $c > 0$.

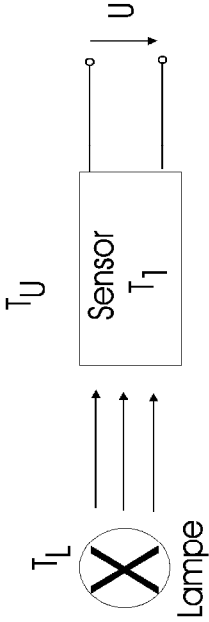


Bild 3: Messsystem des Temperatursensors.

- a) Geben sie die Spannung U als Funktion der Temperatur T_L der Lampe an.
Unter Normalbedingungen sei die Umgebungstemperatur $T_U = T_0$ konstant, der Emissionskoeffizient besitze den Wert ϵ_0 .

- b) Berechnen Sie den relativen Fehler $F_{R,\epsilon}$ der Ausgangsspannung U , der durch Abweichungen $\Delta\epsilon = \epsilon - \epsilon_0$ des Emissionskoeffizienten von Normalbedingungen entsteht:

$$F_{R,\epsilon} = \frac{U - U_0}{U_0}, \text{ wobei } U_0 = U(T_U = T_0, \epsilon = \epsilon_0), U = U(T_U = T_0, \epsilon = \epsilon_0 + \Delta\epsilon).$$

- c) Wie gehen Schwankungen ΔT der Umgebungstemperatur $T_U = T_0 + \Delta T$ in das Ergebnis mit ein? Bestimmen Sie hierzu den relativen Fehler

$$F_{R,T} = \frac{U - U_0}{U_0}, \quad U_0 = U(T_U = T_0, \epsilon = \epsilon_0), \quad U = U(T_U = T_0 + \Delta T, \epsilon = \epsilon_0).$$

- d) Approximieren Sie den relativen Fehler $F_{R,T}(\Delta T)$ mit Hilfe des Taylorpolynoms $P_1(\Delta T)$ ersten Grades um den Entwicklungspunkt $\Delta T = 0$.

Es wird mit dem approximierten relativen Fehler aus Teilaufgabe d) und den Werten $T_L = 1100\text{K}$, $T_0 = 300\text{K}$ weitergerechnet.

- e) Wie gering müssen die Schwankungen ΔT der Umgebungstemperatur ausfallen, damit der hierdurch hervorgerufene approximierter Fehler $P_1(\Delta T)$ betragsmäßig kleiner als 0,5% bleibt?

Der Absorptionsgrad unter Normalbedingungen sei im folgenden $\epsilon = 0,8$.

- f) Bewirkt ein Absorptionsgrad von $\epsilon = 0,75$, dass der relative Fehler $F_{R,\epsilon}$ mehr als 5% beträgt (Rechnung!)?

- g) Ist der durch ΔT entstehende Fehler in der Messkennlinie $U = U(T_L)$ ein multiplikativer Fehler oder eine superponierender Fehler (Begründung!)?

Lösung

- a) Werden die gegebenen Gleichungen ineinander eingesetzt, so folgt

$$\epsilon \sigma A(T_L^4 - T_U^4) = \alpha A(T_L - T_U) = \alpha A \frac{U}{c}.$$

Damit lässt sich die Spannung berechnen zu

$$U = \frac{\epsilon \sigma}{\alpha} (T_L^4 - T_U^4).$$

- b) Für den relativen Fehler ergibt sich

$$F_{R,\epsilon} = \frac{\frac{\epsilon \sigma}{\alpha} (T_L^4 - T_U^4) - \frac{\epsilon \sigma}{\alpha} (T_L^4 - T_U^4)}{\frac{\epsilon \sigma}{\alpha} (T_L^4 - T_U^4)} = \frac{\Delta \epsilon}{\epsilon}.$$

- c) Der relative Fehler bei Temperaturschwankungen beträgt:

$$F_{R,T} = \frac{(T_L^4 - (T_0 + \Delta T)^4) - (T_L^4 - T_0^4)}{T_L^4 - T_0^4} = \frac{T_0^4 - (T_0 + \Delta T)^4}{T_L^4 - T_0^4}.$$

- d) Es gilt

$$\frac{dF_{R,T}}{d(\Delta T)} = \frac{-4}{T_L^4 - T_0^4} (T_0 + \Delta T)^3,$$

folglich ist

$$\frac{dF_{R,T}}{d(\Delta T)} \Big|_{\Delta T=0} = \frac{-4}{T_L^4 - T_0^4} T_0^3.$$

Für das Taylorpolynom 1. Grades gilt

$$F_{R,T} \approx P_1(\Delta T) = \frac{-4}{T_L^4 - T_0^4} T_0^3 \Delta T.$$

- e) Mit dem Ansatz

$$\left| \frac{-4}{(T_L^4 - T_0^4)} T_0^3 \Delta T \right| \leq 0,005$$

folgt für die Temperaturschwankung

$$|\Delta T| \leq 67,4 \text{ K}.$$

Temperaturschwankungen wirken sich demnach sehr gering auf den Messvorgang aus.

- f) Es ist

$$F_{R,\epsilon} = \frac{\Delta \epsilon}{\epsilon} = 0,0625 > 0,05.$$

Folglich wirkt sich der veränderte Absorptionsgrad um mehr als 5% auf den relativen Fehler aus.

- g) Die Messkennlinie ist

$$U(T_L) = \frac{\epsilon \sigma}{\alpha} T_L^4 - \frac{\epsilon \sigma}{\alpha} (T_0 + \Delta T)^4.$$

Das durch den Fehler ΔT verursachte Offset von T_L unabhängig und damit für alle Eingangswerte identisch, der Fehler ist superponierend.

Punkteverteilung: 3-3-3-3-2-3

Aufgabe 4: Zufällige Messfehler (20 Punkte)

Ein Elektronikhersteller benötigt zur Weiterverarbeitung die Verwendung zweier Widerstände R , S . Dabei besitzen die produzierten Widerstände R einen festen Sollwert von $R_0 > 0$, welcher von einem normalverteilten Fehler $e \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e^2)$ überlagert wird: $R = R_0 + e$. Die Herstellung der Widerstände R , S kann als unabhängig angesehen werden.

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

- a) Wieviel Prozent an Ausschuss des Widerstands R erwarten Sie, wenn die Abweichung vom Sollwert R_0 maximal 5% betragen soll? Geben Sie Ihr Ergebnis als Funktion der Gaußschen Fehlerfunktion $\text{erf}(\cdot)$ und den Werten R_0 , σ_e an.

Für den Rest der Aufgabe gelten die Werte $R_0 = 50$, die Varianz des Fehlers sei über die Festlegung $\sigma_e^2 = 4$ gegeben: $e \sim \mathcal{N}(0, 4)$.

- b) Führen Sie den Signifikanztest für einen ermittelten Stichprobenmittelwert von

$$\hat{R} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} R_i = \frac{99 R_0}{100}$$

bei 10 Messwerten mit Nullhypothese $H_0 : \hat{R} = E\{R\}$ durch. Die Unabhängigkeit der Stichproben R_i , $i = 1, \dots, n$, sei gewährleistet, das Signifikanzniveau betrage $\alpha = 5\%$.

Hinweis: Beachten Sie, dass die Varianz des Stichprobenmittelwertes proportional zur Anzahl der Messwerte abnimmt. Außerdem kann Abbildung 4 (siehe Rückseite) der Gaußschen Fehlerfunktion zur Bestimmung der Prüfgröße verwendet werden.

In einem weiteren Produktionsschritt werden die Widerstände R und S hintereinandergeschaltet, $Z = R + S$. Dabei setzt sich $S = S_0 + \tilde{e}$ aus einem Sollwert $S_0 > 0$ und einem überlagerten Fehler $\tilde{e}$ zusammen. Als Modellierung von $\tilde{e}$ wird eine Gleichverteilung im Intervall $[-1, 1]$ gewählt, $\tilde{e} \sim \mathcal{U}([-1, 1])$.

- c) Berechnen Sie den Erwartungswert μ_s und die Varianz σ_s^2 von S . Geben Sie anschließend die Kovarianzen $C(R, S)$ und $C(R, Z)$ an. Ist der Korrelationskoeffizient r_{SZ} von S und Z kleiner, größer oder gleich Null (Begründung)?

- d) Berechnen Sie die Dichte der zusammengesetzten Schaltung $Z = R + S$ an der Stelle $z = R_0 + S_0$. Drücken Sie das Ergebnis mit Hilfe der Gaußschen Fehlerfunktion $\text{erf}(\cdot)$ aus.

Hinweis: Die Addition zweier unabhängiger Zufallsvariablen führt auf eine Faltung der zugehörigen Dichtefunktionen.

Lösung

- a) Der Widerstand R besitzt Normalverteilung, zur Bestimmung des Ausschusses wird eine Transformation auf die Standardnormalverteilung vollzogen:

$$Q := \frac{R - R_0}{\sigma_e} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Damit ergibt sich der folgende Ausschuss:

$$1 - P\left(\left|\frac{R - R_0}{R_0}\right| \leq 0,05\right) = 1 - P\left(\left|\frac{Q|\sigma_e|}{R_0}\right| \leq 0,05\right)$$

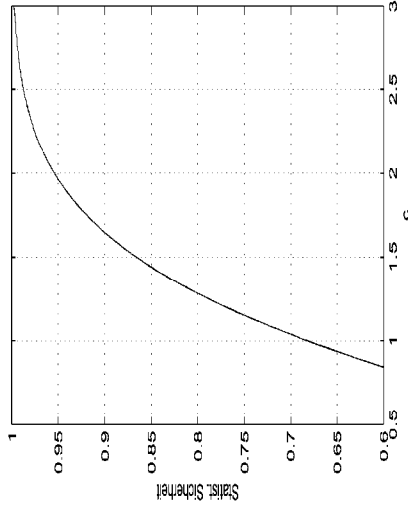


Bild 4: Gauß'sche Fehlerfunktion $\text{erf}(c)$: Statistische Sicherheit bei Standard-Normalverteilung.

$$= 1 - P\left\{\left|Q\right| \leq \frac{0,05R_0}{\sigma_e}\right\} = 1 - \text{erf}\left(\frac{0,05R_0}{\sigma_e}\right).$$

b) Nach Abschnitt 5.4.3 des Messtechnik-Buches (Kiencke) sind folgende Schritte zu vollführen:

1. Die Voraussetzungen sind erfüllt:
 - Die Unabhängigkeit der Messwerte ist erfüllt.
 - Die Normalverteilung der Grundgesamtheit mit Erwartungswert R_0 ist gegeben.
2. Die Ermittlung des Stichprobenmittelwertes ist gegeben, die Stichprobenvarianz ist wegen bekannter Varianz nicht nötig.
3. Aufstellen der Nullhypothese:

$$H_0 : \hat{R} = R_0, H_1 : \hat{R} \neq R_0.$$

4. Festlegen der Prüfgröße: Da die Varianz gegeben ist, kann die Transformation auf die Standardnormalverteilung ausgeführt werden:

$$Q = \frac{|\hat{R} - R_0|}{\sigma_{\hat{R}}} \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad c = \frac{|\hat{R} - R_0|}{\sigma_R / \sqrt{10}} = \frac{R_0}{100 \cdot (2/\sqrt{10})} = 0,79.$$

5. Festlegen des Signifikanzniveaus: Die statistische Sicherheit beträgt $P = 1 - \alpha = 0,95$.
6. Bestimmung der Prüfgröße. Aus Abbildung 4 entnimmt man $P(0,79) \approx 0,6$.
7. Da $P(c) \leq 0,95$, wird die Nullhypothese angenommen.

c) Bei Gleichverteilung $X \in \mathcal{U}[a, b]$ im Intervall $[a, b]$ gilt $\mu_X = (a + b)/2$, $\sigma_X^2 = (b - a)^2/12$. Damit folgt $\mu_S = S_0$, $\sigma_S^2 = 1/3$. Die Kovarianz $C(R, S) = 0$ ist gleich Null aufgrund der Unabhängigkeit von R und S . Weiter gilt $C(R, Z) = C(R, R + S) = \sigma_R^2 + C(R, S) = \sigma_R^2 = 4$. Der Kreuzkorrelationskoeffizient r_{SZ} ist positiv, da hohe (niedrige) Werte von S tendenziell hohe (niedrige) Werte von Z zur Folge haben.

d) Mit Hilfe der Indikatorfunktion I ergibt sich

$$\begin{aligned} f_Z(z = R_0 + S_0) &= (f_R * f_S)(R_0 + S_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[S_0-1, S_0+1]}(t) f_R(R_0 + S_0 - t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{S_0-1}^{S_0+1} f_R(R_0 + S_0 - t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f_R(R_0 - t) dt. \end{aligned}$$

Weiter ist $R_0 - t \in [-1, 1] \Leftrightarrow t \in [R_0 - 1, R_0 + 1]$ und somit folgt weiter

$$f_Z(z = R_0 + S_0) = \frac{1}{2} \int_{R_0-1}^{R_0+1} f_R(t) dt.$$

Über die Transformation auf Standardnormalverteilung,

$$R \sim \mathcal{N}(R_0, \sigma_R^2) \Rightarrow Q = \frac{R - R_0}{\sigma_R} \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

folgt für die Hintereinanderschaltung der Widerstände schließlich

$$f_Z(z = R_0 + S_0) = \frac{1}{2} \int_{(R_0-1)-R_0/2}^{(R_0+1)-R_0/2} f_Q(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} f_Q(t) dt = \frac{1}{2} \text{erf}(1/2) \approx 0,19.$$

Punkteverteilung: 3-6-5-6

Aufgabe 5: Amplitudenanaloge Signale (23 Punkte)

Die Teilaufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden.

- a)** Die Amplitudendichte $f_x(x)$ eines analogen Signals x sei standardnormalverteilt, $x \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Es wird eine Quantisierung auf die Werte $\{n/3\}_{n=-\infty}^{\infty}$ vorgenommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(\{x_q = 0\})$, $P(\{x_q = 1/3\})$ für die quantisierte Größe x_q .
- b)** Die Beschreibung der Amplitudendichten $x = g(t)$ analoger Signale geschieht, indem die auf dem Beobachtungsintervall $[T, 2T]$ als gleichverteilt angenommene Zeit t ,

$$f_k(t) = \frac{1}{T} \mathbf{1}_{[T, 2T]}(t) \quad , \text{ wobei } \mathbf{1}_{[T, 2T]}(t) = \begin{cases} 1: & t \in [T, 2T], \\ 0: & \text{sonst}, \end{cases}$$

transformiert wird. Berechnen Sie die Amplitudendichte $x = g(t)$ der Abbildungsvorschrift

$$g(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{4T}\right).$$

Hinweis: Die Transformationsformel für Dichten $f_x(x)$, $f_k(t)$ von Zufallsvariablen x, t lautet unter den gegebenen Bedingungen:

$$x = g(t) \Rightarrow [f_x(x) = \frac{f_k(g^{-1}(x))}{\left|\frac{dg}{dt}(g^{-1}(x))\right|} \mathbf{1}_{g([T, 2T])}(x)].$$

- c)** Bei der Abtastung eines Signals mit einer Abtastfrequenz von $f_A = 16000 \text{ Hz}$ soll der durch Aliasing entstehende Fehler untersucht werden. Das Eingangssignal, ein weißes Rauschen mit Korrelationsfunktion $R_{xx}(\tau) = A^2 \delta(\tau)$, liegt dabei an einem Anti-Aliasing Filter mit Grenzfrequenz $f_g = 1000 \text{ Hz}$ an, welches mit Hilfe der Übertragungsfunktion

$$G(f) = \begin{cases} 1: & |f| \leq 1000 \text{ Hz}, \\ \left(\frac{1000}{f}\right)^3: & |f| > 1000 \text{ Hz} \end{cases}$$

charakterisiert werden kann. Berechnen Sie den Signal-Störabstand (Signal Noise Ratio) SNR in dB .

- d)** Das Signal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ besitze die Frequenz $f_0 = 100 \text{ Hz}$. Bestimmen Sie das Spektrum des abgetasteten Signals $x_s(t)$ bei einer Abtastfrequenz von $f_A = 150 \text{ Hz}$. Skizzieren Sie das Spektrum im Bereich $f \in [-400 \text{ Hz}, 400 \text{ Hz}]$. Geben Sie ein weiteres Signal $y(t)$ und eine Abtastfrequenz f_A an, so dass das mit f_A abgetastete Signal $y_s(t)$ ein identisches Spektrum $Y_s(f) = X_s(f)$ besitzt.

- e)** Es soll eine Quantisierung des kontinuierlichen Wertebereichs $[-T, T]$ auf die diskreten Werte $\{Tn/100\}_{n=0}^{100}$ vollzogen werden, indem jeweils auf die nächst **niedrigere** Zahl gerundet wird. Geben Sie den Erwartungswert und die Varianz des Quantisierungsfehlers unter der Annahme an, dass die Amplitudendichte auf dem Intervall $[-T, T]$ gleichverteilt ist.

Lösung

- a)** Bei der Quantisierung werden die analogen Eingangswerte auf die nächstgelegene Diskretisierungsstufe abgebildet. Nach Gleichung (7.17) des Messtechnik Buchs [Klencke] folgt:

$$P(\{x_q = 0\}) = P(\{x_q \in [-1/6, 1/6]\}) = \Phi(1/6) - \Phi(-1/6) = 2\Phi(1/6) - 1 \approx 0, 1318,$$

$$P(\{x_q = 1/3\}) = P(\{x_q \in [1/6, 1/2]\}) = \Phi(1/2) - \Phi(1/6) \approx 0, 1257.$$

- b)** Folgende Berechnungen sind nötig:

- Berechnung der Umkehrfunktion $g^{-1}(x)$: Die Funktion $\cos(\pi t/4T)$ ist streng monoton auf $[1, 2T]$. Damit lässt sich die Umkehrfunktion berechnen zu:

$$t = g^{-1}(x) = \frac{4T}{\pi} \arccos(x).$$
- Berechnung von $g([T, 2T])$: g ist streng monoton und stetig auf $[T, 2T]$, deshalb ergeben die Funktionswerte $g(T)$, $g(2T)$ die Intervallgrenzen von $g([T, 2T])$. Mit $g(T) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$, $g(2T) = \cos(\pi/2) = 0$ folgt $g([T, 2T]) = [0, 1/\sqrt{2}]$.
- Berechnung von $\dot{g}(t)$: Es ist

$$\frac{dg}{dt} = \frac{-\pi}{4T} \sin\left(\frac{\pi t}{4T}\right).$$

Insgesamt folgt unter Verwendung des Hinweises:

$$\begin{aligned} f_x(x) &= \frac{1}{T} \mathbf{1}_{[T, 2T]} \left(\frac{4T}{\pi} \arccos(x) \right) \cdot \frac{1}{\left| \frac{\pi}{4T} \sin\left(\frac{\pi}{4T} \arccos(x)\right) \right|} \mathbf{1}_{[0, 1/\sqrt{2}]}(x) \\ &= \frac{4}{\pi \sin(\arccos(x))} \mathbf{1}_{[T, 2T]} \left(\frac{4T}{\pi} \arccos(x) \right) \mathbf{1}_{[0, 1/\sqrt{2}]}(x). \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\frac{4T}{\pi} \arccos(x) \in [T, 2T] \Leftrightarrow x \in [\cos(\pi/2), \cos(\pi/4)] = [0, 1/\sqrt{2}].$$

Es folgt die Amplitudendichte

$$f_x(x) = \frac{4}{\pi \sin(\arccos(x))} \mathbf{1}_{[0, 1/\sqrt{2}]}(x).$$

- c)** Die Leistungsdichte am Ausgang des Anti-Aliasing Filters beträgt

$$S_{yy}(f) = |G(f)|^2 S_{xx}(f) = \begin{cases} A^2: & |f| \leq 1000 \text{ Hz}, \\ \left(\frac{1000}{f}\right)^6 A^2: & |f| > 1000 \text{ Hz}. \end{cases}$$

Die Nutzsignalleistung berechnet sich zu

$$P_{\text{Sig}} = 2 \int_0^{1000} S_{yy}(f) df = 2 \cdot 1000 A^2,$$

die Störleistung durch Aliasing ergibt sich zu

$$P_{\text{Stoer}} = 2 \int_{f_A/2}^{\infty} S_{yy}(f) df = 2 \cdot 1000^6 A^2 \int_{f_A/2}^{\infty} f^{-6} df = \frac{2 \cdot 1000^6 A^2}{5 \cdot 8000^5}.$$

Der Signal-Störabstand ist folglich

$$SNR = \frac{P_{\text{Sig}}}{P_{\text{Stoer}}} = 163840 \approx 52 \text{ dB}.$$

- d)** Das abgetastete Signal besitzt das Spektrum

$$X_s(f) = 150 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - k \cdot 150) = 75 \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(f + 100 - k \cdot 150) + \delta(f - 100 - k \cdot 150)]$$

und ist für den vorgegebenen Bereich in Abbildung 5 skizziert. Ein identisches Spektrum erhält

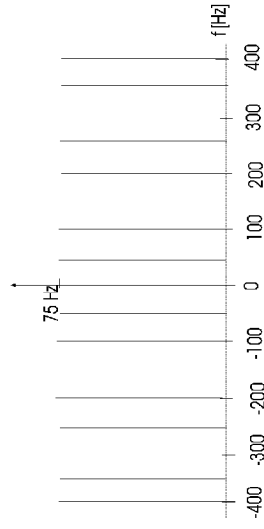


Bild 5: Spektrum des abgetasteten Signals.

man, wenn man die Funktion

$$y(t) = 1/2(\cos(2\pi 50t) + \cos(2\pi 100t))$$

mit einer Frequenz von $f_s = 300 \text{ Hz}$ abtastet.

