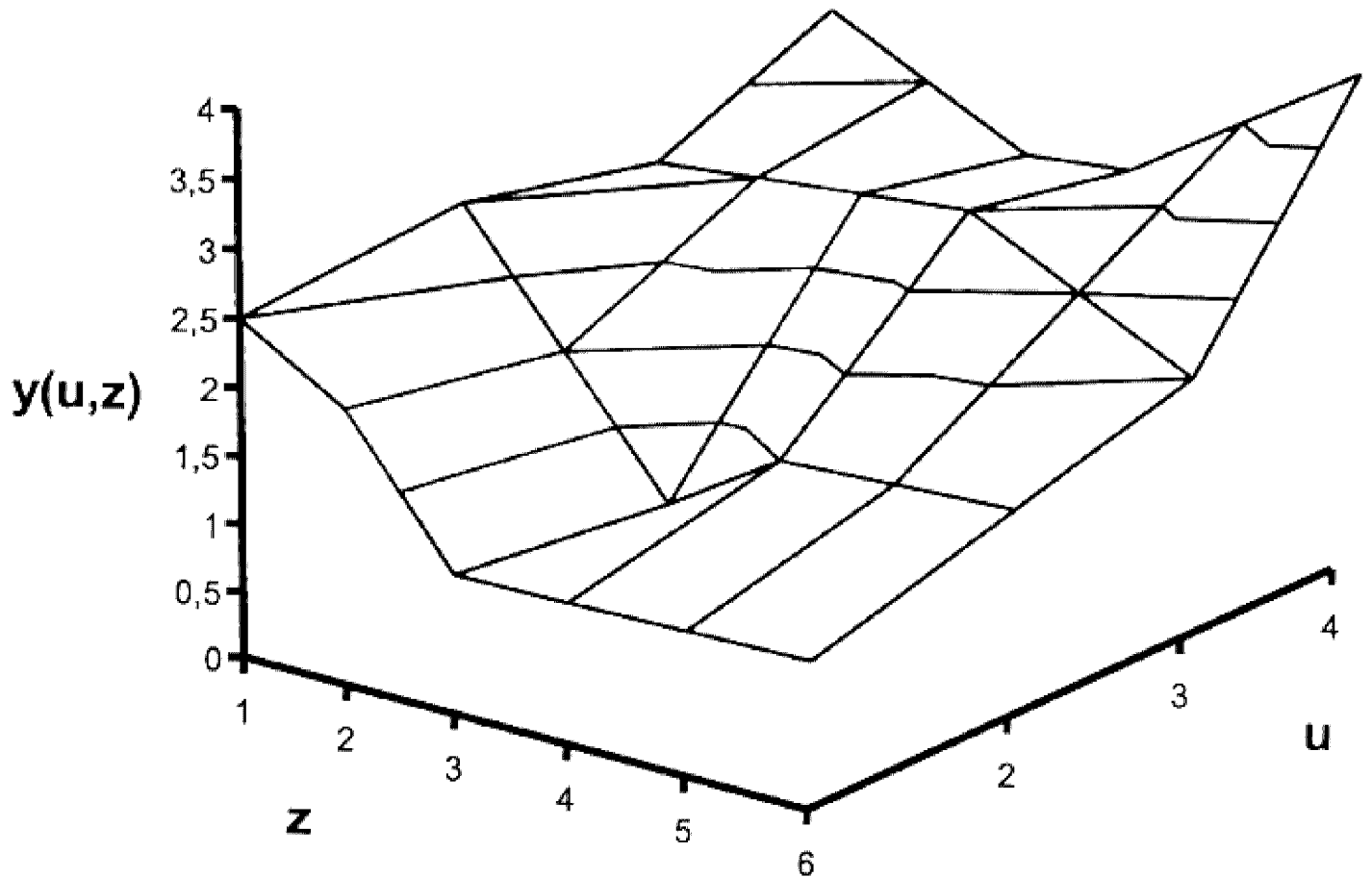


MESS

F05 - H09



FS ETEC
Die Echten

Moment!

Bevor Du voll ins Lernen einsteigst – dafür ist die Klausursammlung ja da –, nimm Dir bitte fünf Minuten Zeit, Dich über die Entstehung eben dieser Sammlung zu informieren.

Es ist nämlich nicht so, dass die Klausuren mit Lösungen in genau dieser Form vom Himmel fallen. Die Fachschaft, genauer unser Klausurreferent, investiert eine ganze Menge Zeit und Arbeit, bevor die großen Stapel bedrucktes Papier aus unserer Druckmaschine fallen, die Du dann kurze Zeit später kaufen kannst. Doch das ist nur ein kleiner Teil unserer Arbeit!

Weitere Angebote der Fachschaft, die allesamt nur durch freiwilliges Engagement bestehen können, sind:

- Beratung vor und während des Studiums (Modellberatung, VPA, HPA, Härtefälle u.v.a.m.)
- Fachschaftszeitschrift „Der Funke“
- Protokolldruck
- Exkursionen (u.a. CERN, FZ Jülich, AKW Philippsburg)
- verschiedene Informationsveranstaltungen (u.a. O-Phase, Wege ins Ausland)
- Fachschaftsbibliothek
- Kontaktaufnahme mit Dozenten, Vermittlung in Problemfällen
- und natürlich nicht zu vergessen: die Feste ;-)

Gremienarbeit

Die Gremienarbeit nimmt eine Sonderstellung ein. Sie ist nicht direkt ein Angebot an Euch; wir wirken bei der Berufung neuer Dozenten mit und vertreten die Interessen aller ETECs gegenüber der Fakultät. In den Gremien *Fakultätsrat* und *Studienkommission* erarbeiten wir zusammen mit den Professoren die Zukunft unseres Studienganges:

- Umstellung auf Bachelor/Master
- Verwendung der Studiengebühren
- Änderungen an der Prüfungsordnung
- Einführung neuer Fächer

Die Gremienarbeit ist ein wichtiger, aber auch zeitintensiver Teil der Fachschaftstätigkeiten. Deshalb kann es vorkommen, dass die Fachschaft auch mal geschlossen ist, wenn wir konzentriert arbeiten müssen.

Die Fachschaffler

Da die Mitarbeit in der Fachschaft selbstverständlich ehrenamtlich erfolgt, kann jeder selbst bestimmen, wieviel Zeit und Arbeit er in die Fachschaft investieren möchte – ob er z.B. einfach eine Öffnungszeit übernimmt oder in einem der Referate (mit-)arbeitet. Einige von uns wurden von Euch bei den unabhängigen Wahlen zu offi-

ellen Vertretern gewählt. In der Regel sitzen sie zusammen mit den Professoren in den oben bereits erwähnten Gremien der Fakultät.



Mitmachen lohnt sich!

Warum? Zu allererst: Es macht Spaß!

- Zum einen lernt man unglaublich viele nette Leute kennen – Studierende aus anderen Semestern, Professoren bei Veranstaltungen und in Gremien... und das von einer ganz anderen Seite als in der Vorlesung!
- Sich in der Fachschaft zu engagieren heißt mehr als nur zu studieren, es bedeutet aktiv auf die Zukunft des eigenen Studienganges Einfluss zu nehmen: Qualität der Lehre, zukünftige Ausrichtung, neue Professoren usw.
- Aber auch die persönliche Entwicklung kommt nicht zu kurz: Man stärkt seine Teamfähigkeit, kann sich in interessante Projekte einbringen und setzt diese eigenverantwortlich um. In den Gremien erlernt man eine professionelle und zielorientierte Arbeitsweise, und natürlich wollen diese Ergebnisse vor der gesamten Gruppe präsentiert werden!

Ihr seht also, Fachschaftsarbeit besteht nicht nur aus Klausurenverkauf, sondern ist auch soziales Engagement und vermittelt dabei jene „Soft-Skills“, die heute im Berufsleben immer wichtiger werden.

Einstiegsmöglichkeiten

Wo muss ich unterschreiben? – Nein, so läuft es natürlich nicht.

Wir hoffen, dass wir Euch einen tieferen Einblick in die vielleicht noch etwas unbekannten Teile der vielfältigen Fachschaftsarbeit geben konnten. Wenn Ihr Interesse habt, bei uns mitzumachen, kommt doch einfach mal ganz unverbindlich zu einer Öffnungszeit oder einer Sitzung (mittwochs 18 Uhr c.t. im Fachschafts-Büro) vorbei.

Es gibt eine ganze Reihe von Möglichkeiten, bei uns einzusteigen:

- Fachschaftssitzung besuchen
- Öffnungszeiten übernehmen
- bei Festen mithelfen
- die „Ersties“ bei der O-Phase betreuen
- bei aktuellen Vorhaben mitwirken

Wir würden uns freuen, Dich demnächst in unserer Runde begrüßen zu dürfen. :-)

Deine Fachschaft ETEC

Aufgabe 1: Kurvenanpassung (19 Punkte)

Für eine Kennlinieninterpolation wurden folgende Werte aufgezeichnet (s. Tabelle 1):

Index	0	1	2
u_i	-2	0	2
$y(u_i)$	8	-8	8

Tabelle 1: Aufgezeichnete Messwerte

- a) Führen Sie die Interpolationsmethode nach Lagrange durch und geben Sie das Interpolationspolynom in der Form $\hat{y}_{L,a}(u) = p_0 + p_1u + p_2u^2 + \dots$ an! (5 Punkte)
- b) Um die Kennlinien-Interpolation zu verbessern werden zwei zusätzliche Werte an den Stützstellen $u_3 = -1$ und $u_4 = 1$ ermittelt: $y(u_3 = -1) = -13$ und $y(u_4 = 1) = -13$. Berechnen Sie das neue Interpolationspolynom unter Berücksichtigung dieser Messwerte! Geben Sie das Interpolationspolynom in der Form $\hat{y}_{N,b}(u) = p_0 + p_1u + p_2u^2 + p_3u^3 + p_4u^4 + \dots$ an. (5 Punkte)
- Hinweis:** Verwenden Sie die Newton-Interpolation **oder** die rekursive Berechnungen der Interpolationskoeffizienten.

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- c) In Tabelle 2 finden Sie aufgezeichnete Messwerte. Führen Sie eine Approximation der Kennlinie mittels des Least-Squares Ansatzes durch und geben Sie das Approximationspolynom in der Form $\hat{y}_{app,c}(u) = p_0 + p_1u + p_2u^2 + \dots$ an! Runden Sie Ergebnisse auf 2 Nachkommastellen. (3 Punkte)
- Hinweise:**

- Verwenden Sie als Modellgleichung ein Polynom 2. Ordnung: $y(u) = au^2 + bu + c + e(t)$.

- Verwenden Sie folgende Werte für die Pseudo-Inverse:

$$(\underline{\Psi}^T \cdot \underline{\Psi})^{-1} \cdot \underline{\Psi}^T = \begin{bmatrix} 0.14 & -0.07 & -0.14 & -0.07 & 0.14 \\ -0.2 & -0.1 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ -0.09 & 0.34 & 0.49 & 0.34 & -0.09 \end{bmatrix}$$

Index	0	1	2	3	4
u_i	-2	-1	0	1	2
$y(u_i)$	8	-13	-8	-13	8

Tabelle 2: Aufgezeichnete Messwerte

- d) Berechnen Sie den maximalen absoluten Fehler $F_{abs}(u) = |\hat{y}_{app,c}(u) - \hat{y}_{N,b}(u)|$ der Approximation im Vergleich zur Interpolation! Untersuchen Sie auch den absoluten Fehler der Approximation am Messanfang und am Messende. (4 Punkte)

Hinweis: Verwenden Sie die Interpolationspolynome aus den Aufgabenteilen b) und c)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- e) Erklären Sie detailliert, was genau bei einem Least-Squares-Schätzer minimiert wird! (2 Punkte)

Lösung

- a) Für die Lagrange-Interpolation müssen die Lagrange-Polynome

$$L_i(u) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(u - u_j)}{(u_i - u_j)}$$

berechnet werden ($n = 2$ und $i = 0, \dots, 2$):

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{(u - u_1)(u - u_2)}{(u_0 - u_1)(u_0 - u_2)} = \frac{u \cdot (u - 2)}{(-2)(-4)} = \frac{u^2 - 2u}{8} \\ L_1 &= \frac{(u - u_0)(u - u_2)}{(u_1 - u_0)(u_1 - u_2)} = \frac{(u + 2)(u - 2)}{2(-2)} = \frac{u^2 - 4}{-4} \\ L_2 &= \frac{(u - u_0)(u - u_1)}{(u_2 - u_0)(u_2 - u_1)} = \frac{(u + 2)u}{4 \cdot 2} = \frac{u^2 + 2u}{8} \end{aligned}$$

Daraus erhält man das Interpolationspolynom

$$\begin{aligned} \hat{y}_{L,a}(u) &= \sum_{i=0}^n y_i L_i(u) \\ &= 8 \cdot \frac{u^2 - 2u}{8} - 8 \cdot \frac{u^2 - 4}{-4} + 8 \cdot \frac{u^2 + 2u}{8} \\ &= 4u^2 - 8 \end{aligned}$$

- b) Es gibt zwei Wege die Stützstellen hinzuzufügen und das neue Interpolationspolynom zu berechnen:

- Rekursive Berechnung der Koeffizienten

Erste Stützstelle $u_3 = -1$:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{N,b,1}(u_3) &= a_3 \cdot (u_3 - u_0)(u_3 - u_1)(u_3 - u_2) + \hat{y}_{L,a}(u_3) \\ -13 &= a_3 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-3) - 4 \\ &\rightarrow a_3 = -3 \\ &\rightarrow \hat{y}_{N,b,1}(u) = -3u^3 + 4u^2 + 12u - 8 \end{aligned}$$

Zweite Stützstelle $u_4 = 1$:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{N,b}(u_4) &= a_4 \cdot (u_4 - u_0)(u_4 - u_1)(u_4 - u_2)(u_4 - u_3) + \hat{y}_{N,b,1}(u_4) \\ -13 &= a_4 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot (-2) + 5 \\ &\rightarrow a_4 = 3 \\ &\rightarrow \hat{y}_{N,b}(u) = 3u^4 - 8u^2 - 8 \end{aligned}$$

- Newton-Interpolationsschema

u_i	y	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
-2	8				
-1	-13	$\rangle -21$	$\rangle 26$		
0	-8	$\rangle 5$	$\rangle -10$	$\rangle -36$	$\rangle 72$
1	-13	$\rangle -5$	$\rangle 26$	$\rangle 36$	
2	8	$\rangle 21$			

Für die Koeffizienten a_i erhält man:

$$a_0 = \frac{8}{1}, \quad a_1 = \frac{-21}{1!} = -21, \quad a_2 = \frac{26}{2!} = 13, \\ a_3 = \frac{-36}{2 \cdot 3!} = -6, \quad a_4 = \frac{72}{2 \cdot 3 \cdot 4!} = 3$$

$$\hat{y}_{N,b}(u) = 8 - 21(u+2) + 13(u+2)(u+1) \\ - 6(u+2)(u+1)u + 3(u+2)(u+1)u(u-1) \\ = 3u^4 - 8u^2 - 8$$

- c) Berechnung des Interpolationspolynoms nach der Least-Squares Schätzer-Methode

- Modellgleichung:

$$y(u) = au^2 + bu + c + e(t)$$

- Signalmodell:

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_0^2 & u_0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{n-1}^2 & u_{n-1} & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}}$$

- Mittels der Pseudo-Inversen ergibt sich:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{Y}^T \cdot \mathbf{Y})^{-1} \mathbf{Y}^T \cdot \hat{\mathbf{y}} \\ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.14 & -0.07 & -0.14 & -0.07 & 0.14 \\ -0.2 & -0.1 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ -0.09 & 0.34 & 0.49 & 0.34 & -0.09 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ -13 \\ -8 \\ -13 \\ 8 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 5.18 \\ 0 \\ -14.2 \end{bmatrix}$$

- hieraus ergibt sich das gesuchte Interpolationspolynom zu:

$$\hat{y}_{app,c}(u) = 5.18u^2 - 14.2$$

- d) Der absolute Fehler ist

$$F_{abs}(u) = \underbrace{|\hat{y}_{app,c}(u) - \hat{y}_{N,b}(u)|}_{\tilde{F}_a}.$$

Um den maximalen absoluten Fehler zu berechnen ist es ausreichend $\tilde{F}_a$ auf Extremwerte zu untersuchen:

$$\tilde{F}_a = \hat{y}_{app,c}(u) - \hat{y}_{N,b}(u) \\ = -3u^4 + 13.18u^2 - 6.2$$

Erste Ableitung von $\tilde{F}_a$ bilden und Null setzen

$$\frac{d\tilde{F}_a}{du} = -12u^3 + 26.36u$$

ergibt drei Extremwertstellen:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 1.48, \quad u_3 = -1.48.$$

Hiermit und mit den Intervall-Rändern $u_{rand} = \pm 2$ erhält man folgende Werte für den absoluten Fehler:

$$\tilde{F}_a(u_1) = -6.2 \\ \tilde{F}_a(u_{2,3}) = 8.28 \\ \tilde{F}_a(u_{rand}) = -1.48$$

Das heißt der maximale absolute Fehler tritt an den Stellen $u_{2,3}$ auf und beträgt $F_{abs}(u_{2,3}) = 8.28$.

- e) Ein Least-Squares Schätzer minimiert die **Summe der Approximationsfehlerquadrate** bei **allgemeinen Basisfunktionen**.

Aufgabe 2: Stationäres Verhalten von Messsystemen (18 Punkte)

Die folgende Messkennlinie sei gegeben:

$$y(u) = \frac{u^2}{9} - \frac{2}{9}u - \frac{8}{9}$$

- Bestimmen Sie die ideale Kennlinie $y_i(u)$ bei Fixpunktjustierung für den Messbereich $2.5 \leq u \leq 5.5$! (3 Punkte)
- Wie groß ist der maximale relative Kennlinienfehler bezogen auf den Anzeigebereich F_{RES} zwischen $y(u)$ und $y_i(u)$? Bei welchem Eingangswert u tritt dieser auf? (2 Punkte)
- Bestimmen Sie die ideale Kennlinie $y_{i,c}(u)$, die bei unveränderter Empfindlichkeit S_i aus Teil a) den maximalen absoluten Kennlinienfehler im Messbereich minimiert. Beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise! (3 Punkte)
- Welchem Justierverfahren entspricht das Vorgehen in c)? (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- Durch welches Verfahren kann ein systematischer, superponierender Fehler eliminiert werden und gleichzeitig die Empfindlichkeit des Messsystems erhöht werden? Begründen Sie Ihre Antwort! (3 Punkte)
- Beschreiben oder skizzieren Sie das Verfahren aus e)! (2 Punkte)
- Wie verändert sich die Empfindlichkeit einer Kennlinie bei einem rein superponierenden Fehler und wie bei einem rein deformierenden Fehler? Begründen Sie Ihre Antworten! (4 Punkte)

Lösung

- Fixpunktjustierung: die ideale KL schneidet an den Messbereichsgrenzen die reale Kennlinie. $y_a = y(u_a = 2.5) = -\frac{3}{4}$ und $y_e = y(u_e = 5.5) = \frac{5}{4}$. Die ideale Kennlinie ist eine Gerade durch diese beiden Punkte:

$$S_i = \frac{y_e - y_a}{u_e - u_a} = \frac{2}{3}$$

$$y_{i,a}(u) = S_i \cdot (u - u_a) + y_a = \frac{2}{3} \cdot (u - 2.5) - \frac{3}{4} = \frac{2}{3}u - \frac{29}{12}$$

- Der maximale relative Kennlinienfehler ist

$$F_{RES} = \frac{y(u) - y_{i,a}(u)}{y_e - y_a} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{9}u^2 - \frac{8}{9}u + \frac{55}{36} \right]$$

Extremwert:

$$\frac{dF_{RES}}{du} = \frac{1}{9}u - \frac{2}{9} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow u_m = 4$$

(Dies ist ein Minimum, aber trotzdem der maximale Fehlerbetrag). Daraus erhält man den maximalen relativen Fehler:

$$F_{RES,max}(u_m) = -\frac{1}{8}$$

- Der maximale absolute Kennlinienfehler $F_{a,max} = y(u) - y_{i,a}(u)$ tritt nach b) bei $u = 4$ auf und beträgt $F_{a,max} = -1/8$. Da der Fehler im ganzen Messbereich negativ ist, kann durch Parallelverschiebung der idealen Kennlinie $y_{i,a}(u)$ um $-F_{a,max}/2$ der Fehler minimiert werden. Der maximale absolute Kennlinienfehler $F_{a,max} = y(u) - y_{i,c}(u)$ ist dann nur noch halb so groß.

$$y_{i,c}(u) = y_{i,a}(u) - \frac{F_{a,max}}{2} = \frac{2}{3}u - \frac{21}{24}$$

- Justierung nach dem Toleranzbandverfahren.

- Mittels der **Differenzmethode** kann ein systematischer, superponierender Fehler eliminiert werden, weil dies Art von Fehler von geraden Funktionstermen repräsentiert wird. Gerade Funktionsterme fallen jedoch bei der Differenzmethode heraus, daraus ergibt sich auch die linearisierende Wirkung. Bei der Differenzmethode werden außerdem die ungeraden Funktionsterme mit dem Faktor 2 verstärkt, d. h. die Empfindlichkeit der Messschaltung verdoppelt sich dadurch.

- In Bild 1 ist Struktur der Schaltung für die Differenzmethode abgebildet.

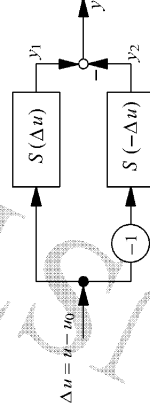


Bild 1: Parallelschaltung zweier Messwertnehmer: Differenzmethode

- Die Empfindlichkeit ändert sich bei einem rein superponierenden Fehler nicht, weil die Kennlinie nur um einen konstanten Faktor verschoben wird. Dieser Faktor ist bei der Ableitung also Berechnung der Empfindlichkeit gleich Null.
- Die Empfindlichkeit ändert sich bei einem rein deformierenden (multiplikativen) Fehler entsprechend der Funktion des Fehlers. Da diese Art von Fehler multiplikativer Natur ist, verschwindet er auch nicht bei der Berechnung der Empfindlichkeit.

Aufgabe 3: Statistik (24 Punkte)

Der ohmsche Widerstand eines großen Produktionsloses soll geprüft werden. Aus einer Stichprobe vom Umfang $n = 100$ wurde eine Häufigkeitsverteilung gemäß Tabelle 3 mit $k = 6$ Klassen und einer Klassenbreite von $\Delta x = 1 \Omega$ ermittelt. $\tilde{x}_i$ entspricht dem Klassenmittelpunkt.

$\tilde{x}_i$	48.5	49.5	50.5	51.5	52.5	53.5
n_i	5	11	35	29	13	7

Tabelle 3: Häufigkeitsverteilung der Widerstände

Es wird angenommen, dass der ohmsche Widerstand der Bauteile normalverteilt mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2 sei.

- a) Schätzen Sie den unbekannten Mittelwert und die unbekannte Varianz mittels folgenden Formeln ab: (3 Punkte)

$$\mu = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k n_i \tilde{x}_i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^k n_i \tilde{x}_i^2 - \frac{n}{n-1} \mu^2$$

- b) Nennen Sie vier Voraussetzungen, die erfüllt werden müssen, damit ein χ^2 -Test durchgeführt werden darf! Sind all diese Voraussetzungen in obiger Problemstellung erfüllt? Begründen Sie Ihre Antwort! (3 Punkte)

- c) Überprüfen Sie mittels χ^2 -Test, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte der Stichprobe eine Normalverteilung ist! Das Signifikanzniveau betrage $\alpha = 2\%$. (7 Punkte)

Hinweise:

- Die Wahrscheinlichkeitswerte für die Standard-Normalverteilung finden Sie in Tabelle 3.
- Die Wahrscheinlichkeiten von $\chi^2 \leq \chi^2_{\alpha}$ finden Sie in Bild 2.
- Runden Sie alle Zwischenergebnisse auf 2 Nachkommastellen. **Runden Sie nicht die Werte die Sie aus Bild 3 ablesen!**
- Beachten Sie, dass $\tilde{x}_i$ der Klassenmittelpunkt ist und nicht eine Klassengrenze!

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Weiter auf Seite 8

Zur Produktion von Widerständen mit einem Sollwert von $R_0 = 50 \Omega$ wird eine Maschine mit einer Fertigungstoleranz von 4% eingesetzt. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der produzierten Widerstandswerte sei gegeben durch:

$$f_R(R) = \begin{cases} k, & 50.2 \leq R \leq 52.8 \\ 0, & R < 50.2 \text{ bzw. } R > 52.8 \end{cases}$$

- d) Welche Bedingungen muss $f_R(R)$ erfüllen, damit es sich um eine Wahrscheinlichkeitsdichte handelt? Bestimmen Sie den Faktor k ! (3 Punkte)
- e) Bestimmen Sie den Widerstandsmittelwert $\bar{R}$ von $f_R(R)$! (2 Punkte)
- f) Es soll geprüft werden, inwieweit 99.73% der produzierten Widerstände im spezifizierten Messbereich liegen. Bestimmen Sie hierfür den Prozessfähigkeitsindex c_p und den Prozessbrauchbarkeitsindex c_{pk} ! Runden Sie die Ergebnisse auf 3 Nachkommastellen. (4 Punkte)
- Hinweis:** Für die Berechnung dieser Parameter müssen Sie von einer Gleichverteilung ausgehen!
- g) Bewerten Sie die Ergebnisse aus Teilaufgabe f). (2 Punkte)

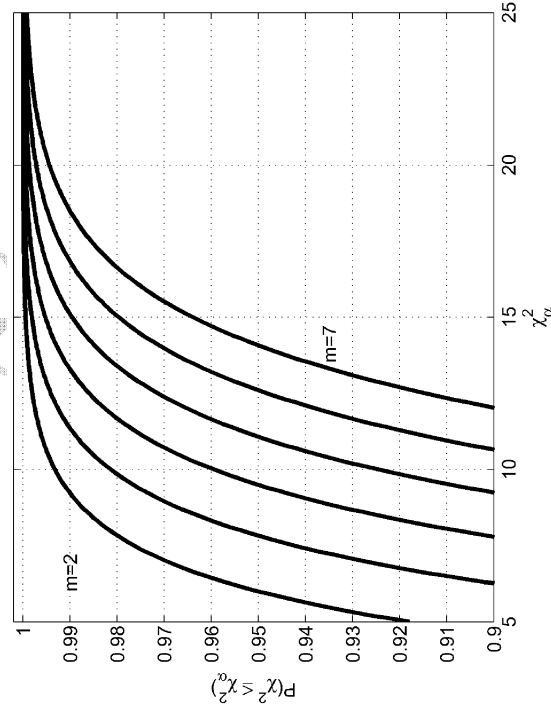


Bild 2: Wahrscheinlichkeiten von $\chi^2 \leq \chi^2_{\alpha}$ bei m Freiheitsgraden

Lösung

a) Abschätzen von Mittelwert und Varianz

$$\mu = \frac{1}{100} \cdot \sum_{i=1}^6 n_i \cdot \tilde{x}_i = 51.05$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{99} \cdot \sum_{i=1}^6 n_i \cdot \tilde{x}_i^2 - \frac{100}{99} \mu^2 = 1.46$$

$$\rightarrow \sigma = 1.21$$

b) Voraussetzungen für den χ^2 -Test:

- Unabhängigkeit der Messwerte $\rightarrow$ erfüllt, dies wird allgemein immer angenommen
- Hinreichend großer Stichprobenumfang $\rightarrow$ erfüllt, da $n = 100$
- Disjunkte Klasseneinteilung $\rightarrow$ erfüllt, da kein Element einer Klasse von einem Element einer anderen Klasse abhängt bzw. es gibt keine Überlappung der Klassen, d. h. kein Element ist gleichzeitig mehreren Klassen zugeordnet.
- „Faustregel“ für die Randklassen ($n_{i,Rand} \geq 1$) bzw. die übrigen Klassen ($n_i \geq 5$) $\rightarrow$ erfüllt, sie Tabelle 3

c) χ^2 -Test

- Voraussetzungen sind erfüllt
- Nullhypothese H_0 : „Häufigkeitsverteilung entspricht einer Normalverteilung“
- statistische Sicherheit $P = 1 - \alpha = 0.98$
- Freiheitsgrade m bei $k = 6$ Klassen: $m = k - 1 - 2 = 3$ (da Normalverteilung und zwei geschätzte Parameter)
- Aus Diagramm 2 erhält man $\chi^2_{\alpha} \approx 9.6 \dots 10$

Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Klassen werden wie folgt ermittelt:

Für die Berechnung der theoretischen Wahrscheinlichkeiten p_i gilt mit $f_X(x) = N(\mu, \sigma)$:

$$p_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{x_i} f_X(x) dx - \int_{-\infty}^{x_{i-1}} f_X(x) dx$$

wobei x_i, x_{i+1} als jeweilige Intervall- bzw. Klassenränder zu verstehen sind. Dieses Integral ist nur für die Standard-Normalverteilung $N(0,1)$ tabelliert (Tabelle 3). Mittels einer Variablentransformation

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

ergibt sich so für tabellierte Werte von $\Phi(z)$:

$$p_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x_i - \mu}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x_{i-1} - \mu}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= \Phi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_{i-1} - \mu}{\sigma}\right)$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.5000	0.20	0.5793	0.40	0.6554	0.60	0.7257
0.01	0.5040	0.21	0.5832	0.41	0.6591	0.61	0.7291
0.02	0.5080	0.22	0.5871	0.42	0.6628	0.62	0.7324
0.03	0.5120	0.23	0.5910	0.43	0.6664	0.63	0.7357
0.04	0.5160	0.24	0.5948	0.44	0.6700	0.64	0.7389
0.05	0.5199	0.25	0.5987	0.45	0.6736	0.65	0.7422
0.06	0.5239	0.26	0.6026	0.46	0.6772	0.66	0.7454
0.07	0.5279	0.27	0.6064	0.47	0.6808	0.67	0.7486
0.08	0.5319	0.28	0.6103	0.48	0.6844	0.68	0.7517
0.09	0.5359	0.29	0.6141	0.49	0.6879	0.69	0.7549
0.10	0.5398	0.30	0.6179	0.50	0.6915	0.70	0.7580
0.11	0.5438	0.31	0.6217	0.51	0.6950	0.71	0.7611
0.12	0.5478	0.32	0.6255	0.52	0.6985	0.72	0.7642
0.13	0.5517	0.33	0.6293	0.53	0.7019	0.73	0.7673
0.14	0.5557	0.34	0.6331	0.54	0.7054	0.74	0.7704
0.15	0.5596	0.35	0.6368	0.55	0.7088	0.75	0.7734
0.16	0.5636	0.36	0.6406	0.56	0.7123	0.76	0.7764
0.17	0.5675	0.37	0.6443	0.57	0.7157	0.77	0.7794
0.18	0.5714	0.38	0.6480	0.58	0.7190	0.78	0.7823
0.19	0.5753	0.39	0.6517	0.59	0.7224	0.79	0.7852

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1.00	0.8413	1.20	0.8849	1.40	0.9192	1.60	0.9452
1.01	0.8438	1.21	0.8869	1.41	0.9207	1.61	0.9463
1.02	0.8461	1.22	0.8888	1.42	0.9222	1.62	0.9474
1.03	0.8485	1.23	0.8907	1.43	0.9236	1.63	0.9484
1.04	0.8508	1.24	0.8925	1.44	0.9251	1.64	0.9495
1.05	0.8531	1.25	0.8944	1.45	0.9265	1.65	0.9505
1.06	0.8554	1.26	0.8963	1.46	0.9279	1.66	0.9515
1.07	0.8577	1.27	0.8980	1.47	0.9292	1.67	0.9525
1.08	0.8599	1.28	0.8997	1.48	0.9306	1.68	0.9535
1.09	0.8621	1.29	0.9015	1.49	0.9319	1.69	0.9545
1.10	0.8643	1.30	0.9032	1.50	0.9332	1.70	0.9554
1.11	0.8665	1.31	0.9049	1.51	0.9345	1.71	0.9564
1.12	0.8686	1.32	0.9066	1.52	0.9357	1.72	0.9573
1.13	0.8708	1.33	0.9082	1.53	0.9370	1.73	0.9582
1.14	0.8729	1.34	0.9099	1.54	0.9382	1.74	0.9591
1.15	0.8749	1.35	0.9115	1.55	0.9394	1.75	0.9599
1.16	0.8770	1.36	0.9131	1.56	0.9406	1.76	0.9608
1.17	0.8790	1.37	0.9147	1.57	0.9418	1.77	0.9616
1.18	0.8810	1.38	0.9162	1.58	0.9429	1.78	0.9625
1.19	0.8830	1.39	0.9177	1.59	0.9441	1.79	0.9633

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
2.00	0.9773	2.20	0.9861	2.40	0.9918	2.60	0.9953
2.01	0.9778	2.21	0.9864	2.41	0.9920	2.61	0.9955
2.02	0.9783	2.22	0.9868	2.42	0.9922	2.62	0.9956
2.03	0.9788	2.23	0.9871	2.43	0.9925	2.63	0.9957
2.04	0.9793	2.24	0.9875	2.44	0.9927	2.64	0.9959
2.05	0.9798	2.25	0.9878	2.45	0.9929	2.65	0.9960
2.06	0.9803	2.26	0.9881	2.46	0.9931	2.66	0.9961
2.07	0.9808	2.27	0.9884	2.47	0.9932	2.67	0.9962
2.08	0.9812	2.28	0.9887	2.48	0.9934	2.68	0.9963
2.09	0.9817	2.29	0.9890	2.49	0.9936	2.69	0.9964
2.10	0.9821	2.30	0.9893	2.50	0.9938	2.70	0.9965
2.11	0.9826	2.31	0.9896	2.51	0.9940	2.71	0.9966
2.12	0.9830	2.32	0.9899	2.52	0.9941	2.72	0.9967
2.13	0.9834	2.33	0.9901	2.53	0.9943	2.73	0.9968
2.14	0.9838	2.34	0.9904	2.54	0.9945	2.74	0.9969
2.15	0.9842	2.35	0.9906	2.55	0.9946	2.75	0.9970
2.16	0.9846	2.36	0.9909	2.56	0.9948	2.76	0.9971
2.17	0.9850	2.37	0.9911	2.57	0.9949	2.77	0.9972
2.18	0.9854	2.38	0.9913	2.58	0.9951	2.78	0.9973
2.19	0.9857	2.39	0.9915	2.59	0.9952	2.79	0.9974

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
3.00	0.9987	3.20	0.9993	3.40	0.9997	3.60	0.9998
3.10	0.9990	3.30	0.9995	3.50	0.9998	3.70	0.9999

Bild 3: Werte der Standard-Normalverteilung $\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

$$\begin{aligned}
p_1 &= \Phi\left(\frac{49-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{48-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \Phi(-1.69) - \Phi(-2.52) \\
&= 1 - 0.9545 - (1 - 0.9941) \\
&= 0.0396 \approx 0.04 \\
p_3 &= \Phi\left(\frac{51-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{50-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \Phi(-0.04) - \Phi(-0.87) \\
&= 1 - 0.5160 - (1 - 0.8079) \\
&= 0.2919 \approx 0.29 \\
p_5 &= \Phi\left(\frac{53-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{52-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \Phi(1.61) - \Phi(0.79) \\
&= 0.9463 - 0.7852 \\
&= 0.1611 \approx 0.16 \\
p_2 &= \Phi\left(\frac{50-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{49-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \Phi(-0.87) - \Phi(-1.69) \\
&= 1 - 0.8079 - (1 - 0.9545) \\
&= 0.1466 \approx 0.15 \\
p_4 &= \Phi\left(\frac{52-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{51-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \Phi(0.79) - \Phi(-0.04) \\
&= 0.7852 - (1 - 0.5160) \\
&= 0.3012 \approx 0.3 \\
p_6 &= \Phi\left(\frac{54-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{53-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \Phi(2.44) - \Phi(1.61) \\
&= 0.9927 - 0.9463 \\
&= 0.0464 \approx 0.05
\end{aligned}$$

Es ergibt sich Tabelle 4 für den χ^2 -Test.