- c) Alle Werte des Intervalls $[-T, T]$ treten mit der Dichte $f_x(x) = 1/2T$ auf. Der Quantisierungsfehler e_q ist demnach auf dem Intervall $[0, T/100]$ gleichverteilt,

$$e_q(e) = \frac{100}{T} \mathbf{1}_{[0, T/100]}(e).$$

Der Erwartungswert und die Varianz berechnet sich zu $E\{e_q\} = T/200$, $\text{Var}(e_q) = (T/100)^2/12$.

Punkteverteilung: 4-6-4-5-4

Meßtechnik-Klausur vom 25. September 2003

Rechen-Aufgaben

Aufgabe 1: Kurvenanpassung / Kennlinienanalyse (25 Punkte)

Zur Modellierung eines Leitungsdrucks sind folgende Messwerte $y(u_i)$ an den Stützstellen u_i bestimmt worden:

u_i	-4	-2	0	2	4
$y(u_i)$	-6	-5	2	6	10

Bild 1: Messauswertungen des Leitungsdrucks

- a) Wie lautet das Interpolationspolynom? Verwenden Sie den Polynomansatz nach Newton! Run- den Sie dabei alle Zwischenergebnisse mindestens auf 3 Nachkommastellen.
- b) Aufgrund einer ungenügenden Modellbildung wird ein zusätzlicher Messwert an der Stützstelle $u_5 = 3$ ermittelt: $y(3) = 8$. Berechnen Sie das neue Interpolationspolynom unter Berücksichtigung dieses Messwertes.

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- c) Bei der Wahl eines geeigneten Messbereiches ist sowohl eine gute Linearität als auch eine hohe Empfindlichkeit der Kennlinie von Bedeutung. Geben Sie den Punkt der Kennlinie

$$f(t) = 1 + 3t - t^2 - \frac{1}{4}t^3 + \frac{1}{4}t^4$$

im Intervall $[-3, 2]$ an, um den herum der Messbereich gelegt werden muss, damit für das Messsignal die beiden Ziele erreicht werden.

Hinweis: Die Kennlinie $f(t)$ besitzt einen Wendepunkt.

- d) Wiederum wird von dem Messsignal

$$f(t) = 1 + 3t - t^2 - \frac{1}{4}t^3 + \frac{1}{4}t^4$$

im geänderten Intervall $I = [-4, 1]$ ausgegangen. Wählen Sie für einen auf das Intervall $[t_o, t_o + 1, 5] \subseteq I$ beschränkten Messbereich den Messanfang t_o so, dass das Gütenaß Q des mittleren quadratischen Fehlers zwischen der realen Empfindlichkeit und der idealer Empfindlichkeit minimiert wird.

- e) Die Empfindlichkeit des in Teilaufgabe c) ermittelten Arbeitspunktes soll erhöht werden. Dabei stehen Ihnen zwei identische Messwertaufnehmer zur Verfügung. Skizzieren Sie die Messanordnung zur Erhöhung der Empfindlichkeit. Wie nennt man dieses Prinzip? Wie stark ist die Krümmung der Messkennlinie im Arbeitspunkt?

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- f) Least-Square Schätzverfahren greifen gerne auf orthonormale Funktionsbasen $\{w_1, \dots, w_n\}$ zurück. Diese können aus beliebigen Basen $\{f_1, \dots, f_n\}$ durch das Gram-Schmidt Verfahren gewonnen werden. Dabei werden (nach Normalisierung der ersten Funktion auf den Wert 1, $w_1 = f_1 / \|f_1\|$) sukzessive für die einzelnen Funktionen die Anweisungen

$$\begin{aligned}\tilde{w}_i &= f_i - \langle f_i, w_{i-1} \rangle w_{i-1} - \dots - \langle f_i, w_1 \rangle w_1 \\ w_i &= \tilde{w}_i / \|\tilde{w}_i\|\end{aligned}$$

ausgeführt. Berechnen Sie über das Funktionensystem

$$\left\langle f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

des $\mathbf{R}^3$ mit Standardinnerprodukt

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$$

mit diesem Verfahren eine Orthonormalbasis.

Lösung

- a) Newton-Interpolationsschema :

u_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
-4	-6				
-2	-5	$\rangle 0.5$			
0	2	$\rangle 3.5$	$\rangle -0.1875$		
2	6	$\rangle 2$	$\rangle 0.0625$		
4	10	$\rangle 2$			

$$\begin{aligned}y_N(u) &= -6 + 0.5(u+4) + 0.75(u+4)(u+2) - 0.1875(u+4)(u+2)u \\ &\quad + 0.03125(u+4)(u+2)u(u-2)\end{aligned}$$

- b) Das erweiterte Newton-Interpolationsschema lautet:

u_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
-4	-6					
-2	-5	$\rangle 0.5$				
0	2	$\rangle 3.5$	$\rangle -0.1875$			
2	6	$\rangle 2$	$\rangle -0.375$	$\rangle 0.03125$		
4	10	$\rangle 2$	$\rangle 0$	$\rangle 0.0625$	$\rangle -0.00625$	
8	3	$\rangle 2$	$\rangle 0$			

Damit gilt

$$\begin{aligned}y_N(u) &= -6 + 0.5(u+4) + 0.75(u+4)(u+2) - 0.1875(u+4)(u+2)u \\ &\quad + 0.03125(u+4)(u+2)u(u-2) \\ &\quad - 0.00625(u+4)(u+2)u(u-2)(u-4)\end{aligned}$$

- c) Wahl der Kennlinie um eine Wendepunkt herum:

$$f' = t^3 - \frac{3}{4}t^2 - 2t + 3; \quad f'' = 3t^2 - \frac{3}{2}t - 2$$

$$f'' = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{105}{144}}$$

Wahl des Punktes für maximale Empfindlichkeit:

$$t_1 = 1.1039 \quad f'(t_1) = 1.22$$

$$t_2 = -0.6039 \quad f'(t_2) = 3.71 \Rightarrow \text{Arbeitspunkt: } t_2$$

- d) Q wird minimal für $S(t_a) = S(t_a + 1, 5)$

$$t_a^3 - \frac{3}{4}t_a^2 - 2t_a + 3 = (t_a + 1.5)^3 - \frac{3}{4}(t_a + 1.5)^2 - 2(t_a + 1.5) + 3$$

$$0 = 9t_a^2 + 9t_a - \frac{21}{8} \Rightarrow t_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{13}{24}}$$

$$t_1 = 0.236 \quad \text{Intervallende } t_1 + 1, 5 \text{ außerhalb Arbeitspunkt!}$$

$$t_2 = -1.236 = t_a$$

- e) Durch Parallelschaltung zweier identischer Meßwertaufnehmer wird eine Differenzkennlinie erzeugt (Bild 2), das Verfahren heisst entsprechend Differenzmethode. Alle geraden Terme der ursprünglichen Kennlinie werden bei der Differenzmethode eliminiert, entsprechend wird auch die Krümmung zu Null.

- f) Für f_1 liefert die Normierung

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

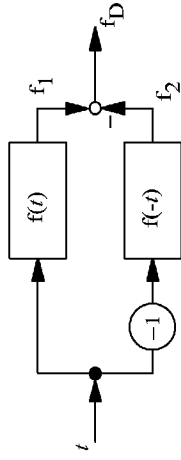


Bild 2: Parallelschaltung zweier Meßwertempfänger

Damit folgt für die zweite Funktion

$$\tilde{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

sowie für die dritte Funktion

$$\tilde{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Punkteverteilung: 5-3-4-4-3-6

Aufgabe 2: Korrelationsmesstechnik (24 Punkte)

- a) In Abbildung 4 (siehe Rückseite) finden sich die Zeitfunktionen $x(t)$, deren Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ sowie deren zugehörige Leistungsdichte $S_{xx}(f)$. Die Bilder sind in ihrer Reihenfolge vertauscht. Ordnen Sie daher den Zeitfunktionen ($A-J$) die zugehörigen Autokorrelationen (1-10) und die entsprechenden Leistungsdichtespektren ($I-X$) zu. Es werden keine Begründungen gefordert!

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von Aufgabenteil a).

- b) Zeigen Sie, dass für ein periodisches Signal $x(t)$ der Frequenz f die zugehörige Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ ebenfalls periodisch mit Frequenz f ist.
- c) Zeigen Sie, dass eine Gewichtung des periodischen Signals $p(t)$ mit dem Term A , beschreibbar über $x(t) = Ap(t)$, zu einer Gewichtung der Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ mit dem Faktor A^2 gegenüber $R_{pp}(\tau)$ führt.
- d) Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion des periodischen Signals, für welches Sie einen Ausschnitt in Bild 3 sehen.

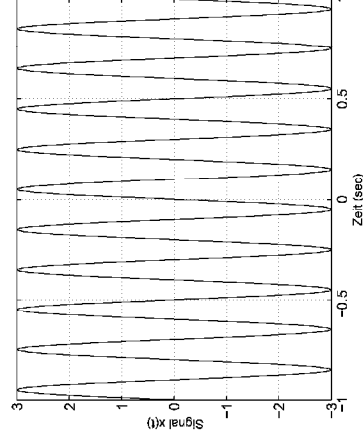


Bild 3: Ausschnitt eines periodischen Signals.

- e) Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion des periodischen Signals aus Bild 3, wenn es zusätzlich um einen Amplitudenoffset von 4 Einheiten in die positive Richtung verschoben wird.
- f) Geben Sie die Berechnungsformel der Autokorrelationsfunktion an, wenn das in Bild 3 dargestellte periodische Signal zusätzlich von einem weißen Rauschen überlagert ist.

Lösung

a)

A – 10 – X

B – 6 – III

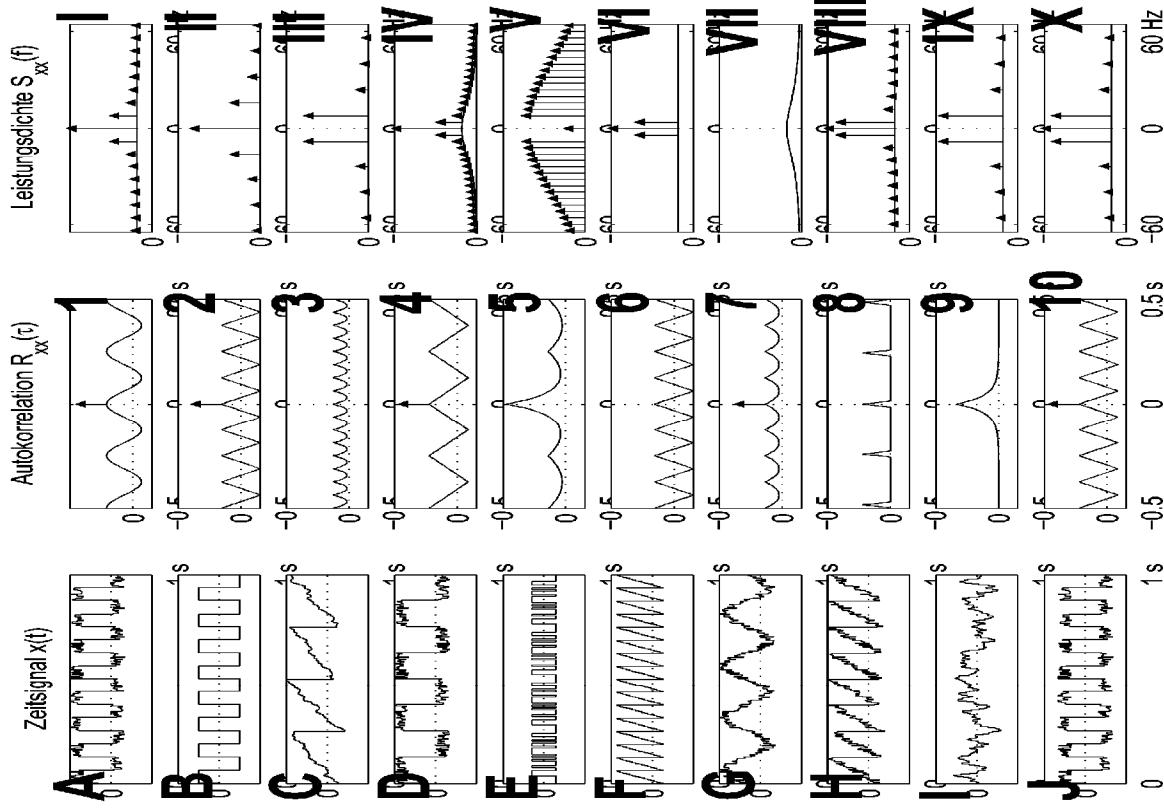


Bild 4: Zeitsignale, Autokorrelationsfunktionen und Leistungsdichten.

- C- 5- IV
D- 4- VIII
E- 8- V
F- 3- II
G- 1- VI
H- 7- I
I- 9- VII
J- 2- IX

- b) Ein periodisches Signal stellt ein Leistungssignal dar. Mit der Periodendauer $T = 1/f$ gilt folglich:

$$R_{xx}(\tau + T) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t + \tau + T)x(t)dt$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t + \tau)x(t)dt = R_{xx}(\tau).$$

- c) Die Autokorrelation von x ist mit A^2 gewichtet, denn mit $x(t) = Ap(t)$ folgt

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t + \tau)x(t)dt$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} Ap(t + \tau)Ap(t)dt = A^2 R_{pp}(\tau).$$

- d) Gegeben ist das periodische Signal $x(t) = 3 \sin(2\pi(5Hz)t)$. Die Autokorrelationsfunktion eines Sinussignals ist cosinusförmig, mit Hilfe der obigen Resultate und der Formel (siehe Messtechnik-Buch S.199)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sin(2\pi f(t + \tau)) \sin(2\pi f t) dt = \frac{1}{2} \cos(2\pi f \tau)$$

folgt insgesamt $R_{xx}(\tau) = 4,5 \cos(2\pi(5Hz)\tau)$.

- e) Das mit Offset versehene Signal wird über $x(t) = 4 + 3 \sin(2\pi(5Hz)t)$ beschrieben. Damit ergibt sich

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [4 + 3 \sin(2\pi(5Hz)(t + \tau))] [4 + 3 \sin(2\pi(5Hz)t)] dt$$

$$= 16 + 4,5 \cos(2\pi(5Hz)\tau) + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 2 \cdot 4 \cdot \sin(2\pi(5Hz)t) dt$$

$$= 16 + 4,5 \cos(2\pi(5Hz)\tau)$$

Ein Offset geht demnach quadratisch in die Autokorrelation mit ein.

- f) Die Überlagerung mit einem weißen Rauschen führt dazu, dass das Signal als stochastischer Prozess beschrieben werden muss. Folglich ist die Autokorrelation über

$$R_{xx}(\tau) = E\{x(t + \tau)x(t)\}$$

gegeben, wobei $x(t)$, $x(t + \tau)$ Zufallsvariablen darstellen.

Punkteverteilung: 10-2-2-3-4-3

Aufgabe 3: Zufällige Messfehler (18 Punkte)

- a) Es soll eine Aussage über die Varianz einer unbekannten Messgröße X mit Hilfe der Stichprobenvarianz getroffen werden. Zeigen Sie, dass bei hinreichend hohem, unabhängigen Stichprobenumfang n der Schätzer

$$\hat{S}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - [\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j])^2$$

gegen die wahre Varianz strebt, indem Sie die asymptotische Erwartungstreue nachweisen:

$$E[\hat{S}_n^2] \rightarrow Var(X), \quad n \rightarrow \infty.$$

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von Aufgabenteil a).

- b) Bei einer Messauswertung zur Bestimmung eines mathematischen Modells wurde die folgende Häufigkeitsverteilung unabhängiger Stichproben ermittelt:

Klasse i	1	2	3	4	5	6	7
Intervall I	[0, 1]	[1, 2]	[2, 3]	[3, 4]	[4, 5]	[5, 6]	[6, 7]
Stichproben n	41	28	22	20	24	7	5

Tabelle 1: Häufigkeitsverteilung

Der χ^2 -Test über die Güte einer Anpassung soll verwendet werden, um zu überprüfen, ob die angenommene Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$ aus Bild 5 (Dreiecksverteilung) ausreichend genau die Verteilung der Zufallsgröße X beschreibt. Führen Sie den χ^2 -Test mit einem Signifikanzniveau von $P(\chi^2 \leq \chi_\alpha^2) = 0,98$ durch.

Hinweis: Verwenden Sie Bild 6 zur Durchführung des χ^2 -Tests.

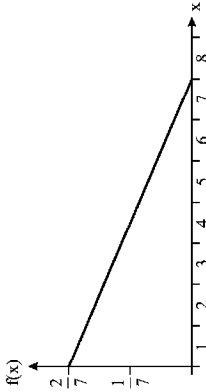


Bild 5: Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$ der Dreiecksverteilung

- c) Eine umfangreichere Messauswertung mit einem zehnfachen, weiterhin unabhängigen Stichprobenumfang ergibt zufällig die zehnfache Anzahl der Stichproben in jeder Klasse (siehe folgende Tabelle). Führen Sie wiederum den χ^2 -Anpassungstest der Dreiecksverteilung aus Bild

Klasse i	1	2	3	4	5	6	7
Intervall I	[0, 1]	[1, 2]	[2, 3]	[3, 4]	[4, 5]	[5, 6]	[6, 7]
Stichproben $\tilde{n}$	410	280	220	200	240	70	50

Tabelle 2: Häufigkeitsverteilung des erhöhten Stichprobenumfangs

5 mit einem Signifikanzniveau von $P(\chi^2 \leq \chi_\alpha^2) = 0,98$ durch.

- d) Warum führt die Erhöhung des Stichprobenumfangs bei gleichem Signifikanzniveau (und bei identischer Proportionalität der Häufigkeitsverteilung) zu einem veränderten Resultat (Plausibilitätsklärung)?

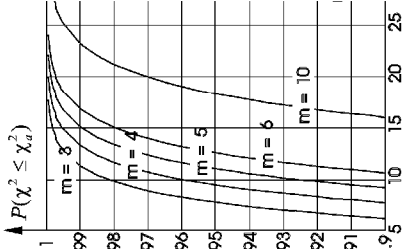


Bild 6: Signifikanzniveau von χ^2 bei $m = k - 1$ Freiheitsgraden

Lösung

- a) Es ist

$$\hat{S}_n^2 = \frac{n-1}{n} S_n^2, \text{ wobei } S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - [\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j])^2$$

Da $E[S_n^2] = Var(X)$ (siehe Messtechnik-Buch), folgt

$$E[\hat{S}_n^2] = \frac{n-1}{n} Var(X) \rightarrow Var(X), \quad n \rightarrow \infty.$$

- b) Als Faustregel sollten die inneren Klassen i der Häufigkeitsverteilung die Bedingung $np_i > 5$ erfüllen, für die Randklassen ist $np_i > 1$ zu prüfen. Die einzelnen Werte von p_i ergeben sich mit Hilfe der Prüfdichte $f(x) = \frac{2}{7} - \frac{2x}{49}$, $x \in [0, 7]$, zu

$$\begin{aligned} p_1 &= \int_0^1 (\frac{2}{7} - \frac{2x}{49}) dx = \frac{13}{49}, & p_2 &= \int_1^2 (\frac{2}{7} - \frac{2x}{49}) dx = \frac{11}{49} \\ p_3 &= \int_2^3 (\frac{2}{7} - \frac{2x}{49}) dx = \frac{9}{49}, & p_4 &= \int_3^4 (\frac{2}{7} - \frac{2x}{49}) dx = \frac{7}{49} \\ p_5 &= \int_4^5 (\frac{2}{7} - \frac{2x}{49}) dx = \frac{5}{49}, & p_6 &= \int_5^6 (\frac{2}{7} - \frac{2x}{49}) dx = \frac{3}{49} \\ p_7 &= \int_6^7 (\frac{2}{7} - \frac{2x}{49}) dx = \frac{1}{49} \end{aligned}$$

Für die Randklassen berechnet sich $np_i > 1$, für die inneren Klassen $np_i > 5$, die Voraussetzungen sind erfüllt.

Folgende Werte ergeben sich bei dem χ^2 -Anpassungstest mit Stichprobenumfang $n = 147$:

n_i	41	28	22	20	24	7	5
p_i	$\frac{13}{49}$	$\frac{11}{49}$	$\frac{9}{49}$	$\frac{7}{49}$	$\frac{9}{49}$	$\frac{3}{49}$	$\frac{1}{49}$
np_i	39	33	27	21	15	9	3
$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$	$\frac{4}{39}$	$\frac{25}{33}$	$\frac{25}{27}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{81}{15}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{3}$

$$\chi^2 \approx \sum_{i=1}^4 \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = 9,01.$$

Das Schaubild für den χ^2 -Anpassungstest mit $k = 7$ Klassen und $m = k - 1 = 6$ Freiheitsgraden ergibt den Wert $\chi_a^2 \approx 15$. Wegen

$$\chi^2 \leq \chi_a^2$$

wird die Hypothese (vorgegebene Dichtefunktion liegt zugrunde) angenommen.

- c) Die Voraussetzungen sind wiederum erfüllt, der Stichprobenumfang ist hinreichend groß. Für die Prüfgröße χ^2 berechnet sich in den einzelnen Variablen:

$$\tilde{n}_i = 10n_i, \quad \tilde{p}_i = p_i, \quad \tilde{n}_i \tilde{p}_i = 10n_i p_i$$

$$\frac{(\tilde{n}_i - \tilde{n} \tilde{p}_i)^2}{\tilde{n} \tilde{p}_i} = 10 \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

und schließlich $\chi_{\tilde{X}}^2 = 10\chi_X^2 \approx 90$. Ein Vergleich mit $\chi_a^2 \approx 15$ führt zur Ablehnung der Hypothese.

- d) Die Steigerung des Stichprobenumfangs erhöht die Variable χ^2 bei identischem Schwellwert χ_a^2 . Der Grund ist, dass bei erhöhtem Stichprobenumfang davon ausgegangen werden kann, dass die Häufigkeitsverteilung gegen die wahre Verteilung strebt (zentraler Grenzwertsatz). Entsprechend stärker müssen bei höherer Anzahl der Proben die Prüfkriterien sein.

Punkteverteilung: 4-6-4-4

Aufgabe 4: Messsysteme/ Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz (17 Punkte)

Gegeben ist das Messsystem einer Waage nach Bild 7. Das Gewicht der Masse $m > 0$ hängt dabei an einer Kette, die über eine Zahnscheibe mit dem Radius R umgelenkt wird. Das Ende der Kette ist an einer Feder mit der Federkonstanten c befestigt. An der Zahnscheibe wirkt außerdem eine Drehfeder mit der Steifigkeit c_r der Drehbewegung entgegen.

Auf der Scheibe befindet sich eine Markierung, die je nach Gewicht um den Winkel α gedreht wird. Mit einer geeigneten Skala kann damit das Gewicht abgelesen werden. Ohne Gewichtslast betrage der Winkel $\alpha = 0$. Die Federn sind hierbei nicht ausgelenkt.

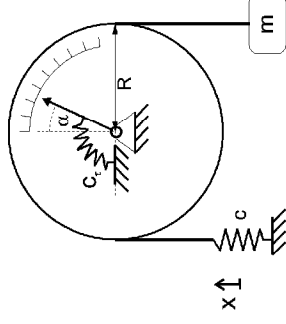


Bild 7: Messanordnung der Waage

- a) Bestimmen Sie die Kennlinie der Anordnung $\alpha = f(m)$ in Abhängigkeit der Masse m (sowie den weiteren Kenngrößen des Messvorrichtung).

Hinweis: Verwenden Sie die Energiebilanz des Systems zur Bestimmung der Auslenkung α . Dabei besitzt eine Feder mit Auslenkung b die potenzielle Energie $E = cb^2/2$, zwischen der dargestellten Auslenkung x der Feder c und dem Radius R besteht der Zusammenhang $x = R\alpha$.

b) Bei der Herstellung der Waage treten Fertigungstoleranzen auf. Die beiden Federkonstanten unterliegen einer Varianz von σ_c^2 bzw. $\sigma_{c_r}^2$. Der Radius des Zahnrades habe die Varianz σ_R^2 . Alle Einzelfehler sind statistisch unabhängig.

Bestimmen Sie die Varianz des Anzeigewinkels α mit Hilfe des Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetzes.

Bei einem neuen Waagenmodell werden die bisher verwendete Scheibe und Drehfeder ersetzt. Für die neue Scheibe mit integrierter Drehfeder gilt folgender Zusammenhang zwischen Durchmesser $d = 2R$ der Scheibe und c_r der Drehfeder:

$$c_r = 10 \cdot d + 490.$$

- c) Zeigen Sie, dass der Korrelationskoeffizient r zwischen dem Radius R und der Feder c_r den Wert $r = 1$ besitzt (Rechnung).
- d) Bestimmen unter diesen Bedingungen Sie die Varianz des Anzeigewinkels α .

Lösung

- a) Man gelangt zu folgender Energiegleichung:

$$mgx = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{2}c_r\alpha^2$$

und somit unter Verwendung von $x = R \cdot \alpha$ zu der Kennlinie

$$mgR\alpha = \frac{1}{2}cR^2\alpha^2 + \frac{1}{2}c_r\alpha^2$$

Der stabile Arbeitspunkt ($E = 0$) folgt durch Auflösen nach α , die Messvorschrift lautet

$$\alpha = f(m) = \frac{2gR}{(cR^2 + c_r)} \cdot m$$

b) Gauß'sche Fehlerfortpflanzung

$$\sigma_\alpha^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)^2 \sigma_c^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c_r}\right)^2 \sigma_{c_r}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial R}\right)^2 \sigma_R^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} = -\frac{2mgR^3}{(cR^2 + c_r)^2}; \frac{\partial f}{\partial c_r} = -\frac{2mgR}{(cR^2 + c_r)^2}; \frac{\partial f}{\partial R} = \frac{2mg(c_r - cR^2)}{(cR^2 + c_r)^2}$$

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{(2gm)^2}{(cR^2 + c_r)^4} [R^6 \cdot \sigma_c^2 + R^2 \cdot \sigma_{c_r}^2 + (c_r - cR^2)^2 \cdot \sigma_R^2]$$

c) Mit $c_r = aR + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, folgt $\mu_{c_r} = a\mu_R + b$ sowie $\sigma_{c_r}^2 = Var(\sigma_r^2) = a^2\sigma_R^2$. Entsprechend ergibt sich

$$r = E\left[\frac{(R - \mu_r)(aR + b - (a\mu_R + b))}{\sigma_R a \sigma_R}\right] = \frac{a}{a\sigma_R^2} E[(R - \mu_R)^2] = 1.$$

d) Die Varianz ist das Ergebnis aus Teil b) und einem Zusatzfaktor:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_\alpha^2 &= \sigma_\alpha^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial c_r} \frac{\partial f}{\partial R} \sigma_{c_r} \sigma_R = \sigma_\alpha^2 + 2 \frac{-2mgR}{(cR^2 + c_r)^2} \frac{2mg(c_r - cR^2)}{(cR^2 + c_r)^2} \sigma_{c_r} \sigma_R \\ &= \sigma_\alpha^2 + \frac{(2gm)^2}{(cR^2 + c_r)^4} 2R(cR^2 - c_r) \sigma_{c_r} \sigma_R \\ \tilde{\sigma}_\alpha^2 &= \frac{(2gm)^2}{(cR^2 + c_r)^4} [R^6 \cdot \sigma_c^2 + R^2 \cdot \sigma_{c_r}^2 + (cR^2 - c_r)^2 \cdot \sigma_R^2 + 2R(cR^2 - c_r) \sigma_{c_r} \sigma_R] \end{aligned}$$

Punkteverteilung: 6-4-3-4

Aufgabe 5: Amplitudenanaloge Signale (16 Punkte)

- a) Die Auswertungen eines Messsignals $a(t)$ haben eine normalverteilte Amplitudendichte mit Erwartungswert μ_a und der Varianz σ_a^2 geführt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte sowie die charakteristische Funktion des Signals nach der Quantisierung, wenn die Quantisierungsstufen äquidistant mit einem Abstand von $q = \mu_a/2$ verteilt sind: $f_{a_q}(a) \in \{\frac{k\mu_a}{2}\}_{k=-\infty}^{\infty}$. Drücken Sie das Ergebnis mit Hilfe der Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung aus.
- b) Welche Amplitudendichte besitzt das Signal $y(t) = 4 \cos(2\pi(2Hz)t)$? Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt das Signal den Wert 3 an?

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig den bisherigen Teilaufgaben

- c) Welche SNR in dB besitzen die CD-Player?
- d) In welchem Intervall müssen die Abtastzeitpunkte liegen, wenn der Jitter-Fehler zu einer Signal-Noise-Ratio SNR_{Jitter} führen soll, die maximal 20% der SNR der Quantisierung betragen soll? Dabei soll davon ausgegangen werden, dass die Frequenzen der Audiosignale kleiner als 20 kHz sind und der Jitterfehler als gleichverteilt angenommen werden kann.

Lösung

- a) Es gilt $a \sim \mathcal{N}(\mu_a, \sigma_a^2)$, eine Transformation auf Standardnormalverteilung kann mittels der Zuweisung

$$\tilde{a} := \frac{a - \mu_a}{\sigma_a} \quad (\tilde{a} \sim \mathcal{N}(0, 1))$$

getroffen werden. Für die Wahrscheinlichkeit eines Abtastwertes gilt:

$$\begin{aligned} P(\{a_q = k \frac{\mu_a}{2}\}) &= P(\{a \in [k \frac{\mu_a}{2} - \frac{\mu_a}{4}, k \frac{\mu_a}{2} + \frac{\mu_a}{4}]\}) \\ &= \Phi(\frac{(2k-3)\mu_a}{4\sigma_a}) - \Phi(\frac{(2k-5)\mu_a}{4\sigma_a}). \end{aligned}$$

Hierbei beschreibt Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Damit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeitsdichte des abgetasteten Signals :

$$f_{a_q}(a) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\Phi(\frac{(2k-3)\mu_a}{4\sigma_a}) - \Phi(\frac{(2k-5)\mu_a}{4\sigma_a})] \delta(a - k \frac{\mu_a}{2}).$$

Die charakteristische Funktion des abgetasteten Signals berechnet sich mit Hilfe von

$$\Phi_k := \Phi(\frac{(2k-3)\mu_a}{4\sigma_a}) - \Phi(\frac{(2k-5)\mu_a}{4\sigma_a})$$

über

$$\Phi_{a_q}(f) = \mathcal{F}(f_{a_q}(a)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_k e^{-j2\pi f k \mu_a / 2}.$$

- b) Nach dem Messtechnik Buch S. 262 beträgt die Amplitudendichte des Signals $y(t)$:

$$f_y(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{16-y^2}}, \quad |y| \leq 4.$$

Die Amplitudendichte ist stetig, das Signal nimmt den Wert 3 mit der Wahrscheinlichkeit 0 an:

$$\int_3^3 f_y(y) dy = 0.$$

- c) Für das Signal-Noise Ratio gilt $SNR = P_{Sig}/P_{Stoer}$. Der Effektivpegel des Eingangssignals mit Amplitude 2^{N-1} ($N = 8$) beträgt bei der Quantisierungsbreite q :

$$u_{eff} = \frac{2^{N-1}q}{\sqrt{2}}$$

und damit

$$P_{Sig} = u_{eff}^2 = \frac{2^{2N-2}q^2}{2}.$$

Die Rauschleistung berechnet sich (da gleichverteilter Quantisierungsfehler) zu $P_{stoer} = q^2/12$, es folgt

$$SNR = \frac{P_{Sig}}{P_{Stoer}} = 2^{16} \cdot 1,5$$

beziehungsweise $SNR \approx 50dB$.

- d) Die SNR des Jitterfehlers berechnet sich zu

$$SNR_{Jitter} = \frac{2}{(2\pi(20kHz)\sigma_\tau)^2},$$

wobei σ_τ die Standardabweichung des gleichverteilten Jitterfehlers im Intervall $[-\tau_{max}, \tau_{max}]$ ist. Weiter folgt mit $SNR_{Jitter} = 0, 2SNR$

$$\sigma_\tau^2 \leq \frac{2}{2SNR \cdot [2\pi(20kHz)]^2} = 6,44 \cdot 10^{-15}$$

und mit $\sigma_\tau^2 = \tau_{max}^2/3$ (Gleichverteilung) folgt $\tau_{max} = 139ns$.

Punkteverteilung: 5-3-3-5

Aufgabe 1: Kurvenanpassung (24 Punkte)

Für die Erstellung einer Kennlinie eines Sensorsystems wurden folgende Werte $y(u_i)$ an den Stützstellen u_i aufgezeichnet:

u_i	1	3	8
$y(u_i)$	6	3	1

Bild 1: Aufgezeichnete Messwerte

- a) Die Kennlinie soll interpoliert werden. Verwenden Sie hierzu die Interpolationsmethode nach Lagrange! Runden Sie Zwischenergebnisse auf 4 Nachkommastellen. (5 Punkte)
- b) Um die Kennlinien-Interpolation zu verbessern wird ein weiterer Wert an der Stützstelle $u_3 = 6$ ermittelt: $y(6) = 1,5$. Berechnen Sie das neue Interpolationspolynom unter Berücksichtigung dieses Messwertes! Runden Sie Zwischenergebnisse auf 4 Nachkommastellen und geben Sie das Interpolationspolynom in der Form $\tilde{y}(u) = p_0 + p_1u + p_2u^2 + p_3u^3 + \dots$ an. Warum ist das Newton-Verfahren für die erneute Berechnung besser geeignet? Begründen Sie Ihre Antwort! (3 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Folgende Messwerte sind gegeben:

Index	0	1	2	3
u_i	1	3	6	8
$y(u_i)$	6	3	1,5	1

Bild 2: Aufgezeichnete Messwerte (erweitert)

- c) Welche Vorteile hat die kubische Spline-Interpolation gegenüber der Lagrange bzw. Newton Interpolation hinsichtlich zunehmender Anzahl von Stützstellen? (2 Punkte)
- d) Beschreiben Sie den Berechnungsvorgang für die Spline-Interpolation! Nennen Sie dazu die 4 wichtigsten Berechnungsschritte in der **richtigen Reihenfolge**. (2 Punkte)
- e) Berechnen Sie die Koeffizienten a_i, b_i, c_i, d_i für die Spline-Polynome s_0, s_1, s_2 mit den Werten aus Bild 2!
- Hinweis:** Die Berechnung der Polynome s_0, s_1, s_2 ist nicht durchzuführen! (8 Punkte)
- f) Für die 2. Ableitungen der Spline-Polynome muss gelten:

$$(1) \quad s_i'(u_{i-1}+0) = s_{i-1}'(u_i-0) \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$(2) \quad s_0''(u_0) = s_{n-1}''(u_n)$$

Zeigen Sie mittels der in e) berechneten Koeffizienten a_i, b_i, c_i, d_i , dass (1) und (2) gilt! (4 Punkte)

Lösung

- a) Für die Lagrange-Interpolation gilt:

$$\tilde{y}_L(u) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot L_i(u), \quad n = 2$$

Es werden die Lagrange-Polynome L_0 , L_1 und L_2 benötigt.

$$L_0 = \frac{(u-3)(u-8)}{(1-3)(1-8)} = \frac{u^2 - 11u + 24}{14}$$

$$L_1 = \frac{(u-1)(u-8)}{(3-1)(3-8)} = \frac{u^2 - 9u + 8}{-10}$$

$$L_2 = \frac{(u-1)(u-3)}{(8-1)(8-3)} = \frac{u^2 - 4u + 3}{35}$$

Es ergibt sich:

$$\tilde{y}_L(u) = u^2 \cdot \left[6 \cdot \frac{1}{14} - 3 \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{35} \right] - u \cdot \left[6 \cdot \frac{11}{14} - 9 \cdot \frac{1}{10} + \frac{4}{35} \right] + \left[6 \cdot \frac{24}{14} - 3 \cdot \frac{8}{10} + \frac{3}{35} \right]$$

$$\begin{aligned} \tilde{y}_L(u) &= \frac{11}{70}u^2 - \frac{149}{70}u + \frac{279}{35} \\ &\approx 0,1571u^2 - 2,1285u + 7,9714 \end{aligned}$$

- b) Da für das Newton-Verfahren nur ein „Polynomfaktor“ neu berechnet werden muss, ist das Newton-Verfahren schneller und einfacher durchführbar als die Lagrange-Interpolation, hierbei müssten 4 „Polynomfaktoren“ erneut berechnet werden.

Für 3 gegebene Stützstellen und einem Polynom 2. Ordnung gibt es genau eine eindeutige Lösung für die Interpolation. Daher liefern Newton- und Lagrange-Interpolation dasselbe Ergebnis $\tilde{y}(u)$. Aus dem rekursiven Ansatz für das Newton-Polynom bei $n=4$ gegebenen Stützstellen gemäß

$$\tilde{y}_N(u) = a_3(u-u_0)(u-u_1)(u-u_2) + \underbrace{\tilde{y}(u)}_{\text{aus a)}} \cdot \tilde{y}_L(u)$$

ergibt sich a_3 mit der zusätzlichen Stützstelle $u_3 = 6$, $y_3(u_3 = 6) = 1,5$ zu

$$a_3 = \frac{\tilde{y}_N(u_3) - \tilde{y}_L(u_3)}{(u_3 - 1)(u_3 - 3)(u_3 - 8)} = \frac{\frac{9}{14} - \frac{-3}{-30}}{-30} \approx -0,0214$$

eingesetzt berechnet sich das gesuchte Polynom $\tilde{y}_N(u)$ zu

$$\begin{aligned} \tilde{y}_N(u) &= \frac{-3}{140}(u^2 - 12u^2 + 35u - 24) + \frac{11}{70}u^2 - \frac{149}{70}u + \frac{279}{35} \\ &= \frac{-3}{140}u^2 + \frac{29}{70}u^2 - \frac{403}{140}u + \frac{297}{35} \\ &= -0,0214u^2 + 0,4143u^2 - 2,8786u + 8,4857 \end{aligned}$$

- c) • Bei großer Anzahl von Messpunkten erhält man bei den klassischen Polynominterpolationen (Newton / Lagrange) Interpolationspolynome hoher Ordnung.
Bei der kubischen Spline-Interpolation bleibt der Grad der verwendeten Polynome gleich.
• kubische Spline-Interpolation liefert i.A. ein besseres Interpolationsergebnis (geringerer Kernlinienfehler), vor allem bei zunehmender Stützstellenzahl.