Klasse	1	2	3	4	5	6	Σ
n_i	5	11	35	29	13	7	100
p_i	0.04	0.15	0.29	0.3	0.16	0.05	0.99
$n \cdot p_i$	4	15	29	30	16	5	
$\frac{(n_i - n p_i)^2}{n p_i}$	0.25	1.07	1.24	0.03	0.56	0.8	3.95

Tabelle 4: χ^2 -Berechnung

Die Nullhypothese H_0 wird angenommen, da $\chi^2 = \frac{(n_i - n p_i)^2}{n p_i} = 3.95 < \chi^2_{\alpha} \approx 9.8$.

d) Bei $f_R(R)$ handelt es sich um eine Wahrscheinlichkeitsdichte, wenn

1. $f_R(R) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_R(R) dR \stackrel{!}{=} 1$

erfüllt werden kann. Die erste Bedingung ist erfüllt, die zweite ist erfüllt wenn gilt:

$$1 = \int_{50.2}^{52.8} k dR = k(52.8 - 50.2) \rightarrow k = \frac{1}{2.6} = 0.385$$

e) Der Mittelwert $\hat{R}$ ergibt sich aus

$$\hat{R} = \int_{-\infty}^{\infty} R \cdot f_R(R) dR = \int_{50.2}^{52.8} R \cdot k \cdot dR = 51.5 \Omega$$

oder da es sich um eine Gleichverteilung handelt aus

$$\hat{R} = \frac{52.8 \Omega + 50.2 \Omega}{2} = 51.5 \Omega$$

f) Der Prozessfähigkeitsindex berechnet sich nach

$$c_p = \frac{\text{spezifizierter Messbereich}}{\text{Vertrauensbereich}} = \frac{2 \cdot \Delta x_s}{2 \cdot 3 \sigma_R}$$

Der spezifizierte Messbereich ist

$$2\Delta x_s = (50 \cdot 104\%) - (50 \cdot 96\%) \Omega = 4 \Omega \rightarrow \Delta x_s = 2 \Omega.$$

Der Vertrauensbereich $3 \sigma_R$ wird im Folgenden mit $\Delta \tilde{x}$ bezeichnet.

Für den Vertrauensbereich bzw. das Konfidenzintervall bei Gleichverteilung gilt

$$\hat{R} \pm \Delta \tilde{x} \int_{\hat{R} - \Delta \tilde{x}}^{\hat{R} + \Delta \tilde{x}} f_R(R) dR \stackrel{!}{=} 0.9973 \rightarrow \Delta \tilde{x} = \frac{0.9973}{2 \cdot 0.385} = 1.295.$$

Daraus ergibt sich der Prozessfähigkeitsindex zu

$$c_p = \frac{\Delta x_s}{\Delta \tilde{x}} = 1.544.$$

Der Prozessbrauchbarkeitsindex ergibt sich aus

$$c_{pk} = \frac{\Delta x_s - \Delta \tilde{x}}{\Delta \tilde{x}} = c_p \left(1 - \frac{\Delta \tilde{x}}{\Delta x_s}\right).$$

Die Abweichung des Stichprobenmittelwertes $\hat{x}$ der Verteilung von der Mitte des spezifizierten Bereiches ist

$$\Delta \hat{x} = \left| \frac{1}{2} (R_{\max} + R_{\min}) - \hat{R} \right| = |R_0 - \hat{R}| = 1.5 \Omega.$$

Damit folgt für den Prozessbrauchbarkeitsindex $c_{pk} = 0.386$

- Prozessfähigkeitsindex $c_p = 1.544 \geq 1$, d. h. die Streuung der Widerstände R ist in einem tolerierbaren Bereich.
 - Prozessbrauchbarkeitsindex $c_{pk} = 0.386 \leq 1$, d. h. der Mittelwert $\hat{R}$ weicht zu weit vom spezifizierten Messbereich ab.
- Da der c_{pk} nicht den Anforderungen genügt, ist die Prozessqualität bzw. Fertigung als schlecht zu bewerten.

Aufgabe 4: Korrelationsmesstechnik (23 Punkte)

Verwenden Sie für die Bearbeitung weder Bleistifte noch Stifte mit roter Farbe!

- a) Zeichnen Sie zu folgendem Signal $x(t)$ dessen Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ und dessen Leistungsdichte $S_{xx}(f)$! **Begründen Sie Ihre Lösung, beschriften und beziffern Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung. (4 Punkte)**

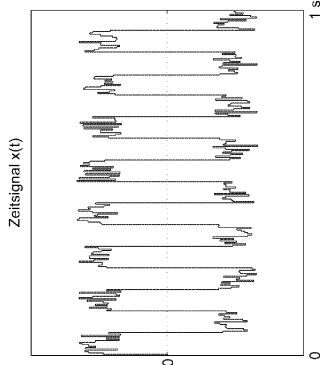


Bild 4: Signal $x(t)$; Signal a)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

- b) Zeichnen Sie zu folgender Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ deren Signal $x(t)$ im Zeitbereich und deren Leistungsdichte $S_{xx}(f)$! **Begründen Sie Ihre Lösung, beschriften und beziffern Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung. (4 Punkte)**

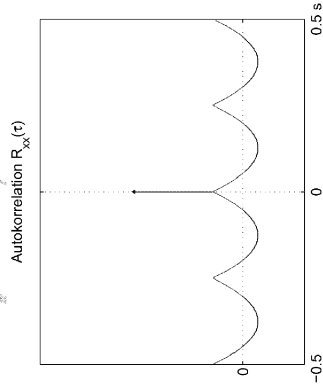


Bild 5: Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$; Signal b)

Weiter auf Seite 14

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

- c) Zeichnen Sie zu folgender Leistungsdichte $S_{xx}(f)$ deren Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ und deren Signal $x(t)$ im Zeitbereich! **Begründen Sie Ihre Lösung, beschriften und beziffern Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung. (4 Punkte)**
Hinweis: Die Leistungsdichte c) hat 2 Impulse bei $\pm 8 \text{ Hz}$.

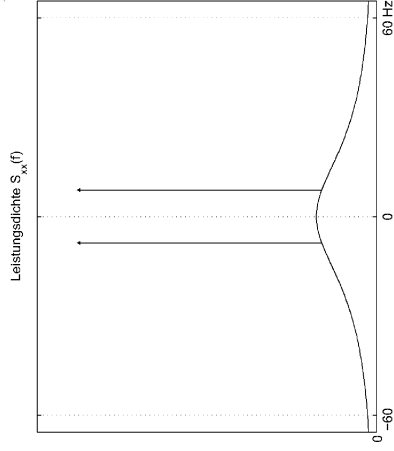


Bild 6: Leistungsdichte $S_{xx}(f)$; Signal c)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

- d) Ermitteln Sie die Leistung von weißem Rauschen! (1 Punkt)
e) Handelt es sich bei der Funktion

$$f_x(x) = \frac{1}{2\pi} x \cdot e^{-(x-\lambda)^2} \quad x, \lambda \in \mathbb{R}$$

um eine Wahrscheinlichkeitsdichte? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

Weiter auf Seite 15

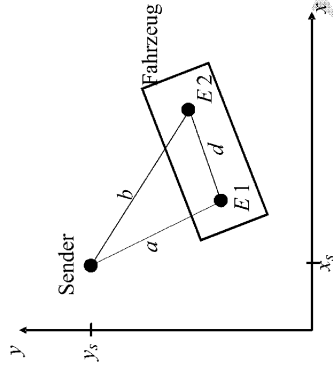


Bild 7: Fahrzeugortung

In Abb. 7 ist eine vereinfachte Anordnung zur Fahrzeugortung mittels Schall dargestellt. Der Sender an der Position (x_s, y_s) erzeugt eine harmonische Schwingung $s(t) = \sin 2\pi f t$ mit der bekannten Frequenz f . Die Wellenlänge von $s(t)$ ist größer als die größere der beiden Längen a und b . Die Ausbreitung des Schalls $s(t)$ erfolgt mit der Geschwindigkeit v_s und ohne Verluste und Dämpfung. Der Abstand d der beiden Empfänger $E1, E2$ im Fahrzeug ist bekannt.

- An den Empfängern werden ebenfalls wieder harmonische Signale empfangen. Geben Sie die empfangenen Signale $E1(t), E2(t)$ an! (2 Punkte)
- Berechnen Sie die Kreuzkorrelationsfunktionen $R_{E1s}(\tau)$ und $R_{E2s}(\tau)$ und bestimmen Sie damit die Entfernungen a und b ! (4 Punkte)
- Welches Problem tritt bei der eindeutigen Bestimmung der Fahrzeugposition auf? Wie kann diese Schwierigkeit behoben werden? (2 Punkte)

Lösung

Bemerkung: Die Leistungsdichte und die Autokorrelation von farbigem Rauschen sind im Messtechnik-Buch (Kiencke, Eger, *Messtechnik*, Springer-Verlag, 2001) auf Seite 224 abgebildet und werden in der Lösung als *Komponente 1* für Autokorrelation und *Komponente 2* für Leistungsdichte bezeichnet.

a) Signal a)

- Zeitsignal: rechteckförmig, weißes Rauschen, Frequenz: 8 Hz
- ⇒ Autokorrelation: dreieckförmig, Impuls bei $\tau = 0$, Frequenz: 8 Hz
- ⇒ Leistungsdichte: Impulse bei $\pm 8 \text{ Hz}$, $\pm 24 \text{ Hz} \dots$, Offset

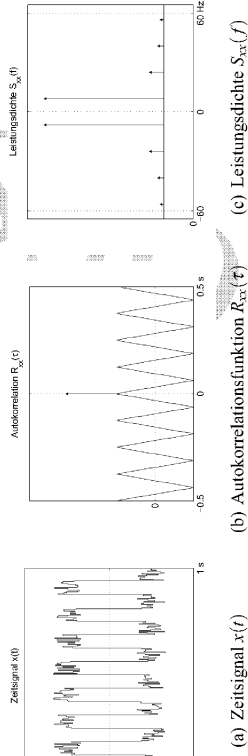


Bild 8: Signal a)

b) Signal b)

- Autokorrelation: $|x^3|$ -förmig, Impuls bei $\tau = 0$, Frequenz: 4 Hz
- ⇒ Zeitsignal: sägezahnförmig, weißes Rauschen, Frequenz: 4 Hz
- ⇒ Leistungsdichte: Impulse bei $\pm 4, \pm 8, \pm 12, \dots \text{ Hz}$, Offset

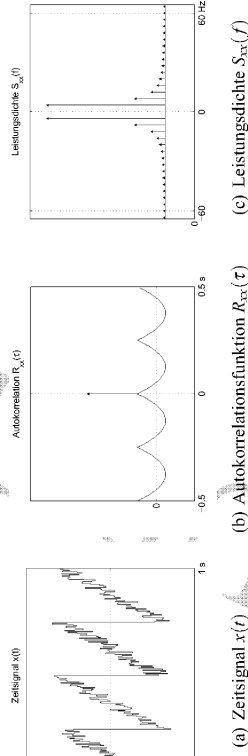


Bild 9: Signal b)

Abhilfe kann geschaffen werden, indem ein zweiter Sender z. B. im Ursprung angebracht wird und die sich daraus ergebenden Entfernungen zum Fahrzeug berechnet werden (Triangulation).

c) Signal c)

- Leistungsdichte: Impulse bei $\pm 8 \text{ Hz}$, Komponente 2
- Zeitsignal : sinusförmig, farbiges Rauschen, Frequenz: 8 Hz
- Autokorrelation : cosinusförmig, Frequenz: 8 Hz, Komponente 1

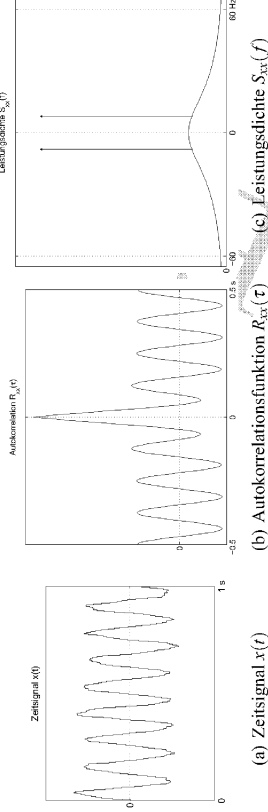


Bild 10: Signal c)

- d) Die mittlere Leistung von weißem Rauschen ist unendlich groß.
- e) Es handelt sich nicht um eine Wahrscheinlichkeitsdichte, da für $f_X(x)$ immer $f_X(x) \geq 0$ gelten muss.
- f) Empfangene Signale:

$$E1(t) = \sin \left[2\pi f \left(t - \frac{a}{v_s} \right) \right]$$

$$E2(t) = \sin \left[2\pi f \left(t - \frac{b}{v_s} \right) \right]$$

- g) Da $s(t)$, $E1(t)$ und $E2(t)$ Leistungssignale sind, ergibt sich für die Kreuzkorrelationsfunktionen

$$R_{E1s}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{\sin \left[2\pi f \left(t + \tau - \frac{a}{v_s} \right) \right] \sin(2\pi f t) dt}_{E1(t+s(\tau))} = \frac{1}{2} \cos \left[2\pi f \left(\tau - \frac{a}{v_s} \right) \right]$$

$$R_{E2s}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin \left[2\pi f \left(t + \tau - \frac{b}{v_s} \right) \right] \sin(2\pi f t) dt = \frac{1}{2} \cos \left[2\pi f \left(\tau - \frac{b}{v_s} \right) \right]$$

Die Kreuzkorrelationen werden erstmals maximal, wenn nachfolgendes gilt. Daraus lassen sich dann auch die Entfernungen a , b berechnen.

$$R_{E1s} : \tau_1 - \frac{a}{v_s} = 0 \rightarrow a = \tau_1 \cdot v_s$$

$$R_{E2s} : \tau_2 - \frac{b}{v_s} = 0 \rightarrow b = \tau_2 \cdot v_s$$

- h) Eine eindeutige Bestimmung der Position mit nur einem Sender ist nicht möglich. Es lässt sich höchstens ein Kreis mit dem Mittelpunkt x_s, y_s berechnen, auf dem sich das Fahrzeug befindet.

Aufgabe 5: Amplitudenanaloge und frequenzanaloge Signale (16 Punkte)

Die Amplituden eines Musikstückes mit einer Länge von 5 min. werde quantisiert, codiert und auf der Festplatte eines Rechners gespeichert. Die maximal zu erwartende kontinuierliche Messspannung beträgt $\pm 2.5 \text{ V}$. Spannungsänderungen im kontinuierlichen Signal von $100 \mu\text{V}$ sollen noch registriert werden können. Die höchste im Musikstück vorkommende Signalfrequenz betrage 19.5 kHz . Darüber hinaus gibt es ein überlagertes Störsignal.

- a) Worin bestehen die wesentlichen Unterschiede zwischen dem analogen Musiksignal und der quantisierten Wertefolge? (2 Punkte)
- b) Welche Abtastfrequenz (Messrate) muss der verwendete A/D-Wandler mindestens haben? Was passiert, wenn das analoge Signal ohne Vorverarbeitung abgetastet wird? Was kann man dagegen unternehmen? (3 Punkte)
- c) Für welche Auflösung (in Bit) muss der A/D-Wandler mindestens ausgelegt sein, um das angegebene Signal quantisieren zu können? (2 Punkte)

Hinweise: Überlegen Sie sich die Größe des zu quantisierenden Wertebereiches. Runden Sie das Endergebnis auf die nächst größere ganze Zahl.

- d) Wieviel Platz benötigt das digitalisierte Musikstück mindestens auf der Festplatte, wenn mit der bei Stereosignalen üblichen Frequenz von 44.1 kHz abgetastet wird? (2 Punkte)

Hinweise: $1 \text{ MB} = 1024 \text{ kB}$; $1 \text{ B} = 8 \text{ bit}$.

- e) Welcher Signal-Rauschabstand (in dB) lässt sich theoretisch mit dieser Quantisierung erreichen? (1 Punkt)

Hinweis: Verwenden Sie das lineare Quantisierungsmodell.

- f) Berechnen Sie den maximalen Abtastzeitfehler, unter der Annahme, dass dieser gleichverteilt ist! (2 Punkte)

Hinweis: Der durch den Abtastzeitfehler verursachte Amplitudenfehler soll dabei kleiner sein als das Quantisierungsrauschen.

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Die Frequenz f_m eines zu messenden Signals soll bestimmt werden. Dazu wird es in eine Anordnung (Abb. 11) eingespeist. Das Signal f_m wird verstärkt (V) und durch einen Schmitt-Trigger (ST) in ein Rechtecksignal umgewandelt. Durch die Torschaltung (T) gelangt es zum Zähler und somit zur Anzeige. Der Zähler summiert die Anzahl der positiven Flanken. Die Torschaltung wird durch das Signal mit der Frequenz f_c des Generators (G) gesteuert. Die Frequenz des Signals kann in einem Frequenzteiler (FT) um den Faktor k vermindert werden. Die Periode erstreckt sich jeweils von positiver zu positiver Flanke.

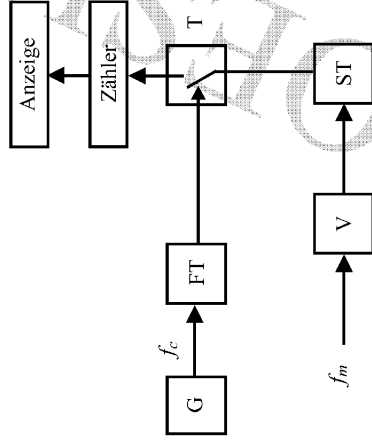


Bild 11: Anordnung zur Bestimmung einer Frequenz

- a) Um welches der beiden Verfahren handelt es sich bei Anordnung (Abb. 11), Periodendauernmessung oder Frequenzzählung? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 Punkte)
- b) Leiten Sie die Formel zur Berechnung der Signalfrequenz f_m her! (2 Punkte)

20

Lösung

- a) Unterschiede zwischen dem analogen und dem digitalen Signal:
- Zeitdiskretisierung: Das analoge Signal ist eine kontinuierliche Funktion über der Zeit, das digitalisierte liegt nur zu bestimmten Zeitpunkten vor.
 - Wertdiskretisierung: Das analoge Signal kann zu jedem Zeitpunkt alle Spannungen (hier zwischen -2.5 V und 2.5 V) annehmen, das digitalisierte nur diejenigen Spannungen darstellen, die durch eine Bitkombination am Ausgang des A/D-Wandlers beschreiben werden können.

- b) Damit das Abtasttheorem nicht verletzt wird muss die Abtastrate min. doppelt so groß sein, wie die höchste im Signal vorkommende Frequenz. In diesem Fall ist $f_a \geq 2 \cdot 19.5\text{ kHz}$. Ohne Vorverarbeitung des Signals, ist dieses im Allgemeinen nicht bandbegrenzt und das Abtasttheorem kann nicht eingehalten werden. Um dies zu vermeiden setzt man einen Anti-Aliasing-Filter ein.
- c) Die Spannung von -2.5 V bis 2.5 V muss in Schritten von $100\text{ }\mu\text{V}$ diskretisiert werden können, d. h. der A/D-Wandler muss min. $\frac{5\text{ V}}{100\text{ }\mu\text{V}} = 50000$ Stufen haben. Die dazu notwendige Auflösung ist $\log_2(50000) \approx 15.6$ Bit. Das entspricht eine Auflösung von $N = 16$ Bit.
- d) Pro Sekunde liefert der A/D-Wandler 44000 Werte, jeder mit 16 Bit codiert. Für das 5 min lange Musikstück braucht man dazu

$$\frac{44100 \frac{1}{s} \cdot 5 \text{ min} \cdot 60 \frac{s}{\text{min}} \cdot 16 \text{ Bit}}{8 \frac{\text{Bit}}{B} \cdot 1024 \frac{B}{KB} \cdot 1024 \frac{KB}{MB}} \approx 25.2 \text{ MB}$$

Festplattenspeicher.

- e) Das Eingangssignal ist ein sinusförmiges Signal, das lineare Quantisierungsmodell gilt und die Auflösung ist $N = 16$ Bit. Somit lässt sich das SNR nach folgender Formel berechnen:
- $$\text{SNR}[\text{dB}] = 10 \cdot \log \underbrace{(1.5 \cdot 2^{2N})}_{\text{SNR}_q} = 98.1 \text{ dB}$$
- f) Der Abtastzeitfehler (Jitter) ist gleichverteilt, dann gilt
- $$\text{SNR}_{\text{Jitter}} = \frac{2}{(2\pi(19.5\text{ kHz}) \frac{\tau_{\text{max}}}{\sqrt{3}})^2} \geq \text{SNR}_q$$
- folgt
- $$\tau_{\text{max}} \leq \underbrace{2\pi(19.5\text{ kHz})}_{\text{max. Signalfrequenz}} \cdot \sqrt{\frac{6}{\text{SNR}_q}} = 2.49 \cdot 10^{-10} \text{ s} = 249 \text{ ps}$$
- d. h. die reale Abtastung kann bis zu $\pm 249\text{ ps}$ von den theoretisch richtigen Abtastzeitpunkten entfernt liegen ohne das der Jitter-Fehler größer ist als das Quantisierungsrauschen.
- g) Es handelt sich um das Frequenzzählverfahren, weil das Zeittor von einer Referenz-Signalquelle angesteuert wird und f_m das Eingangssignal in das Zeittor darstellt.

21

- h) Die Öffnungszeit des Tores beträgt

$$T_T = \frac{k}{f_c}$$

n sei die Anzahl der gezählten Impulse, damit beträgt die Frequenz des zu messenden Signals

$$f_m = \frac{n}{T_T} = \frac{n \cdot f_c}{k}$$

22

Aufgabe 1: Kurvenanpassung (23 Punkte)

Zur Störgrößenkompensation eines Messprozesses wurde folgendes Kennfeld aufgenommen (siehe Abbildung 1). Die Stützstellenwerte sind in Tabelle 1 abgedruckt. u stellt die gemessene Eingangsgröße dar. z entspricht einer bekannten, messbaren Störgröße, y ist das Ergebnis der Kompensation.

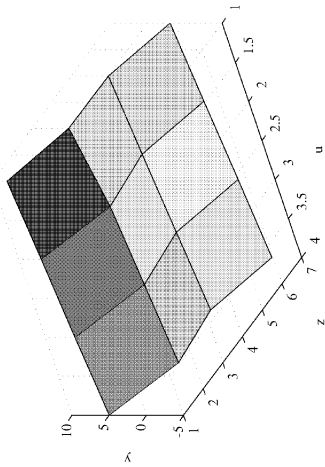


Bild 1: Kennfeld zur Störgrößenkompensation

$y(u_i, z_i)$	$u_1 = 1$	$u_2 = 2$	$u_3 = 3$	$u_4 = 4$
$z_1 = 1$	8	7	6	5
$z_2 = 3$	5	3	2	1
$z_3 = 4$	5	4	3	2
$z_4 = 5$	2	1	0	-1

Tabelle 1: Aufgezeichnete Stützstellenwerte

- a)** Die Störgröße hat bei normalen Betriebsbedingungen des Messprozesses den Wert $z_2 = 3$. Führen Sie die Interpolationsmethode nach Newton bei dieser Betriebsbedingung für die Werte $y(u_i, z_2)$ durch und geben Sie das Interpolationspolynom in der Form $\hat{y}_{N,a}(u) = p_0 + p_1 u + p_2 u^2 + p_3 u^3 + \dots + \text{an!}$ an! (6 Punkte)
- b)** Um die Kennlinien-Interpolation zu verbessern, wurde ein zusätzlicher Wert an der Stützstelle $u_5 = 1,5; y(u_5 = 1,5; z_2 = 3) = 4$ gemessen. Berechnen Sie das neue Interpolationspolynom unter Berücksichtigung dieses zusätzlichen Messwertes! Geben Sie das Interpolationspolynom in der Form $\hat{y}_{N,b}(u) = p_0 + p_1 u + p_2 u^2 + p_3 u^3 + p_4 u^4 + \dots + \text{an.}$ (3 Punkte)
- Hinweis:** Verwenden Sie dazu die rekursive Berechnungsmöglichkeit des Interpolationspolynoms.
- c)** Zur Wahl des günstigsten Messbereiches soll das in **a)** berechnete Polynom $\hat{y}_{N,a}(u)$ genauer untersucht werden. Welche beiden Ziele werden bei diesem Verfahren angestrebt? Bestimmen Sie den Endpunkt u_e des Arbeitsbereiches, wenn für den Anfangspunkt $u_a = 2$ gilt. (5 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- d)** Berechnen Sie im Bereich $u = 1 \dots 3, z = 1 \dots 4$ einen Zwischenwert durch Kennfeldinterpolation an folgender Stelle: $y_d(u_6, z_6) = y_d(1,7;1,2)$. Vernachlässigen Sie dabei die zweiten partiellen Ableitungen bzw. die entsprechenden Differenzenquotienten von $\frac{\partial^2 y(u,z)}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 y(u,z)}{\partial z^2}$ sowie die Glieder höherer Ordnung als 2. (4 Punkte)
- e)** Aufgrund höherer Anforderungen an die Interpolationsgüte dürfen die partiellen Ableitungen bzw. die entsprechenden Differenzenquotienten $\frac{\partial^2 y(u,z)}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 y(u,z)}{\partial z^2}$ nun **nicht mehr vernachlässigt** werden. Interpolieren Sie unter diesen Voraussetzungen im Bereich $u = 1 \dots 3, z = 1 \dots 4$ den folgenden Zwischenwert: $y_e(u_6, z_6) = y_e(1,7;1,2)$. (3 Punkte)
- f)** Wie groß ist der relative Fehler $F_R(u, z) = \frac{|y_d(u,z) - y_e(u,z)|}{y_e(u,z)}$ allgemein, wenn die Berechnung der Zwischenwerte im Bereich $u = 1 \dots 3, z = 1 \dots 4$ gemäß Teilaufgabe **d)** durchgeführt und auf die Berechnung $y_e(u, z)$ in Teilaufgabe **e)** bezogen wird? (2 Punkte)

Lösung

- a) Newton-Interpolationsschema

u_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
1	5			
2	3	-2		
3	2	-1	1	
4	1	-1	0	-1

Für die Koeffizienten a_i erhält man: $a_0 = 5$, $a_1 = -2$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = -\frac{1}{6}$.

Damit erhält man:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{N,4}(u) &= 5 - 2(u-1) + \frac{1}{2}(u-1)(u-2) - \frac{1}{6}(u-1)(u-2)(u-3) \\ &= -\frac{u^3}{6} + \frac{3}{2}u^2 - \frac{16}{3}u + 9 = -0,167u^3 + 1,5u^2 - 5,33u + 9\end{aligned}$$

- b) Rekursive Berechnung der Koeffizienten
-
- Stützstelle
- $u_5 = 1,5$
- :

$$\begin{aligned}\hat{y}_{N,5}(u_5) &= a_4 \cdot (u_5 - u_1)(u_5 - u_2)(u_5 - u_3)(u_5 - u_4) + \hat{y}_{N,4}(u_5) \\ 4 &= a_4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} \cdot \frac{-5}{2} + \frac{61}{3} \\ &\rightarrow a_4 = -\frac{2}{10} = -0,2 \\ &\rightarrow \hat{y}_{N,5}(u) = -\frac{2}{10}u^4 + \frac{11}{6}u^3 - \frac{11}{2}u^2 + \frac{14}{3}u - \frac{21}{5} \\ \hat{y}_{N,5}(u) &= -0,2u^4 + 1,833u^3 - 5,5u^2 + 4,667u - 4,2\end{aligned}$$

- c) Die Ziele die hierbei verfolgt werden sind: möglichst linearer Arbeitsbereich bei größt möglicher Empfindlichkeit.
-
- Für die Wahl des günstigsten Messbereiches wird überprüft, ob die Kennlinie ein Wendepunkt im betrachteten Intervall hat oder nicht.

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{y}_{N,5}(u)}{du} &= -\frac{u^2}{2} + 3u - \frac{16}{3} \\ \frac{d^2\hat{y}_{N,5}(u)}{du^2} &= -u + 3 \\ \frac{d^3\hat{y}_{N,5}(u)}{du^3} &= -1\end{aligned}$$

Aus

$$\frac{d^2\hat{y}_{N,5}(u)}{du^2} = 0$$

folgt $u_W = 3$, d. h. es ist ein Wendepunkt vorhanden.

Daher ist folgende Bedingung zu erfüllen (Kiencke, Eger, Messtechnik, 6. Auflage, Seite 53):

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{y}_{N,5}(u_a)}{du} &\stackrel{!}{=} \frac{d\hat{y}_{N,5}(u_a+d)}{du} \\ -\frac{1}{2}(u_a+d)^2 + 3(u_a+d) - \frac{16}{3} &= -\frac{u_a^2}{2} + 3u_a - \frac{16}{3} \\ 0 &= -\frac{d^2}{2} + d.\end{aligned}$$

Für die Intervalllänge ergibt sich $d_1 = 0$ und $d_2 = 2$. d_1 stellt in diesem Zusammenhang keine sinnvolle Lösung dar.