- d) Für die Berechnung der Spline-Interpolation notwendige Schritte:

1. Länge der Teilintervalle h_i bestimmen
2. y_i'' berechnen
3. Koeffizienten a_i , b_i , c_i , d_i berechnen
4. kubische Polynome $s_i(u) = a_i(u-u_i)^3 + b_i(u-u_i)^2 + c_i(u-u_i) + d_i$ für jedes Teilintervall i bestimmen

- e) Schritte 1.-3. aus d)

1. Länge der Teilintervalle h_i bestimmen nach

$$h_i = u_{i+1} - u_i$$

ergibt

Index	0	1	2	3
u_i	1	3	6	8
$y(u_i)$	6	3	1,5	1
h_i	2	3	2	-

2. y_i'' berechnen

Es gilt: $y_0'' = y_3'' = 0$.

die unbekannten 2. Ableitungen erhält man aus

$$\begin{bmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 \\ h_1 & 2(h_0 + h_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{h_1}(y_2 - y_1) - \frac{6}{h_0}(y_1 - y_0) \\ -\frac{6}{h_2}(y_3 - y_2) - \frac{6}{h_1}(y_2 - y_1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot 5 & 3 \\ 3 & 2 \cdot 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{2}(1,5 - 3) - \frac{6}{2}(3 - 6) \\ -\frac{6}{2}(1 - 1,5) - \frac{6}{3}(1,5 - 3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \end{bmatrix} = \frac{1}{91} \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 1,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{111}{182} \\ -\frac{3}{91} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,6098 \\ -0,03297 \end{bmatrix}$$

3. Koeffizienten a_i , b_i , c_i , d_i berechnen mit

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{6 \cdot h_i} (y_{i+1}'' - y_i'') \\ b_i &= \frac{1}{2} y_i'' \\ c_i &= \frac{1}{h_i} (y_{i+1} - y_i) - \frac{h_i}{6} (y_{i+1}'' + 2y_i'') \\ d_i &= y_i \end{aligned}$$

ergibt

Index	0	1	2
a_i	$\frac{111}{12 \cdot 91} \approx 0,0508$	$\frac{-1}{28} \approx -0,03571$	$\frac{3}{12 \cdot 91} \approx 2,74 \cdot 10^{-3}$
b_i	0	$\frac{111}{2 \cdot 182} \approx 0,3049$	$\frac{-3}{2 \cdot 91} \approx -0,01648$
c_i	$\frac{-155}{91} \approx -1,703$	$\frac{-199}{182} \approx -1,0934$	$\frac{-83}{364} \approx -0,228$
d_i	6	3	1,5

f) Für die 2. Ableitung an den Enden des Intervalls erhält man

$$s_1''(u_i) = 2 \cdot b_i$$

$$s_1''(u_{i+1}) = 6a_i h_i + 2b_i.$$

Für $i = 1$ erhält man aus (1)

$$s_1''(u_1) = 2 \cdot b_1 = 0,6098$$

und für $i = 0$ erhält man aus (2)

$$s_0''(u_1) = 6a_0 h_0 + 2b_0 = 0,6098$$

vergleicht man (3) und (4) so ist

$$s_1''(u_1) = s_0''(u_1) \Rightarrow s_1''(u_1 + 0) = s_0''(u_1 - 0).$$

Für $i = 0$ erhält man aus (1)

$$s_0''(u_0) = 2 \cdot b_0 = 0$$

und für $i = n - 1 = 2$ erhält man aus (2)

$$s_2''(u_3) = 6a_2 h_2 + 2b_2 = 0$$

vergleicht man (5) und (6) so ist

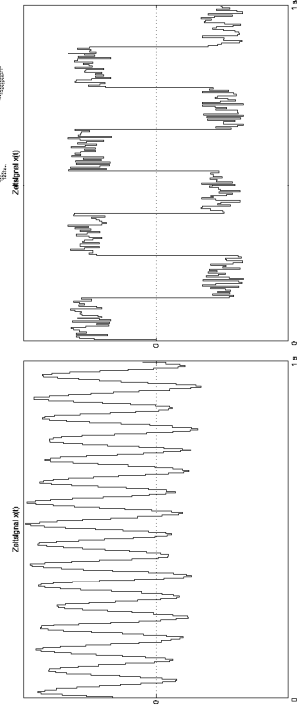
$$s_0''(u_0) = s_2''(u_3).$$

Punkteverteilung: 5-3-2-2-8-4

Aufgabe 2: Korrelationsmesstechnik (18 Punkte)

Verwenden Sie für die Bearbeitung weder Bleistifte noch Stifte mit roter Farbe!

- a) Zeichnen Sie zu den folgenden Zeitsignalen $x(t)$ jeweils deren Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ und deren Leistungsdichte $S_{xx}(f)$! Begründen Sie kurz Ihre Lösung und beschriften Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung. (6 Punkte)



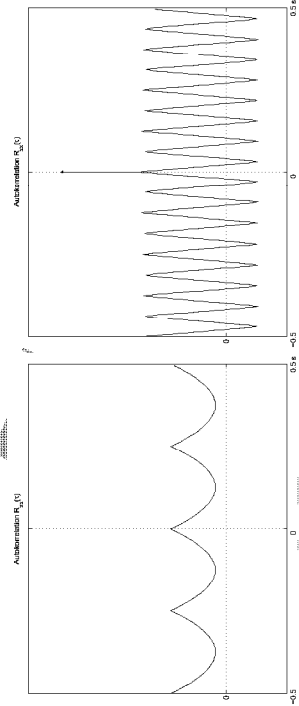
(a) Signal a) 1

(b) Signal a) 2

Bild 3: Zeitsignale $x(t)$

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

- b) Zeichnen Sie zu den folgenden Autokorrelationsfunktionen $R_{xx}(\tau)$ jeweils deren Zeitsignale $x(t)$ und deren Leistungsdichte $S_{xx}(f)$! Begründen Sie kurz Ihre Lösung und beschriften Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung. (6 Punkte)



(a) Signal b) 1

(b) Signal b) 2

Bild 4: Autokorrelationsfunktionen $R_{xx}(\tau)$

Weiter auf Seite 6

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

- c) Zeichnen Sie zu den folgenden Leistungsdichten $S_{xx}(f)$ jeweils deren Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ und deren Zeitsignale $x(t)$! Begründen Sie kurz Ihre Lösung und beschriften Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung. (6 Punkte)

Hinweis: Die Leistungsdichte c) 1 hat 2 Impulse bei $\pm 8 \text{ Hz}$.

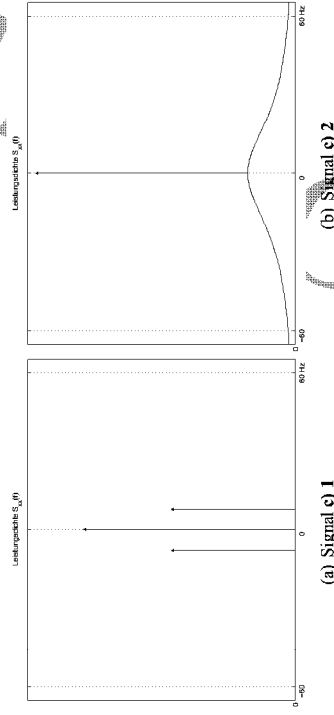


Bild 5: Leistungsdichten $S_{xx}(f)$

Lösung

Bemerkung: Die Leistungsdichte und die Autokorrelation von farbigem Rauschen sind im Messtechnik-Buch (Kiencke, Eger, *Messtechnik*, Springer-Verlag, 2001) auf Seite 224 abgebildet und werden in der Lösung als *Komponente 1* für Autokorrelation und *Komponente 2* für Leistungsdichte bezeichnet.

a) Signal a) 1

- Zeitsignal: sinusförmig, farbiges Rauschen, Offset 4, Frequenz: 16 Hz
- ⇒ Autokorrelation: cosinusförmig, Komponente 1, Offset A^2 , Frequenz: 16 Hz
- ⇒ Leistungsdichte: Impulse bei $\pm 16 \text{ Hz}$, Komponente 2, Impuls bei $f = 0$

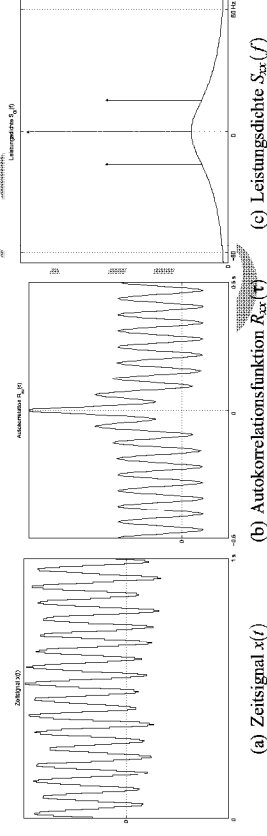


Bild 6: Signal a) 1

Signal a) 2

- Zeitsignal: rechteckförmig, weißes Rauschen, Frequenz: 4 Hz
- ⇒ Autokorrelation: dreieckförmig, Impuls bei $\tau = 0$, Frequenz: 4 Hz
- ⇒ Leistungsdichte: Impulse bei $\pm 4, \pm 12, \pm 20, \dots \text{ Hz}$, Offset

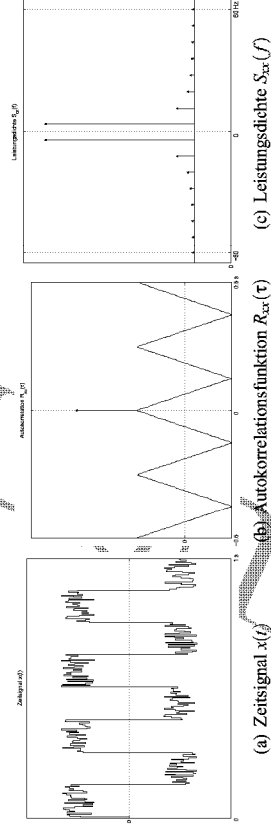


Bild 7: Signal a) 2

b) Signal b) 1

- Autokorrelation: $|x^3|$ -förmig, Offset A^2 , Frequenz: 4 Hz
- ⇒ Zeitsignal: sägezahnförmig, Offset A , Frequenz: 4 Hz
- ⇒ Leistungsdichte: Impulse bei $\pm 4, \pm 8, \pm 12, \dots$ Hz, Impuls bei $f = 0$

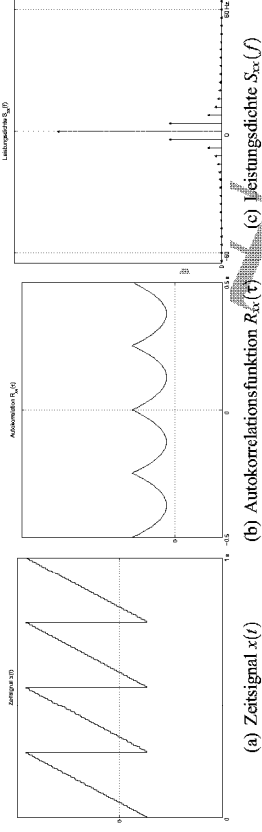


Bild 8: Signal b) 1

Signal b) 2

- Autokorrelation: dreieckförmig, Impuls bei $\tau = 0$, Offset A^2 , Frequenz: 16 Hz
- ⇒ Zeitsignal: rechteckförmig, weißes Rauschen, Offset A , Frequenz: 16 Hz
- ⇒ Leistungsdichte: Impulse bei $\pm 16, \pm 48, \pm 80, \dots$ Hz, Offset, Impuls bei $f = 0$

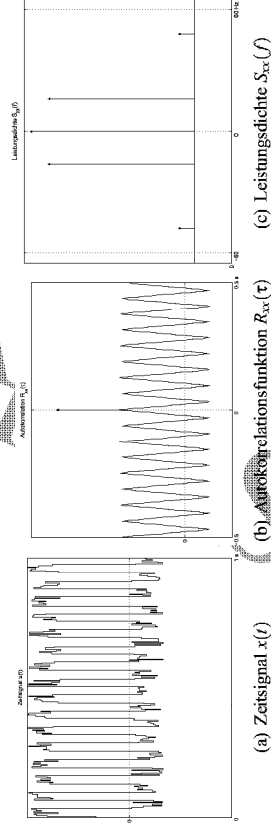


Bild 9: Signal b) 2

Punkteverteilung: 6-6-6

c) Signal c) 1

- Leistungsdichte: Impulse bei ± 8 Hz, Impuls bei $f = 0$
- ⇒ Zeitsignal: sinusförmig, Offset A , Frequenz: 8 Hz
- ⇒ Autokorrelation: cosinusförmig, Offset A^2 , Frequenz: 8 Hz

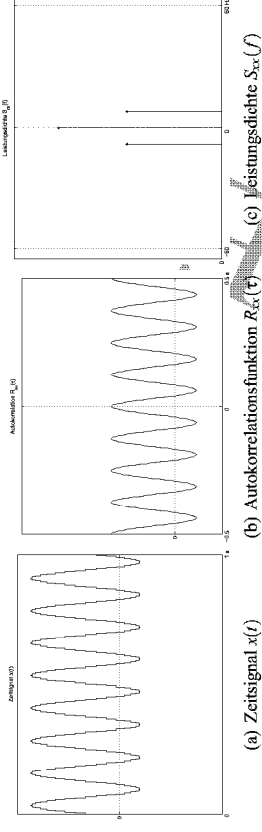


Bild 10: Signal c) 1

Signal c) 2

- Leistungsdichte: Impuls bei $f = 0$, Komponente 2
- ⇒ Zeitsignal: Offset A , farbiges Rauschen
- ⇒ Autokorrelation: Offset A^2 , Komponente 1

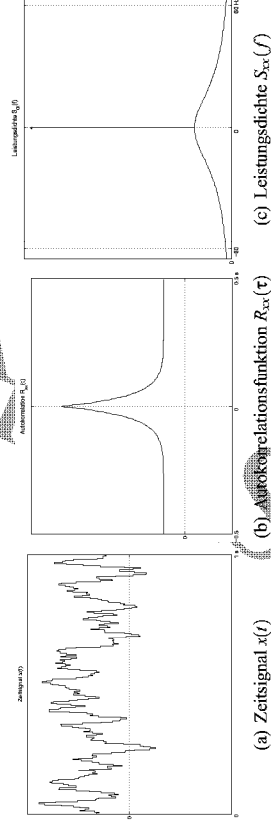


Bild 11: Signal c) 2

Aufgabe 3: Zufällige Messfehler (19 Punkte)

Moderne Automobile sind mit verschiedenartigen Sensorsystemen ausgestattet, z.B. Beschleunigungssensoren in Längs- und Querrichtung. Werden die Beschleunigungswerte vor, während und nach einem Unfall aufgezeichnet, so lassen sich nach einem Verkehrsunfall Aussagen über die Art und Schwere des Unfalls machen. Hierzu ist es notwendig die Fahrzeugkarosserie gemäß Abb. 12 in acht verschiedene Gebiete aufzuteilen und die Beschleunigung in Fahrzeuglängs- und -querrichtung auszuwerten. Zum Beispiel bedeuten sehr geringe Beschleunigungswerte in Fahrzeugquerrichtung a_Y und große negative Beschleunigungswerte in Fahrzeuglängsrichtung a_X ein Frontalaufprall (Gebiet 1 oder 8).

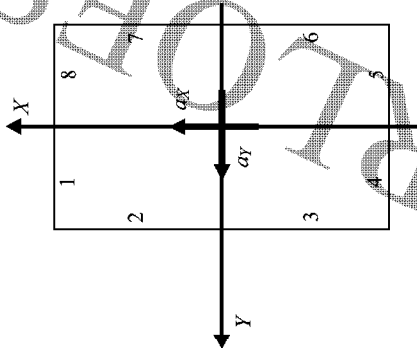


Bild 12: Aufteilung der Fahrzeugkarosserie in 8 Gebiete.

Aufgrund von Sensorsignal-Störungen ergibt sich nur eine Häufigkeitsverteilung für das berechnete, potentielle Aufprallgebiet anstatt eines deterministischen Wertes.

Gebiet	1	2	3	4	5	6	7	8
Häufigkeit	5	10	28	40	33	9	11	4

Tabelle 1: Berechnete Häufigkeitsverteilung

Für die weitere Datenverarbeitung soll nun mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f_X(x)$ gearbeitet werden.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{14} & 0 \leq x < \frac{7}{2} \\ \frac{8-x}{18} & \frac{7}{2} \leq x \leq 8 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- a) Ist $f_X(x)$ eine nach Definition gültige Wahrscheinlichkeitsdichte? Begründen Sie Ihre Antwort! (3 Punkte)
- b) Skizzieren Sie ein Histogramm, das die berechnete Häufigkeitsverteilung illustriert. Teilen Sie die Abszisse dazu folgendermaßen ein: Gebiet i entspricht Klasse i im Bereich $i-1 \leq x < i$ ($i = 1, \dots, 8$). Die Ordinate soll sich über den Bereich $0 \dots 40$ erstrecken. (2 Punkte)
- c) Prüfen Sie mit Hilfe des χ^2 -Tests, ob die Häufigkeitsverteilung der angenommenen Wahrscheinlichkeitsdichte $f_X(x)$ entspricht. Das Signifikanzniveau beträgt $\alpha = 0,05$. Runden Sie Ihre Zwischenergebnisse auf 4 Stellen.

Überprüfen Sie auch ob die Annahme $n \cdot p_i \geq 5$ und $n \cdot p_i \cdot \text{Randklasse} \geq 1$ erfüllt ist! $n \cdot p_i$ entspricht dem Erwartungswert der Häufigkeit in einer Klasse. (10 Punkte)

Hinweis: In Abb. 13 sind die Quantile der χ^2 -Verteilung mit m Freiheitsgraden dargestellt

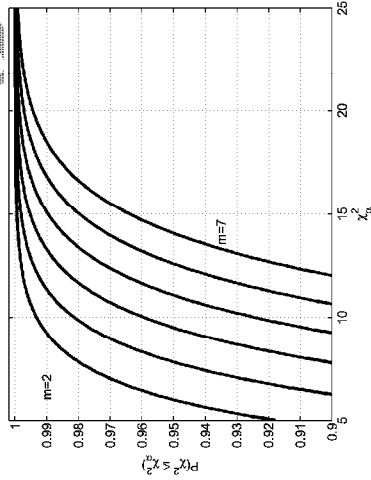


Bild 13: Wahrscheinlichkeit von $\chi^2 \leq \chi^2_{\alpha}$ bei m Freiheitsgraden.

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Es sollen die beiden statistisch unabhängigen Zufallsvariablen a und b betrachtet werden. Die Wahrscheinlichkeitsdichten sind gegeben durch:

$$f_a(a) = \begin{cases} \frac{1}{2a_0} & |a| \leq a_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad f_b(b) = \begin{cases} \frac{1}{2b_0} & |b| \leq b_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $a_0 = b_0 > 0$.

Ferner sei die Zufallsvariable $c := a + b$ definiert.

- d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariable c . Geben Sie den Rechenweg an! (4 Punkte)

Lösung

a) Für die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_X(x)$ muss gelten:

1. $f_X(x) \geq 0$: Ist erfüllt für alle x .

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx \stackrel{!}{=} 1$

Mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_0^{7/2} \frac{x}{14} dx + \int_{7/2}^8 \frac{8-x}{18} dx = \frac{x^2}{28} \Big|_0^{7/2} + \left[\frac{8x}{18} - \frac{x^2}{36} \right]_{7/2}^8 = 1 \quad (7)$$

ist Bedingung 2. erfüllt und $f_X(x)$ ist eine gültige Wahrscheinlichkeitsdichte.

b) Histogramm nach Tabelle 1.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_X(x)$ ist zusätzlich mit eingezeichnet und wurde zur besseren Darstellung entsprechend skaliert.

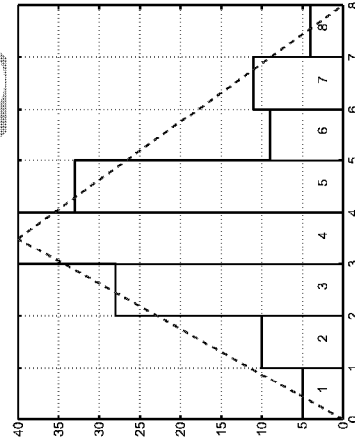


Bild 14: Histogramm der berechneten Häufigkeitsverteilung mit $f_X(x)$.

c) χ^2 -Anpassungstest.

• Nullhypothese H_0 : " $f_X(x)$ entspreche der Häufigkeitsverteilung nach Tabelle 1."

• statistische Sicherheit: $P = 1 - \alpha = 0,95$

• Freiheitsgrade m bei $k = 8$ Klassen: $m = k - 1 = 7$

• Theoretische Wahrscheinlichkeiten p_i aus der vorgegebenen Wahrscheinlichkeitsdichte $f_X(x)$

$$\begin{aligned} p_1 &= \int_0^1 \frac{x}{14} dx = \frac{1}{28} \approx 0,0357 \\ p_2 &= \int_1^2 \frac{x}{14} dx = \frac{3}{28} \approx 0,1071 \\ p_3 &= \int_2^{7/2} \frac{x}{14} dx = \frac{5}{28} \approx 0,1786 \\ p_4 &= \int_{7/2}^4 \frac{x}{14} dx + \int_4^{17/4} \frac{8-x}{18} dx = \frac{13}{112} + \frac{17}{144} = \frac{59}{252} \approx 0,2342 \\ p_5 &= \int_{17/4}^5 \frac{8-x}{18} dx = \frac{7}{36} \approx 0,1944 \\ p_6 &= \int_5^6 \frac{8-x}{18} dx = \frac{5}{36} \approx 0,1389 \\ p_7 &= \int_6^7 \frac{8-x}{18} dx = \frac{3}{36} \approx 0,0833 \\ p_8 &= \int_7^8 \frac{8-x}{18} dx = \frac{1}{36} \approx 0,0278 \end{aligned}$$

Es ergibt sich Tabelle 2 für den χ^2 -Test.