Der Endpunkt des Arbeitsbereiches ergibt sich zu: $u_e = u_a + d = 2 + 2 = 4$.

- d) Aus der Taylorentwicklung erhält man:

$$\begin{aligned}y_d(u, z) &= y(u_1 + \Delta u; z_1 + \Delta z) \\ &\approx y(u_1; z_1) + \frac{y(u_2; z_1) - y(u_1; z_1)}{u_2 - u_1} \cdot \Delta u + \frac{y(u_1; z_2) - y(u_1; z_1)}{z_2 - z_1} \cdot \Delta z + \dots \\ &\quad + \frac{y(u_2; z_2) - y(u_1; z_2) - y(u_2; z_1) + y(u_1; z_1)}{(u_2 - u_1)(z_2 - z_1)} \cdot \Delta u \Delta z \\ &= 8 - \Delta u - \frac{3}{2}\Delta z - \frac{1}{2}\Delta u \Delta z\end{aligned}$$

Mit $\Delta u = 0,7$ und $\Delta z = 0,2$ erhält man $y(u_6, z_6) = y(u_1 + \Delta u; z_1 + \Delta z) = 6,93$

- e) Für die zweiten partiellen Ableitung ergibt sich:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y(u, z)}{\partial u^2} &\approx \frac{y(u_3; z_1) - 2y(u_2; z_1) + y(u_1; z_1)}{2(u_2 - u_1)^2} \cdot (\Delta u)^2 \\ &= \frac{6 - 2 \cdot 7 + 8}{2} \cdot (\Delta u)^2 = 0\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y(u, z)}{\partial z^2} &\approx \frac{y(u_1; z_3) - 2y(u_1; z_2) + y(u_1; z_1)}{2(z_2 - z_1)^2} \cdot (\Delta z)^2 \\ &= \frac{5 - 2 \cdot 5 + 8}{8} \cdot (\Delta z)^2 = \frac{3}{8}(\Delta z)^2\end{aligned}$$

Damit ergibt sich $y(u_6, z_6) = y(u_1 + \Delta u; z_1 + \Delta z) = 8 - \Delta u - \frac{3}{2}\Delta z - \frac{1}{2}\Delta u \Delta z + \frac{3}{8}(\Delta z)^2 = 6,945$

- f) Der relative Fehler ergibt sich allgemein zu:

$$F_R(u, z) := \left| \frac{y_d(u, z) - y_e(u, z)}{y_e(u, z)} \right| = \left| \frac{\frac{3}{8}(\Delta z)^2}{8 - \Delta u - \frac{3}{2}\Delta z - \frac{1}{2}\Delta u \Delta z + \frac{3}{8}(\Delta z)^2} \right|$$

Aufgabe 2: Stationäres Verhalten von Messsystemen (17 Punkte)

Gegeben seien Bauelemente mit der Kennlinie:

$$y(\Delta u) = e^{u_0} e^{\Delta u}.$$

Durch Parallelschalten und Differenzbildung gleicher Bauelemente soll die Kennlinie um den Arbeitspunkt u_0 linearisiert werden. **Hinweis:** Beachten Sie, dass $u = u_0 + \Delta u$ gilt.

- Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild für die Differenzmethode. (2 Punkte)
- Geben Sie die resultierende Kennlinie der in **a**) gezeichneten Schaltung $y_{D,h}$ an. (4 Punkte)
- Bestimmen Sie den relativen Fehler der Differenzkennlinie $F_{D,h} = \frac{1}{6} \frac{S''}{S'} (\Delta u)^2$. Warum ist im Arbeitspunkt dieser relative Fehler Null? (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- Erläutern Sie den Unterschied zwischen Hysterese und Umkehrspanne hinsichtlich der Ursachen und der Bestimmung der jeweiligen Werte. (4 Punkte)
- Begründen Sie rechnerisch, warum superponierende Störgrößen mit einer Gegenkopplung **nicht** kompensiert werden können. Die superponierende Störgröße wirkt dabei direkt auf die Messgröße bevor diese vom Messgerät erfasst wird. Skizzieren Sie zuerst eine Schaltung, die die Zusammenhänge darstellt. (5 Punkte)

Lösung

- In Abbildung 2 ist die Differenzmethode abgebildet.

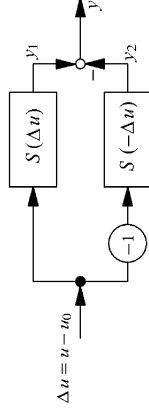


Bild 2: Parallelschaltung zweier Bauteile: Differenzmethode

- Mit $y(\Delta u) = e^{u_0} e^{\Delta u}$ und e^{u_0} als einen konstanten Faktor erhält man:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{u_0} e^{\Delta u} \\ y_2 &= e^{u_0} e^{-\Delta u} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich mit $y_{D,h} = y_1 - y_2$:

$$y_{D,h}(\Delta u) = e^{u_0} \frac{2}{2} (e^{\Delta u} - e^{-\Delta u}) = 2e^{u_0} \sinh(\Delta u)$$

- Nach *Kiencke, Eger: Messtechnik. 6. Auflage, Springer Verlag* ist die ideale Empfindlichkeit $S_i = S'(u_0, z_0) = e^{u_0}$. Die zweite Ableitung der Empfindlichkeit an der Stelle u_0 ist ebenfalls $S''(u_0) = e^{u_0}$, so dass sich für den relativen Fehler

$$F_{D,h} = \frac{1}{6} \frac{S''}{S'} (\Delta u)^2 = \frac{1}{6} \frac{e^{u_0}}{e^{u_0}} (\Delta u)^2 = \frac{1}{6} (\Delta u)^2$$

ergibt. Der relative Fehler im Arbeitspunkt verschwindet, da $\Delta u = u - u_0$ Null wird und damit ebenfalls $F_{D,h}$.

- Bestimmung der Größen**

Zur Bestimmung der Hysterese wird die Messgröße langsam vom Messanfang zum Messende gesteigert und danach wieder langsam zurückgenommen. Die dabei auftretende größte Differenz zwischen den richtungsabhängigen Kennlinien wird auf den Messbereich bezogen.

Zur Bestimmung der Umkehrspanne wird die Messgröße nur um wenige Prozent geändert. Der größte Fehler zwischen Auf- und Abwärtsgang wird auf den Messbereich bezogen.

Ursachen

Die Hysterese wird durch innere Störgrößen, z. B. elastische Nachwirkung von Messfedern, bzw. langsam veränderliche Veränderungen im Messgerät (z. B. Alterung) hervorgerufen.

Die Umkehrspanne entsteht aufgrund von Hemmungen, z. B. mechanische Reibung und Lose.

- In Abbildung 3 ist die Gegenkopplung mit superponierender Störgröße dargestellt.

Hieraus kann

$$y = v \cdot S_i \cdot V \rightarrow v = \frac{y}{S_i V}$$

und

$$v = z + u - K(y)$$

bestimmt werden und es ergibt sich

$$\frac{y}{S_i V} = z + u - K(y) \rightarrow K(y) = z + u - \frac{y}{S_i V}$$

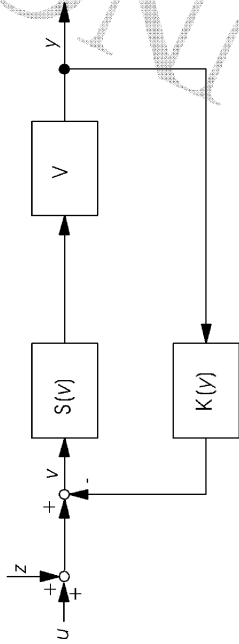


Bild 3: Superponierende Störgröße bei Gegenkopplung

für $V \gg 1$ erhält man

$$y = K^{-1}(z + u)$$

Die superponierende Störgröße bleibt erhalten und kann demnach durch Gegenkopplung nicht kompensiert werden.

Aufgabe 3: Statistik (23 Punkte)

Ein Hersteller eines Messsystems gibt in einem Prospekt für seinen Spannungssensor folgende Dichtefunktion zur Beschreibung der additiv überlagerten, statistischen Messabweichung b an:

$$f_b(b) = \begin{cases} a \cdot (-b^2 + 1) & \text{für } -1 < b < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das heißt die statistische Abweichung des jeweiligen Messwertes x_i zum wahren Wert x_{iP} sei durch die Funktion $f_b(b)$ beschrieben.

- a) Bestimmen Sie den Wert a in der Formel von $f_b(b)$, so dass es sich bei $f_b(b)$ tatsächlich um eine Wahrscheinlichkeitsdichte-Funktion handelt. Welche Voraussetzung müssen dafür noch erfüllt sein? Sind diese für $f_b(b)$ erfüllbar? Begründen Sie Ihre Antwort! (3 Punkte)
- b) Bestimmen Sie die Standardabweichung σ_b des Sensors basierend auf der in a) bestimmten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion. (3 Punkte)

Nun sollen Sie prüfen, ob die Angaben des Herstellers plausibel sind. Hierzu wird folgende Messreihe angefertigt (s. Tabelle 2):

Versuch Nr. i	1	2	3	4	5
Messwert x_i [V]	-0,5	-0,6	-0,4	-0,3	-0,6

Tabelle 2: Aufgezeichnete Messwerte

- c) Berechnen Sie den Stichprobenmittelwert $\hat{x}$ und die Stichprobenvarianz S_x^2 aus den Werten von Tabelle 2 und geben Sie Ihren Lösungsweg an. (3 Punkte)
- d) Entscheiden Sie dann, ob die Angaben des Herstellers bzgl. der Standardabweichung (aus b)) zutreffend sein können. Verwenden Sie dafür eine t-Verteilung (s. Tabelle 3) und eine statistischen Sicherheit von $P = 99\%$. Begründen Sie Ihr Vorgehen. (4 Punkte)

Freiheitsgrade f	Statistische Sicherheit $P = 1 - \alpha$				
	0,90	0,95	0,99		
1	6,314	12,71	63,6		
2	2,92	4,303	9,925		
3	2,353	3,182	5,841		
4	2,132	2,76	4,604		
5	2,015	2,571	4,032		
6	1,943	2,47	3,707		
7	1,895	2,365	3,49		
8	1,86	2,306	3,35		
9	1,83	2,262	3,25		
10	1,812	2,28	3,169		

Tabelle 3: Quantile der t-Verteilung: $t_{1-\alpha;f}$

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- e) Überprüfen Sie mittels des χ^2 -Tests, ob folgende Werteverteilung (Tabelle 4)

Index	1	2	3	4
Bereich	$-1 \dots -0,5$	$-0,5 \dots 0$	$0 \dots 0,5$	$0,5 \dots 1$
Anzahl Werte	8	15	13	6

Tabelle 4: Werteverteilung

die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f_X(x) = \frac{3}{4} (1 - x^2) \text{ für } |x| \leq 1$$

bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ repräsentiert. (5 Punkte)

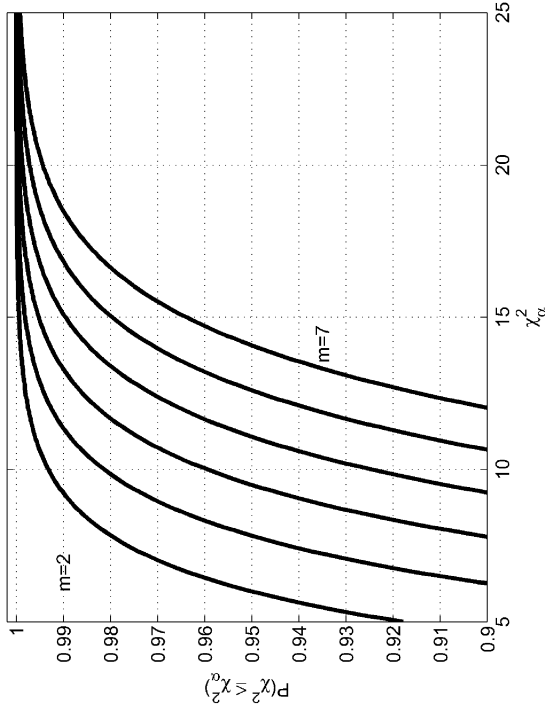


Bild 4: Wahrscheinlichkeiten von $\chi^2 \leq \chi^2_\alpha$ bei m Freiheitsgraden

Weiter auf Seite 11

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Es sollen die Zufallsvariablen x und y mit der Verbundwahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$p_{xy}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{16} \cdot (x+1) \cdot y & \text{für } (-1 \leq x \leq 1) \text{ und } (0 \leq y \leq 4) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

betrachtet werden.

- f) Bestimmen Sie die Randdichtefunktionen $p_x(x)$ und $p_y(y)$ und geben Sie die Gültigkeitsbereiche an. (3 Punkte)
- g) Sind die Zufallsvariablen x und y statistisch abhängig? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

Lösung

a) Bei $f_b(b)$ handelt es sich um eine Wahrscheinlichkeitsdichte, wenn

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} f_b(b) db \stackrel{!}{=} 1$$

$$2. f_b(b) \geq 0$$

erfüllt werden kann.

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} f_b(b) db \stackrel{!}{=} 1:$$

$$\int_{-1}^1 a(-b^2 - 1) db = \left[a \left(-\frac{1}{3}b^3 + b \right) \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}a = 1 \quad \rightarrow \quad a = \frac{3}{4}$$

2. $f_b(b) \geq 0$ ist für alle $a > 0$ erfüllt.

Mit $a = 0,75$ ist $f_b(b)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte, da beide Bedingungen erfüllt sind.

b) Für die Berechnung der Standardabweichung σ_b , ist es erforderlich den Mittelwert μ_b zu berechnen. Dieser ergibt sich zu

$$\mu_b = \int_{-\infty}^{\infty} b \cdot f_b(b) db = \int_{-1}^1 \frac{3}{4}(-b^3 + b) db = \frac{3}{4} \left[-\frac{1}{4}b^4 + \frac{1}{2}b^2 \right]_{-1}^1 = 0.$$

Die Varianz σ_b^2 berechnet sich zu

$$\sigma_b^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (b - \mu_b)^2 \cdot f_b(b) db = \int_{-1}^1 \frac{3}{4}(-b^4 + b^2) db = \frac{3}{4} \left[-\frac{1}{5}b^5 + \frac{1}{3}b^3 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{5} = 0,2$$

Die Standardabweichung ergibt $\sigma_b = \sqrt{0,2} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,447$.

c) Der Mittelwert wird wie folgt berechnet:

$$\bar{x} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i = -0,48V$$

Für die Stichprobenvarianz S_x^2 ergibt sich:

$$\begin{aligned} S_x^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{n}{n-1} \bar{x}^2 = \frac{1}{4} 1,22 - \frac{5}{4} 0,48^2 = 0,017 \\ &\rightarrow S_x = 0,1304 \end{aligned}$$

d) Die Unsicherheit des Stichprobenmittelwertes ist

$$u_x = t_{1-\alpha/2, 99; f=5} \cdot \frac{S_x}{\sqrt{N}} = 4,032 \cdot \frac{0,1304}{\sqrt{5}} = 0,2351$$

Die berechnete Unsicherheit des Stichprobenmittelwertes bzw. das Vertrauensintervall u_x ist deutlich kleiner als die vom Hersteller angegebene, mögliche Abweichung $\sigma_5 = 0,447$. Deshalb lassen sich mit 99%-iger Sicherheit die Angaben des Herstellers bestätigen.

e) χ^2 -Test

- Alle notwendigen Voraussetzungen sind erfüllt
- Nullhypothese H_0 : „Häufigkeitsverteilung entspricht der Wahrscheinlichkeitsdichte $f_x(x)$ “
- statistische Sicherheit $P = 1 - \alpha = 0,95$
- Freiheitsgrade m bei $k = 4$ Klassen: $m = k - 1 = 3$
- Aus Diagramm 4 erhält man $\chi_{\alpha}^2 \approx 7,6 \dots 8$

Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Klassen werden wie folgt ermittelt:

$$p_1 = \int_{-1}^{-0,5} \frac{3}{4}(1-x^2) dx = \frac{3}{4} \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^{-0,5} = \frac{5}{32} \approx 0,156$$

$$p_2 = \int_{-0,5}^0 \frac{3}{4}(1-x^2) dx = \frac{3}{4} \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-0,5}^0 = \frac{11}{32} \approx 0,344$$

$$p_3 = p_2$$

$$p_4 = p_1$$

Es ergibt sich Tabelle 5 für den χ^2 -Test.

Klasse	1	2	3	4	Σ
n_i	8	15	13	6	42
p_i	0,156	0,344	0,344	0,156	1
$n \cdot p_i$	6,552	14,438	14,438	6,552	-
$\frac{(n_i - n p_i)^2}{n p_i}$	0,32	0,0219	0,143	0,0465	0,531

Tabelle 5: χ^2 -Berechnung

Die Nullhypothese H_0 wird angenommen, da $\chi^2 = \frac{(n_i - n p_i)^2}{n p_i} = 0,531 < \chi_{\alpha}^2 \approx 7,8$.

f) Die Randdichten werden wie folgt berechnet:

$$p_x = \int_{-\infty}^{\infty} p_{xy} dy = \int_{y=0}^{y=4} \frac{1}{16}(x+1)y dy = \frac{1}{2}(x+1) \quad \text{für } |x| \leq 1$$

und

$$p_y = \int_{-\infty}^{\infty} p_{xy} dx = \int_{x=-1}^{x=1} \frac{1}{16}(x+1)y dx = \frac{1}{8}y \quad \text{für } 0 \leq y \leq 4$$

g) Für statistische Unabhängigkeit muss $p_x \cdot p_y \stackrel{!}{=} p_{xy}$ gelten.

$$p_x \cdot p_y = \frac{(x+1)}{2} \cdot \frac{y}{8} = \frac{1}{16}(x+1)y = p_{xy}$$

Damit ist gezeigt, dass p_x und p_y statistisch unabhängig sind.

Aufgabe 4: Korrelationsmesstechnik (24 Punkte)

Verwenden Sie für die Bearbeitung weder Bleistifte noch Stifte mit roter Farbe!

- a) Zeichnen Sie zu folgendem Signal $x(t)$ dessen Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ und dessen Leistungsdichte $S_{xx}(f)$! Begründen Sie Ihre Lösung, beschriften und bezeichnen Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung. (4 Punkte)

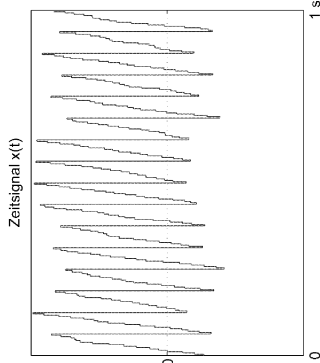


Bild 5: Signal $x(t)$; Signal a)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

- b) Zeichnen Sie zu folgender Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ deren Signal $x(t)$ im Zeitbereich und deren Leistungsdichte $S_{xx}(f)$! Begründen Sie Ihre Lösung, beschriften und bezeichnen Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung. (4 Punkte)

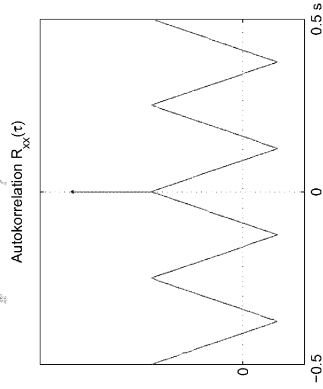


Bild 6: Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$; Signal b)

Weiter auf Seite 16

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

- c) Zeichnen Sie zu folgender Leistungsdichte $S_{xx}(f)$ deren Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ und deren Signal $x(t)$ im Zeitbereich! Begründen Sie Ihre Lösung, beschriften und bezeichnen Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung. (4 Punkte)
Hinweis: Die Leistungsdichte c) hat 2 Impulse bei $\pm 4 \text{ Hz}$.

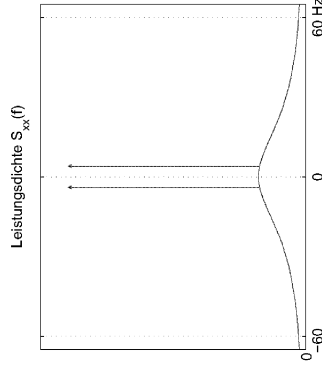


Bild 7: Leistungsdichte $S_{xx}(f)$; Signal c)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

Abbildung 8 zeigt einen Schwingkreis mit einer Spule L , einem Wirkwiderstand R und einer dazu parallel geschalteten Kapazität C . Der Widerstand R weist thermisches Rauschen auf.

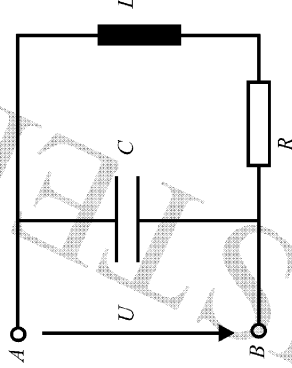


Bild 8: Schaltung eines Schwingkreises

- d) Berechnen Sie das Rauschleistungsspektrum $S_{UU}(f)$ an den Klemmen A und B.
Hinweis: Der Widerstand R kann durch einen idealen Widerstand und eine Rauschspannungsquelle ersetzt werden. Die Rauschspannung besitzt eine Leistungsdichte von $S_{U_T U_T} = 4kT \cdot R$. k entspricht der Boltzmann-Konstante und T die Temperatur. (5 Punkte)
- e) Handelt es sich bei $S_{UU}(f)$ um farbiges oder weißes Rauschen? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

Weiter auf Seite 17

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

Ein Messsignal $x(t)$ habe die Leistungsdichte $S_{xx}(f) = \frac{1}{\epsilon - 2\pi f}$. Diesem Signal ist farbiges Rauschen $n(t)$ mit der Leistungsdichte $S_{nn}(f) = \frac{ab}{h + (2\pi f)^2}$ überlagert. Die Signale seien unkorreliert. Gesucht ist ein Filter, mit dem das Rauschen **optimal** unterdrückt werden kann.

- Welche Art von Filter kann die Forderung nach optimaler Rauschunterdrückung erfüllen? (1 Punkt)
- Skizzieren Sie das System, welches die Forderung nach optimaler Rauschunterdrückung erfüllt. (2 Punkte)
- Berechnen Sie mit obigen Werten die Übertragungsfunktion für das Filter. (2 Punkte)

Lösung

Bemerkung: Die Leistungsdichte und die Autokorrelation von farbigem Rauschen sind im Messtechnik-Buch (Kiencke, Eger, *Messtechnik*, 6. Auflage, Springer-Verlag, 2005) auf Seite 224 abgebildet und werden in der Lösung als *Komponente 1* für Autokorrelation und *Komponente 2* für Leistungsdichte bezeichnet.

a) Signal a)

- Zeitsignal: sägezahnförmig, farbiges Rauschen, Offset 4, Frequenz: 16 Hz
- Autokorrelation: $|x^3|$ -förmig, Komponente 1, Offset A^2 , Frequenz: 16 Hz
- Leistungsdichte: Impulse bei $\pm 16 \text{ Hz}$, $\pm 32 \text{ Hz} \dots$, Komponente 2, Impuls bei $f = 0$

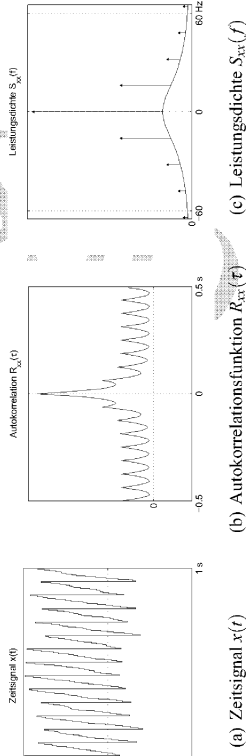


Bild 9: Signal a)

b) Signal b)

- Autokorrelation: dreieckförmig, Impuls bei $\tau = 0$, Offset A^2 , Frequenz: 4 Hz
- Zeitsignal: rechteckförmig, weißes Rauschen, Offset 4, Frequenz: 4 Hz
- Leistungsdichte: Impulse bei $\pm 4, \pm 12, \dots \text{ Hz}$, Offset, Impuls bei $f = 0$

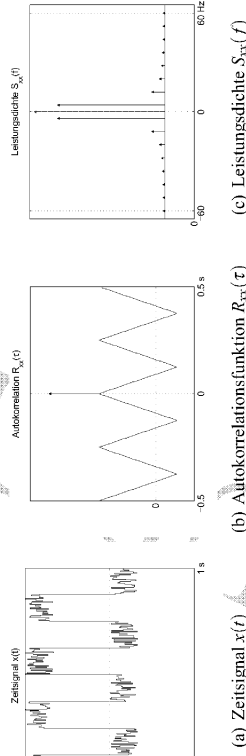


Bild 10: Signal b)

c) Signal c)

- Leistungsdichte: Impulse bei $\pm 4\text{ Hz}$, Komponente 2
- $\Rightarrow$ Zeitsignal : sinusförmig, farbiges Rauschen, Frequenz: 4 Hz
- $\Rightarrow$ Autokorrelation : cosinusförmig, Frequenz: 4 Hz, Komponente 1

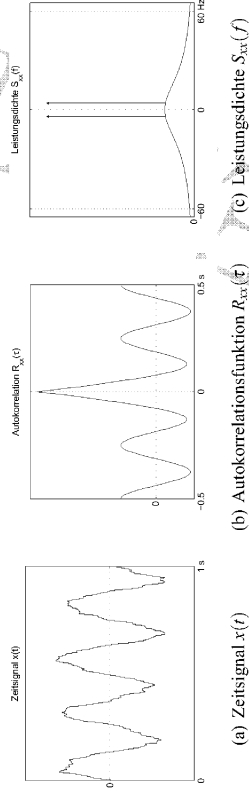


Bild 11: Signal c)

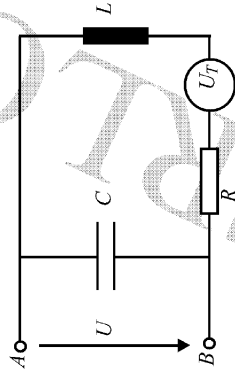
d) Laut Hinweis kann der Widerstand R ersetzt werden, s. Abbildung 12.

Bild 12: Schaltung eines Schwingkreises

Hiermit kann die Übertragungsfunktion des Systems bestimmt werden:

$$G(f) = \frac{U_L}{U_i} = \frac{1}{R + j2\pi fL}$$

Mit dem Betragsquadrat von $G(f)$ und der aus dem Hinweis bekannten Leistungsdichte erhält man

$$S_{UU}(f) = |G(f)|^2 \cdot S_{U_i U_i}(f) = \frac{1}{(1 - (2\pi f)^2 CL)^2 + (2\pi fCR)^2} \cdot 4kTR$$

- e) Bei $S_{UU}(f)$ handelt es sich um farbiges Rauschen, da das Leistungsdichtespektrum nicht über den gesamten Frequenzbereich konstant ist. Außerdem fällt das Spektrum für hohe Frequenzen gegen Null ab, d. h. $G(f)$ besitzt eine Tiefpasscharakteristik.
- f) Mit einem Schätzfilter (Optimalfilter, Wienerfilter) kann Rauschen optimal unterdrückt werden.
- g) In Abbildung 13 ist ein System zur Rauschunterdrückung dargestellt.

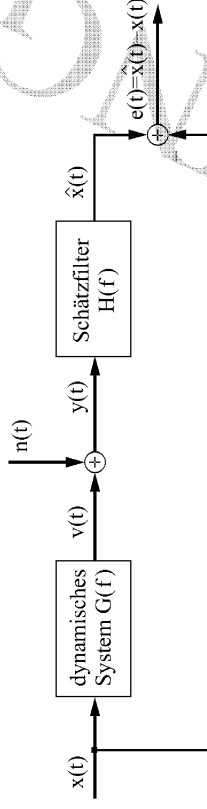


Bild 13: System zur Rauschunterdrückung mittels Schätzfilter

- h) Da keine Verzerrungen durch ein LTI-System vorliegen und es sich um eine reine Rauschunterdrückung handelt, gilt: $G(f) = 1$. Für die Übertragungsfunktion des Wienerfilters gilt: $H(f) = \frac{S_{xy}}{S_{yy}}$. Die beiden Leistungsdichten berechnen sich nach:

$$S_{xy} = S_{xx} \cdot \underbrace{G(f)^*}_{=1}$$

und

$$S_{yy} = S_{xx} \underbrace{|G(f)|^2}_{=1} + S_{nn}$$

Damit ist die Übertragungsfunktion $H(f)$

$$\begin{aligned} H(f) &= \frac{S_{xy}}{S_{xx} + S_{nn}} = \frac{1}{1 + \frac{S_{nn}}{S_{xx}}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{ab(c + 2\pi f)}{a + (2\pi f)^2}} \end{aligned}$$

Aufgabe 5: Amplitudenanaloge und frequenzanaloge Signale (13 Punkte)

In der Messtechnik werden sehr häufig Dual-Slope AD-Wandler mit vorgeschaltetem Abtast-Halteglied (Sample & Hold) eingesetzt. Die Sample & Hold-Stufe tastet dabei einen Signalwert ab und übergibt ihn an den Wiedereingang für die Umsetzdauer des AD-Wandlers, so dass sich sein Eingangssignal während der Umsetzdauer nicht ändert. Zur Messung niederfrequenter Signale soll nun aus Kostengründen das Abtast-Halteglied entfallen. Dadurch liegt das zu messende Signal $u(t)$ direkt am Eingang des AD-Wandlers an. Im Vergleich zu einem Wandler mit idealem Abtast-Halteglied entsteht so ein Fehler:

- a) Erläutern Sie kurz, warum es beim Weglassen des Abtast-Halteglieds zu einem Fehler kommt. (2 Punkte)

Als Eingangssignal $u(t)$ werde nun eine konstante Spannung mit überlagerter Sinusschwingung betrachtet:

$$u(t) = u_0 + \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$$

Die Periodendauer T der Schwingung sei dabei sehr viel größer als die Wandlerzeitkonstante T_{ref} des AD-Wandlers, $T_{ref} \ll T$.

- b) Zu welchen Zeitpunkten t wird der Fehler zwischen wahrem Signal und Wandlersignal am größten? Das Wandlersignal sei hierbei der wahren Signalamplitude zu Beginn der Wandlung zugeordnet. (5 Punkte)

Hinweis: Es sollen keine Quantisierungseffekte betrachtet werden! Verwenden Sie zur Bestimmung der Stelle maximalen Fehlers t als Näherung folgende Beziehungen:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\sin\left(\frac{2\pi T_{ref}}{T}\right) \approx \frac{2\pi T_{ref}}{T}, \quad \left|\frac{2\pi T_{ref}}{T}\right| \ll 1$$

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Die Frequenz f_m eines zu messenden Signals wird mit der Anordnung (Abb. 14) bestimmt. Dazu wird das Signal mit der Frequenz f_m verstärkt (V) und durch einen Schmitt-Trigger (ST) in ein Rechtecksignal umgewandelt. Durch die Torschaltung (T) gelangt es zum Zähler und somit zur Anzeige. Der Zähler summiert die Anzahl der positiven Flanken des Signals.

Die Torschaltung wird durch das Referenzsignal mit der Frequenz f_c des Generators (G) gesteuert. Die Frequenz f_c kann in einem Frequenzteiler (FT) um den Faktor k vermindert werden. Die Periode erstreckt sich jeweils von positiver zu positiver Flanke.