Klasse	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
n_i	5	10	28	40	33	9	11	4	140
p_i	0,0357	0,1071	0,1786	0,2342	0,1944	0,1389	0,0833	0,0278	1
$n \cdot p_i$	5	15	25	32,7778	27,2222	19,4444	11,6667	3,8889	140
$\frac{(n_i - n p_i)^2}{n p_i}$	0	1,6667	0,36	1,5913	1,2263	5,6101	0,0381	0,0032	10,496

Tabelle 2: χ^2 -Berechnung

- $m = 7$ und $P = 0,95$ ergibt aus Bild 13 $\chi_{\alpha}^2 \approx 13,9 \dots 14,1$
- $\chi^2 = \frac{(n_i - n p_i)^2}{n p_i} = 10,496 < \chi_{\alpha}^2 \Rightarrow$ Annahme der Nullhypothese: Wahrscheinlichkeitsdichte $f_X(x)$ kann verwendet werden
- Überprüfung, ob die Annahme $n \cdot p_i \geq 5$ und $n \cdot p_i \geq 1$ für Randklassen erfüllt ist:
 $n \cdot p_i \geq 5$ ist für $i = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ erfüllt
 $n \cdot p_i \geq 1$ für Randklassen ist für $i = 1, 8$ erfüllt
 $\Rightarrow$ Voraussetzungen sind erfüllt!

d) Die Wahrscheinlichkeitsdichte der Summe unabhängiger Zufallsvariablen kann über die Faltung der einzelnen Wahrscheinlichkeitsdichten bzw. über die Multiplikation der charakteristischen Funktionen der Zufallsvariablen berechnet werden.

$$c = a + b \rightarrow f_c(c) = f_a(a) * f_b(b) \xrightarrow{\mathcal{F}} \Phi_c = \Phi_a \cdot \Phi_b$$

Für die charakteristischen Funktionen Φ_a, Φ_b ergibt sich

$$\Phi_a = \mathcal{F}(f_a(a)) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2a_0} \cdot r_{2a_0}(a)\right) = \text{si}(\pi f 2a_0)$$

$$\Phi_b = \mathcal{F}(f_b(b)) = \text{si}(\pi f 2b_0)$$

und daraus erhält man mit $a_0 = b_0$

$$\Phi_c = \Phi_a \cdot \Phi_b = \text{si}^2(\pi f 2a_0)$$

Die Fourier-Rücktransformation liefert daraus die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f^{-1}(\Phi_c) = f_c(c) = \begin{cases} \frac{c}{4a_0^2} + \frac{1}{2a_0} & -2a_0 \leq c \leq 0 \\ \frac{1}{2a_0} - \frac{c}{4a_0^2} & 0 \leq c \leq 2a_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

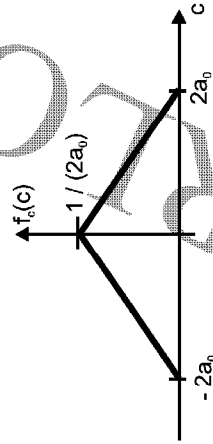


Bild 15: Ergebnis der W.-Drehen Addition.

Punkteverteilung: 3-2-10-4

Aufgabe 4: Amplitudenanaloge Signale (23 Punkte)

Ein Sensorsystem liefert das in Abb. 16(a) abgebildete Signal $y(t)$, welches für eine weitere Verarbeitung digitalisiert werden soll.

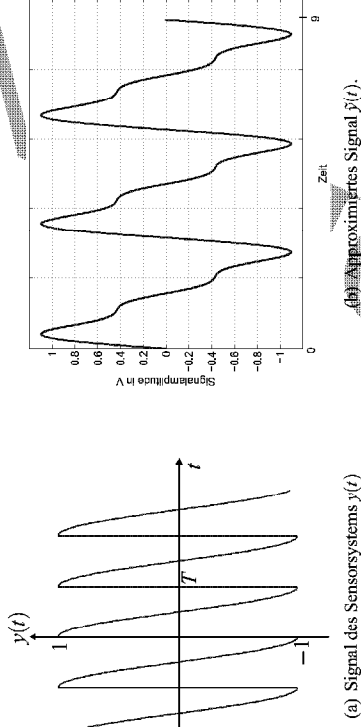


Bild 16: Signalverläufe von $y(t)$ und $\tilde{y}(t)$

Das Signal $y(t)$ kann analytisch wie folgt dargestellt werden:

$$y(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+2)}{(2k+1)(2k+3)} \sin(2\pi \cdot (2k+2) \cdot t / T_g) \quad \text{mit } f_g = 1 \text{ Hz und } T = 3 \text{ s.}$$

Das Signal $y(t)$ ist aus $\sin(\cdot)$ -Funktionen zusammengesetzt. **Betrachten Sie für die weitere Bearbeitung das Signal $\tilde{y}(t)$, das aus den ersten 3 Gliedern ($k = 0, 1, 2$) von $y(t)$ zusammengesetzt ist.**

- a) Geben Sie die Fourier-Transformierte $\tilde{Y}_*(f)$ des abgetasteten Signals $\tilde{y}_*(t) = \tilde{y}(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_a)$ an! (3 Punkte)
- b) Ab welcher Abtastfrequenz f_a erwarten Sie keine spektrale Überlappung für das Signal $\tilde{y}(t)$? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Als nächstes soll die Quantisierung des Signals $\tilde{y}(t)$ (siehe Abb. 16(b)) untersucht werden.

- c) Am Eingang des Quantisierers liegt $\tilde{y}(t)$ mit der Amplitude $A = 1,1 \text{ V}$ an. Die Auflösung des Quantisierers betrage $N = 6 \text{ bit}$. Welche Breite hat eine Quantisierungsstufe des Quantisierers, wenn von einer treppenförmigen Quantisierungskennlinie ausgegangen wird? Geben Sie die Breite in mV an! (2 Punkte)

- d) Die Auflösung des verwendeten Quantisierers betrage jetzt $N = 10 \text{ bit}$. Wie groß ist der Signal-Störabstand SNR in dB ? (6 Punkte)

Hinweise:

- Das Quantisierungstheorem ist erfüllt.
- Der quantisierte Effektivwert der Eingangsspannung $\tilde{y}(t)$ berechnet sich nach:

$$\tilde{y}_{eff} = 2^{N-1} q \cdot \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \tilde{y}^2(t) \cdot dt}$$

- $\int \sin(ax) \sin(bx) dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)}$

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Für die AD-Wandlung soll ein Sigma-Delta-Wandler (kurz $\Sigma\Delta$ -Wandler) eingesetzt werden. In Abb. 17 ist ein vereinfachtes Strukturbild eines $\Sigma\Delta$ -Modulators n-Ordnung dargestellt.

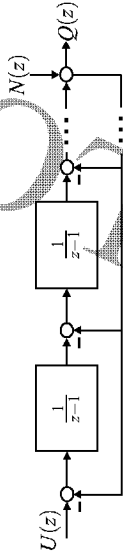


Bild 17: Strukturbild eines $\Sigma\Delta$ -Modulators n-Ordnung.

- e) Was ist Noise-Shaping? Wodurch wird es verursacht? (2 Punkte)

Der Noise-Shaping-Effekt kann verstärkt werden, indem ein $\Sigma\Delta$ -Modulator höherer Ordnung verwendet wird.

- f) Zeichnen Sie das Strukturbild für einen $\Sigma\Delta$ -Modulator 2. Ordnung und geben Sie dessen Ausgangsfunktion $Q(z)$ in Abhängigkeit von $U(z)$ und $N(z)$ an! (3 Punkte)
- g) Bestimmen Sie das SNR_{dB} des $\Sigma\Delta$ -Modulator 2. Ordnung! Um welchen Faktor P_{dB} ist das SNR_{dB} des $\Sigma\Delta$ -Modulator 2. Ordnung höher als das SNR_{dB} eines $\Sigma\Delta$ -Modulators 1. Ordnung? Verwenden Sie ein Überabstärkverhältnis von $M = 64$. (5 Punkte)

Lösung

- a) Die Fourier-Transformation von $\tilde{y}(t)$ ist

$$\tilde{Y}(f) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{j}{2} \left[\frac{2}{3} \cdot \delta(f + 2f_g) - \frac{2}{3} \cdot \delta(f - 2f_g) + \frac{4}{15} \cdot \delta(f + 4f_g) - \frac{4}{15} \cdot \delta(f - 4f_g) + \frac{6}{35} \cdot \delta(f + 6f_g) - \frac{6}{35} \cdot \delta(f - 6f_g) \right]$$

Für die Fourier-Transformation des abgetasteten Signals gilt

$$\mathcal{F} \left(\tilde{y}_s(t) = \tilde{y}(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \right) = f_a \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{Y}(f - k \cdot f_a)$$

daraus ergibt sich

$$\tilde{Y}_s(f) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{j}{2} \cdot f_a \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{2}{3} \cdot \delta(f + 2f_g + k \cdot f_a) - \frac{2}{3} \cdot \delta(f - 2f_g - k \cdot f_a) + \frac{4}{15} \cdot \delta(f + 4f_g + k \cdot f_a) - \frac{4}{15} \cdot \delta(f - 4f_g - k \cdot f_a) + \frac{6}{35} \cdot \delta(f + 6f_g + k \cdot f_a) - \frac{6}{35} \cdot \delta(f - 6f_g - k \cdot f_a) \right]$$

- b) Mit $f_g = 1 \text{ Hz}$ und Gleichung (8) ergibt sich, dass $|f_N| = 6 \text{ Hz}$ die höchste im Signalspektrum von $\tilde{y}(t)$ vorkommende Frequenz ist. Um das Abasttheorem zu erfüllen muss

$$f_a > 2 \cdot |f_N| = 12 \text{ Hz}$$

gelten. Mit $f_a > 12 \text{ Hz}$ tritt daher bei Abtastung kein Aliasing mehr auf.

- c) Dem Quantisierer stehen 2^N Stufen mit der Breite q zur Verfügung, um die Signalamplitude A abzubilden. Da auch negative Werte berücksichtigt werden müssen ergibt sich $A - (-A) = 2A = 2^N \cdot q$. Daraus folgt $q = \frac{A}{2^{N-1}} = 34,375 \text{ mV}$.

- d) Für das SNR in dB gilt

$$SNR_{dB} = 10 \cdot \log \frac{P_{sig}}{P_{stör}} = 10 \cdot \log \frac{\tilde{y}_{eff}^2}{\sigma_{eq}^2}$$

Das Quantisierungstheorem ist erfüllt (s. Hinweise), daher gilt für $\sigma_{eq}^2 = \frac{q^2}{12}$.

Der quadrierte, quantisierte Effektivwert der Eingangsspannung ist

$$\begin{aligned}
 \hat{y}_{eff}^2 &= 2^{2N-2} q^2 \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \hat{y}^2(t) \cdot dt \\
 &= 2^{2N-2} q^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \int_0^3 \left[\frac{2}{3} \sin(4\pi t) + \frac{4}{15} \sin(8\pi t) + \frac{6}{35} \sin(12\pi t) \right]^2 dt \\
 &= 2^{2N-2} q^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2 \cdot 4\pi t)}{4 \cdot 4\pi} \right] + \left(\frac{4}{15}\right)^2 \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2 \cdot 8\pi t)}{4 \cdot 8\pi} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{6}{35}\right)^2 \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2 \cdot 12\pi t)}{4 \cdot 12\pi} \right] + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((4\pi - 8\pi)t)}{2(4\pi - 8\pi)} - \frac{\sin((4\pi + 8\pi)t)}{2(4\pi + 8\pi)} \right] \right. \\
 &\quad \left. + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{35} \left[\frac{\sin((4\pi - 12\pi)t)}{2(4\pi - 12\pi)} - \frac{\sin((4\pi + 12\pi)t)}{2(4\pi + 12\pi)} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4}{15} \cdot \frac{6}{35} \left[\frac{\sin((8\pi - 12\pi)t)}{2(8\pi - 12\pi)} - \frac{\sin((8\pi + 12\pi)t)}{2(8\pi + 12\pi)} \right] \right] \Bigg|_0^3 \\
 &= 2^{2N-2} q^2 \cdot \frac{16}{3\pi^2} \cdot \frac{3}{2} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{15}\right)^2 + \left(\frac{6}{35}\right)^2 \right] \\
 &= 2^{2N-2} q^2 \cdot 0,4417
 \end{aligned}$$

Hiermit kann das SNR ausgerechnet werden

$$SNR_{dB} = 10 \cdot \log \frac{2^{2N-2} q^2 \cdot 0,4417}{\frac{q^2}{12}} \approx 61,43 \text{ dB}$$

- e) Noise-Shaping bedeutet die Verlagerung der Rauschleistung hin zu hohen Frequenzen und wird durch die Hochpassfilterung $|1 - z^{-1}|$ des Quantisierungsrauschens verursacht.

- f) Skizze eines $\Sigma\Delta$ -Modulators 2.-Ordnung:

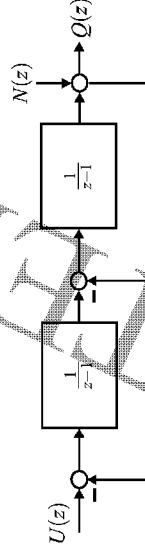


Bild 18: Strukturbild eines $\Sigma\Delta$ -Modulators 2.-Ordnung.

Für die Ausgangsfunktion $Q(z)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \left(\left(\frac{U-Q}{z-1} \right) - Q \right) \frac{1}{z-1} \cdot N &= Q \\
 &\vdots \\
 U + N(z-1)^2 &= Q [(z-1)^2 + (z-1) + 1] \\
 Q(z) &= \frac{z^2}{z^2 - z^{-1} + 1} \cdot U(z) + \frac{z^2 - 2z^{-1} + 1}{z^2 - z^{-1} + 1} \cdot N(z)
 \end{aligned}$$

- g) Das SNR für einen $\Sigma\Delta$ -Modulator 2.-Ordnung ergibt sich aus

$$SNR = \frac{P_{\text{sig}}}{P_{\text{qisr}}} = \frac{|z^{-2}|^2}{|z^2 - 2z^{-1} + 1|^2} = \frac{1}{|z^2 - 2z^{-1} + 1|^2}$$

Mit $z = e^{j2\pi \frac{f_g}{f_a}}$ ergibt sich, wenn der Einheitskreis im Konvergenzgebiet liegt,

$$\begin{aligned}
 \left| e^{-j2\pi \frac{f_g}{f_a}} - e^{-j2\pi \frac{f_g}{f_a}} + 1 \right| &= \left| e^{-j2\pi \frac{f_g}{f_a}} \left(-2 + e^{j2\pi \frac{f_g}{f_a}} + e^{-j2\pi \frac{f_g}{f_a}} \right) \right| \\
 &= 1 \cdot \left| -2 + 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{2} e^{j2\pi \frac{f_g}{f_a}} + e^{-j2\pi \frac{f_g}{f_a}}}_{2 \cos 2\pi \frac{f_g}{f_a}} \right| = 2 \left| 1 - \cos 2\pi \frac{f_g}{f_a} \right|
 \end{aligned}$$

Das SNR_{dB} des $\Sigma\Delta$ -Modulators 2.-Ordnung ist damit

$$SNR_{dB} = 10 \log \frac{1}{\left(2 \left| 1 - \cos 2\pi \frac{f_g}{f_a} \right| \right)^2}$$

Das SNR_{dB} des $\Sigma\Delta$ -Modulators 1.-Ordnung ist nach Messtechnik-Buch (5. Auflage, 2001)

$$SNR_{dB} = 10 \log \frac{1}{\left(2 \left| \sin \pi \frac{f_g}{f_a} \right| \right)^2}$$

Der Faktor P_{dB} ergibt sich aus

$$P_{dB} = \frac{SNR_{dB, 2.Ord}}{SNR_{dB, 1.Ord}} = \frac{10 \log \frac{1}{\left(2 \left| 1 - \cos 2\pi \frac{f_g}{f_a} \right| \right)^2}}{10 \log \frac{1}{\left(2 \left| \sin \pi \frac{f_g}{f_a} \right| \right)^2}}$$

Mit dem gegebenen Überabtastverhältnis $M = 64 = \frac{f_a}{f_g}$ ergibt sich

$$P_{dB} = -10 \log \frac{1}{\left(2 \left| 1 - \cos 2\pi \frac{1}{M} \right| \right)^2} = \frac{40,32 \text{ dB}}{20,16 \text{ dB}} = 2$$

Punkteverteilung: 3-2-2-6-2-3-5

Aufgabe 5: Frequenzanaloge Signale (16 Punkte)

Für ein Regelungssystem von Fräsmaschinen soll die Drehzahl des Fräzers bestimmt werden. Dazu wird ein Sensorzahnrad mit 100 Zähnen auf der Antriebswelle der Spindel befestigt. Das Drehzahlsignal wird mittels eines Inkrementalgebers erfasst. Da nur sehr feine Bearbeitungsschritte mit der Fräsmaschine durchgeführt werden, werden Fräsdrehzahlen im Bereich von 1500 1/min bis 75000 1/min gewählt.

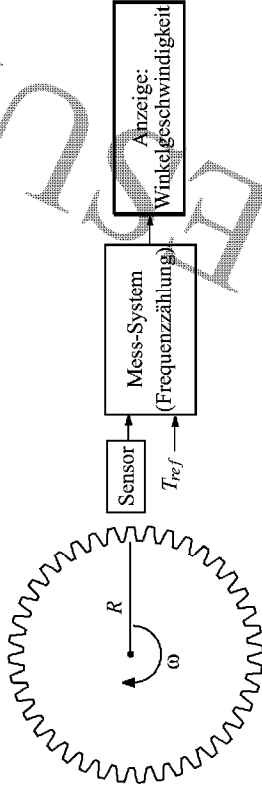


Bild 19: Mess-System zur Winkelgeschwindigkeitserfassung (Frequenzzählung).

In Abb. 19 ist ein Mess-System zur Erfassung der Winkelgeschwindigkeit der Antriebswelle skizziert. Die Referenzperiode T_{ref} sei 1 s.

- Warum ist die Periodendauermessung bei dieser Anordnung weniger geeignet für die Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit der Antriebswelle, wenn eine Zählfrequenz von $f_0 = 1 \text{ MHz}$ angenommen wird? Begründen Sie Ihre Antwort durch Vergleich der relativen Quantisierungsfehler! (3 Punkte)
- Der Zählerstand am Ende der Referenzperiode sei $N = 2,5 \cdot 10^3$. Welche Winkelgeschwindigkeit wird angezeigt? (2 Punkte)
- Wie groß ist der maximale relative Quantisierungsfehler? Unter welcher Bedingung tritt er auf? (2 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Aufgrund der hohen Drehzahlen ist die Lagerung der Antriebswelle schwierig. Deshalb kann es zu minimalen Schwankungen der Drehzahl kommen. Diese können als additiv überlagerte, harmonische Störung mit der Frequenz $f_{stör}$ modelliert werden.

- Wie groß darf die Frequenz der Störung $f_{stör}$ maximal sein, damit kein Aliasing auftritt? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)
- Wie wirkt sich die Störung auf das Ergebnis der Winkelgeschwindigkeitsbestimmung aus, wenn $f_{stör}$ kein Aliasing hervorruft und die tatsächliche Winkelgeschwindigkeit als konstant angenommen wird? (3 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- Die Autokorrelationsfunktion des Sensorsignals wurde bestimmt zu $R_{xx}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\tau^2}$. Geben Sie die mittlere Häufigkeit der Nulldurchgänge in Abhängigkeit der Intervalldauer T an. (4 Punkte)

Lösung

- Die maximale Frequenz dieser Messanordnung ergibt sich aus der maximalen Fräsdrehzahl zu $f_{max} = \frac{75000}{60 \cdot s} = 1250 \text{ Hz}$.

Der maximale relative Quantisierungsfehler bei Periodendauermessung ist

$$F_{r,max,p} = \frac{\omega_{q,max}}{\omega_0 f_0} = \frac{2\pi \cdot f_{max}}{2\pi \cdot f_0} = \frac{1}{8} = 0,125.$$

Betrachtet man den relativen Quantisierungsfehler bei Frequenzzählung, ergibt sich bei maximaler Frequenz

$$F_{r,max,f} = \frac{\varphi_0}{\omega_{q,max} T_{ref}} = \frac{2\pi}{2\pi \cdot f_{max} \cdot T_{ref}} = 8 \cdot 10^{-6}$$

Vergleicht man die beiden relativen Quantisierungsfehler, so zeigt sich, dass bei maximaler Frequenz der relative Quantisierungsfehler, der bei Periodendauermessung auftritt, deutlich höher ist als der bei Frequenzzählung. Deshalb ist die Periodendauermessung für diese Messanordnung nicht geeignet. Würde die Zählfrequenz f_0 jedoch deutlich erhöht werden, könnte die Periodendauermessung auch verwendet werden.

- Für das Frequenzzählverfahren ergibt sich die angezeigte Winkelgeschwindigkeit zu

$$\omega_q = \frac{N \cdot \varphi_0}{T_{ref}} = \frac{2,5 \cdot 10^3 \cdot \frac{2\pi}{100}}{1 \text{ s}} \approx 157 \frac{1}{s} \approx 9424 \frac{1}{\text{min}}$$

- Der maximale Quantisierungsfehler tritt bei Frequenzzählung auf, wenn der wirkliche in der Messzeit T_{ref} überstrichene Winkel um ein Winkelinkrement vom gemessenen Wert abweicht. Der Fehler wird maximal bei der geringsten Fräsdrehzahl $f_{min} = \frac{1500}{60 \cdot s} = 25 \text{ Hz}$ und beträgt

$$F_{r,max} = \frac{\varphi_0}{\omega_{q,min} T_{ref}} = \frac{2\pi}{2\pi \cdot f_{min} \cdot T_{ref}} = 4 \cdot 10^{-4}$$

- Das Abtasttheorem muss erfüllt sein, damit kein Aliasing auftritt. Deshalb darf die maximale Frequenz der Störung höchstens

$$f_{stör} \leq \frac{1}{2 \cdot T_{ref}} = 0,5 \text{ Hz}$$

sein. Dann liegt die Störung im Nyquistband und kein Aliasing tritt auf.

- Bei konstanter Drehzahl $\bar{\omega}$, die von einer harmonischen Störung der Frequenz $f_{stör}$ überlagert ist

$$\omega(t) = \bar{\omega} + \Delta\omega e^{j2\pi f_{stör} t},$$

ergibt sich durch die Mittelwertbildung

$$\begin{aligned} \hat{\omega}(t) &= \frac{1}{T_{ref}} \int_{t-T_{ref}}^t (\bar{\omega} + \Delta\omega e^{j2\pi f_{stör} t}) dt \\ &= \bar{\omega} + \Delta\omega e^{j2\pi f_{stör} t} \cdot \frac{\sin \pi f_{stör} T_{ref}}{\pi f_{stör} T_{ref}}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass die überlagerte Störung durch die $\sin f$ -Funktion gefiltert wird, hervorgerufen durch den mittelwertbildenden Charakter der Drehzahlmessverfahren (z.B. Frequenzzählung). Der Einfluss der Störung auf das Ergebnis ist abgeschwächt.

- f) Die mittlere Häufigkeit der Nulldurchgänge $E\{N_0(T)\}$ ergibt sich aus

$$f_{eff} = \frac{E\{N_0(T)\}}{2T} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f^2 \cdot f_x(f) df} \quad (8)$$

Die normierte Leistungsdichte $f_x(f)$ berechnet sich aus

$$f_x(f) = \frac{S_{xx}(f)}{P_x}$$

Die Leistungsdichte ist die Fourier-Transformierte der Autokorrelation $R_{xx}(\tau)$

$$S_{xx}(f) = \mathcal{F}\{R_{xx}(\tau)\} = e^{-\pi^2 f^2}$$

und die mittlere Leistung ergibt sich zu

$$P_x = R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) df = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad (9)$$

Die normierte Leistungsdichte

$$f_x(f) = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 f^2}$$

hat die gleichen Eigenschaften wie eine Wahrscheinlichkeitsdichte:

- $f_x(f) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_x(f) df \stackrel{!}{=} 1$

$f_x(f)$ erfüllt beide Forderungen.

Mit Gleichungen (8) und (9) ergibt sich

$$E\{N_0(T)\} = 2T \cdot \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f^2 \cdot \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 f^2} df} = 2T \sqrt{\frac{2 \cdot \sqrt{\pi} \sqrt{\pi}}{4 \cdot \pi^3}} = \frac{\sqrt{2} T}{\pi}$$

Punkteverteilung: 3-2-2-2-3-4

Aufgabe 1: Kurvenanpassung/Kennlinienfehler (22 Punkte)

Die abgespeicherte Kennlinie eines Temperatursensors wurde versehentlich gelöscht und das Datenblatt des Sensors ist nicht auffindbar. Zur Rekonstruktion der Kennlinie werden nun 3 verschiedene Temperaturen u_i gemessen und die Sensorwerte $y(u_i)$ dazu abgespeichert (s. Tabelle 1).

u_i	0	2	8
$y(u_i)$	-2	0	3

Tabelle 1: Aufgezeichnete Messwerte

- a) Als nächster Schritt der Rekonstruktion wird die Kennlinie interpoliert. Führen Sie hierzu die Interpolationsmethode nach Newton durch! Runden Sie Zwischenergebnisse auf 3 Nachkommastellen. (3 Punkte)
- Hinweis:** Bei nicht-äquidistantem Stützstellenabstand gilt: $\Delta^{i+1} y_k = \frac{\Delta^i y_k}{x_{k+1} - x_k}$ und $a_j = \Delta^j y_0$
- b) Um die Kennlinien-Interpolation zu verbessern wird ein zusätzlicher Wert an der Stützstelle $u_3 = 4$ ermittelt: $y(4) = 2,5$. Berechnen Sie das neue Interpolationspolynom unter Berücksichtigung dieses Messwertes! Runden Sie Zwischenergebnisse auf 3 Nachkommastellen und geben Sie das Interpolationspolynom in der Form $\tilde{y}_N(u) = p_0 + p_1 u + p_2 u^2 + p_3 u^3 + \dots$ an. (2 Punkte)
- c) Ein zweiter, baugleicher Temperatursensor mit gleicher Kennlinie $\tilde{y}_N(u)$ (s. b)) soll nun mit dem obigen Sensor zu einem neuen Mess-System verschaltet werden. Wie müssen diese beiden Sensoren verschaltet werden damit eine linearisierte Kennlinie erzeugt wird? Zeichnen Sie diese Schaltung! (2 Punkte)
- d) Begründen Sie warum diese Schaltung linearisierende Wirkung hat! Nennen Sie einen Fehlertyp, der mit der Schaltung wirkungsvoll unterdrückt werden kann und begründen Sie warum! (2 Punkte)
- e) Berechnen Sie die Kennlinie der Schaltung des neuen Mess-Systems (Arbeitspunkt $u_0 = 4$)! (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

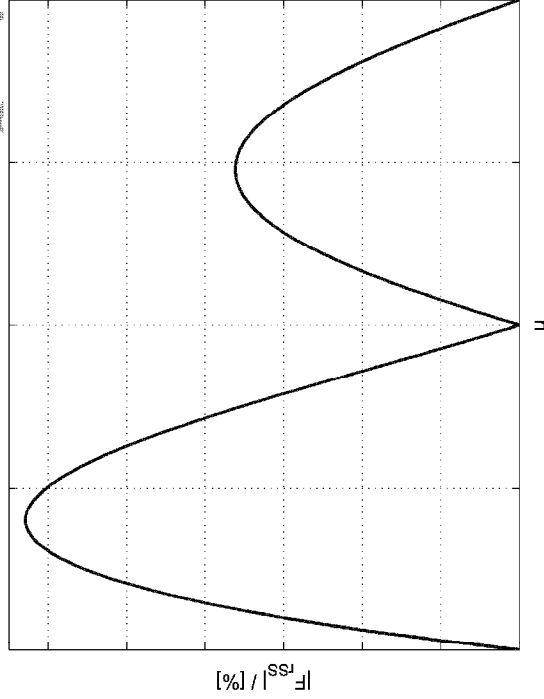
In der Zwischenzeit ist das Datenblatt des Temperatursensors wieder gefunden worden. Die Kennlinie des Sensors ist

$$y_{\text{Datenblatt}}(u) = 2 \cdot \arctan(u - 2)$$

- f) Jedoch muss noch der Messbereich festgelegt werden indem die Kennlinie möglichst linear verläuft. Welche Bedingung gilt für die Wahl des Messbereiches? Geben Sie den günstigsten Messbereich $u_a \leq u \leq u_d + d$ für $d = 2$ an! (3 Punkte)
- g) Berechnen Sie für den Messbereich aus f) die zugehörige ideale Kennlinie $y_i(u)$! (2 Punkte)
- h) Bestimmen Sie den absoluten Fehler $F_{abs}(u) = |y_{\text{Datenblatt}}(u) - y_i(u)|$ und berechnen Sie dessen Maxima im Messbereich $u_a \leq u \leq u_d + 2$! (3 Punkte)

Weiter auf Seite 2

- i) Zeichnen Sie $y_{daten}(u)$ und $y_I(u)$ zusammen in das vorbereitete Diagramm (Lösungsblätter Seite ??)!
 Der zu zeichnende Wertebereich $u_a \leq u \leq u_e + d$ ist aus Aufgabenteil f) zu entnehmen. Beschriften Sie die Achsen des Diagramms!
 Berechnet man aus diesem Diagramm den Linearitätsfehler-Betrag $|F_{LSS}(u)|$, so erhält man Bild 1. Erklären Sie anschaulich warum das erste Maximum des Linearitätsfehler-Betrages $|F_{LSS}(u)|$ in Bild 1 größer als das 2. Maximum im Bild 1 ist! (3 Punkte)

Bild 1: Linearitätsfehler $F_{LSS}(u)$

Lösung

- a) Newton-Interpolationsschema :

u_i	y_0	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0	-2		
2	0	1	
8	3	0,5	-0,0625

ergibt:

$$\tilde{y}_{N,a}(u) = -2 + u - 0,0625(u-2) = -0,0625u^2 + 1,125u - 2$$

- b) Aus dem rekursiven Ansatz für das Newton-Polynom bei $n = 4$ gegebenen Stützstellen gemäß

$$\tilde{y}_N(u) = a_3(u-u_0)(u-u_1)(u-u_2) + \underbrace{\tilde{y}(u)}_{\text{aus a)}} \cdot \tilde{y}_{N,a}(u)$$

ergibt sich a_3 mit der zusätzlichen Stützstelle $u_3 = 4$, $y_3(u_3 = 4) = 2,5$ zu

$$a_3 = \frac{\tilde{y}_N(u_3) - \tilde{y}_{N,a}(u_3)}{u_3(u_3-2)(u_3-8)} = \frac{2,5 - 1,5}{4 \cdot 2 \cdot (-4)} = -0,03125$$

eingesetzt berechnet sich das gesuchte Polynom $\tilde{y}_N(u)$ zu

$$\begin{aligned} \tilde{y}_N(u) &= \frac{-1}{32}u(u-2)(u-8) - 0,0625u^2 + 1,125u - 2 \\ &= \frac{-1}{32}u^3 + \frac{1}{4}u^2 + \frac{5}{8}u - 2 \\ &= -0,03125u^3 + 0,25u^2 + 0,625u - 2 \end{aligned}$$

- c) Die beiden Sensoren müssen parallel geschaltet werden entsprechend Bild 2

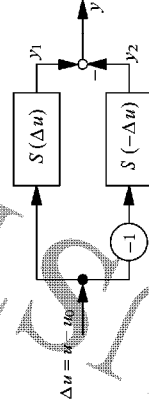


Bild 2: Parallelschaltung zweier Messwertaufnehmer

- d) Die Krümmung der Messkurve geht als gerade Funktion in die Differenzenbildung ein. Gerade Terme werden aber bei der Differenzenbildung null, weshalb sich die linearisierende Wirkung ergibt.
 Ein systematischer, superponierender Fehler kann mittels der Differenzenmethode eliminiert werden. Ein Beispiel ist eine veränderliche Umgebungstemperatur, die auf beide Sensoren gleich einwirkt.

- e) Für die Differenzkennlinie gilt mit $\Delta u = u - u_0$:

$$y_D = 2S(u_0) \Delta u \left\{ 1 + \frac{S''(u_0)}{S(u_0)} \frac{\Delta u^2}{3!} + \dots + \frac{S^{(2v)}(u_0)}{S(u_0)} \frac{\Delta u^{2v}}{(2v+1)!} + \dots \right\}$$

Die Empfindlichkeit S und deren Ableitungen ergeben:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_N'(u) = S(u) &= -\frac{3}{32}u^2 + 0.5u + \frac{5}{8} \\ \tilde{y}_N''(u) = S'(u) &= -\frac{3}{16}u + 0.5 \\ \tilde{y}_N'''(u) = S''(u) &= -\frac{3}{16} \end{aligned}$$

Daraus erhält man

$$\begin{aligned} y_D(u) &= 2 \cdot S(u_0) \cdot \Delta u \cdot \left\{ 1 + \frac{S''(u_0) \Delta u^2}{S(u_0) \cdot 3!} \right\} \\ &= 2,25 \cdot \Delta u - 0,0625 \cdot \Delta u^3 \end{aligned}$$

- f) Für die Wahl des günstigsten Messbereiches wird überprüft, ob die Kennlinie ein Wendepunkt im betrachteten Intervall hat oder nicht.

$$\begin{aligned} \frac{d^3 y_{\text{datenblatt}}(u)}{du^3} &= \frac{2}{1 + (u-2)^2} - \frac{4 \cdot (u-2)}{(1 + (u-2)^2)^2} \\ &= \frac{-4}{(1 + (u-2)^2)^2} + \frac{16 \cdot (u-2)^2}{(1 + (u-2)^2)^3} \end{aligned}$$

Aus

$$\frac{d^3 y_{\text{datenblatt}}(u)}{du^3} = 0$$

folgt $u_W = 2$.

Daher ist folgende Bedingung zu erfüllen (MT-Buch, 5. Auflage, Seite 53):

$$\begin{aligned} \frac{d^3 y_{\text{datenblatt}}(u_0)}{du^3} &= \frac{d^3 y_{\text{datenblatt}}(u_0 + d)}{du^3} \\ u_a^3 - 4u_a + 4 &= u_a^3 + 2u_a d - 4u_a + d^2 - 4d + 4 \\ 0 &= 2u_a d + d^2 - 4d \end{aligned}$$

Der Messanfang ergibt sich aus

$$u_a = \frac{4-d}{2}$$

mit $d = 2$ zu $u_a = 1$.

Der Messbereich liegt im Intervall $1 \leq u \leq 3$.

- g) Für die Berechnung der idealen Kennlinie $y_i = S_i \cdot (u - u_a) + y_a$ geht man wie folgt vor:

$$1. \quad S_i = \frac{y_a - y_a}{u_a - u_a} = \frac{1,5708 - (-1,5708)}{3 - 1} = 1,5708$$

$$2. \quad y_i = S_i \cdot (u - u_a) + y_a = 1,5708(u - 1) - 1,5708 = 1,5708u - 3,1416$$

- h) Der absolute Fehler ergibt sich zu

$$F_{\text{abs}}(u) = |y_{\text{datenblatt}}(u) - y_i(u)| = |2 \arctan(u-2) - 1,5708u + 3,1416|$$

Um eine Fallunterscheidung bei der Ableitung des Betrages im absoluten Kennlinienfehler zu umgehen, betrachtet man stattdessen die stetig differenzierbare Funktion $F_{\text{abs}} = |\tilde{F}_{\text{abs}}|$. Im vorgegebenen Intervall werden die sich ergebenden Fehlerwerte aller lokalen Extrema im Messbereich von $\tilde{F}_{\text{abs}}$ miteinander verglichen. Diejenigen Stellen mit dem betragsmäßig größten Fehlerwert sind gleichzeitig die Stellen bei denen F_{abs} maximal wird:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{F}_{\text{abs}}(u)}{du} &= \frac{2}{1 + (u-2)^2} - 1,5708 \\ \frac{d\tilde{F}_{\text{abs}}(u)}{du} &\stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Man erhält aus der quadratischen Gleichung $u^2 - 4u + 5 - \frac{2}{1,5708} = 0$

$$u_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 5 + \frac{2}{1,5708}}$$

bzw. $u_1 = 2,5227$ und $u_2 = 1,4772$.

Es ergibt sich für den absoluten Fehler $F_{\text{abs}}(u_1) = F_{\text{abs}}(u_2) = 0,1422$.

Zur Untersuchung der Ränder des Messbereiches setzt man u_a , u_e in $F_{\text{abs}}(u)$ ein und erhält $F_{\text{abs}}(u) \approx 0$.

Die beiden Werte u_1 , u_2 sind also die Stellen an denen $F_{\text{abs}}(u)$ maximal wird.

- i) Der Linearitätsfehler $F_{\text{r,ss}}$ ist definiert als das Verhältnis aus $y(u) - y_i(u)$ durch $y_i(u) - y_a$.

Die Differenz $y(u) - y_i(u)$ ist der absolute Fehler, der zwei gleich große Maxima hat (s. h)).

Die Differenz $y_i(u) - y_a$ wird mit größer werdendem u ebenfalls größer, da $y_i(u)$ eine lineare, monoton-steigende Funktion ist. Dies bedeutet jedoch, dass die Spanne, auf die sich der absolute Fehler $y(u) - y_i(u)$ bezieht, ebenfalls größer wird und das Verhältnis $\frac{y(u) - y_i(u)}{y_i(u) - y_a}$ dadurch kleiner wird (Bild 3).

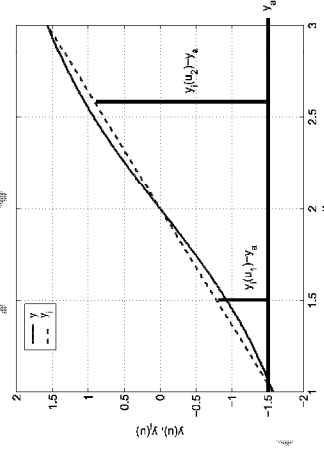


Bild 3: Erklärung zu Linearitätsfehler $|F_{\text{r,ss}}(u)|$

Aufgabe 2: Zufällige Messfehler (19 Punkte)

Verwenden Sie für die Bearbeitung weder Bleistifte noch Stifte mit roter Farbe!

- a) Zeichnen Sie zu folgendem Zeitsignal $x(t)$ dessen Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ und dessen Leistungsdichte $S_{xx}(f)$! **Begründen Sie Ihre Lösung, beschriften und bezeichnen Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung. (4 Punkte)**

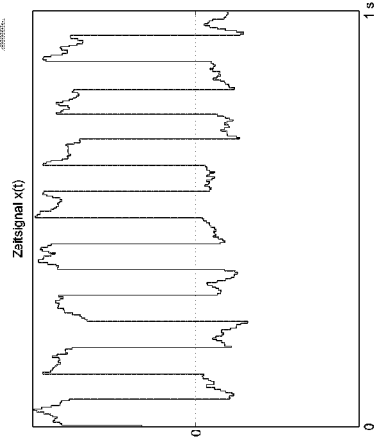


Bild 4: Zeitsignal $x(t)$: Signal **a)**

Weiter auf Seite 8

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

- b) Zeichnen Sie zu folgender Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ dessen Zeitsignal $x(t)$ und dessen Leistungsdichte $S_{xx}(f)$! **Begründen Sie Ihre Lösung, beschriften und bezeichnen Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung. (4 Punkte)**

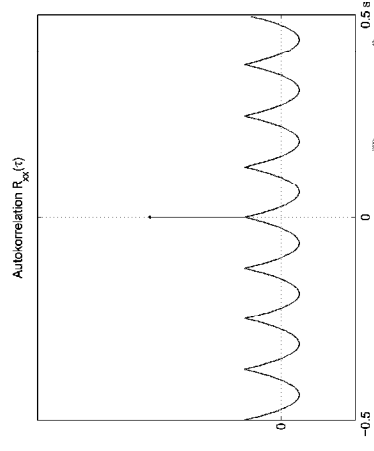


Bild 5: Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$: Signal **b)**

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

- c) Zeichnen Sie zu folgender Leistungsdichte $S_{xx}(f)$ dessen Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ und dessen Zeitsignal $x(t)$! **Begründen Sie Ihre Lösung, beschriften und bezeichnen Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung. (4 Punkte)**
Hinweis: Die Leistungsdichte **c)** hat 2 Impulse bei $\pm 4 \text{ Hz}$.

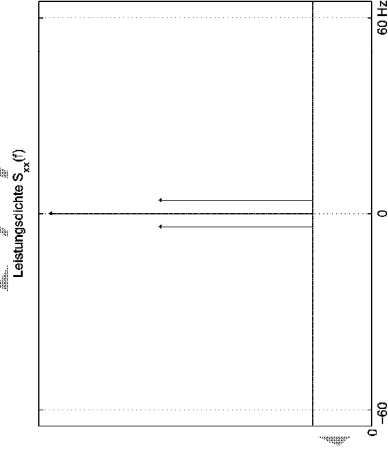


Bild 6: Leistungsdichte $S_{xx}(f)$: Signal **c)**

Weiter auf Seite 9

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

Aus einer Produktion wurde eine Stichprobe von Kondensatoren mit der Kapazität C ausortiert. Die Häufigkeitsverteilung der Kondensatoren C wurde aufgenommen und man fand näherungsweise eine Gleichverteilung. Aus dieser wurde der Mittelwert $\mu_c = 200 \text{ pF}$ und die Standardabweichung $\sigma_c = 5 \text{ pF}$ berechnet.

Aus der Stichprobe werden jeweils zwei Kondensatoren C zu einem Kondensator C_p parallelgeschaltet.

- d) Skizzieren Sie für den Kondensator C_p die resultierende Häufigkeitsverteilung und beschriften Sie die Achsen!