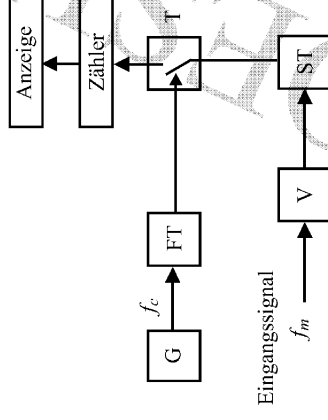


Bild 14: Anordnung zur Bestimmung einer Frequenz

- c) Mit der Anordnung in Abbildung 14 wird die Frequenz nach dem *Frequenzzähl*-Verfahren ermittelt. Was ändert sich in obiger Anordnung, wenn mit der Periodendauermessung statt mit Frequenzzählung die Frequenz bestimmt werden soll? Skizzieren Sie die neue Anordnung. (3 Punkte)
- d) Leiten Sie die Formel zur Berechnung der Signalfrequenz f_m für Periodendauermessung mit der neuen Anordnung her. (3 Punkte)

Lösung

- a) Der Fehler entsteht durch eine endliche Abtastzeit T_{ref} größer Null. Beim verwendeten Dual-Slope Wandler wird das Eingangssignal während der Wandlungszeit integriert. Dies kommt einer Mittelwertbildung gleich. Bei dynamisch veränderlichem Eingangssignal ohne Sample & Hold-Schaltung führt diese Mittelwertbildung zu Fehlern, da der eigentlich zu wandelnde Wert sich während der Wandlungszeit ändert.
- b) Für das Signal nach der Mittelung zu Beginn der Wandlung und bei wahren Signal $u(t)$ gilt:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{1}{T_{ref}} \int_t^{t+T_{ref}} u(\tau) d\tau \\
 &= \frac{1}{T_{ref}} \int_t^{t+T_{ref}} \left[u_0 + \sin\left(2\pi \frac{\tau}{T}\right) \right] d\tau \\
 &= u_0 - \frac{1}{T_{ref}} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi(t+T_{ref})}{T}\right) - \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right]
 \end{aligned}$$

Der Fehler $e(t)$ beträgt

$$\begin{aligned}
 e(t) &= u(t) - y(t) \\
 &= \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) + \frac{1}{T_{ref}} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi(t+T_{ref})}{T}\right) - \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right]
 \end{aligned}$$

Das Maximum des Betrages des Fehlers findet man durch Extremwertbildung:

$$\frac{de(t)}{dt} = \frac{2\pi}{T} \cdot \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) - \frac{1}{T_{ref}} \cdot \left[\sin\left(\frac{2\pi(t+T_{ref})}{T}\right) - \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right]$$

Mit der angegebenen Beziehungen und Näherungen erhält man so:

$$\begin{aligned}
 \sin\left(\frac{2\pi(t+T_{ref})}{T}\right) &= \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi T_{ref}}{T}\right) + \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi T_{ref}}{T}\right) \\
 &\approx \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi T_{ref}}{T}\right) + \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \cdot \frac{2\pi T_{ref}}{T} \\
 &\Rightarrow \frac{de(t)}{dt} \approx \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi T_{ref}}{T}\right) \right] \stackrel{!}{=} 0
 \end{aligned}$$

Extremwerte des Fehlers $e(t)$ ergeben sich zu: $t = k \cdot \frac{T}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

- c) In Abbildung 15 ist Anordnung zur Frequenzbestimmung mittels Periodendauer dargestellt.
- d) Die Öffnungszeit des Tors beträgt

$$T_T = \frac{1}{f_m}$$

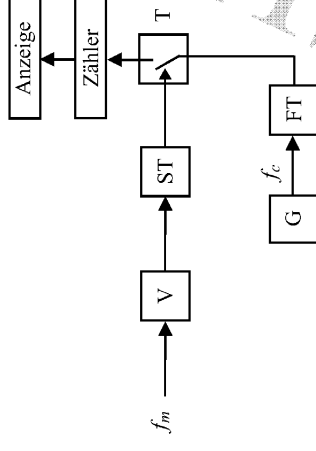


Bild 15: Anordnung zur Bestimmung einer Frequenz

n sei die Anzahl der gezählten Impulse, die im Abstand von $T_c \equiv \frac{k}{f_c}$ in den Zähler einlaufen. Damit beträgt die Frequenz des zu messenden Signals

$$\begin{aligned}
 T_c \cdot n &= T_T \\
 \frac{k}{f_c} \cdot n &= \frac{1}{f_m} \\
 f_m &= \frac{f_c}{kn}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 1: Kurvenanpassung (21 Punkte)
Geräte zur Luftdruckmessung, so genannte Barometer, werden nicht nur für meteorologische Zwecke benutzt, sondern auch für kommerzielle, elektronische Höhenmesser (Altimeter) verwendet. Zur Erstellung einer Kennlinie wurden mehrere Referenzwerte ermittelt (s. Tabelle 1).

Index	0	1	2
h in m	10	200	600
$p(h)$ in hPa	1012	989	943

Tabelle 1: Aufgezeichnete Stützstellenwerte

- a)** Führen Sie die Interpolationsmethode nach Lagrange durch und geben Sie das Interpolationspolynom in der Form $\hat{p}_{L,a}(h) = a_0 + a_1h + a_2h^2 + \dots$ an! (5 Punkte)
- b)** Um die Kennlinien-Interpolation zu verbessern, wird ein zusätzlicher Wert an der Stützstelle $h_3 = 350$ ermittelt: $p(h_3) = 972$. Berechnen Sie das neue Interpolationspolynom unter Berücksichtigung dieser Messwerte! Geben Sie das Interpolationspolynom in der Form $\hat{p}_{N,b}(h) = a_0 + a_1h + a_2h^2 + a_3h^3 + \dots$ an. (4 Punkte)

Hinweis: Beachten Sie den rekursiven Aufbau der Newton-Interpolation.

- c)** Bestimmen Sie die ideale Kennlinie $p_i(h)$ mit Hilfe der Werte aus Tabelle 1. (2 Punkte)

- d)** Die standardisierte internationale Höhenformel

$$p_{im}(h)/hPa = 1013,25 \left(1 - \frac{0,0065 \frac{K}{m} \cdot h}{288,15 K} \right)^{5,255} \quad (1)$$

erlaubt die Berechnung des Luftdrucks auf einer gegebenen Höhe bzw. bei gemessenem Luftdruck die Berechnung der Höhe. Linearisieren Sie Gleichung (1) um den Arbeitspunkt $\tilde{h} = 0$ unter Verwendung der Taylor-Reihe und geben Sie das Ergebnis in der Form $\hat{p}_{im}(h) = a_0 + a_1h$ an. (3 Punkte)

Hinweis: $hPa = 10^2 Pa$ ist die SI-Einheit des Drucks.

- e)** Zur Abschätzung der Genauigkeit der Kennlinien aus Teilaufgabe **a)** und **d)** sollen die entsprechenden relativen Fehler F_{rS} berechnet werden. Berechnen Sie

$$F_{rS,1}(h) = \frac{\hat{p}_{L,a}(h) - p_i(h)}{p_i(h)} \quad (2)$$

und

$$F_{rS,2}(h) = \frac{\hat{p}_{im}(h) - p_i(h)}{p_i(h)} \quad (3)$$

für $h_0 = 10$ und $h_2 = 600$. (4 Punkte)

- f)** Welche Vorteile und Nachteile bieten die Vorgehensweisen in **a)** und **d)** zur Kennlinienstellung hinsichtlich Genauigkeit, Implementierung, etc.? Argumentieren Sie auch mit Ihren Ergebnissen aus Teilaufgabe **e)**. (3 Punkte)

Lösung

- a)** Für die Lagrange-Interpolation müssen die Lagrange-Polynome

$$L_i(h) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(h - h_j)}{(h_i - h_j)}$$

berechnet werden ($n = 2$ und $i = 0, \dots, 2$):

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{(h - h_1)(h - h_2)}{(h_0 - h_1)(h_0 - h_2)} = \frac{(h - 200)(h - 600)}{(-190)(-590)} = \frac{h^2 - 800h + 120000}{112100} \\ L_1 &= \frac{(h - h_0)(h - h_2)}{(h_1 - h_0)(h_1 - h_2)} = \frac{(h - 10)(h - 600)}{190(-400)} = \frac{h^2 - 610h + 6000}{-76000} \\ L_2 &= \frac{(h - h_0)(h - h_1)}{(h_2 - h_0)(h_2 - h_1)} = \frac{(h - 10)(h - 200)}{590 \cdot 400} = \frac{h^2 - 210h + 2000}{236000} \end{aligned}$$

Daraus erhält man das Interpolationspolynom

$$\begin{aligned} \hat{p}_{L,a}(h) &= \sum_{i=0}^n p_i L_i(h) \\ &= \frac{1012}{112100} (h^2 - 800h + 120000) - \frac{989}{76000} (h^2 - 610h + 6000) \end{aligned}$$

$$\hat{p}_{N,b}(h) = a_3 \cdot (h_3 - h_0)(h_3 - h_2) + \hat{p}_{L,a}(h_3)$$

$$972 = a_3 \cdot 340 \cdot 150 \cdot (-250) + 971,43$$

$$\rightarrow a_3 \approx -4,47 \cdot 10^{-8}$$

$$\rightarrow \hat{p}_{N,b}(h) = -4,47 \cdot 10^{-8} u^3 + 4,646 \cdot 10^{-5} u^2 - 0,1287 u + 10130,284$$

- c)** Die ideale Kennlinie ergibt sich zu

$$\begin{aligned} p_i(h) &= \frac{p_2 - p_0}{h_2 - h_0} \cdot (h - h_0) + p_0 \\ &= \frac{943 - 1012}{600 - 10} \cdot (h - 10) + 1012 \\ &= -0,1169h + 1013,16 \end{aligned}$$

- d)** Zur Linearisierung einer Funktion kann dies um einen Arbeitspunkt $\tilde{h}$ mit der Taylor-Reihe entwickelt werden

$$\hat{p}_{im}(h) = p(\tilde{h}) + \frac{\partial p(h)}{\partial h} \Big|_{h=\tilde{h}} \cdot (h - \tilde{h})$$

Die partielle Ableitung ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(h)}{\partial h} \Big|_{h=\tilde{h}} &= 1013,25 \cdot 5,255 \left(1 - \frac{0,0065 \cdot \tilde{h}}{288,15} \right)^{4,255} \cdot \left(-\frac{0,0065}{288,15} \right) \\ &= -0,12011 \left(1 - \frac{0,0065 \cdot \tilde{h}}{288,15} \right)^{4,255} \\ &= -0,12011 \end{aligned}$$

Die linearisierte Funktion ist

$$\hat{p}_{im}(h) = -0,12011 \cdot h + 1013,25$$

- e)** Die beiden relativen Fehler sind

$$F_{rS,1}(h) = \frac{\hat{p}_{L,a}(h) - p_i(h)}{p_i(h)} = \frac{1,025 \cdot 10^{-5} h^2 - 6,258 \cdot 10^{-3} h + 6,155 \cdot 10^{-2}}{-0,1169h + 1013,16}$$

und

$$F_{rS,2}(h) = \frac{\hat{p}_{im}(h) - p_i(h)}{p_i(h)} = \frac{-3,16 \cdot 10^{-3} h + 8,05 \cdot 10^{-3}}{-0,1169h + 1013,16}$$

Die Werte für h_0 und h_2 sind in folgender Tabelle abgelegt

	$h_0 = 10$	$h_2 = 600$
$F_{rS,1}(h)$	$9,9 \cdot 10^{-6}$	$1,06 \cdot 10^{-4}$
$F_{rS,2}(h)$	$4,83 \cdot 10^{-5}$	$-1,93 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 2: Relative Fehler

Alternativ: Da die Lagrange-Interpolation direkt in den Messpunkten ($h = 10$ und $h = 600$) verläuft, ergeben sich die Werte aus Tabelle 1. Da auch die ideale Kennlinie durch diese Anfangs- und Endpunkte geht, ergeben sich die Fehler zu

$$F_{rS,1}(h = 10) = F_{rS,1}(h = 600) = 0.$$

Bei einer Rechnung mit gerundeten Koeffizienten ergeben sich die Fehler gemäß Tabelle 2.

- f)** Der Vorteil der linearisierten Kennlinie $\hat{p}_{im}(h)$ ist der geringe Implementierungsaufwand z. B. in ein Mikrorechnersystem. Jedoch müssen hierbei Abstriche hinsichtlich der Genauigkeit hin- genommen werden. Dies ist anhand der relativen Fehler aus Tabelle 2 ersichtlich. Der relative Fehler $F_{rS,1}(h)$ der linearisierten Kennlinie ist um eine Zehnerpotenz größer als $F_{rS,2}(h)$ der mit Lagrange entwickelten Kennlinie. Ein weiterer Vorteil einer linearen Kennlinie ist auch die konstante Empfindlichkeit des Systems.

Aufgabe 2: Stationäres Verhalten von Messsystemen (23 Punkte)

Die folgende Messkennlinie sei gegeben:

$$y(x) = ax^3 + bx + cx^4$$

Dabei seien zunächst die Parameter folgendermaßen belegt: $a = 20c$, $b = 1$, $c = 1$.

- a)** Bestimmen Sie die maximale Empfindlichkeit für $x \geq -4$. (4 Punkte)

Mess - F 2006 Der gewünschte Messbereich soll möglichst linear sein und eine hohe Empfindlichkeit aufweisen. Wie ist der Arbeitspunkt zu wählen? (2 Punkte)

- c) Bestimmen Sie den günstigsten Messbereich $[x_0, x_d + d]$ mit $d = 2$ um den Arbeitspunkt! (5 Punkte)
- Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.
- d) Die Empfindlichkeit des Messsystems soll erhöht werden. Mit welcher Anordnung ist dies aus welchem Grund möglich? Skizzieren Sie die Methode! (3 Punkte)
- e) Geben Sie die durch das Verfahren von d) verbesserte Empfindlichkeit im Arbeitspunkt sowie die resultierende Kennlinie des gesamten Arbeitsbereiches an! (4 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Im folgenden sind die Parameter a , b und c nicht mehr festgesetzt, sondern werden fehlerhaft geschätzt. Die Beziehung $a = 20c$ bleibt dabei erhalten.

- f) Die Werte für die Parameter a , b und c werden fehlerhaft mit den Varianzen σ_a^2 , σ_b^2 und σ_c^2 geschätzt. Geben Sie die Varianz σ_d^2 des von c abhängigen Parameters a an! (1 Punkt)
- g) Berechnen Sie die Varianz σ_y^2 des resultierenden Signals mit Hilfe des Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetzes! (4 Punkte)

Lösung

- a) Die Empfindlichkeit berechnet sich zu
- $$S = \frac{\partial f}{\partial x} = 60x^2 + 1 - 4x^3.$$
- Ein Extremwert ist erreicht für
- $$S' = 12x(10 - x) \stackrel{!}{=} 0.$$

Diese Gleichung ist für

$$x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 10$$

erfüllt. Das Maximum errechnet sich durch

$$S'' = 120 - 24x$$

$$S''(x_1) = 120 \Rightarrow \text{Minimum}$$

$$S''(x_2) = -120 \Rightarrow \text{Maximum}$$

zu

$$S_{\max} = S(x_2) = 2001.$$

- b) Um das gewünschte Ziel zu erreichen, muss idealerweise als Arbeitspunkt ein Wendepunkt gewählt werden. Ein Wendepunkt liegt genau dann vor, wenn $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$ ist. Damit kommen nach Aufgabenteil a) als Arbeitspunkte $x_1 = 0$ und $x_2 = 10$ in Frage. Da eine möglichst hohe Empfindlichkeit gefordert wird, muss also der Arbeitspunkt zu $x_2 = 10$ gewählt werden.

- c) Zur Bestimmung des günstigsten Messbereiches wird folgende Gleichung angesetzt:

$$S(x_a + 2) - S(x_a) \stackrel{!}{=} 0$$

Das Lösen dieser Gleichung

$$S(x_a + 2) - S(x_a) = -24x_a^2 + 192x_a + 208 \stackrel{!}{=} 0$$

führt zu

$$x_{a1} = 8.9666 \text{ oder } x_{a2} = -0.9666.$$

Aufgrund der Wahl des Arbeitspunktes ergibt sich der Messbereich mit $x_a = 8.9666$ zu [8.9666, 10.9666].

- d) Die Erhöhung der Empfindlichkeit ist mit Hilfe der Differenzenmethode möglich, da durch die linearisierende Wirkung neben der Eliminierung der geraden Anteile (entspricht der Krümmung) die ungeraden Anteile (und somit die Empfindlichkeit) der Funktion verdoppelt werden.

- e) Die Empfindlichkeit wird im Arbeitspunkt verdoppelt, da die Differenzenkennlinie sich zu

$$f_D = 2S(x_0)\Delta x \left(1 + \frac{S''(x_0)\Delta x^2}{S'(x_0)^3} \right) = 4002\Delta x - 40\Delta x^3$$

ergibt. Somit ergibt sich die Empfindlichkeit im Arbeitspunkt x_0 zu $S_D(x_0) = 4002$.

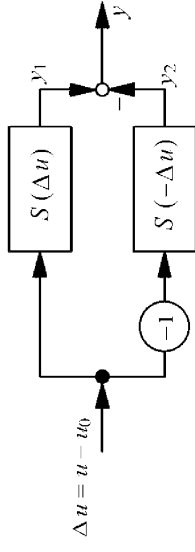


Bild 1: Differenzenmethode

- f) Die Varianz σ_d^2 berechnet sich aus

$$\sigma_d^2 = \left(\frac{\partial a}{\partial c} \right)^2 \sigma_c^2 = 20^2 \sigma_c^2.$$

- g) Die Varianz σ_y^2 berechnet sich zu

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial a} \right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial b} \right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial c} \right)^2 \sigma_c^2 + 2 \frac{\partial y}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial c} \sigma_a \sigma_c r_{ac}.$$

Da eine starre Bindung zwischen a und c vorliegt, ergibt sich der Korrelationskoeffizient zu $r_{ac} = 1$. Damit berechnet sich die gesuchte Varianz zu

$$\sigma_y^2 = x^2 \sigma_b^2 + \sigma_c^2 (20^2 x^6 + x^8 - 40x^7).$$

7 8

Aufgabe 3: Korrelationsmesstechnik und Statistik (24 Punkte)

Verwenden Sie für die Bearbeitung weder Bleistifte noch Stifte mit roter Farbe!

- a) Zeichnen Sie zu folgendem Signal $x(t)$ dessen Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ und dessen Leistungsdichte $S_{xx}(f)$! Begründen Sie Ihre Lösung, beschriften und bezeichnen Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung. (4 Punkte)

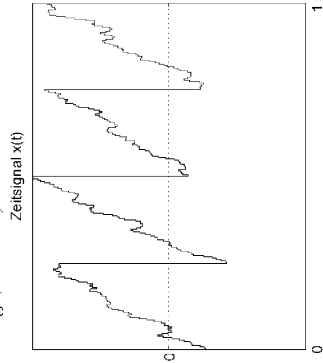


Bild 2: Signal $x(t)$: Signal a)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

- b) Zeichnen Sie zu folgender Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ deren Signal $x(t)$ im Zeitbereich und deren Leistungsdichte $S_{xx}(f)$! Begründen Sie Ihre Lösung, beschriften und bezeichnen Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung. (4 Punkte)

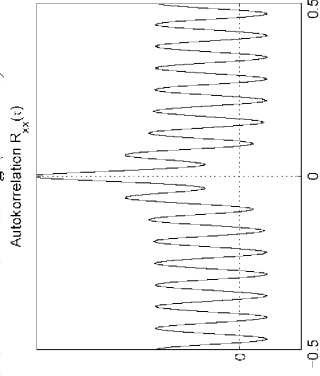
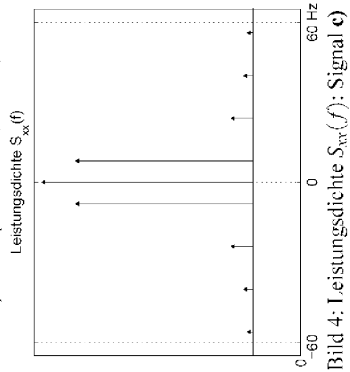


Bild 3: Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$: Signal b)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

- c) Zeichnen Sie zu folgender Leistungsdichte $S_{xx}(f)$ deren Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ und deren Signal $x(t)$ im Zeitbereich! **Begründen Sie Ihre Lösung, beschriften und bezeichnen Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung. (4 Punkte)**
- Hinweis:** Die Leistungsdichte **c)** hat Impulse bei $0, \pm 8 \text{ Hz}, \pm 24 \text{ Hz}, \pm 40 \text{ Hz}, \dots$



Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

Es wurde der Zufallsmechanismus eines Spielautomaten untersucht, der als Ergebnis einen der Werte 0 bis 9 ergeben kann. Bei 1000 Versuchen ergab sich die folgende Häufigkeitsverteilung:

Werte	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Häufigkeit Automat 1:	103	102	109	98	94	99	97	100	99	99

Tabelle 3: Häufigkeitsverteilung bei Spielautomaten

- d) Testen sie beim Zufallsmechanismus von **Automat 1** die Hypothese einer Gleichverteilung mit einer statistischen Sicherheit von 90%. (6 Punkte)
- Hinweis:** Die Wahrscheinlichkeit von $\chi^2 < \chi^2_{\alpha}$ für verschiedene Freiheitsgrade finden Sie in Bild 5

Wahrscheinlichkeit von $\chi^2 < \chi^2_{\alpha}$, $m = 8 \ 9 \ 10 \ 11$

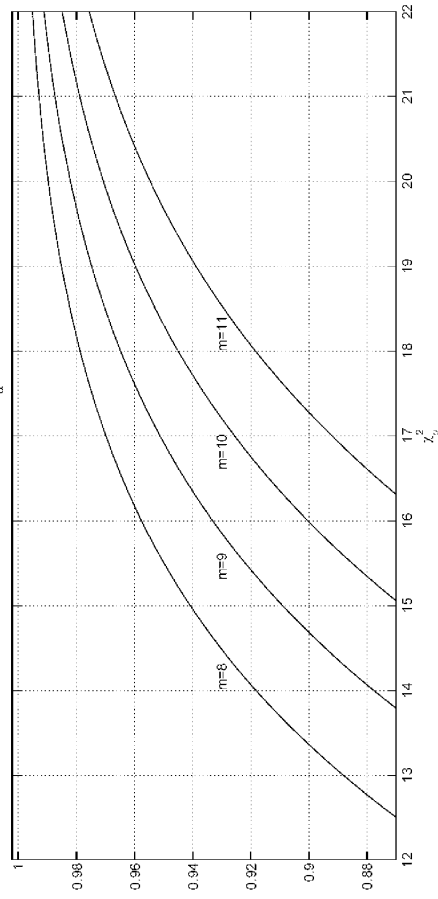


Bild 5: Wahrscheinlichkeit von $\chi^2 < \chi^2_{\alpha}$ für verschiedene Freiheitsgrade

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

Gegeben sind die Verteilungsdichten zweier unabhängiger Zufallsvariablen x und y

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{x^2}, & x \geq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad f_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |y| \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

sowie für eine weitere Zufallsvariable z der Zusammenhang $z = x \cdot y + 1$.

- e) Bestimmen Sie die Konstante α . (2 Punkte)
- f) Berechnen Sie die Verteilung $f_{z|X}(z|x)$ der Zufallsvariablen z in Abhängigkeit von x . Geben Sie den Gültigkeitsbereich von $f_{z|X}(z|x)$ an. (4 Punkte)

Mess - F 2006
Beurteilung: Die Leistungsdichte und die Autokorrelation von farbigem Rauschen sind im Messtechnik-Buch (Kiencke, Eiger, Messtechnik, 6. Auflage, Springer-Verlag, 2005) auf Seite 224 abgebildet und werden in der Lösung als *Komponente 1* für Autokorrelation und *Komponente 2* für Leistungsdichte bezeichnet.

a) Signal a)

- Zeitsignal: sägezahnförmig, farbiges Rauschen, Offset 4, Frequenz: 4 Hz
- ⇒ Autokorrelation: Parabel-förmig, Komponente 1, Offset 4, Frequenz: 4 Hz
- ⇒ Leistungsdichte: Impulse bei $\pm 4, \pm 8 \text{ Hz}, \dots$, Komponente 2, Impuls bei $f = 0$

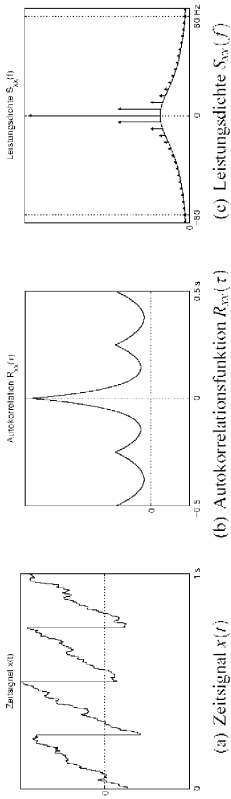


Bild 6: Signal a)

b) Signal b)

- Autokorrelation: cosinus-förmig, Komponente 1, Offset 4, Frequenz: 16 Hz
- ⇒ Zeitsignal: sinus-förmig, farbiges Rauschen, Offset 4, Frequenz: 16 Hz
- ⇒ Leistungsdichte: Impulse bei $\pm 16 \text{ Hz}$, Komponente 2, Impuls bei $f = 0$

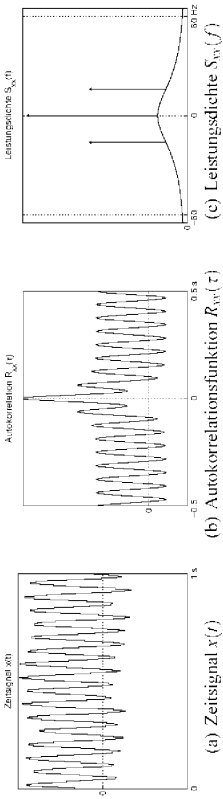


Bild 7: Signal b)

c) Signal c)

- Leistungsdichte: Impulse bei $\pm 8 \pm 24 \pm 40 \text{ Hz}$, Offset, Impulse bei $f = 0$
- ⇒ Zeitsignal: rechteck-förmig, weißes Rauschen, Offset 4, Frequenz: 8 Hz
- ⇒ Autokorrelation: dreieck-förmig, Impulse bei $\tau = 0$, Offset 4, Frequenz: 8 Hz

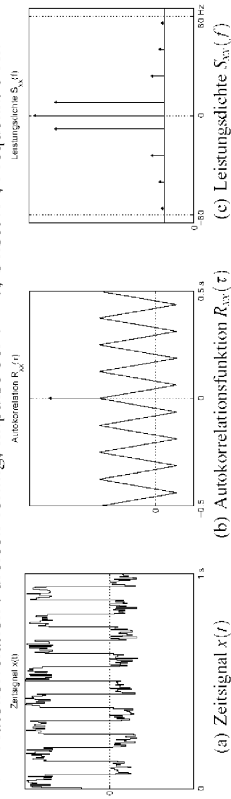


Bild 8: Signal c)

d) χ^2 -Test

- Alle notwendigen Voraussetzungen sind erfüllt:
 - Unabhängigkeit der Messwerte
 - Hinreichend großer Stichprobenumfang
 - Disjunkte Klasseneinteilung
 - „Paustregeln“ für die Randklassen ($n_1, n_m \geq 1$) bzw. die übrigen Klassen ($n_i \geq 5$)
 - Nullhypothese H_0 : „Häufigkeitsverteilung entspricht einer Gleichverteilung“
 - statistische Sicherheit $P = 1 - \alpha = 0,90$
 - Freiheitsgrade m bei $k = 10$ Klassen: $m = k - 1 = 9$
 - Aus Diagramm 5 erhält man $\chi^2_{\alpha} \approx 14,4, \dots, 14,8$
- Wegen der Gleichverteilung gilt für jede Klasse $p_i = 0,1$. Es ergibt sich Tabelle 4 für den χ^2 .

Klassen i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
n_i	103	102	109	98	94	99	97	100	99	99	1000
$n_i - np_i$	3	2	9	-2	-6	-1	-3	0	-1	-1	-
$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$	0.09	0.04	0.81	0.04	0.36	0.01	0.09	0	0.01	0.01	1.46

Tabelle 4: Anpassungstest Automat I

Die Nullhypothese H_0 wird angenommen, da $\chi^2 = \frac{(n \cdot np_i)^2}{np_i} = 1.46 < \chi^2_{\alpha} \approx 14.6$.

- e) Bei $f_X(x)$ handelt es sich um eine Wahrscheinlichkeitsdichte, wenn u.a.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx \stackrel{!}{=} 1$$

13

gilt. Deshalb ergibt sich α zu

$$\int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{x^2} dx = \alpha \cdot 1 \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow \alpha = 1$$

- f) Nach Satz 5.1 (Messtechnik, Kiencke, Eger, Messtechnik, 6. Auflage, Springer-Verlag, 2005) kann die Zufallsvariable y mit einer Wahrscheinlichkeitsdichte $f_Y(y)$ in die Zufallsvariable z unter der Bedingung x transformiert werden. Es ergibt sich mit $y = \frac{z-1}{x}$

$$f_{Z|X}(z|x) = f_Y\left(\frac{z-1}{x}\right) \left|\frac{dz}{dy}\right| = f_Y\left(\frac{z-1}{x}\right) |x|^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{2|x|}, & 1-x \leq z \leq x+1, x \geq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

14

Aufgabe 4: Korrelationsmesstechnik (16 Punkte)

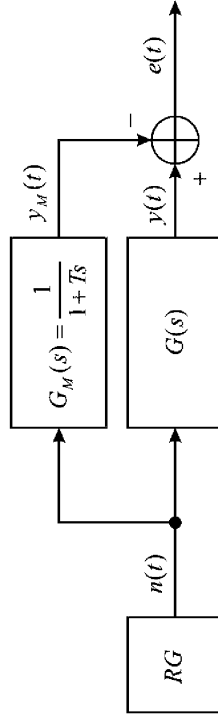


Bild 9: Gesamtsystem

Um ein System mit einer unbekannten Übertragungsfunktion $G(s)$ zu identifizieren, wird ein Modell $G_M(s)$ dieser Übertragungsfunktion diesem parallel geschaltet und beide mit dem gleichen Anregungssignal $n(t)$ gespeist. Durch Differenzbildung der beiden verschiedenen Ausgänge erhält man ein Fehlersignal $e(t)$ für das modellierte System. Das so entstehende Gesamtsystem ist in Bild 9 zu sehen.

Beide Systeme seien durch einen Rauschgenerator RG mit Gaußschen weißen Rauschen mit einer Leistungsdichte von $S_{nn}(f) = \sigma_n^2$ angetrieben. Die Autokorrelationsfunktion am Ausgang des eigentlichen Systems beträgt

$$R_{yy}(\tau) = \frac{a}{2} \exp(-b|\tau|).$$

- a) Bestimmen Sie die Leistungsdichte $S_{yy}(f)$ des Ausgangssignals! (3 Punkte)
 b) Geben Sie mit Hilfe der in a) berechneten Leistungsdichte die Übertragungsfunktion $G(f)$ an! (2 Punkte)
 c) Berechnen Sie die Leistungsdichte $S_{ee}(f)$ des Fehlersignals! (4 Punkte)

[Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.]

Ein Roboter soll sich frei im Raum bewegen können. Um Zusammenstöße mit den Wänden zu vermeiden, wurde ein Mindestabstand von $d_{\min} = 1m$ zu der vor ihm liegenden Wand festgelegt. Dazu sendet ein Sender im Kopf des Roboters kontinuierlich ein harmonisches Signal von $x(t) = A \cos(2\pi f t)$ aus, welches sich mit einer Geschwindigkeit von $v_s = 300 \frac{m}{s}$ ohne Verluste und Dämpfung ausbreitet. Mit Hilfe eines Fm-Pläners, der in einem vernachlässigbaren kleinen Abstand zum Sender ebenfalls am Kopf platziert ist, wird das von der Wand reflektierte Signal $y(t)$ wieder empfangen. Eine Skizze der gegebenen Situation ist Bild 10 zu entnehmen.

15

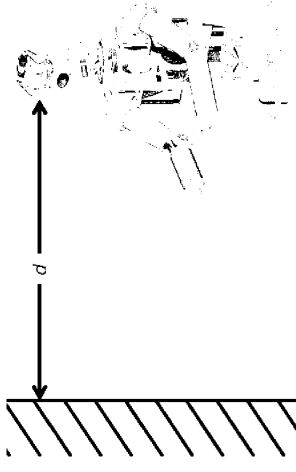
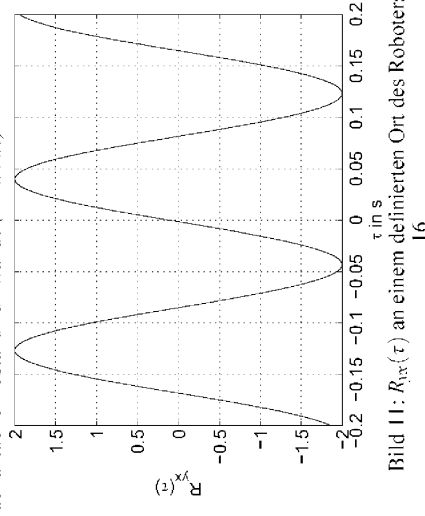


Bild 10: Aufstellung des Roboters

- d) Geben Sie den zeitlichen Verlauf des empfangenen Signals $y(t)$ an! (1 Punkt)
 e) Berechnen Sie die Kreuzkorrelation $R_{xy}(\tau)$ zwischen dem empfangenen Signal $y(t)$ und dem gesendeten Signal $x(t)$! (2 Punkte)
 f) Bestimmen Sie den Abstand d allgemein! (2 Punkte)
 g) Zu einem bestimmten Zeitpunkt wurde die in Bild 11 abgebildete Kreuzkorrelation gemessen. Wie groß ist der aktuelle Abstand zur Wand? (2 Punkte)

Bild 11: $R_{xy}(\tau)$ an einem definierten Ort des Roboters

16

Lösung

- a) Die Leistungsdichte des Ausgangssignals berechnet sich mit Hilfe der Fouriertransforma-

$$\begin{aligned} S_{yy}(f) &= \mathcal{F}\{R_{yy}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{2} e^{-b|\tau|} e^{-j2\pi f \tau} d\tau \\ &= \frac{a}{2} \int_{-\infty}^0 e^{\tau(b-j2\pi f)} d\tau + \frac{a}{2} \int_0^{\infty} e^{-\tau(b+j2\pi f)} d\tau \\ &= \frac{a}{2} \left(\frac{1}{b-j2\pi f} + \frac{1}{b+j2\pi f} \right) = \frac{ab}{b^2 + 4\pi^2 f^2} \end{aligned}$$

- b) Anhand der Beziehung

$$S_{yy} = S_{nn} |G(f)|^2$$

ist das Betragsquadrat der Übertragungsfunktion bestimmbar.

$$|G(f)|^2 = \frac{1}{\sigma_n^2} \frac{ab}{b^2 + 4\pi^2 f^2}$$

Daraus folgt für die Übertragungsfunktion

$$G(f) = \frac{\sqrt{ab}}{\sigma_n(b + j2\pi f)}$$

- c) Die Leistungsdichte des Fehlersignals berechnet sich allgemein mit Hilfe der Abbildung zu

$$S_{ee} = |G(f) - G_M(f)|^2 S_{nn} = |G_e(f)|^2 S_{nn}$$

Das Betragsquadrat der Fehlerübertragungsfunktion $|G_e(f)|^2$ berechnet sich zu

$$|G_e(f)|^2 = \left| \frac{\sqrt{ab}}{\sigma_n(b + j2\pi f)} - \frac{1}{1 + j2\pi f} \right|^2 = \frac{(\sqrt{ab} - \sigma_n b)^2 + (\sqrt{ab} 2\pi f - \sigma_n 2\pi f)^2}{\sigma_n^2 (b^2 + (2\pi f)^2) (1 + (2\pi f)^2)}$$

und somit die Leistungsdichte des Fehlersignals zu

$$S_{\text{ce}} = \frac{(\sqrt{ab} - \sigma_p b)^2 + (\sqrt{ab} T 2\pi f - \sigma_n 2\pi f)^2}{(b^2 + (2\pi f)^2)(1 + T^2(2\pi f)^2)}.$$

d) Das empfangene Signal hat den Verlauf von

$$y(t) = x(t - \frac{2d}{v_s}) = A \cos(2\pi f(t - \frac{2d}{v_s})).$$

e) Die Kreuzkorrelation der Leistungssignale ergibt sich zu

$$\begin{aligned} R_{yx}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A^2 \cos(2\pi f(t - \frac{2d}{v_s} + \tau)) \cos(2\pi f t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A^2 (\cos(2\pi f t) \cos(2\pi f(\tau - \frac{2d}{v_s})) - \sin(2\pi f t) \sin(2\pi f(\tau - \frac{2d}{v_s}))) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2T} \cos(2\pi f(\tau - \frac{2d}{v_s})) (T + \frac{1}{4\pi f} \sin(8\pi f T)) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f(\tau - \frac{2d}{v_s})) \end{aligned}$$

f) Allgemein berechnet sich der Abstand aus dem Maximum der Kreuzkorrelation $R_{yx}(\tau)$. Dieses tritt genau dann auf, wenn

$$\tau - \frac{2d}{v_s} = 0$$

ist. Der Abstand ergibt sich somit zu

$$d = \frac{\tau v_s}{2}.$$

g) Das erste Maximum tritt bei ungefähr $\tau = 0,04\text{s}$ auf. Damit berechnet sich der aktuelle Abstand zu

$$d = \frac{0,04 \cdot 300 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} = 6\text{m}$$

Aufgabe 5: A/D-Wandlung (16 Punkte)

Während einer Testfahrt werden Messdaten gemessen und analog zu dem im Fahrzeug sitzenden Entwickler übertragen. Um die analogen Daten auf dem Rechner auswerten zu können, müssen diese mit einem A/D-Wandler umgeformt werden. Dabei stehen dem Entwickler verschiedenen Modelle zur Verfügung, aus denen er das geeignetste auswählen muss.

Das zu verarbeitende Signal hat die Form $s(t) = A(t) \sin(2\pi f(t))$ mit einer Messspannung von $\pm 3V$ und einer maximalen Frequenz von $f_{\text{max}}(t) = 30\text{kHz}$.

- Welche Abtastfrequenz muss der A/D-Wandler mindestens haben und warum? (2 Punkte)
 - Für welche Auflösung in Bit muss der A/D-Wandler bei einer Quantisierungsstufenbreite von $q = 0,1V$ mindestens ausgelegt sein? (3 Punkte)
 - Wie groß ist der Signal-Rauschabstand in [dB] bei Annahme einer konstanten Frequenz und einer konstanten Amplitude des Signals, sowie linearem Quantisierungsrauschen? (2 Punkte)
- Das Messsignal wird bei der Übertragung durch Gaußsches Weißes Rauschen additiv überlagert.
- Wie groß ist der Signal-Rauschabstand des Messsignals vor dem A/D-Wandler? (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Um die Drehzahl am Rad des Wagens zu messen, wird ein Inkrementalgeber verwendet. Dieser hat $Z = 500$ Zähne. Die Referenzfrequenz beträgt $f_0 = 1\text{MHz}$ und das Referenzzeitintervall $T_{\text{ref}} = 1\text{s}$.

- Bei welchem Verfahren zur digitalen Drehzahlmessung bei Radgeschwindigkeiten von $100\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \leq \omega \leq 500\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ist die Genauigkeit größer? (5 Punkte)
- Skizzieren Sie das in e) gewählte Verfahren! (2 Punkte)

Lösung

a) Damit keine spektralen Überlappungen auftreten (sogenanntes Aliasing) muss das Abtasttheorem erfüllt sein. Dieses besagt, dass die Abtastfrequenz mindestens doppelt so groß wie die höchste vorkommende Frequenz sein muss. So ergibt sich eine Abtastfrequenz von

$$f_A \geq 2f_{\text{max}} = 60\text{kHz}.$$

b) Um das Signal quantisieren zu können muss

$$2A_{\text{max}} \leq q2^N$$

sein. Daraus ergibt sich für die Auflösung

$$N \geq \log_2 \frac{2A_{\text{max}}}{q} \text{ und somit } N \geq 6\text{Bit}$$

Das SNR eines sinusförmigen Signals berechnet sich unter Annahme eines linearen Quantisierungsrauschens zu

$$SNR[\text{dB}] = 6,02N + 1,76 = 37,88\text{dB}$$

- Die Störleistung bei weißen Rauschen ist $P_{\text{N,wei}} = \infty$. Damit ist das $SNR = \frac{P_{\text{sig}}}{P_{\text{N,wei}}}$ des Rauschens $SNR = 0$.
- Die zu betrachtenden Frequenzen liegen zwischen $50\text{Hz} \leq f \leq 250\text{Hz}$. Der maximale Quantisierungsfehler der Periodendauermessmethode berechnet sich aus $F_{R,PD,M} \leq \frac{1}{10}f$ und der des Frequenzzählverfahrens aus $F_{R,FZ} \leq \frac{1}{2f}$. Damit liegt der Fehler bei der Periodendauermessung zwischen $125 \cdot 10^{-2} \leq F_{R,PD,M} \leq 2,5 \cdot 10^{-2}$ und für das Frequenzzählverfahren zwischen $\frac{1}{125} \cdot 10^{-4} \leq F_{R,FZ} \leq \frac{1}{25} \cdot 10^{-3}$. Da der Fehler bei dem Frequenzzählverfahren viel geringer als der bei der Periodendauermessung ist, ist das Frequenzzählverfahren zu bevorzugen.

f) Abbildung 12 zeigt das Verfahren.

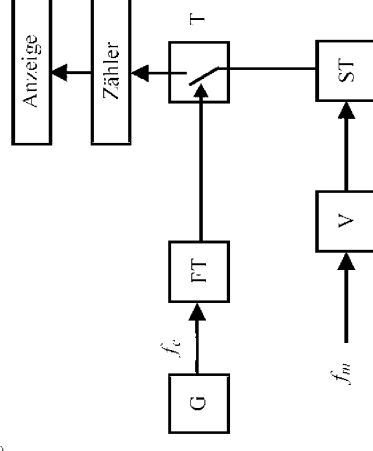


Bild 12: Anordnung des Frequenzzählverfahrens

Aufgabe 1: Kurvenanpassung (17 Punkte)

In einem Versuch wurden zwei Messgeräte vermessen. In Tabelle 1 sind die aufgezeichneten Daten zusammengefasst. y entspricht dabei dem Anzeigewert und x dem Messwert.

Messgerät	y	1	3	3.5	4.5
1	x_1	1	2.5	5	-
2	x_2	0.5	2.5	-	5

Tabelle 1: Zuvor aufgezeichnete Messdaten der zwei Messgeräte

- Führen Sie die Interpolationsmethode nach Lagrange für das Messgerät 1 durch und geben Sie das Interpolationspolynom in der Form $\hat{y}_a(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_n!$ an! (4 Punkte)
- Um die Kennlinien-Interpolation zu verbessern, wird ein zusätzlicher Wert an der Stützstelle $x_1 = 1.8$ ermittelt; $y = 2$. Berechnen Sie das neue Interpolationspolynom unter Berücksichtigung dieses Messwertes! Geben Sie das Interpolationspolynom in der Form $\hat{y}_b(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 + \dots$ an. (3 Punkte)
- Hinweis:** Die Wahl des Interpolationsverfahrens ist frei.
Führen Sie nun die Interpolation nach Newton für das Messgerät 2 durch und geben Sie das Interpolationspolynom in der Form $\hat{y}_c(x_2) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots$ an. (2 Punkte)

Eines der Messgerät wurde an einer Stützstelle erneut vermessen. Dabei ergab sich für die Stützstelle $x = 2.4$ ein Wert $y = 2.85$.

- Bestimmen Sie zu welchem Messgerät dieser Messpunkt vermutlich gehört. (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- Was ist ein Spline? Wie wird daraus das Ziel der Spline-Interpolation definiert? (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Betrachten wir nun wieder die Messwerte aus obiger Tabelle 1 mit dem zusätzlichen Messpunkt $x_1 = 1.8$ bei $y = 2$. In einer Auswertung wurde unter Anderem eine Spline-Interpolation für alle drei Messkurven (Messgerät 1 ohne $y = 2$, Messgerät 1 mit $y = 2$ und Messgerät 2) durchgeführt, was zu 7 verschiedenen Splines führte. Die Koeffizienten eines Splines lauten dabei

$$a_i = -\frac{17}{180}, b_i = 0, c_i = \frac{371}{240}, d_i = 1.$$

- Zu welchem der 7 Splines gehören diese Koeffizienten? Begründen Sie ohne eine Splineinterpolation durchzuführen. (4 Punkte)

Aufgabe 2: Stationäres Verhalten von Messsystemen (21 Punkte)

Im Folgenden soll das Verfahren der Gegenkopplung näher untersucht werden.

- Wann ist prinzipiell eine Gegenkopplung möglich? (1 Punkt)
- Nennen Sie einen Nachteil der Gegenkopplung. Wozu kann dies schlimmstenfalls führen? (1 Punkt)
- Berechnen Sie die Empfindlichkeit $S_g = \frac{dy}{dx}$ am Ausgang der Schaltung für eine allgemeine Messkennlinie $f(y)$! Erklären Sie daraus die linearisierende Wirkung des Verfahrens! (3 Punkte)
- Worin liegt der Unterschied zwischen der Gegenkopplung und dem Verfahren des „Herabsetzens des Messbereiches“? (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- Wie groß ist der Kennlinienfehler im Arbeitspunkt bei dem Differenzenverfahren? (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- Nennen Sie eine Möglichkeit, wie mit systematischen Störeinflüssen, welche vorab bekannt sind, umgegangen werden kann! (1 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Es soll ein Messverstärker mit drei Stufen entworfen werden. Die einzelnen Stufen zeigen dabei lineares Verhalten. Als mögliche Bauteile stehen drei Varianten nach Tabelle 2 zur Auswahl.

Bauteil	S_k	Nullpunktdrift
A	$S_a = 20$	0.2mV
B	$S_b = 30$	0.5mV
C	$S_c = 20$	0.5mv

Tabelle 2: Daten der zur Verfügung stehenden Bauteile

- Skizzieren Sie die Anordnung! (1 Punkt)
- Um welche Art von Fehler handelt es sich bei einer Nullpunktdrift? (1 Punkt)
- In welcher Reihenfolge müssen die drei Stufen verschalten werden, wenn von jedem Bauteil nur eines vorhanden ist? Begründen Sie Ihre Aussage mit dem absoluten Fehler! (2 Punkte)
- Wie muss allgemein die Empfindlichkeit und die Nullpunktdrift des ersten Verstärkungsglieds gewählt werden? Begründen Sie anhand des relativen und des absoluten Fehlers! (2 Punkte)
- Wie würde die Wahl der Bauteile ausfallen, wenn von jedem Bauteil beliebig viele zur Verfügung stehen würden? Begründen Sie Ihre Aussage mit dem absoluten Fehler! (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- l) Wie kann der Erwartungswert von Prozessen approximiert werden? (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- m) Warum benötigt man stochastische Prozesse in der Messtechnik? (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Gegeben sei eine Funktion

$$f_1(x) = \begin{cases} kx - 2, & 0 < x \leq 5 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- n) Für welchen Wert von k handelt es sich dabei um eine Wahrscheinlichkeitsdichte? (2 Punkte)

Eine zweite Zufallsvariable hänge mit der ersten durch die Beziehung $y = x^2$ zusammen.

- o) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_2(y)$! (2 Punkte)

Aufgabe 3: Korrelationsmesstechnik und Statistik (25 Punkte)

Verwenden Sie für die Bearbeitung weder Bleistifte noch Stifte mit roter Farbe!

- a) Zeichnen Sie zu folgendem Signal $x(t)$ dessen Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ und dessen Leistungsdichte $S_{xx}(f)$! **Begründen Sie Ihre Lösung, beschriften und bezeichnen Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung.** (4 Punkte)

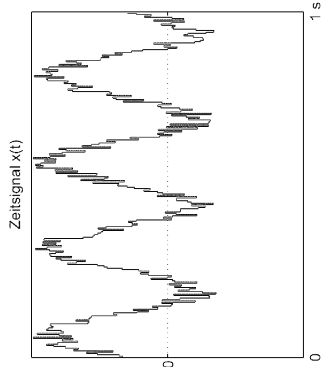


Bild 2: Signal $x(t)$: Signal **a)**

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

- b) Zeichnen Sie zu folgender Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ deren Signal $x(t)$ im Zeitbereich und deren Leistungsdichte $S_{xx}(f)$! **Begründen Sie Ihre Lösung, beschriften und bezeichnen Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung.** (4 Punkte)

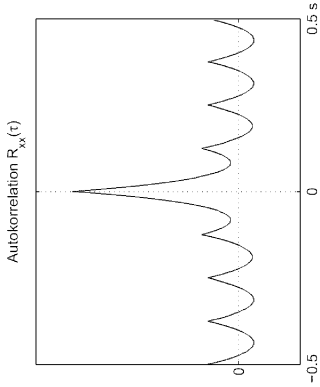


Bild 3: Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$: Signal **b)**

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

- c) Zeichnen Sie zu folgender Leistungsdichte $S_{xx}(f)$ deren Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ und deren Signal $x(t)$ im Zeitbereich! **Begründen Sie Ihre Lösung, beschriften und bezeichnen Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung.** (4 Punkte)
Hinweis: Die Leistungsdichte **c)** hat Impulse bei $0, \pm 4 \text{ Hz}, \pm 12 \text{ Hz}, \pm 20 \text{ Hz}, \dots$

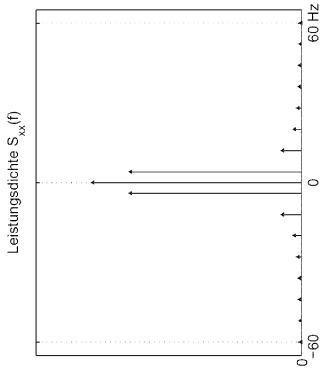


Bild 4: Leistungsdichte $S_{xx}(f)$: Signal **c)**

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Aufgabenteilen.

Bei einem Fertigungsprozess werden Werkstücke unterschiedlicher Länge produziert. Um diesen Prozess bewerten zu können, wurden Stichproben entnommen und vermessen. Dabei ergaben sich folgende Werte:

Stichprobe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Messwerte	1	1.25	1.1	0.7	2.01	1.75	2.3	1.3	1.28	1.01	0.8	1.9	1.6	2.2

Tabelle 3: Stichprobe des Fertigungsprozesses

- d) Erstellen Sie ein Histogramm mit einer Klassenbreite von $\Delta x = 0.3$ von Null beginnend und skizzieren Sie den Polygonzug. (3 Punkte)
- e) Berechnen Sie die Stichprobenvarianz! (2 Punkte)
- f) Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Fertigung wird eine Gleichverteilung angenommen. Überprüfen Sie diese Vermutung durch einen χ^2 -Anpassungstest mit einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$! (4 Punkte)
- g) Hinweis: Die Wahrscheinlichkeit von $\chi^2 < \chi^2_\alpha$ für verschiedene Freiheitsgrade finden Sie in Bild 5.

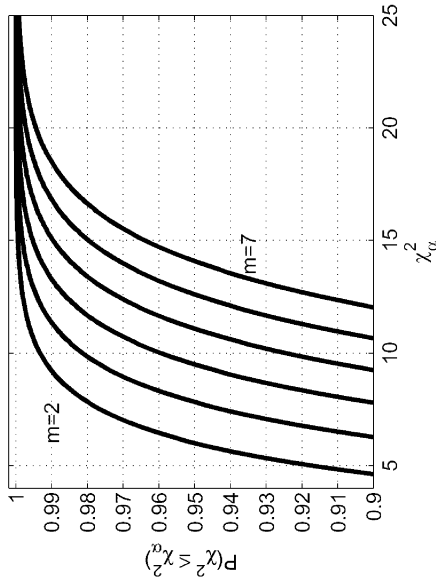


Bild 5: Wahrscheinlichkeit von $\chi^2 < \chi^2_\alpha$ für verschiedene Freiheitsgrade

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Aufgabenteilen.

In der Produktion wurde nun eine neue Fertigungslinie in Betrieb genommen. Für die Qualitätssicherung soll der Prozess dieser nun beurteilt werden. Dazu wurde eine große Stichprobenmessung durchgeführt. Dabei ergaben sich folgende Werte:

$$\hat{x} = 34.73, \quad \sigma_x = 0.2, \quad x_{\min} = 34 \text{ und } x_{\max} = 36.$$

- g) Bestimmen Sie den Prozessfähigkeitsindex c_p , den Prozessbrauchbarkeitsindex c_{pk} sowie die Ausschussrate p . Erklären Sie die Aussagen dieser Größen! Wie beurteilen Sie den Fertigungsprozess? (4 Punkte)
- Hinweis: Die Gaußsche Fehlerfunktion $\text{erf}(x)$ finden Sie in Bild 6.

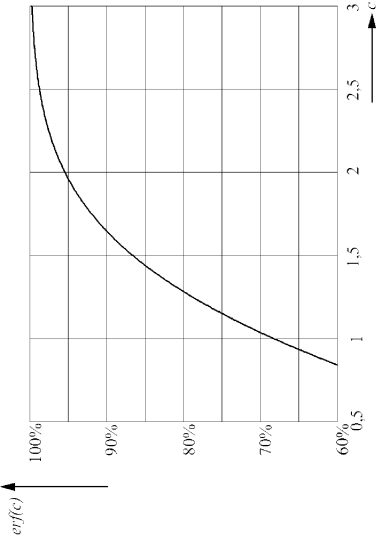


Bild 6: Gaußsche Fehlerfunktion

Aufgabe 4: Korrelationsmesstechnik (18 Punkte)

Gegeben seien folgende Autokorrelationsfunktionen:

$$R_{xx} = \frac{2\tau^2 - 4\tau}{\tau^2 + 3\tau} \text{ und } R_{yy} = \frac{4\tau^2 - 8\tau}{\tau^2 + 3\tau}$$

- a) Bestimmen Sie die Erwartungswerte μ_x und μ_y der beiden Signale! (2 Punkte)
- Ein resultierendes Signal setzt sich zu $z(t) = 2x(t) + y(t)$ zusammen.
- b) Berechnen Sie die Korrelation $R_{zz}(\tau)$ in Abhängigkeit der bekannten Größen! (4 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- c) Was für eine Bedeutung hat eine maximale Kreuzkorrelation? Wozu findet dies Verwendung? (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Um einen Antriebsstrang zu identifizieren, wurde dem Modell des Antriebsstranges der wahre Prozess parallel geschaltet. Das Strukturbild der Anordnung ist in Abbildung 11 zu sehen. Dabei wird der Motor als ein PT_1 -Glied approximiert. Die Leistungsdichtespektren sind folgendermaßen belegt:

$$S_{y_{me}y_n} = \frac{(2\pi f b a)^2}{(1 + (2\pi f)^2)^2 (1 + (2\pi f T)^2)}, \quad S_{xx} = a^2 \text{ und } S_{ee} = \frac{a^2 ((cT)^2 + (2\pi f b)^2)}{(1 + (2\pi f)^2)^2 (1 + (2\pi f T)^2)}$$

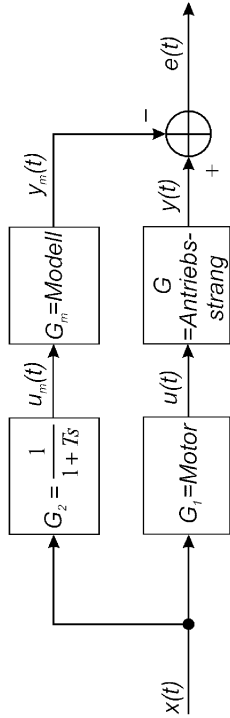


Bild 11: Strukturbild der Anordnung

- d) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des Modelles $G_m(f)$! (2 Punkte)
e) Berechnen Sie das Leistungsdichtespektrum S_{yy} ! (4 Punkte)
Anmerkung: Die Gesamtübertragungsfunktion der Anordnung nach Bild 11 ist minimalphasig!

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- f) Was ist farbiges Rauschen? (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Gegeben sei ein Signal der Form $x(t) = A^2 \sin(t) e^{-t}$.

- g) Um welche Art von Signalklasse handelt es sich? Zeigen Sie dies! (3 Punkte)

Aufgabe 5: Erfassung amplituden- und frequenzanaloger Signale (19 Punkte)

Der Blutdruck eines Patienten soll auf $\Delta p \leq 1 \text{ mHg}$ genau digital gemessen werden. Der gesamte mit dieser Messapparatur aufzeichenbare Bereich soll bei $40 \text{ mHg} \leq p \leq 180 \text{ mHg}$ liegen.

- a) Bestimmen Sie die dafür benötigte Breite einer Quantisierungsstufe q , die Anzahl der benötigten Stufen sowie die Auflösung des Messgerätes in bit! (3 Punkte)
b) Wie kann mit geringerer Auflösung die gleiche Genauigkeit erzielt werden? (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- c) Erklären Sie die Begriffe winkel- und zeitsynchron! (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Bei dem Frequenzzählverfahren kommt es zu einer Überlagerung vieler Störungen in der Form

$$\omega(t) = \vec{\omega} + \Delta\omega(e^{j2\pi f_1 t} + e^{j2\pi f_2 t} + e^{j2\pi(f_1 + f_2)t}).$$

- d) Welche Auswirkungen haben diese Störungen auf das Ergebnis des Frequenzzählverfahrens? Begründen Sie Ihre Aussage rechnerisch! (2 Punkte)
e) Wie wirken sich weitere Störungen durch unregelmäßige Zähne auf das Endergebnis aus? Begründen Sie Ihre Aussage! (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Betrachtet werden sollen nun Aliasing-Filter n-ter Ordnung. Dafür wird ein Rauschen mit einer Leistungsdichte von $S_{xx}(f) = \sigma_x^2$ als Eingangssignal verwendet. Ein Aliasing-Filter 2.-Ordnung habe eine Übertragungsfunktion der Form

$$G(f) = \frac{1}{(1 + j\frac{f}{f_g})^2}.$$

Das SNR in einer abgeschätzten Form ergibt sich zu

$$SNR_{ap} \approx (2n - 1) \left(\frac{f_a}{2f_g} \right)^{(2n-1)}.$$

- f) Berechnen Sie das SNR für $n = 2$ genau ohne Abschätzung! (6 Punkte)
g) Berechnen Sie den absoluten Fehler zwischen dem geschätzten und dem berechneten SNR aus f) für $f_g = \frac{f_a}{2}$! (1 Punkt)
h) Bestimmen Sie den minimalen absoluten Fehler für Aliasing-Filter 2. Ordnung! Wann tritt dieser auf? (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- i) Was ist der Vorteil von einer Verwendung von Modulatoren höherer Ordnung bei einem Sigma-Delta-Wandler? Begründen Sie Ihre Aussage! (2 Punkte)

Aufgabe 1

Lösung

- a) Für die Lagrange-Interpolation müssen die Lagrange-Polynome

$$L_i(h) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x_1 - x_{1,j})}{(x_{1,i} - x_{1,j})}$$

berechnet werden ($n = 2$ und $i = 0 \dots 2$):

$$L_0 = \frac{(x_1 - x_{1,1})(x_1 - x_{1,2})}{(x_{1,0} - x_{1,1})(x_{1,0} - x_{1,2})} = \frac{(x_1 - 2.5)(x_1 - 5)}{(-1.5)(-4)} = \frac{x_1^2 - 7.5x_1 + 12.5}{6}$$

$$L_1 = \frac{(x_{1,1} - x_{1,0})(x_{1,2} - x_{1,2})}{(x_{1,1} - x_{1,0})(x_{1,1} - x_{1,2})} = \frac{(x_1 - 1)(x_1 - 5)}{1.5(-2.5)} = \frac{4(x_1^2 - 6x_1 + 5)}{-15}$$

$$L_2 = \frac{(x_{1,2} - x_{1,0})(x_{1,2} - x_{1,1})}{(x_{1,2} - x_{1,0})(x_{1,2} - x_{1,1})} = \frac{(x_1 - 1)(x_1 - 2.5)}{4 \cdot 2.5} = \frac{x_1^2 - 3.5x_1 + 2.5}{10}$$

Daraus erhält man das Interpolationspolynom

$$\begin{aligned}\hat{y}_d(x_1) &= \sum_{i=0}^n y_i L_i(x_1) \\ &= \frac{1}{6}(x_1^2 - 7.5x_1 + 12.5) - \frac{12}{15}(x_1^2 - 6x_1 + 5) \\ &\quad + \frac{7}{20}(x_1^2 - 3.5x_1 + 2.5) \\ &= -\frac{17}{60}x_1^2 + \frac{93}{40}x_1 - \frac{25}{24}\end{aligned}$$

- b) Das einfachste Verfahren ist aufgrund seiner rekursiven Berechnung der Koeffizienten das Newton Verfahren. Dieses liefert

$$\begin{aligned}\hat{y}_b(x_{1,3}) &= a_3 \cdot (x_{1,3} - x_{1,0})(x_{1,3} - x_{1,1})(x_{1,3} - x_{1,2}) + \hat{y}_d(x_{1,3}) \\ 2 &= a_3 \cdot 0.8 \cdot (-0.7) \cdot (-3.2) + 2.2253 \\ &\rightarrow a_3 \approx -0.1257 \\ &\rightarrow \hat{y}_b(x_1) = -0.1257x_1^3 + 0.7851x_1^2 - 0.189x_1 + 0.5292\end{aligned}$$

- c) Das Newton Verfahren liefert

$x_{2,i}$	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0.5	1	1	
2.5	3	1	
5	4.5	0.6	-0.0889

Für die Koeffizienten a_i erhält man: $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = -0.0889$.

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}\hat{y}_c(x_2) &= 1 + (x_2 - 0.5) - 0.0889(x_2 - 0.5)(x_2 - 2.5) \\ &= -0.0889x_2^2 + 1.2667x_2 + 0.3889\end{aligned}$$

- d) Einsetzen des Messpunktes in die Kurven aus b) und c) ergibt die folgenden Werte:

$$\hat{y}_d = 2.906, \hat{y}_b = 2.8599 \text{ und } \hat{y}_c = 2.917$$

Damit wurde mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit das Messgerät 1 verwendet.

- e) Ein Spline ist eine dünne Latte, welche zwischen zwei festen Punkten eine Biegelinie beschreibt. Die Idee der Spline Interpolation besteht nun darin, einen stabilen Arbeitspunkt solcher Biegelinien zu finden, was einer minimalen Energie der Latte entspricht.

- f) Anhand der Koeffizienten $b_j = 0 = \frac{1}{2}y_j''$ und $d_j = 1 = y_j'$ kommen nur noch die Splines in Frage, welche von $y = 1$ ausgehen, da dort die 2. Ableitung null ist. Somit verbleibt

$$c_0 = \frac{1}{h_0}(y_1 - 1) - \frac{1}{6}h_0y_1''$$

$$a_0 = \frac{1}{6h_0}y_1''$$

Durch Einsetzen der zweiten Gleichung in die erste erhält man die Beziehung

$$h_0^3 - \frac{1113}{68}h_0 - (1 - y_1)\frac{180}{17} = 0.$$

Für die beiden verbleibenden Parameter stehen nur die Werte $y_1 = 3$ oder $y_1 = 2$ und $h_0 = 1.5$, $h_0 = 2$ oder $h_0 = 0.8$ zur Verfügung. Daraus ergibt sich, dass die obige Gleichung nur für die Parameter $h_0 = 1.5$ und für $y_1 = 3$ erfüllt ist. Somit handelt es sich um ein Spline s_0 von der Messkurve aus a).

Aufgabe 2

Lösung

- a) Eine Gegenkopplung ist dann möglich, wenn ein Gegenkopplungsglied existiert, welches das Ausgangssignal y auf die physikalische Größe des Messsignals u abbilden kann.
- b) Durch die Gegenkopplung wird dem System zusätzliche Dynamik hinzugeführt. Im schlimmsten Fall kann dies zu sehr langen Einschwingzeiten oder sogar zur Instabilität führen.

- c) Für die Berechnung der Empfindlichkeit am Ausgang des Systems werden folgende Zusammenhänge benötigt:

$$y = V f(v) \text{ und } v = u - K(y)$$

Durch Umformen der gewünschten Differentiation zu

$$S_g = \frac{dy}{du} = V \frac{df(v)}{dv} = V \frac{df(v)}{dv} \frac{dv}{du}$$

und Einsetzen der oben aufgestellten Beziehungen erhält man:

$$S_g = VS(v) \left(1 - \frac{dK(v)}{dy} \frac{dy}{dv} \right) = VS(v)(1 - K'S_g).$$

Nach Zusammenfassen folgt als Ergebnis:

$$S_g = \frac{VS(v)}{1 + VS(v)K'}$$

Die linearisierende Wirkung des Verfahrens wird deutlich bei der Betrachtung

$$\lim_{V \rightarrow \infty} S_g = \frac{1}{K'}$$

Damit geht mit wachsender Verstärkung V die Kennlinie über in

$$y = \frac{1}{K'} u.$$

- d) Auch bei der Gegenkopplung wird der Messbereich herabgesetzt. Der einzige Unterschied liegt darin, dass anstatt den 2 zusätzlichen linearen Gliedern beim „Herabsetzen des Messbereiches“ hier nur ein zusätzliches solches Glied benötigt wird.
- e) Der Kennlinienfehler im Arbeitspunkt bei der Differenzenmethode ist identisch null.
- f) Durch eine Kennfeld-Interpolation können die systematischen Störeinflüsse vorausgesagt und somit herausgefiltert werden.
- g) Die Anordnung ist in Abbildung 1 zu sehen.