Berechnen Sie alle notwendigen Zahlenwerte und den Mittelwert μ_{C_p} . (4 Punkte)

Hinweis: Die Standardabweichung einer Gleichverteilung berechnet sich nach der Formel $\sigma_c = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$. Wobei a die untere und b die obere Grenze der Gleichverteilung beschreibt.

- e) Bestimmen Sie die Standardabweichung σ_y des Kondensators C_p . Führen Sie dazu zunächst die Koordinatentransformation $y = C_p - 2\mu_c$ durch. (3 Punkte)

Lösung

Bemerkung: Die Leistungsdichte und die Autokorrelation von farbigem Rauschen sind im Messtechnik-Buch (Kiencke, Eger, Messtechnik, Springer-Verlag, 2001) auf Seite 224 abgebildet und werden in der Lösung als *Komponente 1* für Autokorrelation und *Komponente 2* für Leistungsdichte bezeichnet.

a) Signal a)

- Zeitsignal: rechteckförmig, farbiges Rauschen, Offset 4, Frequenz: 8 Hz
- ⇒ Autokorrelation: dreieckförmig, Komponente 1, Offset A^2 , Frequenz: 8 Hz
- ⇒ Leistungsdichte: Impulse bei $\pm 8 \text{ Hz}$, $\pm 24 \text{ Hz}$..., Komponente 2, Impuls bei $f = 0$

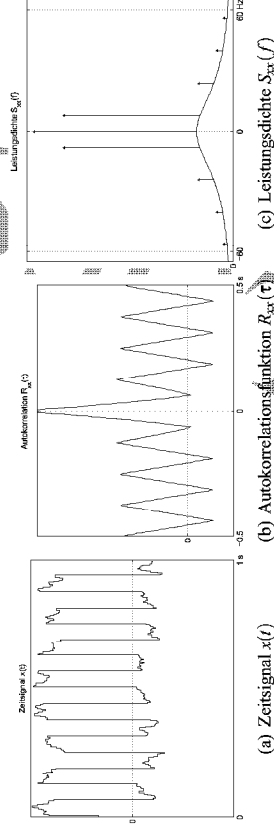


Bild 7: Signal a)

b) Signal b)

- Autokorrelation: $|x^3|$ -förmig, Peak bei $\tau = 0$, Frequenz: 8 Hz
- ⇒ Zeitsignal: sägezahnförmig, weißes Rauschen, Frequenz: 8 Hz
- ⇒ Leistungsdichte: Impulse bei ± 8 , ± 16 , ± 24 , ... Hz, Offset

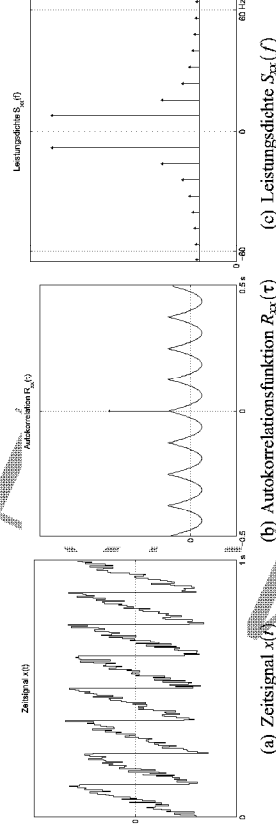


Bild 8: Signal b)

c) Signal e)

- Leistungsdichte: Impulse bei $\pm 4\text{ Hz}$, Impuls bei $f = 0$, Offset
- Zeitsignal: sinusförmig, Offset A , weißes Rauschen, Frequenz: 4 Hz
- Autokorrelation: cosinusförmig, Offset A^2 , Frequenz: 4 Hz , Peak bei $\tau = 0$

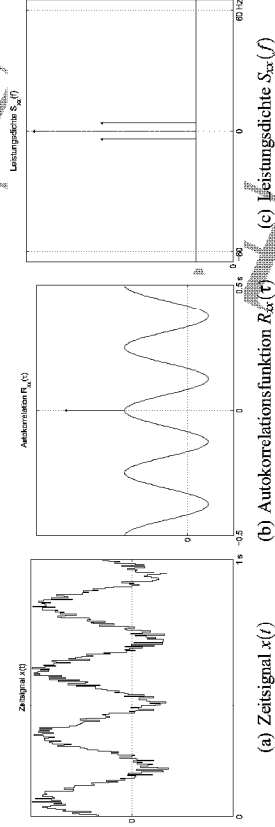


Bild 9: Signal e)

d) Die Standardabweichung für die Gleichverteilung berechnen man nach

$$\sigma_c = \frac{b-a}{\sqrt{12}} \Rightarrow b = \sigma_c \sqrt{12} + a$$

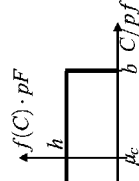
und den Erwartungswert mit $\mu_c = \frac{a+b}{2}$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \mu_c &= \frac{2a + \sqrt{12}\sigma_c}{2} \\ 2\mu_c &= 2a + \sqrt{12}\sigma_c \\ a &= \frac{2\mu_c - \sqrt{12}\sigma_c}{2} = \mu_c - \frac{\sqrt{12}\sigma_c}{2} = 191,34\text{ pF} \\ b &= \mu_c + \frac{\sqrt{12}\sigma_c}{2} = 208,66\text{ pF} \end{aligned}$$

Normierung ergibt

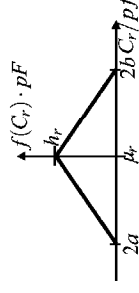
$$(b-a) \cdot h \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow h = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{\sigma_c \sqrt{12}} = \frac{1}{10\sqrt{3}\text{ pF}} \approx 0,0577 \cdot \frac{1}{\text{pF}}$$

In Bild 10 ist die Gleichverteilung dargestellt.

Bild 10: Gleichverteilung von C

Eine Kondensator-Parallelschaltung entspricht der Summation der Einzelkapazitäten C . Die Einzelkapazitäten C sind nach Aufgabenstellung gleichverteilte Zufallsvariablen. Die Summe

von Zufallsvariablen entspricht der Faltung der Wahrscheinlichkeitsdichten bzw. der Multiplikation der charakteristischen Funktionen, so dass aus der Summe zweier gleichverteilter Zufallsvariablen ein dreieckverteiltetes Ergebnis entsteht (Bild 11).

Bild 11: Dreieckverteilung von C_r

Überprüfen der Normierung

$$(2b-2a) \cdot \frac{h_r}{2} \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow h_r = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{\sigma_c \sqrt{12}} = \frac{1}{10\sqrt{3}\text{ pF}} = h$$

Der Erwartungswert ist $\mu_r = \mu_c + \mu_c = 400\text{ pF}$.

e) Die Koordinatentransformation ergibt (Bild 12)

$$y_1 = 2b - 2\mu_c = \sigma_c \sqrt{12}$$

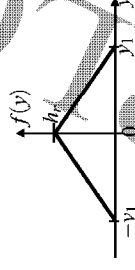


Bild 12: Dreieckverteilung nach Koordinatentransformation

Unter Ausnutzung der Symmetrie der Dreiecksverteilung erhält man

$$\begin{aligned} \sigma_r^2 &= 2 \int_0^{y_1} y^2 f(y) dy \\ &= 2 \int_0^{y_1} y^2 \left(-\frac{1}{(\sigma_c \sqrt{12})^2} y + \frac{1}{\sigma_c \sqrt{12}} \right) dy \\ &= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{\sigma_c \sqrt{12}}{2} \right)^3 \\ \sigma_r &= \sqrt{2}\sigma_c \approx 7,071\text{ pF} \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Statistik (19 Punkte)

Der Abfüllprozess von Zucker in kleine Papierröten soll überwacht werden. Es werden der laufenden Abfüllung folgende 30 Stichproben entnommen und mit einer Präzisionswaage gewogen.

11,08	10,35	11,62	11,61	10,84	9,25
9,1	10,1	11,42	9,77	11,55	9,4
10,73	11,34	12,9	9,9	11,43	11,81
11,22	10,25	9,24	9,73	8,3	10,55
11,24	9,81	11,12	9,44	9,01	9,87

Tabelle 2: Stichproben in 10^{-3} kg

- a) Leider sind die Werte durcheinander geraten. Ordnen Sie die Stichprobenwerte aus Tabelle 2 folgendem Klassenschema zu und zeichnen Sie das dazugehörige Histogramm! Beschriften und bezeichnen Sie die Achsen des Histogramms. (2 Punkte)

Klasse	1	2	3	4	5	6
Bereich	$< 9,5$	$9,51 \dots 10$	$10,01 \dots 10,5$	$10,51 \dots 11$	$11,01 \dots 11,5$	$> 11,51$

- b) Überprüfen Sie die Klasseneinteilung aus Aufgabenteil a) hinsichtlich den Voraussetzungen für einen χ^2 -Anpassungstest. Beachten Sie, dass pro Klasse für die Anzahl der Elemente $n_i \geq 5$ ($i = 2, \dots, 5$) gelten muss und für Randklassen $n_i \geq 1$ ($i = 1, 6$). Verändern Sie ggf. die Klasseneinteilung aus Aufgabenteil a) dahingehend, dass die Voraussetzung $n_i \geq 5$ erfüllt ist. Zeichnen Sie das dazugehörige Histogramm! Beschriften und bezeichnen Sie die Achsen des Histogramms.

Nennen Sie zwei weitere Voraussetzung, die erfüllt sein müssen, damit der Test repräsentativ ist.

(4 Punkte)

- c) Überprüfen Sie mittels des χ^2 -Anpassungstests, ob die Stichprobe gleichverteilt ist. Das Signifikanzniveau ist $\alpha = 0.05$. Die Quantile der χ^2 -Verteilung finden Sie in Bild 13.

(4 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- d) Berechnen Sie den Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ und die Stichprobenvarianz S_x^2 mit den Werten aus Tabelle 2. (3 Punkte)

- e) Überprüfen Sie, ob der Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ bezüglich dem Nenngewichtsmaß von $\mu_0 = 10g$ signifikant ist. Das Signifikanzniveau beträgt $\alpha = 0.05$. (4 Punkte)

Hinweise:

- Die Testentscheidung wird über den Vergleich der t-verteilten Variablen t und $t_{1-\alpha;f}$ gefällt. Für die Annahme des Tests gilt $t \leq t_{1-\alpha;f}$.
- Die Quantile $t_{1-\alpha;f}$ der t-Verteilung finden Sie in Tabelle 3.

- f) Nennen Sie den Unterschied zwischen χ^2 -Test und Signifikanztest hinsichtlich deren Anwendung. Begründen Sie Ihre Antwort! (2 Punkte)

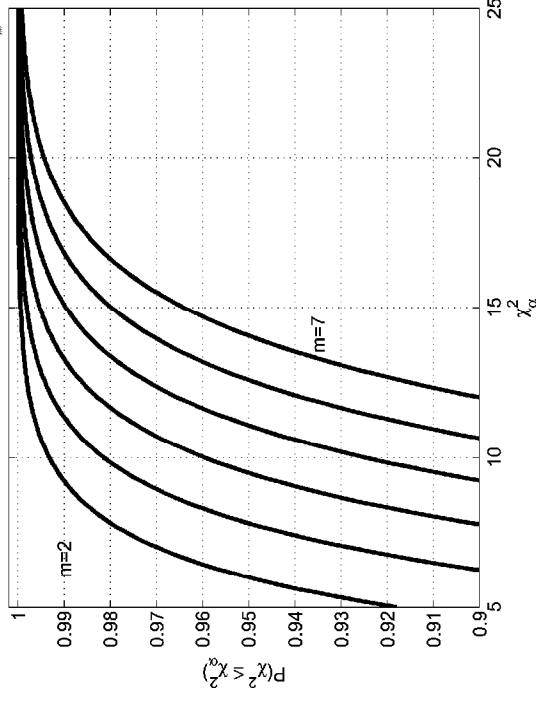


Bild 13: Quantile der χ^2 -Verteilung

Lösung

a) Klasseneinteilung und Histogramm

Klasse	1	2	3	4	5	6
Bereich	< 9,5	9,51 ... 10	10,01 ... 10,5	10,51 ... 11	11,01 ... 11,5	> 11,51
n_i	7	5	3	3	7	5

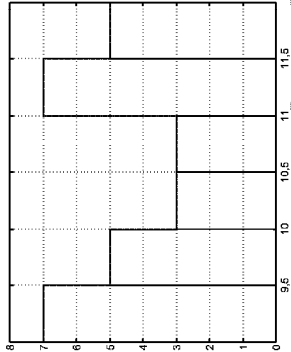


Bild 14: Histogramm

b) Die Voraussetzung ist bei $i = 3$ und 4 nicht mehr erfüllt, deshalb werden die Klassen 3 und 4 zu einer zusammengefasst:

Klasse	1	2	3	4	5
Bereich	< 9,5	9,51 ... 10	10,01 ... 11	11,01 ... 11,5	> 11,51
n_i	7	5	6	7	5

Weitere Voraussetzungen sind (zwei müssen noch genannt werden):

- Unabhängigkeit der Messwerte
 - Hinreichend großer Stichprobenumfang
 - Disjunkte Klasseneinteilung
 - „Faustregeln“ für die Randklassen ($n_{i,Rand} \geq 1$) bzw. die übrigen Klassen ($n_i \geq 5$)
- c) χ^2 -Test
- Voraussetzungen sind erfüllt
 - Nullhypothese H_0 : „Häufigkeitsverteilung entspricht einer Gleichverteilung“
 - statistische Sicherheit $p = 1 - \alpha = 0,95$
 - Freiheitsgrade mit $k = 5$ Klassen: $m = k - 1 = 4$
 - Aus Diagramm 13 erhält man $\chi^2_{\alpha} \approx 9,2 \dots 9,7$

Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Klassen werden wie folgt ermittelt:

Freiheitsgrade	Statistische Sicherheit $1 - \alpha$
f	0,90 0,95 0,99
1	6,314 12,71 63,6
2	2,92 4,303 9,925
3	2,353 3,182 5,841
4	2,132 2,76 4,604
5	2,015 2,571 4,032
6	1,943 2,47 3,707
7	1,895 2,365 3,49
8	1,86 2,306 3,35
9	1,83 2,262 3,25
10	1,812 2,28 3,169
11	1,796 2,201 3,106
12	1,782 2,179 3,05
13	1,71 2,16 3,012
14	1,761 2,145 2,97
15	1,753 2,131 2,947
16	1,746 2,12 2,921
17	1,74 2,1 2,898
18	1,734 2,101 2,878
19	1,729 2,093 2,861
20	1,725 2,086 2,845
21	1,721 2,08 2,831
22	1,717 2,074 2,819
23	1,714 2,069 2,807
24	1,71 2,064 2,797
25	1,708 2,06 2,787
26	1,706 2,056 2,79
27	1,703 2,052 2,71
28	1,701 2,048 2,763
29	1,69 2,045 2,756
30	1,697 2,042 2,75
40	1,684 2,021 2,704
50	1,676 2,09 2,678

Tabelle 3: Quantile der t-Verteilung: $t_{1-\alpha, f}$

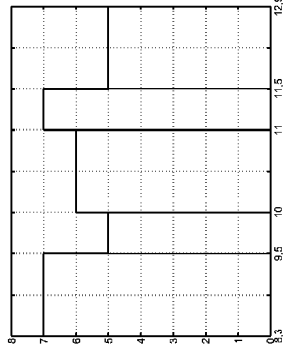


Bild 15: Korrigiertes Histogramm

- Dichtefunktion aufstellen und normieren
Da es sich um eine Gleichverteilung handelt gilt:

$$f(x) = \int_{8,3}^{12,9} k \cdot dx = 1$$

daraus folgt $k = \frac{1}{4,6}$

- Wahrscheinlichkeiten p_i für die Klassen berechnen
Die Grenzen können aus Bild 15 entnommen werden.

$$p_i = \int_{4,6}^{\frac{1}{4,6}} \cdot dx$$

- als Ergebnis erhält man

	1	2	3	4	5
p_i	0,261	0,109	0,217	0,109	0,304

Es ergibt sich Tabelle 4 für den χ^2 -Test

Klasse	1	2	3	4	5	Σ
n_i	7	5	6	7	5	30
p_i	0,261	0,109	0,217	0,109	0,304	1
$n \cdot p_i$	7,83	3,27	6,51	3,27	9,12	30
$\frac{(n_i - n p_i)^2}{n p_i}$	0,09	0,92	0,04	4,25	1,86	7,16

Tabelle 4: χ^2 -Berechnung

Die Nullhypothese H_0 wird angenommen, da $\chi^2 = \frac{(n_i - n p_i)^2}{n p_i} = 7,16 < \chi^2_{\alpha}$.

- d) Der Stichprobenmittelwert berechnet man mit

$$\hat{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{30} \sum_{i=1}^{30} x_i = 10,466$$

und die Stichprobenvarianz mit

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x})^2 = \frac{1}{29} \sum_{i=1}^{30} (x_i - \hat{x})^2 = 1,1211$$

Alternativ kann S_x^2 auch so berechnet werden: $S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{n}{n-1} \hat{x}^2$

- e) Signifikanztest

- Voraussetzungen sind erfüllt
- S_x^2 und $\hat{x}$ sind bekannt (aus d))
- Nullhypothese H_0 : „Stichprobenmittelwerte entspricht dem Nenngewichtsmaß“
- Freiheitsgrade bei $n = 30$ Werten $f = n - 1 = 29$
- Die statistische Sicherheit ist $P = 1 - \alpha = 0,95$

Die Varianz ist nur durch die Stichprobenvarianz gegeben, so dass sich folgende t-verteilte Variable ergibt

$$t = \frac{|\hat{x} - \mu_0|}{S_x} \cdot \sqrt{n} = 2,41$$

Aus Tabelle 3 entnimmt man $t_{0,95;29} = 2,045$.

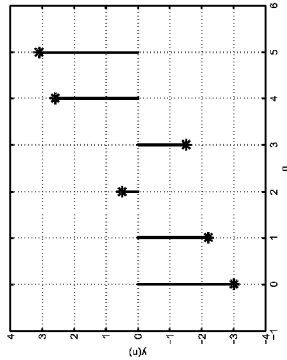
Da $t > t_{0,95;29}$ ist die Abweichung signifikant, die Nullhypothese wird abgelehnt, d. h. die Stichprobe ist nicht repräsentativ.

- f) Der Signifikanztest ist ein Parametertest. χ^2 -Test ist ein Anpassungstest.

Bei Parametertests werden Parameter (z. B. Mittelwert) einer vorgegebenen Normalverteilung geprüft. Bei einem Anpassungstest wird überprüft, ob die Stichprobe einer Grundgesamtheit mit beliebiger Verteilung entstammt.

Aufgabe 4: Korrelationsmesstechnik (23 Punkte)

- a) In der Praxis wird häufig ein Polartitätskorrelator zur Berechnung einer Korrelationsfolge eingesetzt. Beschreiben Sie das dabei verwendete Verfahren. Gehen Sie jedoch nicht auf die technische Umsetzung ein! Nennen Sie den Vorteil des Polartitätskorrelators. Begründen Sie Ihre Antwort! (3 Punkte)
- b) In Bild 16 ist ein zeitdiskretes Signal $y(n)$ abgebildet. Bilden Sie die Autokorrelationsfolge $R_{yy}(k)$ mittels eines Polartitätskorrelators für die Werte $k = 1, 2$! (3 Punkte)

Bild 16: Zeitdiskretes Signal $y(n)$

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

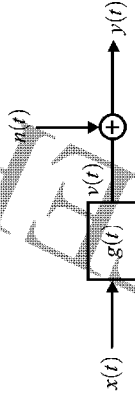


Bild 17: Modell eines Systems

- c) In Bild 17 ist ein System mit unbekannter Übertragungsfunktion $g(t)$ abgebildet. Welche Voraussetzung müssen $x(t)$ und $n(t)$ erfüllen, damit $g(t)$ eindeutig identifiziert werden kann, wenn die Kreuzkorrelationsfunktion $R_{yn}(\tau)$ gemessen wird. Begründen Sie Ihre Antwort rechnerisch! (3 Punkte)
- d) Die Autokorrelationsfunktion am Ausgang wurde zu $R_{yy} = \frac{b}{2} \cdot \exp(-b|t|)$ bestimmt. Als Eingangssignal diente weißes Rauschen mit der Leistungsdichte $S_{xx} = N^2$. Das farbige Rauschen $n(t)$ hat die Leistungsdichte $S_{nn} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot (2\pi f/b)^2}$. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $g(t)$! (4 Punkte)

Weiter auf Seite 20

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

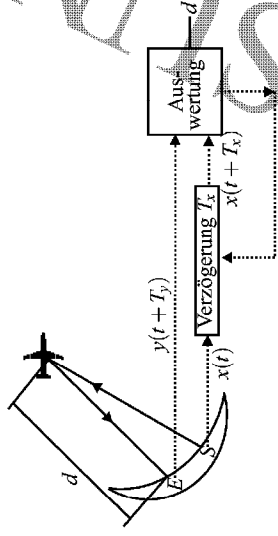


Bild 18: Prinzip der Objektortung

In Bild 18 ist das Funktionsprinzip einer Objektortung, wie sie z.B. bei der Flugüberwachung eingesetzt wird, skizziert. Der Sender S strahlt ein bestimmtes Signalmuster ab, das vom Muster (Flugzeug) reflektiert wird. Der Empfänger E befindet sich am gleichen Ort wie der Sender und empfängt das reflektierte Signal. Die beiden Signale gelangen dann zur Auswerteeinheit. Das empfangene Signal $y(t)$ ist, durch die unbekannte Entfernung d , um $T_r = \frac{2d}{c}$ verzögert. c ist die Lichtgeschwindigkeit (hier: Lichtgeschwindigkeit). Das Sendesignal $x(t)$ kann über die veränderbare Zeit T_x verzögert werden.