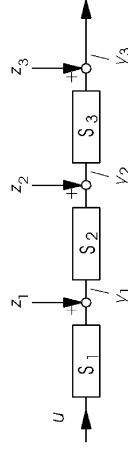


Bild 1: Anordnung einer dreigliedrigen Messkette

- h) Es handelt sich dabei um einen superponierenden Fehler.
- i) Für eine dreigliedrige Messkette berechnet sich der absolute Fehler aus

$$F_{abs} = S_2 S_3 z_1 + S_3 z_2 + z_3.$$

Um also den kleinsten Fehler zu erhalten, muss S_3 und z_1 gering sein. Damit ergibt sich der absolute Fehler zu

$$F_{abs} = 130.5 mV, \text{ mit } S_1 = S_a, S_2 = S_b, S_3 = S_c$$

- j) Da der absolute Fehler ein Verhalten von

$$F_{abs} \propto s_{j+1} z_j$$

zeigt, wird dieser minimal, wenn die Nullpunktdrift des ersten Glieds möglichst klein ist.

Der relative Fehler ergibt sich aus

$$F_{rel} \propto \frac{z_j}{\prod_{k=1}^j S_k}.$$

Um diesen zu minimieren muss also die Verstärkung des ersten Bauteiles möglichst groß sein.

- k) Ein noch geringerer Fehler wird dadurch erreicht, dass nur das Bauteil mit der kleinsten Verstärkung und dem kleinsten Fehler verwendet wird (also nur Bauteil A).
- l) Durch den Stichprobenmittelwert $\hat{x}$ wird der Erwartungswert approximiert.
- m) Da die Fourier- und die Laplacetransformation sowie die Faltung nicht für Rauschprozesse existieren, werden alternativ die stochastischen Prozesse als Beschreibungsform benötigt.

- n) Aus der Forderung für Wahrscheinlichkeitsdichten

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

berechnet sich k folgendermaßen:

$$\int_0^5 (kx - 2) dx = \frac{25}{2} k - 10 \stackrel{!}{=} 1 \rightarrow k = \frac{22}{25}$$

Da aber die zweite Bedingung $f_X(x) \geq 0$ nicht erfüllt ist, kann es sich unter diesen Bedingungen um keine Wahrscheinlichkeitsdichte handeln.

- o) Allgemein berechnet sich die Wahrscheinlichkeitsdichte transformierter Variablen zu

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^n f_X(x_i) \left| \frac{dg(x)}{dx} \right|_{x=x_i}^{-1}, \quad x_i = g^{-1}(y).$$

Die Umkehrfunktionen der Wahrscheinlichkeitsdichte in x sind ohne Berücksichtigung der Lösung aus dem vorherigen Aufgabenteil

$$x_1 = \sqrt{y} \text{ und } x_2 = -\sqrt{y}$$

Daraus ergibt sich

$$f_Y(y) = f_X(\sqrt{y}) \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| + f_X(-\sqrt{y}) \left| \frac{1}{-2\sqrt{y}} \right| = -\frac{2}{\sqrt{y}}$$

Existiert allerdings die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_X(x)$ nicht, so kann auch die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_Y(y)$ nicht existieren.

Aufgabe 3

Lösung

Bemerkung: Die Leistungsdichte und die Autokorrelation von farbigem Rauschen sind im Messtechnik-Buch (Kiencke, Eger, Messtechnik, 6. Auflage, Springer-Verlag, 2005) auf Seite 224 abgebildet und werden in der Lösung als *Komponente 1* für Autokorrelation und *Komponente 2* für Leistungsdichte bezeichnet.

- a) Signal a)

- Zeitsignal: sinus-förmig, weißes Rauschen, Offset 4, Frequenz: 4 Hz
- ⇒ Autokorrelation: cosinus-förmig, Impuls bei $\tau = 0$, Offset A^2 , Frequenz: 4 Hz
- ⇒ Leistungsdichte: Impulse bei $\pm 4\text{Hz}$, Offset, Impuls bei $f = 0$

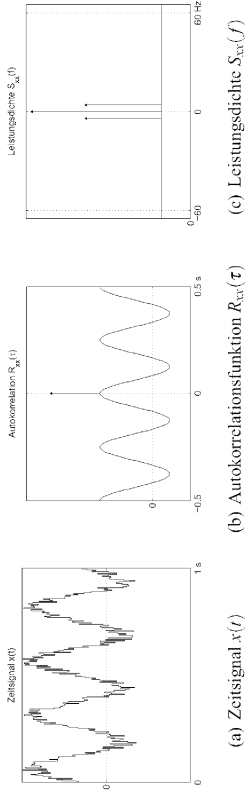


Bild 7: Signal a)

b) Signal b)

- Autokorrelation: parabel-förmig, Komponente 1, Frequenz: 8 Hz
⇒ Zeitsignal: sägezahn-förmig, farbiges Rauschen, Frequenz: 8 Hz
⇒ Leistungsdichte: Impulse bei $\pm 8 \pm 16 \pm 24 \dots Hz$, Komponente 2

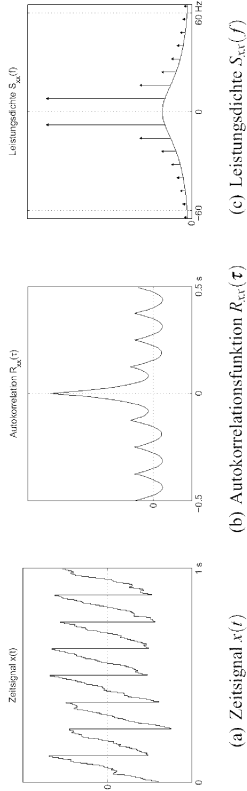


Bild 8: Signal b)

c) Signal c)

- Leistungsdichte: Impulse bei $\pm 4 \pm 12 \pm 20 \dots Hz$, Impulse bei $f = 0$
⇒ Zeitsignal : rechteck-förmig, Offset 4, Frequenz: 4 Hz
⇒ Autokorrelation : dreieck-förmig, Offset A^2 , Frequenz: 4 Hz

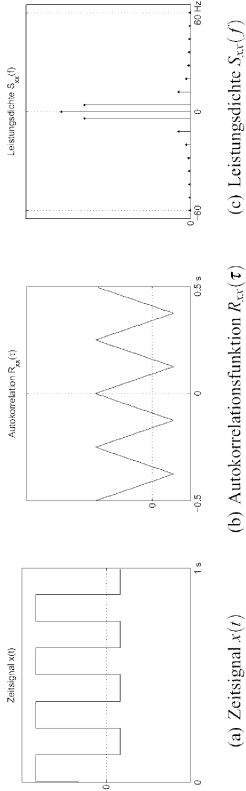


Bild 9: Signal c)

d) Die Häufigkeitsverteilung ergibt sich zu

Δx_v	n_v	h_v
0.0 - 0.6	0	0
0.6 - 0.9	2	0.476
0.9 - 1.2	3	0.714
1.2 - 1.5	3	0.714
1.5 - 1.8	2	0.476
1.8 - 2.1	2	0.476
2.1 - 2.4	2	0.476

Tabelle 4: Die Häufigkeitsverteilung

Damit kann das Histogramm und der Polyzonzug nach Abbildung 10 gezeichnet werden.

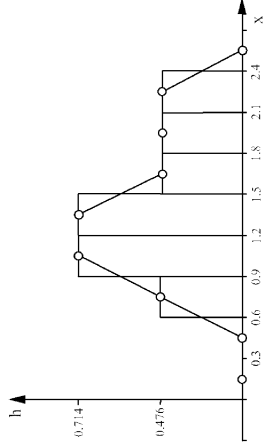


Bild 10: Histogramm

e) Der Stichprobenmittelwert berechnet sich zu

$$\hat{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 1.4428$$

und damit die Stichprobenvarianz zu

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{n}{n-1} \hat{x}^2 = 0.27.$$

f) χ^2 -Test

- Alle notwendigen Voraussetzungen die erfüllt sind:
 - Unabhängigkeit der Messwerte
 - Hinreichend großer Stichprobenumfang
 - Disjunkte Klasseneinteilung
- Die „Faustregeln“ für die Klasseneinteilung ($n_{i, Rand} \geq 1$) bzw. die übrigen Klassen ($n_i \geq 5$) sind nicht erfüllt. Aus diesem Grund müssen die Klassen neu eingeteilt werden. Es entstehen somit 3 Klassen von

$$\Delta_1 = 0.6 - 1.2$$

$$\Delta_2 = 1.2 - 1.8$$

$$\Delta_3 = 1.8 - 2.4.$$

- Nullhypothese H_0 : „Häufigkeitsverteilung entspricht einer Gleichverteilung“
- statistische Sicherheit $P = 1 - \alpha = 0.95$
- Freiheitsgrade m bei $k = 3$ Klassen: $m = k - 1 = 2$
- Aus Diagramm 5 erhält man $\chi^2_{\alpha} \approx 6$

Wegen der Gleichverteilung gilt für jede Klasse $p_i = \frac{1}{3}$. Es ergibt sich Tabelle 5 für den χ^2 -Test.

Klassen i	0	1	2	Σ
n_i	5	5	4	14
$n_i - np_i$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	-

Tabelle 5: Anpassungstest Fertigungsprozess

Die Nullhypothese H_0 wird angenommen, da $\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = 0.15486 < \chi^2_{\alpha} \approx 6$.

- g) Der Prozessfähigkeitsindex berechnet sich mit $\Delta x_s = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2} = 1$ zu

$$c_p = \frac{\Delta x_s}{3\sigma_x} = 1.6$$

und drückt die Streuung der Werte im Bezug auf den Messbereich aus.

Der Prozessbrauchbarkeitsindex ergibt sich mit $\Delta \hat{x} = \left| \frac{1}{2}(x_{\max} + x_{\min}) - \hat{x} \right| = 0.27$ zu

$$c_{pk} = \frac{\Delta x_s - \Delta \hat{x}}{3\sigma_x} = 1.216$$

und beschreibt die Lage des Stichprobenmittelwertes innerhalb des Messbereiches.

Die Ausschussrate berechnet sich mit Hilfe von Bild 6 zu

$$p = \frac{1}{2}(1 - \text{erf}(3c_{pk})) \approx 0,$$

da $\text{erf}(3c_{pk}) \approx 1$ ist.

Aufgabe 4: Korrelationsmesstechnik (18 Punkte)

Lösung

- a) Aus den Eigenschaften der Korrelation ergibt sich unter Verwendung der Regel nach l'Hospital

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_{xx}(\tau) = 2 = \mu_x^2$$

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_{yy}(\tau) = 4 = \mu_y^2$$

- b) Die Korrelation berechnet sich allgemein aus

$$R_{zz}(\tau) = E\{(2x(t + \tau) + y(t + \tau))(2x(t) + y(t))\} = 4R_{xx} + R_{yy} + 2R_{xy} + 2R_{yx}.$$

Die noch zur Berechnung fehlende Terme sind die Kreuzterme. Betrachtet man sich die Korrelationen genauer, so erkennt man, dass $R_{yy} = 2R_{xx}$ ist. Daraus ergibt sich für die Abhängigkeit der beiden Signale $y(t) = \sqrt{2}x(t)$. Berechnet man nun die Kreuzterme so ergeben sich diese zu

$$R_{xy} = E\{x(t + \tau)y(t)\} = \sqrt{2}R_{xx} = R_{yx}.$$

Damit berechnet sich die gesuchte Korrelation zu

$$R_{zz}(\tau) = (6 + 4\sqrt{2})R_{xx}.$$

- c) Eine große Kreuzkorrelation entspricht einer großen Übereinstimmung der beiden verglichenen Signale bei einer Verschiebung von τ . Dieses findet u.A. in der Laufzeitmessung Einsatz.
- d) Die Leistungsdichte des Modellausganges setzt sich zusammen aus

$$S_{y_{\text{Mod}}}(f) = |G_m(f)G_2(f)|^2 S_{xx}(f).$$

Daraus ergibt sich für die Modellübertragungsfunktion

$$\begin{aligned} |G_m(f)|^2 &= \frac{(2\pi/b)^2}{(1 + (2\pi f)^2)^2} \\ \rightarrow G_m(f) &= \frac{j2\pi/b}{(1 + j2\pi f)^2} \end{aligned}$$

für eine stabile Übertragungsfunktion.

- e) Die Gesamtübertragungsfunktion berechnet sich aus

$$G_c(f) = G_1(f)G(f) - G_2(f)G_m(f).$$

Diese ergibt sich aus

$$S_{ee}(f) = |G_c(f)|^2 S_{xx}(f)$$

zu

$$\begin{aligned} |G_c(f)|^2 &= \frac{(cT)^2 + (2\pi fb)^2}{(1 + (2\pi f)^2)^2 (1 + (2\pi fT)^2)} \\ \rightarrow G_c(f) &= \frac{cT + j2\pi fb}{(1 + j2\pi f)^2 (1 + j2\pi fT)} \end{aligned}$$

aufgrund der geforderten Minimalphasigkeit. Daraus folgt für die Übertragungsfunktion des realen Prozesses

$$G_1(f)G(f) = G_c(f) + G_2(f)G_m(f) = \frac{cT + j4\pi fb}{(1 + j2\pi f)^2 (1 + j2\pi fT)}$$

und für das gesuchte Leistungsspektrum

$$S_{yy}(f) = |G_1(f)G(f)|^2 S_{xx}(f) = \frac{((cT)^2 + (4\pi fb)^2)d^2}{(1 + (2\pi f)^2)^2 (1 + (2\pi fT)^2)}.$$

- f) Farbiges Rauschen ist ein Rauschprozess bei dem das Leistungsdichtespektrum zu den hohen Frequenzen hin abfällt.
- g) Umgeschrieben in reine Sinusterme ergibt sich für das Signal der Zusammenhang

$$x(t) = \frac{A^2}{2j}(e^{t(j-1)} - e^{-t(j+1)}).$$

Um die Signalklasse bestimmen zu können muss das Integral über das Produkt des Signals mit dessen komplex konjugiertem berechnet werden.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^4}{4} (e^{j(j-1)t} - e^{-j(j+1)t})(e^{-t(j+1)} - e^{t(j-1)}) dt = \frac{A^4}{4} (-e^{-2t} - \frac{1}{2(j-1)} e^{2t(j-1)} + \frac{1}{2(j+1)} e^{-2t(j+1)}) \Big|_{-\infty}^{\infty} \rightarrow \infty$$

Damit gezeigt ist, dass es sich um ein Leistungssignal handelt, muss nun noch der folgende Grenzwert existieren.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) x^*(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^4}{8T} (e^{-2T} + e^{2T} + \dots) \rightarrow \infty$$

Damit ist gezeigt, dass es sich um kein Leistungssignal handelt, sondern um ein Signal der Klasse sonstige Signale.

Aufgabe 5: Erfassung amplituden- und frequenzanaloger Signale (19 Punkte)

Lösung

- a) Um die gewünschte Genauigkeit zu erzielen, muss

$$\Delta p = \frac{q}{2}$$

sein. Daraus folgt für die Quantisierungsstufenbreite $q = 2mHq$.

Die Anzahl der Stufen berechnet sich aus des Messspanne zu

$$\frac{u_e - u_a}{q} = 70 \text{ Stufen.}$$

Die Auflösung des digitalen Messgerätes berechnet sich zu

$$2^N \geq 70 \rightarrow N = 7 \text{ bit.}$$

- b) Durch das Verwenden von Dither kann bei gleicher Genauigkeit die Auflösung gesenkt werden.
c) Winkelsynchron bedeutet, dass zu jeder überstrichenen Zahnflanke (also zu jedem bestimmten Winkel) ein neuer Wert übernommen wird. Zeitsynchron bedeutet hingegen, das immer zum selben Zeitpunkt (also nach dem Verstreichen eines Referenzintervalls) der neue Wert übernommen wird.

- d) Da die Frequenzzählung einer Mittelwertbildung gleich kommt, ergibt sich die gemessene Winkelgeschwindigkeit zu

$$\begin{aligned} \hat{\omega} &= \frac{1}{T_{ref}} \int_{T_{ref}}^{T_{ref} + \frac{T_{ref}}{2}} \left(\bar{\omega} + \Delta\omega (e^{j2\pi f_1 t} + e^{j2\pi f_2 t} + e^{j2\pi(f_1 + f_2)t}) \right) dt \\ &= \bar{\omega} + \Delta\omega (si(\pi f_1 T_{ref}) e^{j2\pi f_1 t} + si(\pi f_2 T_{ref}) e^{j2\pi f_2 t} + si(\pi(f_1 + f_2) T_{ref}) e^{j2\pi(f_1 + f_2)t}) \end{aligned}$$

Damit sind alle Störungen gedämpft.

- e) Der Erwartungswert über alle Winkelfehler über eine Umdrehung ist Null. Somit wird sich der Fehler auf lange Sicht hin nur auf angefangene Umdrehungen auswirken. Dies kann aber mit Hilfe eines LS-Schätzers berechnet und wieder herausgefiltert werden.

- f) Die Übertragungsfunktion 2.Ordnung ist

$$G(f) = \frac{1}{(1 + j\frac{f}{f_g})^2}$$

Daraus folgt für die Leistungsdichte am Ausgang

$$S_{yy} = \frac{\sigma_x^2}{(1 + (\frac{f}{f_g})^2)^2}$$

Um das SNR zu bestimmen muss die Signal- und die Störleistung berechnet werden.

$$\begin{aligned} P_{sig} &= 2 \int_0^{f_g} S_{yy} df = 2\sigma_x^2 f_g \left(\frac{\frac{f_g}{2f_g}}{2(1 + (\frac{f}{f_g})^2)} + \frac{1}{2} \arctan(\frac{f}{f_g}) \right) \Big|_0^{f_g} \\ &= \sigma_x^2 f_g \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \\ P_{stoe} &= 2 \int_{f_g}^{\infty} S_{yy} df = \sigma_x^2 f_g \left(-\frac{\frac{f_g}{2f_g}}{1 + (\frac{f}{f_g})^2} + \frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{f}{2f_g}) \right) \Big|_{f_g}^{\infty} \end{aligned}$$

Das berechnete SNR ergibt sich dann zu

$$SNR = \frac{P_{sig}}{P_{stoe}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}}{\left(-\frac{\frac{f_g}{2f_g}}{1 + (\frac{f_g}{2f_g})^2} + \frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{f_g}{2f_g}) \right)}$$

- g) Der absolute Fehler berechnet sich zu

$$F_{abs} = 3k^3 - \frac{\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}}{1 + k^2} + \frac{\pi}{2} - \arctan(k)$$

- h) Der absolute Fehler wird minimal, wenn f_g kleiner wird, also für k gegen Null. Damit ergibt sich für den minimalen Fehler

$$\lim_{k \rightarrow 0} F_{abs} = \left| \frac{-\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{2}} \right| = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} = 0.1817.$$

- i) Durch die Verwendung von Modulatoren höherer Ordnung wird das Noise-Shaping erhöht und somit das Quantisierungsrauschen für kleine Frequenzen noch größer gedämpft. Daraus folgt ein größeres SNR.

Klausur im Kernfach
Messtechnik
30. März 2007

A1 (17)	A2 (22)	A3 (21)	A4 (24)	A5 (16)	Gesamt (100)
					Note

Aufgabe 1: Korrelationsmesstechnik und Statistik (17 Punkte)

Verwenden Sie für die Bearbeitung weder Bleistifte noch Stifte mit roter Farbe!

- a) Zeichnen Sie zu folgendem Signal $x(t)$ dessen Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ und dessen Leistungsdichte $S_{xx}(f)$! **Begründen Sie Ihre Lösung, beschriften und beziffern Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung.** (4 Punkte)

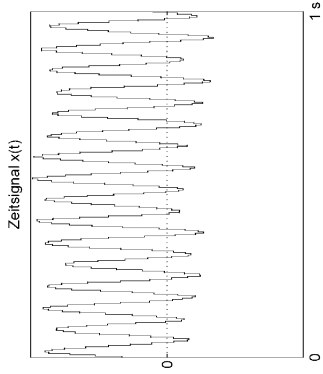


Bild 1: Signal $x(t)$: Signal a)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

- b) Zeichnen Sie zu folgender Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ deren Signal $x(t)$ im Zeitbereich und deren Leistungsdichte $S_{xx}(f)$! **Begründen Sie Ihre Lösung, beschriften und beziffern Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung.** (4 Punkte)

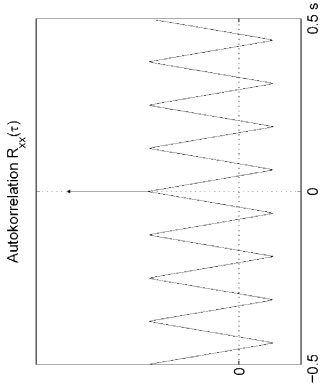


Bild 2: Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$: Signal b)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

- c) Zeichnen Sie zu folgender Leistungsdichte $S_{xx}(f)$ deren Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ und deren Signal $x(t)$ im Zeitbereich! **Begründen Sie Ihre Lösung, beschriften und beziffern Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung.** (4 Punkte)

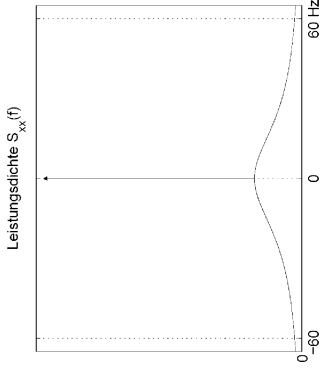


Bild 3: Leistungsdichte $S_{xx}(f)$: Signal c)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Aufgabenteilen.

Gegeben sei ein Kartenspiel (32 Karten) mit 4 Farben (p, h, ka, kr) und je 8 Karten pro Farbe. In einem Spiel sollen möglichst viele Karten einer Farbe gesammelt werden. Dafür wird eine Karte gezogen, die Farbe notiert und die Karte wieder in den Stapel zurückgelegt. Nach erneutem Mischen wird der Vorgang wiederholt. Um das Spielglück eines Mitspielers zu überprüfen, wird die Häufigkeitsverteilung mehrerer Spielrunden notiert. Die resultierende Häufigkeitsverteilung ist Tabelle 1 zu entnehmen.

	p	h	ka	kr
n_i	8	13	6	10

Tabelle 1: Die Häufigkeitsverteilung des Spieles

- d) Genügt diese Häufigkeitsverteilung einer Gleichverteilung? Führen Sie einen χ^2 -Anpassungstest durch. Dabei sei das Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$. (5 Punkte)
Hinweis: Die Wahrscheinlichkeit von $\chi^2 < \chi^2_{\alpha}$ für verschiedene Freiheitsgrade finden Sie in Bild 4.

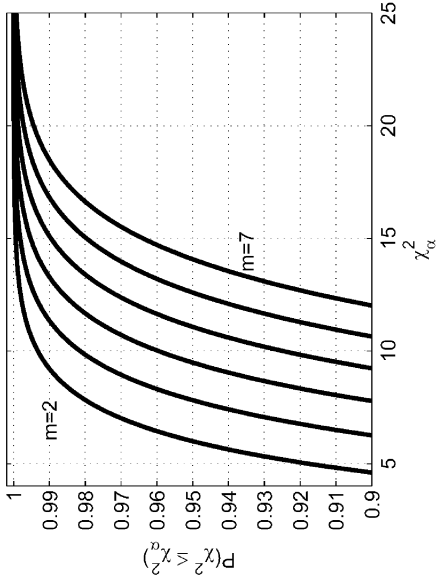


Bild 4: Wahrscheinlichkeit von $\chi^2 < \chi^2_{\alpha}$ für verschiedene Freiheitsgrade

Aufgabe 2: Stationäres Verhalten von Messsystemen (22 Punkte)

Im Folgenden soll das Differenzenverfahren betrachtet werden.

- Skizzieren Sie den Aufbau und erklären Sie die Wirkungsweise der Differenzenmethode! (3 Punkte)
- Wie groß ist die Empfindlichkeit im Arbeitspunkt bei der Differenzenmethode? (1 Punkt)
- Wie ist der Arbeitspunkt für einen Messbereich von $[-4, 2]$ bei der Differenzenmethode zu wählen? (1 Punkt)

Gegeben sei ein System mit der Kennlinie

$$y = x^5 - 4x^4 - 18x^3 + 74x^2 + 17x - 60.$$

Der Messbereich und der Arbeitspunkt seien nach Aufgabenteil c) gewählt.

- Berechnen Sie die resultierende Kennlinie der Differenzenmethode und geben Sie diese in der Form $y_D = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ an! (4 Punkte)
- Geben Sie die Krümmung der Messkennlinie $y(x)$ an! (1 Punkt)
- Wie groß ist die Krümmung der linearisierten Kennlinie aus Aufgabenteil d)? (1 Punkt)
- Wie hoch ist die Empfindlichkeit der resultierenden idealen Kennlinie? (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- Wie groß ist das Verhältnis der Fehler von Fixpunkt- zu Toleranzbandjustierung
 - im Nullpunkt und
 - über den gesamten Messbereich?(2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- Welche Fehler gehören zu den systematischen Fehlern? Nennen Sie zwei! (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Gegeben sei folgende Funktion:

$$f_x(x) = -ax^2 + bx, \text{ für } 3 \leq x \leq 5, a, b > 0$$

- Für welchen Wert von a und welchen minimalen Wert von b handelt es sich dabei um eine Wahrscheinlichkeitsdichte? (3 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Gegeben sei folgende gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$f_{xy} = 2(ax^2y + xy - \frac{2}{5}x - \frac{2}{5}a)$$

- Sind die beiden Zufallsgrößen x und y von einander unabhängig? Begründen Sie! (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- Wie können zufällige mittelwertfreie Fehler eliminiert werden? (1 Punkt)
- Welche Probleme gibt es dabei bei nichtlinearen Kennlinien? (1 Punkt)

Aufgabe 3: Korrelationsmesstechnik (21 Punkte)

In einem unterirdischen mit Wasser gefüllten Rohrmetz ist ein Leck ($z_1(t)$) aufgetreten. Um die Rohre nicht komplett freilegen zu müssen, soll mit Hilfe der Korrelationsmesstechnik der Ort des Lecks gefunden werden. Dafür werden drei Sensoren ($u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$) in den Rohrenden platziert. Die gesamte Anordnung ist Abbildung 8 zu entnehmen. Dabei wird angenommen, dass der Schall des ausströmenden Wassers sich über die Rohrmitten mit der konstanten Geschwindigkeit c ausbreitet (vgl. gestrichelte Linie). Ebenso erfolgt die Ausbreitung ideal und ohne Streuung, so dass die Schallintensität als konstant angenommen werden kann. Die Längen der beiden geraden Rohrstücke l_1 und l_2 , sowie die Dicke der Rohre d sei bekannt.

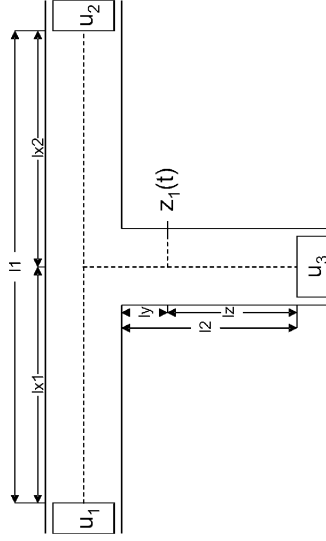


Bild 8: Das beschädigte Rohrmetz

- a) Geben Sie die an den drei Sensoren empfangenen Signale $u_1(t)$, $u_2(t)$ und $u_3(t)$ mit Hilfe des Lecksignals $z_1(t)$ an! (2 Punkte)
- b) Bestimmen Sie über die Kreuzkorrelationen $R_{u_1 u_2}$, $R_{u_2 u_3}$ die beiden Entfernungen l_{x_2} und l_{j_1} . (5 Punkte)
- Hinweis:** Die Kreuzkorrelationen müssen nicht explizit berechnet werden.

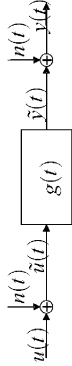
- c) Es trete nun ein zweites Leck $z_2(t)$ auf, welche das erste Signal $z_1(t)$ additiv überlagert. Dabei sind die beiden Signale identisch und treten nur an verschiedenen Stellen auf. Wieviele Maxima wären in einem solchen Fall in der Kreuzkorrelation $R_{u_1 u_2}$ überlagert? Wie verändert sich die Größenordnung der Maxima? Argumentieren Sie mit der neu entstehenden Korrelation $R_{u_1 u_2}$! (4 Punkte)
- Hinweis:** Eine Fallunterscheidung ist nötig!

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- d) Was ist Pseudo Binäres Rauschen und wie entsteht es? (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Das folgende LTI-System sei gegeben.



- e) Geben Sie allgemein die Autokorrelation $R_{\hat{u}\hat{u}}$ und die Leistungsdichte $S_{\hat{u}\hat{u}}$ in Abhängigkeit von den Korrelationen der Signale $n(t)$ und $u(t)$ an! (1 Punkt)
- f) Wann ist eine Vereinfachung der Berechnung der Korrelation und der Leistungsdichte nach Teilaufgabe e) möglich? (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- Im Folgenden handelt es sich in dem oben gegebenen LTI-System bei dem Störsignal $n(t)$ um weißes Gaußsches Rauschen, welches von dem Eingangssignals $u(t)$ unkorreliert ist. Die Leistungsdichte des Rauschens beträgt $S_{nn}(f) = \sigma_n^2$, die Leistungsdichte des Eingangssignals $S_{uu}(f) = N^2$ und die Autokorrelation des Ausgangssignals $R_{yy}(t) = e^{-5|t|}$.
- g) Bestimmen Sie die Impulsantwort $g(t)$ im Zeitbereich unter der Annahme eines stabilen nicht minimalphasigen Systems! (5 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- h) Bei welcher der folgenden Funktionen handelt es sich um keine Leistungsdichte? Begründen Sie! (1 Punkt)

$$S_{xx,1} = \frac{5\sqrt{N}}{23 + (2\pi f)^2}, S_{xx,2} = \frac{\sigma_n^2 + \sigma_e^2}{16 + j2\pi f}, S_{xx,3} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{(\pi f)^2}{2}}$$

Aufgabe 4: Kurvenanpassung (24 Punkte)

Die Wurfbahn eines Balls nach Abbildung 9 mit einer Anfangshöhe von $h(0) = 10\text{m}$ sei gegeben. Die Höhenverteilung an weiteren Stellen folgt den Werten nach Tabelle 3.

s in m	0	10	20
h in m	10	50	10

Tabelle 3: Die Höhenverteilung des Wurfes

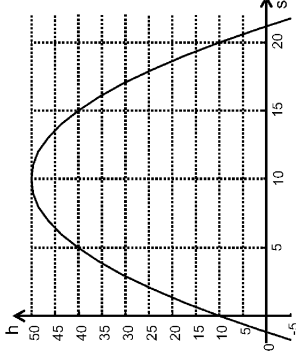


Bild 9: Die Wurfbahn eines Balls

- a) Geben Sie allgemein den mathematischen Zusammenhang der Höhe h in Abhängigkeit des Weges s mit Hilfe allgemeiner Parameter a , b und c an! (1 Punkt)
- Hinweis:** Die explizite Berechnung der Parameter ist nicht erforderlich!
- b) Führen Sie eine Approximation der Parameter aus a) mittels eines Least-Squares-Schätzers durch. Geben Sie das approximierte Polynom in der Form $h(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots$ an. (5 Punkte)

Hinweis: Für

$$A = \begin{pmatrix} e & f & g \\ f & g & k \\ g & k & m \end{pmatrix}$$

gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} gm - k^2 & fk - gm & fg - g^2 \\ gk - fm & em - g^2 & fg - ek \\ fk - g^2 & fg - ek & eg - f^2 \end{pmatrix}$$

Die Determinante der zu invertierenden Matrix beträgt $\det(\psi^T \psi) = 4 \cdot 10^6$.

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- c) Wann ist der Einsatz einer Interpolation besser geeignet als der einer Approximation? (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- d) Führen Sie für die Parameter aus a) eine Lagrange-Interpolation durch und geben Sie das Interpolationspolynom in der Form $\hat{h}_L(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots$ an. (3 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- c) Führen Sie eine kubische Spline-Interpolation für die Parameter aus **a)** durch und geben Sie das Interpolationspolynom in der Form $h_3(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_n!$ (6 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- f) Leiten Sie die für die Berechnung von quadratischen Splines benötigten Beziehungen für die allgemeinen Koeffizienten a_i , b_i und c_i sowie für die 2. Ableitungen her. (4 Punkte)
- g) Führen Sie eine quadratische Spline-Interpolation für die Werte aus Tabelle 3 durch und geben Sie das Interpolationspolynom in der Form $\hat{h}_{sp}(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_n!$ (4 Punkte)

Aufgabe 5: Quantisierung (16 Punkte)

Im Folgenden soll ein Signal der Form $u(t) = \frac{B}{2} \cos(\omega t) \sin(\omega t)$ quantisiert werden. Dabei habe das lineare Quantisierungs-Modell Gültigkeit.

- a) Bestimmen Sie das Signal-Rausch-Verhältnis der Quantisierung $SNR_q!$ (6 Punkte)

Hinweis: Bei dem Signal handelt es sich um ein Leistungssignal.

- b) Wie hoch muss die Auflösung in Bit sein, damit das Signal-Rausch-Verhältnis der Quantisierung größer 43dB ist? (3 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- c) Wann treten Jitter Fehler verstärkt auf? Warum? (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Digitale Drehzahlmessung

- d) Welches Verfahren der digitalen Drehzahlmessung ist für das Erfassen von Drehzahlen im Bereich $0 \text{ rad/s} \leq \omega \leq 11.3797 \text{ rad/s}$ besser geeignet? Begründen Sie anhand des maximalen Quantisierungsfehlers. (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- e) Es soll eine Periodendauernmessung mit einer Frequenz $f_0 = 36 \text{ Hz}$ durchgeführt werden. Wieviele Zähne muss das Zahnrad besitzen, um die maximale Frequenz äquivalent zu der maximalen Drehzahl $\omega_{max} = 11.3797 \text{ rad/s}$ gerade noch zu erfassen? (2 Punkte)
- f) Wie hoch ist der maximale relative Quantisierungsfehler im vorherigen Aufgabenteil? (1 Punkt)

Aufgabe 1: Korrelationsmesstechnik und Statistik (17 Punkte)

Lösung

Bemerkung: Die Leistungsdichte und die Autokorrelation von farbigem Rauschen sind im Messtechnik-Buch (Kiencke, Eger, Messtechnik, 6. Auflage, Springer-Verlag, 2005) auf Seite 224 abgebildet und werden in der Lösung als *Komponente 1* für Autokorrelation und *Komponente 2* für Leistungsdichte bezeichnet.

- Signal im Zeitbereich: sinus-förmig, farbiges Rauschen, Offset 4, Frequenz: 16 Hz
- ⇒ Autokorrelation: cosinus-förmig, Komponente 1, Offset A^2 , Frequenz: 16 Hz
- ⇒ Leistungsdichte: Impulse bei $\pm 16 \text{ Hz}$, Komponente 2, Impuls bei $f = 0$

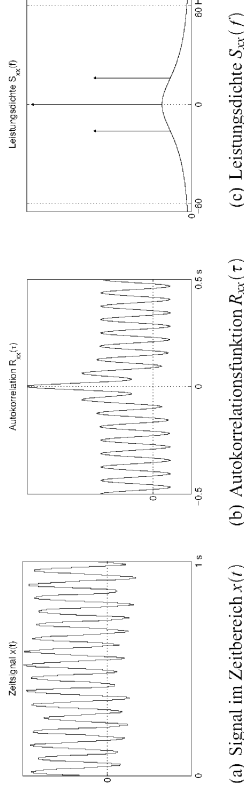


Bild 5: Signal a)

b) Signal b)

- Autokorrelation: dreieck-förmig, Impuls bei $\tau = 0$, Offset A^2 , Frequenz: 8 Hz
- ⇒ Signal im Zeitbereich: rechteck-förmig, weißes Rauschen, Offset 4, Frequenz: 8 Hz
- ⇒ Leistungsdichte: Impulse bei $\pm 8 \pm 24 \pm 40 \dots \text{ Hz}$, Offset, Impuls bei $f = 0$

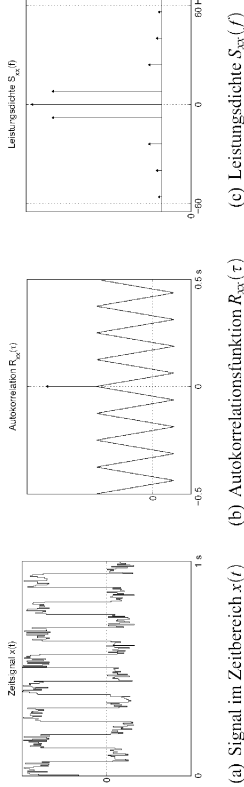


Bild 6: Signal b)

c) Signal c)

- Leistungsdichte: Impulse bei $f = 0$, Komponente 2
- ⇒ Signal im Zeitbereich : Offset 4, farbiges Rauschen
- ⇒ Autokorrelation : Offset A^2 , Komponente 1

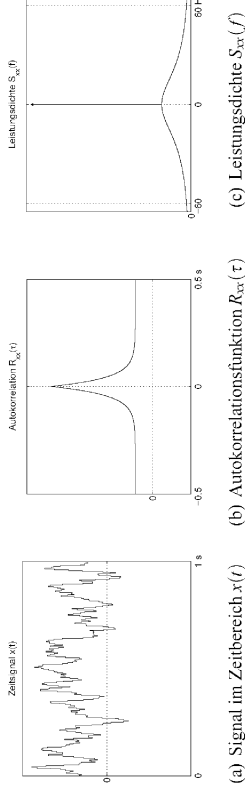


Bild 7: Signal c)

d) χ^2 -Test

- Alle notwendigen Voraussetzungen die erfüllt sind:
 - Unabhängigkeit der Messwerte
 - Hinreichend großer Stichprobenumfang
 - Disjunkte Klasseneinteilung
- Die „Faustregeln“ für die Klasseneinteilung ($n_{i, Rand} \geq 1$) bzw. die übrigen Klassen ($n_i \geq 5$) ist erfüllt.
- Nullhypothese H_0 : „Häufigkeitsverteilung entspricht einer Gleichverteilung“
- statistische Sicherheit $P = 1 - \alpha = 0.95$
- Freiheitsgrade m bei $k = 4$ Klassen: $m = k - 1 = 3$
- Aus Diagramm 4 erhält man $\chi^2_{\alpha} \approx 7.5 - 7.9$

Wegen der Gleichverteilung gilt für jede Klasse $p_i = \frac{1}{4}$. Es ergibt sich Tabelle 2 für den χ^2 -Test.

Klassen i	p	h	ka	kr	Σ
n_i	8	13	6	10	37
$n_i - np_i$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{15}{4}$	$-\frac{13}{4}$	$\frac{3}{4}$	-
χ^2_i	0.1689	1.5203	1.1419	0.0608	2.8919

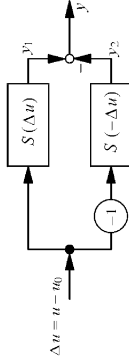
Tabelle 2: Anpassungstest Kartenspiel

Die Nullhypothese H_0 wird angenommen, da $\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = 2.8919 < \chi^2_{\alpha} \approx 7.5$.

Aufgabe 2: Stationäres Verhalten von Messsystemen (22 Punkte)

Lösung

- a) Abbildung zeigt den Aufbau der Differenzenmethode. Dabei geht die Krümmung der Kennlinie



in den geraden Anteil ein und wird durch die Differenzenbildung eliminiert. Daraus folgt die Linearisierung der Kennlinie. Die Empfindlichkeit ist im ungeraden Funktionsteil zu finden und wird deshalb verstärkt.

- b) Die Empfindlichkeit im Arbeitspunkt verdoppelt sich.

$$S_{neu} = 2S_{alt}$$

- c) Der Arbeitspunkt ist immer mitüig zu wählen. Daraus ergibt sich $u_0 = -1$.

- d) Die Differenzenkennlinie berechnet sich aus

$$y_D = 2S(u_0)\Delta u \left\{ 1 + \frac{S''(u_0)}{S(u_0)} \frac{\Delta u^2}{3!} + \dots + \frac{S^{(2\nu)}(u_0)}{S(u_0)} \frac{\Delta u^{2\nu}}{(2\nu+1)!} + \dots \right\}.$$

Die dafür benötigten Ableitungen sind

$$\begin{aligned} S(x) &= 5x^4 - 16x^3 - 54x^2 + 148x + 17, S(x_0) = -164 \\ S'(x) &= 20x^3 - 48x^2 - 108x + 148 \\ S''(x) &= 60x^2 - 96x - 108, S''(x_0) = 48 \\ S'''(x) &= 120x - 96 \\ S'''(x) &= 120 \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Gleichung für die Differenzenkennlinie ergibt sich damit

$$y_D = 2x^5 + 10x^4 + 36x^3 + 68x^2 - 270x - 310.$$

- e) Die Krümmung der Messkennlinie $y(x)$ entspricht

$$\frac{1}{2} S'(x_0)(\Delta u)^2 = 94(x+1)^2$$

- f) Die Krümmung der linearisierten Kennlinie ist null, da dies das Ziel der Differenzenmethode darstellt ($y_D''(u_0) = 0$).

- g) Die Empfindlichkeit der resultierenden idealen Kennlinie entspricht der doppelten Empfindlichkeit der idealen Kennlinie der Messkennlinie $y(x)$.

$$S_{DI} = 2S_I = y_D'(x_0) = -328$$

- h) Das Verhältnis der Fehler im Nullpunkt beträgt null, da der Fehler der Fixpunktjustierung im Nullpunkt null beträgt. Auf den gesamten Messbereich bezogen ist der Fehler der Toleranzbandjustierung halb so groß. Damit ergibt sich für das Verhältnis eine zwei.

- i) Superponierende und deformierende Fehler

- j) Die erste Bedingung für eine Wahrscheinlichkeitsdichte lautet

$$f_x(x) \geq 0 \text{ für alle } x.$$

Daraus resultiert für das vorliegende System und einem maximalem x -Wert von 5

$$\begin{aligned} -ax^2 + bx &\geq 0 \\ b &\geq ax \\ b &\geq 5a. \end{aligned}$$

Eingesetzt in die zweite Bedingung resultiert dies zu

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) dx &= \int_3^5 (5ax - ax^2) dx = \frac{22}{3} a \stackrel{!}{=} 1 \\ \Rightarrow a &= \frac{3}{22} \\ \Rightarrow b &= \frac{15}{22} \end{aligned}$$

- k) Die beiden Zufallsgrößen sind genau dann unabhängig, wenn gilt

$$f_{xy} = f_x f_y$$

Betrachtet man sich die gegebene Funktion, so ist zu erkennen, dass ein Aufspalten in zwei unabhängige Funktionen, die nur von x oder nur von y abhängen, nicht möglich ist.

$$f_{xy} = (2ax^2 + 2x)y - \frac{4}{5}(x+a) \neq f_x f_y$$

Daraus folgt, dass die beiden Größen nicht unabhängig von einander sind.

- l) Durch Erwartungswertbildung kann das mittelwertfreie Rauschen herausgefiltert werden.
m) Aufgrund der Nichtlinearität bleibt ein Offset enthalten.

Aufgabe 3: Korrelationsmesstechnik (21 Punkte)

Lösung

- a) Die drei empfangenen Signale ergeben sich zu

$$u_1(t) = z_1\left(t - \frac{l_y + d + l_{x1}}{c}\right)$$

$$u_2(t) = z_1\left(t - \frac{l_y + d + l_{x2}}{c}\right)$$

$$u_3(t) = z_1\left(t - \frac{d + l_z}{2} + \frac{l_z}{c}\right)$$

- b) Die Kreuzkorrelation $R_{u_1 u_2}$ berechnet sich zu

$$R_{u_1 u_2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T z_1\left(t + \tau - \frac{l_y + d + l_{x1}}{c}\right) z_1\left(t - \frac{l_y + d + l_{x2}}{c}\right) dt.$$

Sie wird genau dann maximal, wenn die beiden Teilintegranden übereinstimmen. Dafür ergibt sich die Beziehung

$$\tau_1 - \frac{l_y + d + l_{x1}}{c} = - \frac{l_y + d + l_{x2}}{c} \\ \Rightarrow \tau_1 = \frac{l_{x1} - l_{x2}}{c}.$$

Mit Hilfe der bekannten Länge l_1 ergibt sich für die gesuchte Länge

$$l_{x2} = \frac{l_1 - \tau_1 c}{2}.$$

Die zweite zu berechnende Kreuzkorrelation berechnet sich analog.

$$R_{u_2 u_3} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T z_1\left(t + \tau - \frac{l_y + d + l_{x2}}{c}\right) z_1\left(t - \frac{\frac{d}{2} + l_z}{c}\right) dt$$

Aus den gleichen Überlegungen resultiert das Maximum dieser Korrelation genau dann, wenn

$$\tau_2 = \frac{l_y + l_{x2} - l_z + \frac{d}{2}}{c} = \frac{2l_y + l_{x2} - l_2 + \frac{d}{2}}{c}$$

ist. Daraus ergibt sich die gesuchte Länge zu

$$l_y = \frac{l_2 + c\tau_2 - l_{x2} - \frac{d}{2}}{2}.$$

- c) Die Korrelation für das Auftreten einer zweiten Störung ergibt sich zu
- $$R_{u_1 u_2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T z_1\left(t + \tau - \frac{l_y + d + l_{x1}}{c}\right) z_1\left(t - \frac{l_y + d + l_{x2}}{c}\right) \\ + z_2\left(t + \tau - \frac{l_y + d + l_{x1}}{c}\right) z_2\left(t - \frac{l_y + d + l_{x2}}{c}\right) \\ + z_1\left(t + \tau - \frac{l_y + d + l_{x1}}{c}\right) z_2\left(t - \frac{l_y + d + l_{x2}}{c}\right) \\ + z_2\left(t + \tau - \frac{l_y + d + l_{x1}}{c}\right) z_1\left(t - \frac{l_y + d + l_{x2}}{c}\right) dt$$

Damit kann folgende Fallunterscheidung getroffen werden:

Tritt die zweite Störung $z_2(t)$ genau an der Stelle gegenüber der ersten auf, so verstärkt sich das Maximum der Kreuzkorrelation lediglich um das Vierfache. Erfolgt der Schaden an einer anderen Stelle im Rohr, so ergeben sich vier verschiedene Maxima der gleichen Größenordnung welche sich in der Kreuzkorrelation $R_{u_1 u_2}$ überlagern.

- d) PRBS ist ein annäherndes weißes Rauschen, welches durch Binärfolgen (z.B. mit Hilfe von Schieberegistern) erzeugt wird.
e) Die gesuchten Größen berechnen sich für den allgemeinen Fall zu

$$R_{\hat{u}\hat{u}} = R_{uu} + R_{mm} + R_{un} + R_{nu} \\ S_{\hat{u}\hat{u}} = \mathcal{F}\{R_{uu}\} + \mathcal{F}\{R_{mm}\} + \mathcal{F}\{R_{un}\} + \mathcal{F}\{R_{nu}\}$$

- f) Für die Unkorreliertheit von $u(t)$ und $n(t)$ vereinfachen sich die Terme.
g) Die Leistungsdichte des Ausgangs setzt sich zusammen aus

$$S_{yy} = S_{\hat{y}\hat{y}} + S_{mm} = |G(f)|^2 (S_{uu} + S_{mm}) + S_{mm}.$$

Daraus ergibt sich für die Übertragungsfunktion

$$|G(f)|^2 = \frac{S_{yy} - S_{mm}}{S_{uu} + S_{mm}}.$$

Dabei berechnet sich S_{yy} aus der Fouriertransformation von R_{yy} zu

$$S_{yy} = \frac{10}{25 + (2\pi f)^2}.$$

Für eine stabile nicht minimalphasige Übertragungsfunktion ergibt sich somit

$$G(f) = \frac{1}{\sqrt{N^2 + \sigma_n^2}} \frac{\sqrt{10 - 25\sigma_n^2} - j\sigma_n 2\pi f}{5 + j2\pi f}$$

und im Zeitbereich

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{N^2 + \sigma_n^2}} (\sqrt{10 - 25\sigma_n^2} e^{-5t} \sigma(t) + 5\sigma_n e^{-5t} \sigma(t) - \sigma_n e^{-5t} \delta(t)).$$

- h) $S_{xx,2}$ ist keine Leistungsdichte, da eine Leistungsdichte immer reell sein muss.

Aufgabe 4: Kurvenanpassung (24 Punkte)

Lösung

- a) Die Wurfbahn lässt sich mathematisch durch die Beziehung

$$h(s) = -as^2 + bs + c$$

beschreiben.

b) Die Messgleichung für eine LS-Schätzung setzt sich folgendermaßen zusammen:

$$\hat{\underline{h}} = \underline{\Psi} \underline{a} = \begin{pmatrix} s_1^2 & s_1 & 1 \\ s_2^2 & s_2 & 1 \\ s_3^2 & s_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Die gesuchten Parameter ergeben sich aus der Formel

$$\underline{a} = (\underline{\Psi}^T \underline{\Psi})^{-1} \underline{\Psi}^T \underline{h}.$$

Die dafür benötigte Pseudoinverse berechnet sich im ersten Schritt zu

$$(\underline{\Psi}^T \underline{\Psi})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 400 \\ 0 & 10 & 20 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 100 & 10 & 1 \\ 400 & 20 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 17 \cdot 10^4 & 9 \cdot 10^3 & 500 \\ 9 \cdot 10^3 & 500 & 30 \\ 500 & 30 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$$

Mit Hilfe der Angabe im Hinweis lässt sich diese Inverse lösen zu

$$(\underline{\Psi}^T \underline{\Psi})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \cdot 10^{-4} & -3 \cdot 10^{-3} & \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \\ -3 \cdot 10^{-3} & \frac{13}{2} \cdot 10^{-2} & -\frac{3}{2} \cdot 10^{-1} \\ \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} & -\frac{3}{2} \cdot 10^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Daraus resultieren die gewünschten Parameter zu

$$\begin{pmatrix} -a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (\underline{\Psi}^T \underline{\Psi})^{-1} \underline{\Psi}^T \underline{h} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Das gesuchte Polynom hat somit die Form

$$h = -0.4s^2 + 8s + 10$$

c) Für eine geringe Anzahl von Messpunkten ist die Verwendung der Interpolation besser geeignet.
(Alternativ: Wenn die Kurve durch die Stützstellen gehen soll,)

d) Das gesuchte Polynom berechnet sich aus

$$\hat{h}_L = 10L_0 + 50L_1 + 10L_2.$$

Die einzelnen Lagrange-Polynome berechnen sich dabei aus

$$L_0 = \frac{(s-10)(s-20)}{(-10)(-20)} = \frac{1}{200}(s-10)(s-20)$$

$$L_1 = \frac{s(s-20)}{10(-10)} = -\frac{1}{100}s(s-20)$$

$$L_2 = \frac{s(s-10)}{20 \cdot 10} = \frac{1}{200}s(s-10).$$

Daraus resultiert das Interpolationspolynom aus obiger Formel zu

$$\hat{h}_L = -\frac{2}{5}s^2 + 8s + 10.$$

e) Die Länge der einzelnen Teilintervalle beträgt konstant $\Delta s = 10$. Die zweiten Ableitungen berechnen sich zu

$$\begin{aligned} h_0'' &= 0 \\ h_2'' &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 4\Delta s h_1'' &= \frac{6}{\Delta s}(h_2 - 2h_1 + h_0) \\ &\Rightarrow h_1'' = -\frac{6}{5}. \end{aligned}$$

Damit lassen sich die Koeffizienten der Splines berechnen.

$$a_0 = -\frac{1}{50}, a_1 = \frac{1}{50}$$

$$b_0 = 0, b_1 = -\frac{3}{5}$$

$$c_0 = 6, c_1 = 0$$

$$d_0 = 10, d_1 = 50$$

Die daraus resultierenden Spline-Polynome ergeben sich zu

$$\hat{h}_{s,0} = -\frac{1}{50}s^3 + 6s + 10, \text{ für } 0 \leq s \leq 10$$

$$\hat{h}_{s,1} = \frac{1}{50}(s-10)^3 - \frac{3}{5}(s-10)^2 + 50 = \frac{1}{50}s^3 - \frac{6}{5}s^2 + 18s - 30, \text{ für } s > 10.$$

f) Die quadratischen Splines sollen allgemein die Form

$$s_i(x) = a_i(x-x_i)^2 + b_i(x-x_i) + c_i$$

besitzen. Analog zu der Herleitung für kubische Splines ergibt sich für das Einsetzen der Stützstellen die Beziehungen

$$s_i(x_i) = c_i = y_i$$

$$s_i'(x_{i+1}) = a_i \Delta x_i^2 + b_i \Delta x_i + c_i = y_{i+1}$$

und für die Ableitungen des Splines

$$\begin{aligned} s_i'(x_i) &= b_i \\ s_i'(x_{i+1}) &= 2a_i \Delta x_i + b_i \\ s_i''(x_i) &= 2a_i = y_i'' \\ s_i''(x_{i+1}) &= 2a_i = y_{i+1}''. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für die Berechnung der Parameter der quadratischen Splines

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{y_i''}{2} \quad (\text{Alternativ: } a_i = \frac{y_{i+1}''}{2}) \\ b_i &= \frac{1}{\Delta x_i}(y_{i+1} - y_i - \Delta x_i^2 \frac{y_i''}{2}) \\ c_i &= y_i. \end{aligned}$$

Um die Bestimmung der zweiten Ableitungen zu ermöglichen wird die Voraussetzung der Splines zur Hilfe genommen, dass die ersten Ableitungen in den Stützstellen übereinstimmen müssen. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} 2a_i \Delta x_i + b_i &= \frac{y_i''}{2} \Delta x_i + \frac{1}{\Delta x_i}(y_{i+1} - y_i) \stackrel{!}{=} b_{i+1} \\ &\Rightarrow \frac{y_i''}{2} \Delta x_i + \frac{y_{i+1}''}{2} \Delta x_i = -\frac{1}{\Delta x_i}(y_{i+1} - y_i) + \frac{1}{\Delta x_i}(y_{i+2} - y_{i+1}). \end{aligned}$$

g) Die Länge der Teilintervalle sowie die zweiten Ableitungen in den Randpunkten entsprechen der kubischen Spline-Interpolation aus Aufgabenteil e). Die zweite Ableitung an der zweiten Stützstelle berechnet sich nach vorhergehenden Aufgabenteil zu

$$h_1'' = -\frac{8}{5}.$$

Daraus resultieren die gesuchten Koeffizienten

$$a_0 = 0, a_1 = -\frac{4}{5}$$

$$b_0 = 4, b_1 = 4$$

$$c_0 = 10, c_1 = 50$$

und die gesuchten Polynome

$$\hat{h}_{sp,0} = 4s + 10, \text{ für } 0 \leq s \leq 10$$

$$\hat{h}_{sp,1} = -\frac{4}{5}(s-10)^2 + 4(s-10) + 50 = -\frac{4}{5}s^2 + 20s - 70, \text{ für } s > 10.$$

Aufgabe 5: Quantisierung (16 Punkte)

Lösung

- a) Das Stör zu Rauschverhältnis berechnet sich allgemein aus $SNR_q = \frac{P_{\text{sig}}}{P_{\text{stör}}}$. Da das lineare Quantisierungsmodell Gültigkeit hat, wird das Quantisierungsrauschen als gleichverteilt angenommen. Daraus resultiert für die Störleistung

$$P_{\text{stör}} = \sigma_{e_q}^2 = \frac{q^2}{12}.$$

Die Signalleistung berechnet sich aus der Autokorrelation $P_{\text{sig}} = R_{uu}(0)$. Die Autokorrelation ergibt sich zu

$$\begin{aligned} R_{uu}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{B^2}{4} \cos(\omega t + \tau) \sin(\omega t + \tau) \cos(\omega t) \sin(\omega t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \frac{B^2}{4} \int_{-T}^T (\cos^2(\omega \tau) - \sin^2(\omega \tau)) \cos^2(\omega t) \sin^2(\omega t) \\ &\quad + \cos(\omega \tau) \sin \omega \tau (\cos^3(\omega t) \sin(\omega t) - \sin^3(\omega t) \cos(\omega t)) dt \\ &= \frac{B^2}{32} (\cos^2(\omega \tau) - \sin^2(\omega \tau)) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Signalleistung zu

$$P_{\text{sig}} = R_{xx}(0) = \frac{B^2}{32}.$$

Dabei muss für die Amplitudenquantisierung folgendes gelten:

$$\begin{aligned} \frac{b}{2} 2 &= q 2^N \\ B &= q 2^N \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich nun das SNR_q zu

$$SNR_q = \frac{q^2 2^{2N} 12}{32 q^2} = \frac{3}{8} 2^{2N}$$

- b) Das SNR_q ist nach vorangegangener Aufgabe

$$SNR_q|_{dB} = 10 \log\left(\frac{3}{8} 2^{2N}\right) dB \geq 43 dB$$

Damit ergibt sich für die Auflösung

$$N = \frac{1}{2} \log_2\left(\frac{8}{3} 10^{4.3}\right) = 7.8497 \hat{=} 8 \text{ Bit}$$

- c) Je näher die Signalfrequenz an der Nyquistfrequenz liegt, desto verstärkt treten Jitter Fehler auf, da bei großen Frequenzen die Änderungen in dem Zeitintervall t_{max} ebenso stärker sind.
- d) Für die Periodendaueremessung ist der maximale Fehler proportional zu der Frequenz $F_{r,PD,M} \propto f$. Bei der Frequenzzählung dagegen liegt eine antiproportionale Beziehung vor $F_{r,FZ} \propto \frac{1}{f}$. Da die zu betrachteten Frequenzen in dem Bereich $0 \text{ Hz} \leq f \leq 1.881 \text{ Hz}$ liegen, ist somit die Periodendaueremessung besser geeignet.
- e) Die Anzahl der Zähne für die Periodendaueremessung berechnet sich aus

$$z = \frac{f_0}{Nf}.$$

Um die maximal mögliche Frequenz gerade noch zu erfassen, muss $N = 1$ gewählt werden. Damit ergibt sich eine Zähnezahl von $z = 20$.

- f) Der maximale Fehler berechnet sich zu

$$F_{r,max} = \frac{f}{f_0} z = 1.$$

Klausur im Kernfach
Messtechnik

A1 (20)	A2 (23)	A3 (19)	A4 (22)	A5 (16)	Gesamt (100)	Note
---------	---------	---------	---------	---------	--------------	------

Aufgabe 1: Korrelationsmesstechnik und Statistik (20 Punkte)

Verwenden Sie für die Bearbeitung weder Bleistifte noch Stifte mit roter Farbe!

- a) Zeichnen Sie zu folgendem Signal $x(t)$ dessen Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ und dessen Leistungsdichte $S_{xx}(f)$! **Begründen Sie Ihre Lösung, beschriften und beziffern Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung. (4 Punkte)**

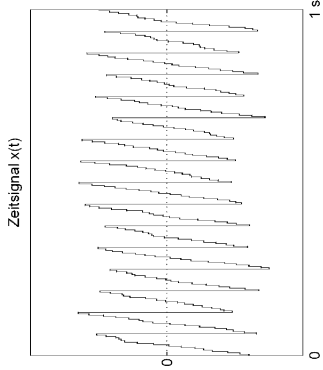


Bild 1: Signal $x(t)$: Signal a)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

- b) Zeichnen Sie zu folgender Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ deren Signal $x(t)$ im Zeitbereich und deren Leistungsdichte $S_{xx}(f)$! **Begründen Sie Ihre Lösung, beschriften und beziffern Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung. (4 Punkte)**

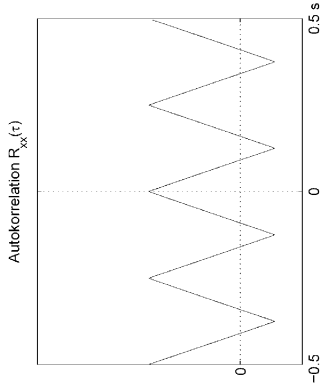


Bild 2: Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$: Signal b)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

- c) Zeichnen Sie zu folgender Leistungsdichte $S_{xx}(f)$ deren Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ und deren Signal $x(t)$ im Zeitbereich! **Begründen Sie Ihre Lösung, beschriften und beziffern Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung. (4 Punkte)**
Hinweis: Die Leistungsdichte c) hat Impulse bei $\pm 4 \text{ Hz}$.

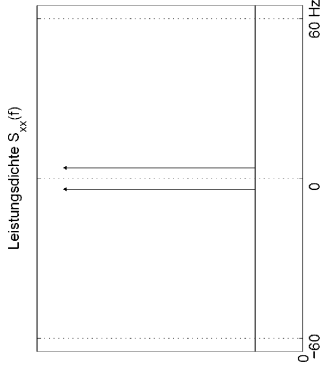


Bild 3: Leistungsdichte $S_{xx}(f)$: Signal c)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Aufgabenteilen.

Um den Gesamtwiderstand einer Schaltung eines Produktes zu bestimmen, wird dieser mehrmals unter gleichen Randbedingungen gemessen. Dabei ergeben sich folgende Werte.

R	133,34	135,2	132,75	140,1	138,4
i-te Messung	1	2	3	4	5

Tabelle 1: Die gemessenen Widerstandswerte

- d) Bestimmen Sie die Stichprobenstandardabweichung. (2 Punkte)
e) Der Toleranzbereich wurde auf $|\bar{x}| \leq 138,81$ gelegt. Wie groß ist die statistische Sicherheit? (3 Punkte)
Hinweis: Die Gaußsche Fehlerfunktion finden Sie in Bild 4 und die statistische Sicherheit mit Hilfe der Student-t-Verteilung in Bild 5.

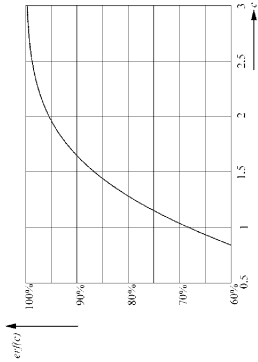


Bild 4: Die Gaußsche Fehlerfunktion

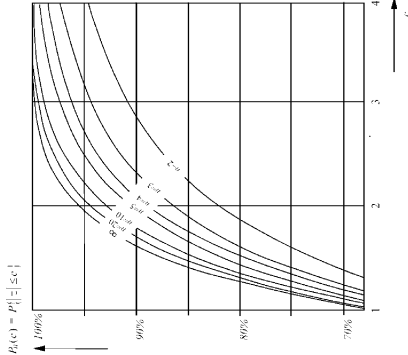


Bild 5: Die Statistische Sicherheit mit der Student-t-Verteilung

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Aufgabenteilen.

Die fertigen Produkte werden nun an den Kunden geliefert. Dieser möchte überprüfen, ob die vertraglich festgelegte Ausfallrate eingehalten wurde. Dazu werden unter Hitze (bei einem Raftungsfaktor von $r = 20$) $n = 1000$ Widerstände für einen Zeitdauer von $t = 168$ h getestet. Dabei ergaben sich folgende Ausfälle.

k-ter Ausfall	1	2	3	4
Zeitpunkt in h	20	60	100	168

Tabelle 2: Die Ausfälle des Tests

- f) Wie groß ist die Ausfallrate? (1 Punkte)
- g) Ein konkurrierender Lieferant bietet das gleiche Produkt zu einem günstigeren Preis an. Vergleichen Sie die Qualität beider Anbieter anhand der Ausfallrate. Der Test des 2. Lieferanten sei bei 500 Stück 24h unter gleichen Bedingungen wie oben durchgeführt. Dabei treten keine Ausfälle auf. Welcher Lieferant ist zu bevorzugen? (2 Punkte)

Aufgabe 2: Stationäres Verhalten von Messsystemen (23 Punkte)

Ein neues Produkt soll gefertigt werden. Die Qualität desselben soll mittels Prüfung überwacht werden. Dazu soll ein geeigneter Messbereich der Messkennlinie gefunden werden.

- a) Welche Anforderungen muss ein solcher günstiger Messbereich erfüllen? Nennen Sie 2! (1 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von der bisherigen Teilaufgabe.