Als Sendesignal wird $x(t) = c + 2 \cos(2\pi f_0 t)$ verwendet.

- e) Um welche Art von Signalklasse handelt es sich bei $x(t)$? Begründen Sie Ihre Antwort rechnerisch! (2 Punkte)
- Hinweis: $\int \cos^2(\omega t) dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4\omega} \sin(2\omega t)$
- f) Berechnen Sie Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ von $x(t)$! (4 Punkte)
- g) Bestimmen Sie die unbekannte Entfernung d ! (4 Punkte)

Lösung

- a) Für die Schätzung der diskreten, endlichen Korrelationsfolge werden die Eingangssignale x, y abgetastet oder liegen in diskreter Form vor. Danach werden x, y mittels der Vorzeichenfunktion $\text{sign}(\cdot)$ umgewandelt in ein ± 1 -Signal.

Im nächsten Schritt werden ab der Stelle k des Signals $\text{sign}(x)$ alle restlichen Werte mit allen Werten des Signals $\text{sign}(y)$ multipliziert. Die Ergebnisse werden summiert und anschließend auf die Gesamtzahl der Werte N normiert. Es gilt die Berechnungsvorschrift:

$$\hat{R}_{xy}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} \text{sign}[x_{n+k}] \text{sign}[y_n^*] \quad \text{mit } |k| = 0, 1, \dots, M \ll N. \quad (1)$$

Durch die 1-bit Quantisierung bzw. sign -Bildung sind die Aufwand für die Berechnung von R_{xy} reduziert. Dadurch können Multiplikation und Addition mit günstigen Bausteinen bzw. einfachen Mikrocontrollern realisiert werden. Das Verfahren ist also einfach technisch zu realisieren und ist auch bzgl. Berechnungsdauer wesentlich schneller durchführbar als die „normale“ Korrelation.

- b) Das mit der sign -Funktion umgewandelte Signal:

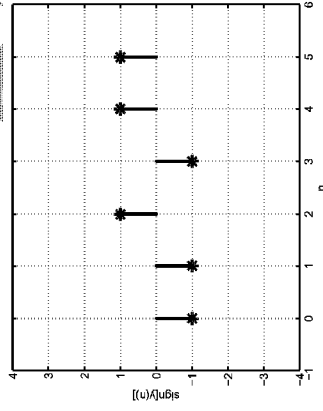


Bild 19: Signal: $\text{sign}(y(n))$

Für $N = 6$ und $k = 1$ erhält man

$$\hat{R}_{yy}(1) = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^4 \text{sign}[y_{n+1}] \text{sign}[y_n^*] = \frac{(-1) \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1}{6} = \frac{-1}{6}$$

und für $k = 2$ erhält man

$$\hat{R}_{yy}(2) = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^3 \text{sign}[y_{n+2}] \text{sign}[y_n^*] = \frac{1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)}{6} = 0$$

- c) $x(t)$ und $n(t)$ müssen unkorreliert sein und $n(t)$ muss außerdem noch ein mittelwertfreies Signal sein. Es gilt

$$\begin{aligned} R_{yx}(\tau) &= E\{y(t+\tau)x(t)\} \\ &= E\{(y(t+\tau) + n(t+\tau))x(t)\} \\ &= E\{y(t+\tau)x(t)\} + \underbrace{E\{n(t+\tau)x(t)\}}_{R_{nx}} \end{aligned} \quad (2)$$

Wenn $x(t)$ und $n(t)$ unkorreliert sind, ist $R_{nx} = E\{n(t)\} \cdot E\{x(t)\}$. Desweiteren ist

$$\mu_y = E\{y(t)\} = E\{v(t) + n(t)\} = E\{v(t)\} + \underbrace{E\{n(t)\}}_{\mu_n}$$

Ist $\mu_n = 0$, so ist der gemessene Mittelwert gleich dem tatsächliche Mittelwert und der Term R_{nx} in Gleichung 2 fällt heraus und hat damit keinen Einfluss auf die Identifikation des Systems.

- d) Die Leistungsdichte von R_{yy} ist $S_{yy}(f) = \frac{b^2}{b^2 + (2\pi f)^2}$ und ergibt sich aus

$$S_{yy}(f) = S_{xx}(f) |G(f)|^2 + S_{nn}(f)$$

Für $g(t)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \underbrace{G(f)G^*(f)}_{|G(f)|^2} &= \frac{S_{yy}(f) - S_{nn}(f)}{S_{xx}(f)} \\ &= \frac{\frac{b^2}{b^2 + (2\pi f)^2} - \frac{b^2}{N^2}}{\frac{b^2}{2 \cdot N^2(b^2 + (2\pi f)^2)}} = \frac{b^2}{2 \cdot N^2(b^2 + (2\pi f)^2)} \\ &= \frac{b}{\sqrt{2 \cdot N(b^2 + (2\pi f)^2)}} \cdot \frac{b}{G^*(f)} \end{aligned}$$

und

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(f)\} = \frac{b}{\sqrt{2N}} \cdot e^{j\pi t} \mathcal{O}(t)$$

- e) Zur Überprüfung wird folgendes Integral gebildet und auf Konvergenz überprüft

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} (c + 2\cos(\omega t))^2 dt \\ &= \left[c^2 t - \frac{4c}{\omega} \sin \omega t + 2t + \frac{1}{\omega} \sin 2\omega t \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &\Rightarrow \text{divergiert} \end{aligned}$$

Das Integral divergiert, also ist $x(t)$ kein Energiesignal. Wenn der Grenzwert

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^T x(t)x^*(t)dt$$

existiert, handelt es sich bei $x(t)$ um ein Leistungssignal:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^T x(t)x^*(t)dt &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^T (c + 2\cos \omega t)^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(c^2 - \frac{4c \sin \omega T}{\omega T} + 2 + \frac{\sin 2\omega T}{\omega T} \right) \\ &= c^2 + 2 \end{aligned}$$

Der Grenzwert existiert, bei $x(t)$ handelt es sich um ein Leistungssignal.

- f) Die Autokorrelationsfunktion für Leistungssignale berechnet sich nach ($\omega = 2\pi f_0$)

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)x^*(t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [c + 2 \cos(\omega(t+\tau))] \cdot [c + 2 \cos \omega t] dt \end{aligned}$$

Mit $\cos(\omega(t+\tau)) = \cos \omega t \cos \omega \tau - \sin \omega t \sin \omega \tau$ ergibt sich

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [c^2 + 2c \cos \omega \tau + 2c \cos \omega t \cos \omega \tau - 2c \sin \omega t \sin \omega \tau \\ &\quad + 4 \cos^2 \omega t \cos \omega \tau - 4 \cos \omega t \sin \omega \tau \sin \omega \tau] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[c^2 + \frac{4c \sin(\omega T/2)}{T} - \frac{4c \sin(\omega T/2) \cos(\omega \tau)}{T} + \frac{4}{2} \cos(\omega \tau) \right. \\ &\quad \left. + \frac{4 \cos(\omega \tau) \sin(\omega T)}{T \omega} \right] \\ &= c^2 + 2 \cos \omega \tau \end{aligned}$$

- g) Das Messprinzip bei der Objektortung ist die Laufzeitmessung eines Signals $x(t)$. Über die Messgeschwindigkeit kann dann auf die Entfernung des Objektes von der Antenne geschlossen werden. Die Laufzeit T_y ist unbekannt und soll bestimmt werden. Dies ist über die Kreuzkorrelationsfunktion einfach möglich, wenn das Signal $x(t)$ über eine Verzögerung beeinflusst werden kann (s.u.) und die Kreuzkorrelationsfunktion maximal wird, d. h. das gesendete und das empfangene Signal am „ähnlichsten“ sind.

Da beide Signale $x(t), y(t)$ Leistungssignale sind, gilt

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t + T_x + \tau) y^*(t + T_y) dt$$

Mit der Substitution $t' = t + T_y$ ($dt = dt'$) folgt

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t' - T_y + T_x + \tau) y^*(t') dt'$$

Mit $\Delta T = T_x - T_y$ und der Substitution $t' = \tau + \Delta T$ erhält man

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t' + \tau) y^*(t') dt'$$

Für $t' = 0$ wird R_{xy} maximal: $\tau = -\Delta T = T_y - T_x$. T_x wird nun daher so gewählt („geregelt“), dass wiederum $\tau = 0$ gilt und man erhält $T_y = \frac{2d}{c}$. T_x damit wird R_{xy} maximal, d. h. die Signale sind „maximal ähnlich“. Daraus folgt nun $d = \frac{c T_x}{2}$.

Aufgabe 5: Amplitudenanaloge Signale (17 Punkte)

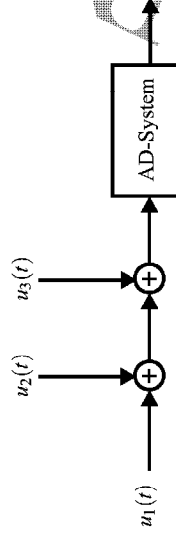


Bild 20: Gesamtsystem zur AD-Wandlung

In Bild 20 ist ein System zur AD-Wandlung abgebildet. Der Block *AD-System* enthält ein Anti-Aliasing-Filter sowie ein AD-Wandler. $u_1(t)$ ist das Nutzsignal, $u_2(t)$ und $u_3(t)$ seien bekannte Störsignale. Die Signale werden wie folgt beschrieben:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= A_1 \cdot \sin(2\pi f_1 t) & f_1 &= 1 \text{ kHz} \\ u_2(t) &= A_2 \cdot \sin(2\pi f_2 t) & f_2 &= 50 \text{ kHz} \\ u_3(t) &= A_3 \cdot \sin(2\pi f_3 t) & f_3 &= 85 \text{ kHz} \end{aligned}$$

- Auf welcher Seite (Eingang oder Ausgang) eines AD-Wandlers sollte sinnvollerweise das Anti-Aliasing-Filter eingesetzt werden? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 Punkte)
- Wählen Sie eine technisch-günstige Abtastfrequenz f_a aus, d. h. die niedrigste, mögliche Frequenz, mit der der AD-Wandler arbeiten soll! Begründen! (2 Punkte)
- Der Signal-Störabstand SNR des Anti-Aliasing-Filters beträgt $SNR = 30 \text{ dB}$, die Grenzfrequenz des Filters wird zu $f_g = 1 \text{ kHz}$ gewählt. Welche Ordnung n hat das Anti-Aliasing-Filter? (2 Punkte)
Hinweise:
 - $SNR \approx (2n-1) \cdot \left(\frac{f_g}{2f_a}\right)^{2n-1}$.
 - f_a aus b).
- Welche Schwierigkeit bereitet das Filter in Teil c) bei der technischen Realisierung, wenn man bedenkt, dass analoge Filter ab einer Ordnung von $n \approx 5 \dots 10$ (je nach Frequenzbereich) technisch nicht mehr realisierbar sind? Wie könnte die Schwierigkeit behoben werden? Begründen Sie Ihre Antwort! (3 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

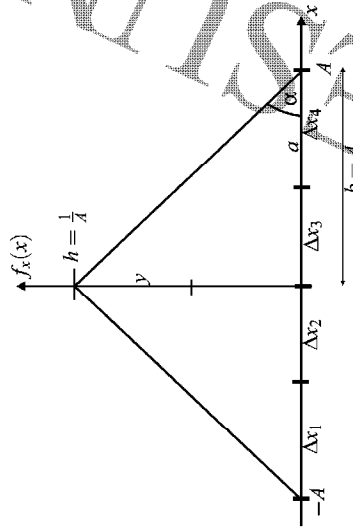


Bild 21: Amplitudendichte $f_A(A)$ und Hilfsgrößen

Ein Signal habe die Amplitudendichte $f_A(x)$ wie in Bild 21 dargestellt. Es soll eine 4-Stufen-Quantisierung durchgeführt werden. Die Werte x_q dieser Quantisierung sollen gleichverteilt sein.

- e) Wie müssen die Intervallbreiten Δx_i ($i = 1, \dots, 4$) gewählt werden damit diese Art der Quantisierung durchgeführt werden kann? Berechnen Sie Δx_i ($i = 1, \dots, 4$)! (4 Punkte)

Hinweise:

1. $\tan \alpha = \frac{h}{b} = \frac{h-y}{a}$.
2. Die Werte x_q der Quantisierung sind gleichverteilt.

- f) Skizzieren Sie die Quantisierungskennlinie! (2 Punkte)

- g) Überprüfen Sie, ob das Quantisierungstheorem erfüllt ist! (3 Punkte)

Lösung

- a) Auf der Eingangsseite. Da reale Signale i. A. nicht bandbegrenzt sind, ist eine Bandbegrenzung erforderlich, damit das Abtasttheorem erfüllbar bleibt. Dies wird mit einem analogen Tiefpass-Filter erreicht.
- b) Abtastfrequenz $f_a > 2 \cdot f_1 = 2 \text{ kHz}$. Damit ist das Abtasttheorem erfüllt. f_a, f_g sind Störfrequenzen, die mit dem Anti-Aliasing-Filter heraus gefiltert werden und daher nicht abgetastet werden (s. a)).

- c) Nach Hinweisen gilt

$$\text{SNR} \approx (2n-1) \left(\frac{f_a}{2f_g} \right)^{(2n-1)}$$

$$30 \text{ dB} \approx (2n-1) \left(\frac{2 \text{ kHz}}{2 \cdot 1 \text{ kHz}} \right)^{(2n-1)}$$

$$n = \frac{10^{\frac{30}{10}} - 1}{2} \approx 500$$

- d) Ein Filter mit Ordnung $n = 500$ ist technisch nicht realisierbar. Eine Obergrenze liegt je nach Frequenzbereich bei $n \approx 5, \dots, 10$.

Das Problem könnte behoben werden, indem f_g verringert werden würde. Dies bewirkt jedoch eine Dämpfung des Nutzsignals durch das Anti-Aliasing-Filter. Wird dagegen die Abtastfrequenz z. B. dreimal so hoch gewählt, so erhält man

$$(2n-1) \left(\frac{3 \cdot 2 \text{ kHz}}{2 \cdot 1 \text{ kHz}} \right)^{(2n-1)} = (2n-1) \cdot 3^{(2n-1)} \underset{n=3}{\approx} 1215 \approx 30,8 \text{ dB}$$

- d. h. ein Tiefpass-Filter 3-Ordnung ist ausreichend um die Anforderungen von $\text{SNR} = 30 \text{ dB}$ zu erfüllen, wenn die Abtastfrequenz des AD-Wandlers zu 6 kHz gewählt werden würde.

- e) Aufgrund der Symmetrie ist die Betrachtung des Teildreiecks in Bild 22 ausreichend.

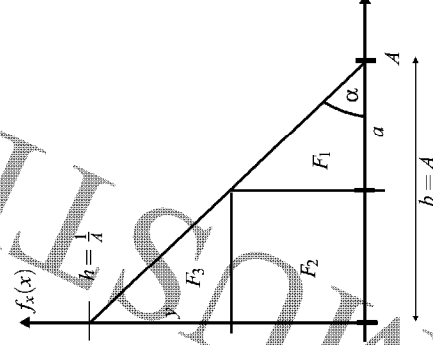


Bild 22: Amplitudendichte $f_A(A)$ und Hilfsgrößen

Bei der Quantisierung handelt es sich um die Flächenabtastung der Amplitudendichten. Das Gewicht des diskreten Abtastwertes ist gleich der Fläche unter der Wahrscheinlichkeitsdichte $f_X(x)$. Damit die Werte x_q der Quantisierung gleichverteilt sind (s. Hinweis), müssen die Flächen F_1 und $F_2 + F_3$ gleich groß sein.

$$F_1 \stackrel{!}{=} F_2 + F_3 \quad (3)$$

Es gilt

$$F_1 = \frac{1}{2}a \cdot (h-y) \quad (4)$$

$$F_2 = (b-a)(h-y) \quad (5)$$

$$F_3 = \frac{1}{2}y \cdot (b-a) \quad (6)$$

$$b=A, \quad h=\frac{1}{A} \quad (7)$$

mit dem Hinweis $\frac{h}{b} = \frac{b-y}{a}$ folgt

$$y = h - a \frac{h}{b} \quad (8)$$

Gleichungen 4,5, 6 in Gleichung 3 einsetzen, liefert

$$\frac{1}{2}a \cdot (h-y) \stackrel{!}{=} (b-a)(h-y) + \frac{1}{2}y \cdot (b-a)$$

mit Gleichung 8

$$\frac{1}{2}a^2 \frac{h}{b} = ah - a^2 \frac{h}{b} + \frac{hb}{2} - \frac{ah}{2} - \frac{a^2 h}{2b}$$

$$a^2 \frac{h}{b} = \frac{hb}{2}$$

$$a^2 = \frac{b^2}{2} \quad \text{mit Gleichung 7 folgt}$$

$$a = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

folgt

$$\Delta x_2 = \Delta x_3 = A - a = A \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Delta x_1 = \Delta x_4 = a = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

Alternative:

s. Bild 23

Damit die Ergebniswerte gleichverteilt sind, gilt $F_1 \stackrel{!}{=} F_2$.

$$F_1 = \int_0^a \left(\frac{1}{A} - \frac{x}{A^2}\right) dx = \frac{a}{A} - \frac{a^2}{2A^2}$$

$$F_2 = \int_a^A \left(\frac{1}{A} - \frac{x}{A^2}\right) dx = 1 - 0.5 - \frac{a}{A} + \frac{a^2}{2A^2}$$

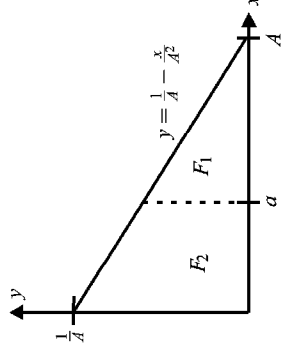


Bild 23: Skizze zur alternativen Berechnung

folgt

$$\frac{a}{A} - \frac{a^2}{2A^2} = 1 - 0.5 - \frac{a}{A} + \frac{a^2}{2A^2}$$

und es ergibt sich folgende quadratische Gleichung

$$a_{1,2} = A \pm \sqrt{A^2 - 0.5A^2} \stackrel{0 < a < A}{=} A \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

f) Die Quantisierungskennlinie ist in Bild 24 dargestellt. Es gilt

$$q_1 = -A$$

$$q_2 = -A \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$q_3 = A \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$q_4 = A$$

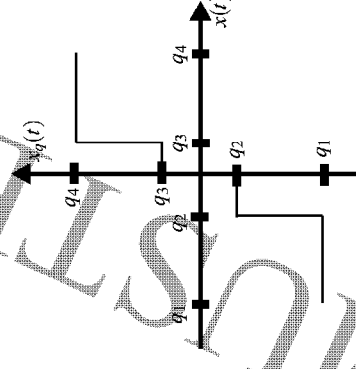


Bild 24: Quantisierungskennlinie

g) Damit das Quantisierungstheorem erfüllt ist, muss die Wahrscheinlichkeitsdichte des unquantisierten Signals bandbegrenzt sein. Hierzu ist es notwendig die charakteristische Funktion $\Phi_A(f)$

der Wahrscheinlichkeitsdichte $f_A(A)$ zu untersuchen.

$$\Phi_A(f) = \mathcal{F}(f_A(A)) = A \cdot s^2(\pi f A)$$

Die größte Quantisierungsfrequenz ist

$$f_u = \frac{1}{2q_3} = \frac{-1}{2q_2} = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot A}.$$

Da die s^2 -Funktion Quantisierungsfrequenz-Komponenten größer f_u hat, d. h. $\Phi_A(f)$ nicht bandbegrenzt ist, ist das Quantisierungstheorem nicht erfüllt.