- b) Bestimmen Sie den günstigen Messbereich innerhalb des Intervalls $-2 \leq x \leq 8$ für eine Länge des Arbeitsbereichs von 4. Die zu linearisierende Kennlinie habe den Verlauf $y(x) = (x+1)(x-1)$. Geben sie zusätzlich die ideale Empfindlichkeit S_I des resultierenden Messbereichs an. (4 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- c) Um eine genauere Darstellung zu erhalten, wurde zusätzlich die Temperaturabhängigkeit des Produkts berücksichtigt. Dadurch ändert sich die Kennlinie zu $y(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$. Bestimmen Sie den günstigen Messbereich innerhalb des Intervalls $-2 \leq x \leq 8$ für eine Länge des Bereichs von 4 und die ideale Empfindlichkeit dieses resultierenden Messbereiches. Verwenden Sie das Verfahren „Wahl eines günstigen Messbereichs“! (4 Punkte)
- d) Ist der Bereich aus c) sinnvoll? Begründen Sie Ihre Aussage! (1 Punkt)
- e) Wie würde die lineare Arbeitskennlinie für den Fall in b) und in c) aussehen? (2 Punkte)
- f) Geben Sie die absoluten Fehler in den Arbeitspunkten der beiden Kennlinien aus e) an. (2 Punkte)
- g) Wie groß ist der relative Fehler im Messbereichsanfang und im Messbereichsende für beide Arbeitskennlinien? (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- h) Welche neben der Linearisierung zusätzlichen Vorteile bringt die Differenzmethode mit sich? (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Folgende Zufallsvariable z ist in Abhängigkeit von den Zufallsvariablen x und y gegeben. Dabei seien das erste Moment und das zweite zentrale Moment der Zufallsvariablen x und y als bekannt vorausgesetzt und diese beiden Zufallsvariablen voneinander unabhängig.

$$z = x - 2y$$

- i) Geben Sie die Varianz σ_z^2 in Abhängigkeit von nur bekannten Größen an. (3 Punkte)
- j) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten r_{zx} in Abhängigkeit von den bekannten Momenten der Zufallsvariablen x und y . (2 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- k) Erklären Sie den Zusammenhang zwischen dem Begriff Messunsicherheit und Fehlergrenze. (1 Punkte)

Aufgabe 3: Korrelationsmesstechnik (19 Punkte)

Ein intelligentes Garagentoröffnungssystem soll bei einem zweiflügeligen Garagentor, bei dem die beiden Flügel zur Seite hin aufgehen, Verwendung finden. Das Öffnungssystem soll bevor es die Garage öffnet überprüfen, ob ein Fahrzeug zu dicht vor dem Tor steht. Deshalb soll der Abstand x vom maximal geöffneten Tor zu einem davor parkenden Fahrzeug berechnet werden. Dafür ist ein Sensor direkt mittig über dem Tor angebracht. Dieser Sensor sendet eine Schallwelle $u(t)$ ab und empfängt gleichzeitig deren Reflexionen $s(t)$.

Als vereinfachte Annahme soll zunächst der Fall untersucht werden, dass nur ein „Schallstrahl“ anstatt einem Schallkegel direkt gerade nach vorne abgesendet werden wird. Der Sachverhalt ist in Abbildung 9 skizziert.

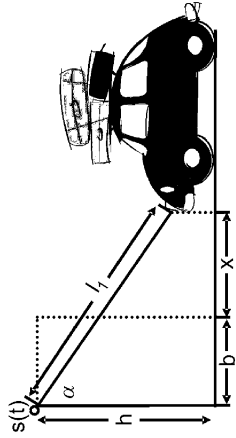


Bild 9: Fahrzeugerkennung vor einer offenen Garage, vereinfachter Fall

Dabei habe das Garagentor die Höhe h und die beiden Torflügel je eine Breite von b . Der Sensor strahlt unter dem Winkel α den Schall zum Boden hin ab. Nach der Distanz l_1 treffe er das Fahrzeug und werde streuungs- und verlustfrei zurückreflektiert.

- a) Berechnen Sie unter dieser vereinfachten Annahme den Abstand x . Verwenden Sie dazu die Kreuzkorrelation $R_{sd}(\tau)$. (5 Punkte)

Im nächsten Schritt soll berücksichtigt werden, dass in Wirklichkeit ein Sendekegel nach Abbildung 10 verwendet wird.

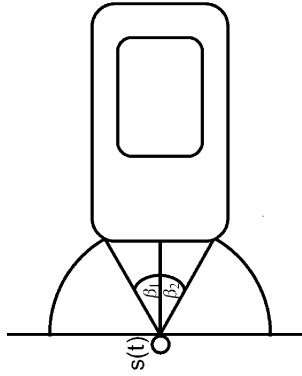


Bild 10: Aufsicht auf die Schallabstrahlung

- b) Welche Auswirkungen hat diese Änderung auf die Maxima von R_{sd} ? Geben Sie die Größenordnung und die zugehörigen τ -Werte für die Maxima an. Dabei soll das Fahrzeug exakt symmetrisch zur Längsachse sein. (4 Punkte)

Hinweis: Eine Fallunterscheidung mit drei Fällen ist notwendig.

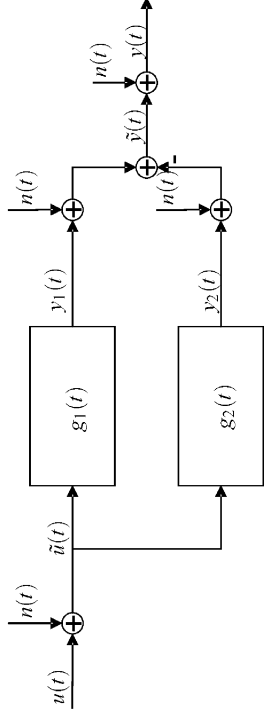
- c) Welche Änderung muss für die Detektion von x vorgenommen werden, um den Sendekegel zu berücksichtigen? (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- d) Was berechnet ein closed-loop Korrelator und wozu ist er notwendig? (2 Punkte)
e) Welchen Vorteil hat der Polariitätskorrelator im Vergleich zu dem closed-loop Korrelator? (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Das folgende LTI-System sei gegeben. Dabei sei das Rauschen $n(t)$ von allen anderen Signalen un-



korreliert. Folgende Eigenschaften sind von dem System bekannt

$$S_{nn} = \sigma_n^2, G_1(f) = \frac{1}{2 + j2\pi f}$$

$$S_{y_2 y_2} = \frac{\frac{1}{4}(\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)) + \sigma_n^2}{9 + (2\pi f)^2}$$

$$S_{yy} = \frac{(41 + (2\pi f)^2(13 + (2\pi f)^2))\sigma_n^2 + \frac{5}{4}(\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0))}{(4 + (2\pi f)^2)(9 + (2\pi f)^2)}$$

- f) Berechnen Sie die Leistungsdichte S_{nn} aus der Leistungsdichte des Ausgangs S_{yy} . (5 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

- g) Wann kann für ein Störsignal weißes Rauschen als Modellansatz verwendet werden? (1 Punkt)

Aufgabe 4: Kurvenanpassung (22 Punkte)

- a) Stellen Sie die drei bekannten Interpolationsverfahren einander gegenüber. Gehen Sie dabei nur auf die Vor- und Nachteile der Verfahren ein. (3 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von der bisherigen Teilaufgabe.

Der Geschwindigkeitsverlauf eines Fahrzeuges wurde stückweise vermessen. Bei der Nachbearbeitung dieser soll nun daraus die Beschleunigung berechnet werden. Dazu müssen in einem ersten Schritt aus den aufgezeichneten Messpunkten (siehe Tabelle 3) eine Kurve gewonnen werden.

v in $\frac{m}{s}$	4	7,5	10,4	9,4	8,5	7,3	6
t in s	0,3	1	1,7	2	2,2	3,2	4

Tabelle 3: Die aufgezeichneten Messpunkte der Geschwindigkeitskurve

- b) Führen Sie eine kubische Spline-Interpolation für die Messpunkte aus Tabelle 3 für $t \geq 2s$ durch. Geben Sie die resultierenden Polynome in der Form $\hat{v}_{SP,i}(t) = a_i(t - t_i)^3 + b_i(t - t_i)^2 + c_i(t - t_i) + d_i$ an! (7 Punkte)

- c) Führen Sie für die Messpunkte aus obiger Tabelle eine Newton-Interpolation für den Bereich $0,3 \leq t \leq 2$ durch und geben Sie das resultierende Polynom in der Form $\hat{v}_N(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$ an. (4 Punkte)

d) Um nun eine Geschwindigkeitskurve für den gesamten Zeitbereich $(0, 3 \leq t \leq 4)$ zu erhalten, sollen die Interpolationsergebnisse aus **b)** und **c)** zusammengesetzt werden. Das Ziel ist es daraus den Beschleunigungsverlauf berechnen zu können. Ist ein Zusammensetzen der verschiedenen Polynome in allen Zeitbereichen möglich? Begründen Sie Ihre Aussage! (2 Punkte)

e) Um beide betrachtete Interpolationsverfahren miteinander vergleichen zu können, soll für eines der Verfahren ein weiterer Messpunkt hinzugefügt werden, damit eine Überschneidung der Gültigkeitsbereiche vorliegt. Führen Sie die Interpolation für den erweiterten Bereich durch. Die Wahl des Interpolationsverfahrens ist dabei frei, muss allerdings begründet werden. Geben Sie das resultierende Polynom in der Form $\hat{v}_e(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots$ an. (3 Punkte)

f) Berechnen Sie den relativen Fehler zwischen den Ergebnissen aus **e)** und dem anderen Interpolationsverfahren bezogen auf das Ergebnis der Spline-Interpolation für $t = 2s$. Was ist die Ursache dieses Fehlers? (2 Punkte)

g) Wie wird sich der Fehler aus **f)** ändern, wenn anstatt der Newton- die Lagrange-Interpolation verwendet werden würde? Begründen Sie Ihre Aussage! (1 Punkt)

Aufgabe 5: Quantisierung (16 Punkte)

Im Folgenden sollen zwei verschiedene A/D-Wandler, welche ein mit der Grenzfrequenz $f_G = 10\text{Hz}$ bandbegrenztes sinusförmiges Signal ($f = 10\text{Hz}$) messen sollen, bewertet werden. Die beiden Geräte A und B haben folgende technische Daten:

- A: 21Bit, $f_a = 30\text{kHz}$
 B: 16Bit, $f_a = 40\text{kHz}$

a) Berechnen Sie jeweils den maximalen Abtastzeitfehler τ_{max} für ein größeres Signal zu Rauschverhältnis des Jitterfehlers als des Quantisierungsrauschens und bewerten Sie das Verhältnis zur Abtastzeit. Welches der Geräte ist besser? (4 Punkte)

Hinweis: Es gelte das lineare Quantisierungsmodell.

b) Welcher Parameter des A/D-Wandlers müsste wie verändert werden, damit ein niedriger Abtastzeitfehler entsteht? (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

c) Warum ist ein allgemeiner Frequenzbegriff notwendig? (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

d) Gegeben sei folgende Leistungsdichte

$$S_{xx} = \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$$

Bestimmen Sie die mittlere Frequenz. (4 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

e) Nennen Sie drei Fehler, die durch die Abtastung entstehen können und erklären Sie **kurz** die Ursache dafür. (3 Punkte)

Bemerkung: Stichworte sind völlig ausreichend!

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

f) Wie ändert sich der Erwartungswert und die Varianz eines quantisierten Signals im Vergleich zu seinen kontinuierlichen Momenten, wenn das Quantisierungstheorem eingehalten worden ist? (2 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

g) Wieso sind bei der Implementierung von einer Drehzahlmessung frequenzanaloge Verfahren besser geeignet als amplitudenanaloge? Nennen Sie zwei Gründe. (1 Punkt)

Aufgabe 1: Korrelationsmesstechnik und Statistik (20 Punkte)

Lösung

Bemerkung: Die Leistungsdichte und die Autokorrelation von farbigem Rauschen sind im Messtechnik-Buch (Kienecke, Eger, *Messtechnik*, 6. Auflage, Springer-Verlag, 2005) auf Seite 224 abgebildet und werden in der Lösung als *Komponente 1* für Autokorrelation und *Komponente 2* für Leistungsdichte bezeichnet.

a) Signal **a)**

- Signal im Zeitbereich: sägezahn-förmig, farbiges Rauschen, Frequenz: 16 Hz
 $\Rightarrow$ Autokorrelation: parabel-förmig, Komponente 1, Frequenz: 16 Hz
 $\Rightarrow$ Leistungsdichte: Impulse bei $\pm 16 \pm 32 \pm 48 \dots \text{Hz}$, Komponente 2

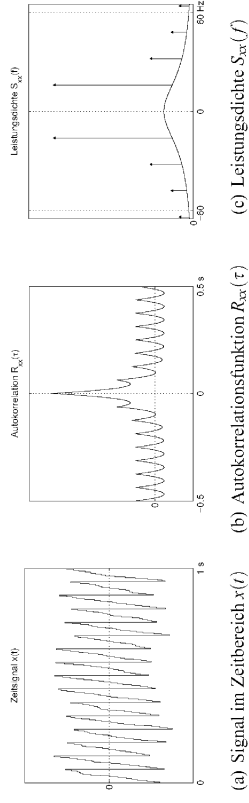


Bild 6: Signal **a)**

b) Signal **b)**

- Autokorrelation: dreieck-förmig, Offset A^2 , Frequenz: 4 Hz
 $\Rightarrow$ Signal im Zeitbereich: rechteck-förmig, Offset A , Frequenz: 4 Hz
 $\Rightarrow$ Leistungsdichte: Impulse bei $\pm 4 \pm 12 \pm 20 \dots \text{Hz}$, Impuls bei $f = 0$

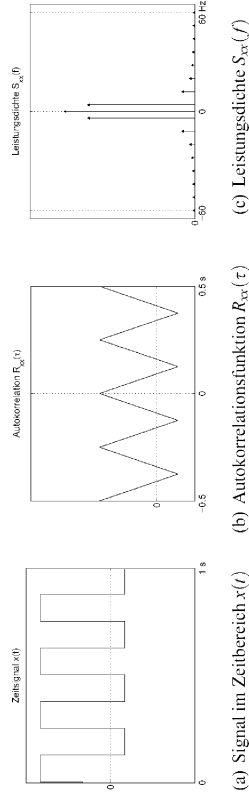


Bild 7: Signal **b)**

c) Signal c)

- Leistungsdichte: Impulse bei $\pm 4\text{Hz}$, Offset
- Signal im Zeitbereich : sinus-förmig, weißes Rauschen, Frequenz: 4 Hz
- Autokorrelation : cosinus-förmig, Impuls bei $\tau = 0$, Frequenz: 4 Hz

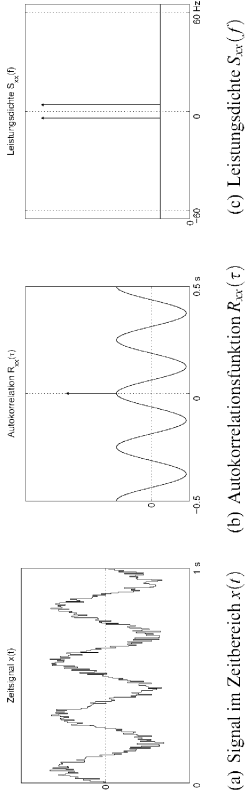


Bild 8: Signal c)

- d) Zunächst muss der Stichprobenmittelwert berechnet werden.

$$\hat{x} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 R_i = 135,958$$

Daraus resultiert die Stichprobenstandardabweichung zu

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{n}{n-1} \bar{x}^2} = \sqrt{10,21}.$$

- e) Das Konfidenzintervall umfasst

$$138,81 = \hat{x} + c \frac{S_x}{\sqrt{n}}.$$

Daraus resultiert für c der Wert $c \approx 1,996$. Mit $n = 5$ und der gegebenen Abbildung 5 ergibt sich für die statistische Sicherheit bei geschätzter Standardabweichung $P_n(c) \approx 89\%$.

- f) Die Ausfallrate ergibt sich nach Messtechnik-Buch (Kiencke, Eger, Messtechnik, 6. Auflage, Springer-Verlag, 2005) Seite 177 zu

$$\lambda = \frac{f(4)}{mtr} = 2,378 \cdot 10^{-6} h^{-1}.$$

- g) Die zweite Ausfallrate ergibt sich zu

$$\lambda_2 = \frac{f(0)}{mtr} = 9,58 \cdot 10^{-6} h^{-1}.$$

Da die Ausfallrate des zweiten Lieferanten höher als die des ersten ist, ist der erste Lieferant vorzuziehen.

Aufgabe 2: Stationäres Verhalten von Messsystemen (23 Punkte)

Lösung

- a) Die Kennlinie soll dort möglichst linear verlaufen und eine hohe Empfindlichkeit aufweisen.

- b) Zunächst ist zu überprüfen, ob ein Wendepunkt vorhanden ist. Notwendige Bedingung dafür ist das Verschwinden der zweiten Ableitung.

$$\begin{aligned} y(x) &= x^2 - 1 \\ y'(x) &= 2x \\ y''(x) &= 2 \Rightarrow \text{kein Wendepunkt vorhanden} \end{aligned}$$

Da kein Wendepunkt vorhanden ist, muss folgende Gleichung angesetzt werden.

$$\frac{1}{2}(S(x_a + d) + S(x_a)) - S_j = 0$$

$$2x_a + 4 - S_j = 0$$

Die Empfindlichkeit ist proportional zu x , so dass eine maximale Empfindlichkeit bei einem maximalen x_a erreicht wird. Daraus folgt für den Messbereich $x_a = 4$, $x_e = 8$ und $S_j = 12$.

- c) Auch hier muss zunächst nach einem Wendepunkt gesucht werden.

$$\begin{aligned} y(x) &= x^3 - 2x^2 - x + 2 \\ S(x) &= 3x^2 - 4x - 1 \end{aligned}$$

$$S'(x) = 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$S''(x) = 6 \neq 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ist ein Wendepunkt}$$

Nach dem Ansatz für einen Arbeitsbereich mit Wendepunkt ergibt sich

$$\begin{aligned} S(x_a + d) - S(x_a) &= 32 + 24x_a = 0 \\ &\Rightarrow x_a = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Die ideale Empfindlichkeit berechnet sich daraus zu

$$S_j = \frac{y(x_a + d) - y(x_a)}{d} = 1,67.$$

- d) Der Bereich aus c) ist nicht sinnvoll, da in diesem Teil der Kennlinie die Steigung sehr gering ist. Bei Verwendung des selben Bereiches wie aus b) ist ein geeigneter Arbeitsbereich möglich.

- e) Die Arbeitskennlinien ergeben sich zu

$$\begin{aligned} y_b &= S_j(x - x_a) + y_a = 12(x - 4) + 15 \\ y_c &= 1,67(x + \frac{4}{3}) - 2,593. \end{aligned}$$

- f) Die Arbeitspunkte liegen jeweils in der Mitte des Arbeitsbereiches und ergeben sich zu $AP_b = 6$ und $AP_c = \frac{2}{3}$. Daraus resultieren die absoluten Fehler zu

$$F_{abs}(AP_b) = 4 \quad F_{abs}(AP_c) = 0 \text{ bzw. } 0,007$$

- g) Der Fehler im Anfangs- und Endpunkt ist jeweils null.

- h) Bei der Differenzenmethode verdoppelt sich die Empfindlichkeit und superponierende Fehler werden eliminiert.

- i) Die Varianz berechnet sich folgendermaßen

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= E\{z^2\} - \mu_z^2 = E\{(x - 2y)^2\} - (\mu_x - 2\mu_y)^2 \\ &= E\{x^2\} + 4E\{y^2\} - 4\mu_x\mu_y - \mu_x^2 - 4\mu_y^2 + 4\mu_x\mu_y = \sigma_x^2 + 4\sigma_y^2. \end{aligned}$$

- j) Für die Berechnung des Korrelationskoeffizienten wird zunächst die Kovarianz C_{xy} benötigt.

$$C_{xy} = E\{x y\} - \mu_x \mu_y = E\{x^2 - 2xy\} - \mu_x^2 + 2\mu_x \mu_y = \sigma_x^2$$

Daraus resultiert

$$r_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{\sigma_x^2 + 4\sigma_y^2}}$$

- k) Damit die vereinbarten zulässigen Abweichungen (die Fehlergrenzen) eingehalten werden können, muss die Messunsicherheit erheblich kleiner als der durch die Fehlergrenze vorgegebene Bereich sein.

Aufgabe 3: Korrelationsmesstechnik (19 Punkte)

Lösung

- a) Das wieder empfangene Signal hat folgende Abhängigkeit zum gesendeten Signal $u(t)$

$$s(t) = u(t - \Delta t) = u\left(t - 2\frac{l_1}{v_s}\right).$$

Somit berechnet sich die Kreuzkorrelation zu

$$R_{su} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u\left(t - 2\frac{l_1}{v_s} + \tau\right) u(t) dt$$

Diese ist maximal für $\tau = 2\frac{l_1}{v_s}$. Daraus resultiert die Länge l_1 zu $l_1 = \frac{v_s}{2}$.

Der geometrischen Zusammenhang der verschiedenen benötigten Längen ist Bild 11 zu entnehmen. Daraus resultiert unmittelbar

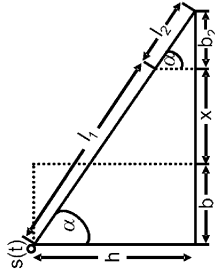


Bild 11: Die geometrischen Zusammenhänge

$$\begin{aligned} l_{ges} &= \frac{h}{\cos(\alpha)} \Rightarrow l_2 = l_{ges} - l_1 = \frac{h}{\cos(\alpha)} - \frac{v_s}{2} \\ b_2 &= \sin(\alpha) l_2 \quad b_{ges} = \sin(\alpha) l_{ges} \\ \Rightarrow x &= b_{ges} - b - b_2 = \sin(\alpha) \frac{v_s}{2} - b \end{aligned}$$

- b) Es gibt 3 Fälle zu unterscheiden.

1. Fall: $\beta_1 = \beta_2$

Es gibt zwei unterschiedliche Maximabereiche. Das erste Maxima mit der Amplitude a liegt bei $\tau_1 = 2\frac{l_1}{v_s}$ und entspricht dem Ergebnis aus Aufgabenteil a). Das zweite Maximum hat die Amplitude $2a$ und liegt in dem Bereich $\tau_1 < \tau_2 \leq \frac{2l_1}{\cos\beta_1 v_s}$.

2. Fall: $\beta_1 > \beta_2$

Es gibt drei unterschiedliche Maximabereiche. Das erste Maxima mit der Amplitude a liegt bei $\tau_1 = 2\frac{l_1}{v_s}$ und entspricht dem Ergebnis aus Aufgabenteil a). Das zweite Maximum hat die Amplitude $2a$ und liegt in dem Bereich $\tau_1 < \tau_2 \leq \frac{2l_1}{\cos\beta_2 v_s}$. Das dritte Maxima hat die Amplitude a und liegt in dem Bereich $\tau_2 < \tau_3 \leq \frac{2l_1}{\cos\beta_1 v_s}$.

3. Fall: $\beta_2 > \beta_1$

Es gibt drei unterschiedliche Maximabereiche. Das erste Maxima mit der Amplitude a liegt bei $\tau_1 = 2\frac{l_1}{v_s}$ und entspricht dem Ergebnis aus Aufgabenteil a). Das zweite Maximum hat die Amplitude $2a$ und liegt in dem Bereich $\tau_1 < \tau_2 \leq \frac{2l_1}{\cos\beta_1 v_s}$. Das dritte Maxima hat die Amplitude a und liegt in dem Bereich $\tau_2 < \tau_3 \leq \frac{2l_1}{\cos\beta_2 v_s}$.

- c) Es muss keine Änderung in der Detektion vorgenommen werden, da für die Berechnung stets das erste Maxima für die Bestimmung von τ verwendet wird. Für dieses erste Maxima legt der Schall den kürzesten Weg zurück, was genau dem Schallstrahl, welcher senkrecht auf das Fahrzeug trifft (also Aufgabenteil a)), entspricht.
- d) Ein closed-loop Korrelator berechnet die Laufzeitdifferenz τ online. Dies ist nötig, da ansonsten das Ergebnis für τ erst am Ende des Integrationsintervalls bekannt wäre.
- e) Bei dem Polaritätskorrelator muss das Produkt $x(t - \tau)y(t)$ nicht gebildet werden.
- f) Die Leistungsdichte am Eingang berechnet sich folgendermaßen.

$$\begin{aligned} S_{uu} &= S_{\ddot{u}\ddot{u}} - S_{mm} = \frac{S_{\ddot{u}v_1 v_1}}{|G_1(f)|^2} - S_{mm} = \frac{S_{yy} - S_{mm} + S_{y_2 y_2}}{|G_1(f)|^2} - S_{mm} \\ &= \frac{((41 + (2\pi f)^2(13 + (2\pi f)^2))\sigma_n^2 + \frac{5}{4}(\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0))(4 + (2\pi f)^2))}{(4 + (2\pi f)^2)(9 + (2\pi f)^2)} \\ &\quad - \frac{(\sigma_n^2(4 + (2\pi f)^2)(9 + (2\pi f)^2) + (\frac{1}{4}(\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)) + \sigma_n^2)(4 + (2\pi f)^2)(4 + (2\pi f)^2))}{(4 + (2\pi f)^2)(9 + (2\pi f)^2)} \\ &\quad - \frac{\sigma_n^2(9 + (2\pi f)^2)(4 + (2\pi f)^2)}{(4 + (2\pi f)^2)(9 + (2\pi f)^2)} \\ &= \frac{1}{4}(\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)) \end{aligned}$$

- g) Wenn das Störsignal auf Systeme mit Tiefpass- oder Bandpasscharakter trifft, kann das weiße Rauschen als Modellansatz verwendet werden.

Aufgabe 4: Kurvenanpassung (22 Punkte)

Lösung

- a) Eine Gegenüberstellung der Interpolationsverfahren Newton-, Lagrange- und Spline-Interpolation ist folgender Tabelle zu entnehmen.

Eigenschaft	Vorteil für		
Leichte Hinzunahme von zusätzlichen Stützstellen	Newton	Lagrange, Spline	
Ordnung für wachsende Stützstellenanzahl	Spline	Newton, Lagrange	

- b) Die Länge der einzelnen Teilintervalle beträgt $h_0 = t_1 - t_0 = 0,2$, $h_1 = 1$ und $h_2 = 0,8$. Die zweiten Ableitungen berechnen sich zu

$$\begin{aligned} v_0'' &= 0 \\ v_3'' &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{pmatrix} 2(h_0 + h_1) \\ h_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ 2(h_1 + h_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{h_1}(v_2 - v_1) - \frac{6}{h_0}(v_1 - v_0) \\ \frac{6}{h_2}(v_3 - v_2) - \frac{6}{h_1}(v_2 - v_1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2,4 & 1 \\ 1 & 3,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19,8 \\ -2,55 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,664 \\ -3,393 \end{pmatrix}.$$

Damit lassen sich die Koeffizienten der Splines berechnen.

$$\begin{aligned} a_0 &= 8,053, a_1 = -2,176, a_2 = 0,707 \\ b_0 &= 0, b_1 = 4,832, b_2 = -1,697 \\ c_0 &= -4,822, c_1 = -3,856, c_2 = -0,7202 \\ d_0 &= 9,4, d_1 = 8,5, d_2 = 7,3 \end{aligned}$$

Die daraus resultierenden Spline-Polynome ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \hat{v}_{SP,0} &= 8,053(t-2)^3 - 4,822(t-2) + 9,4, \text{ für } 2 \leq t \leq 2,2 \\ \hat{v}_{SP,1} &= -2,176(t-2,2)^3 + 4,832(t-2,2)^2 - 3,856(t-2,2) + 8,5, \text{ für } 2,2 \leq t \leq 3,2 \\ \hat{v}_{SP,2} &= 0,707(t-3,2)^3 - 1,697(t,2)^2 - 0,7202(t-3,2) + 7,3, \text{ für } 3,2 \leq t \leq 4. \end{aligned}$$

c) Das Newton Verfahren liefert

t_i	v_i	Δv_i	$\Delta^2 v_i$	$\Delta^3 v_i$
0,3	4			
1	7,5	$\rangle 5$		
1,7	10,4	$\rangle 4,14$	$\rangle -4,0347$	
2	9,4	$\rangle -\frac{10}{3}$	$\rangle -7,473$	

Für die Koeffizienten a_i erhält man: $a_0 = 4, \quad a_1 = 5, \quad a_2 = -0,614 \quad a_3 = -4,0347$.

Damit ergibt sich:

$$\hat{v}_N(t) = 4,0374 - 4,33t + 11,49t^2 - 4,0347t^3$$

d) Für die Berechnung der Beschleunigung (Ableitung der Geschwindigkeit) muss die resultierende Kernlinie stetig sein. Der Übergang zwischen den einzelnen Spline-Polynomen ist stetig, so dass in diesem Zeitbereich die Kurven zusammengesetzt werden dürfen. Der Übergang zwischen dem Newton-Interpolationspolynom und dem ersten Spline-Polynom ist allerdings nicht stetig differenzierbar, da

$$\hat{v}'_N(2) \neq \hat{v}'_{SP,0}(2)$$

ist, so dass hier kein Zusammensetzen möglich ist.

e) Für das Hinzunehmen weiterer Messpunkte eignet sich die Newton-Interpolation am Besten, da hier keine Neuberechnung der vorhandenen Messpunkte notwendig ist.

Das um den Messpunkt bei $t = 2,2s$ erweiterter Differenzschema ergibt sich zu

t_i	v_i	Δv_i	$\Delta^2 v_i$	$\Delta^3 v_i$	$\Delta^4 v_i$
0,3	4				
1	7,5	$\rangle 5$			
1,7	10,4	$\rangle 4,14$	$\rangle -4,0347$		
2	9,4	$\rangle -\frac{10}{3}$	$\rangle -7,473$	$\rangle 4,3748$	
2,2	8,5	$\rangle -4,5$	$\rangle -2,333$	$\rangle 4,283$	

Daraus resultiert das neue Polynom zu

$$\begin{aligned} \hat{v}_e(t) &= \hat{v}_N(t) + 4,3748(t-0,3)(t-1)(t-1,7)(t-2) \\ &= 4,3748t^4 - 27,8247t^3 + 51,9807t^2 - 30,6408t + 9,2267. \end{aligned}$$

f) Der relative Fehler zum Zeitpunkt $t = 2s$ ergibt sich zu

$$F_{rel} = \frac{\hat{v}_e(2) - \hat{v}_{SP}(2)}{\hat{v}_{SP}(2)} = -2,02 \cdot 10^{-4}.$$

Dieser Fehler ist auf Rundungsfehler zurückzuführen, da in dem Messpunkt die Polynome mit dem Messwert eigentlich übereinstimmen müssten.

g) Der Fehler würde sich nicht signifikant ändern, da die Lagrange- und die Newton-Interpolation das gleiche Ergebnis liefern.

Aufgabe 5: Quantisierung (16 Punkte)

Lösung

a) Das Signal zu Rauschverhältnis des Quantisierungsrauschens berechnet sich für sinusförmige Signale zu

$$SNR_q = \frac{3}{2} 2^{2N}.$$

Das SNR bei Jitterflem ergibt sich zu

$$SNR_{Jitter} = \frac{2}{(2\pi f_G \frac{T_{max}}{\sqrt{3}})^2}.$$

Somit folgt daraus für den maximalen Abtastzeitfehler

$$\begin{aligned} SNR_{Jitter} &\geq SNR_q \\ \Rightarrow T_{max} &= \frac{1}{2\pi f_G} \sqrt{\frac{6}{SNR_q}}. \end{aligned}$$

Daraus folgt für die beiden AD-Wandler

$$\begin{aligned} T_{max,A} &\approx 1,5178 \cdot 10^{-8} s \\ T_{max,B} &\approx 4,857 \cdot 10^{-7} s \end{aligned}$$

beziehungsweise bezogen auf die Abtastzeit

$$\begin{aligned} T_{max,A} \cdot f_{a,A} &= 455,34 \cdot 10^{-6} \\ T_{max,B} \cdot f_{a,B} &= 19,428 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Somit ist der erste A/D-Wandler besser geeignet für das Messen von sinusförmigen Signalen.

- b) Die Auflösung N müsste erhöht werden.
- c) Für unterschiedliche Signaltypen (harmonische, impulsförmige und stochastische Signale) liegen unterschiedliche Interpretationen des Begriffs Frequenz vor. Daher muss ein allgemeiner Begriff eingeführt werden.
- d) Die mittlere Frequenz berechnet sich allgemein aus

$$\bar{f} = \int_{-\infty}^{\infty} f \frac{S_{xx}(f)}{P_x} df.$$

Zunächst muss also die Leistung P_x berechnet werden.

$$\begin{aligned} P_x &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2} df \\ &= \frac{1}{\pi} (\arctan(\frac{2\pi f}{a})) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 1 \end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar für die mittlere Frequenz mit der Substitution $u = 2\pi f$

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2} f df = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u}{a^2 + u^2} du \\ &= \frac{a}{4\pi^2} \lim_{u \rightarrow \infty} (\ln(a^2 + u^2) - \ln(a^2 + u^2)) = 0. \end{aligned}$$

- e) Aliasing tritt auf, wenn das Spektrum nicht bandbegrenzt ist oder die Abtastfrequenz zu niedrig gewählt wurde.
Jitter-Fehler entstehen durch nicht äquidistante Abtastung.
Zu große δ -Impulse haben ihre Ursache in endlich kurzen Abtastzeitpunkten.
Der Leckeffekt tritt bei einem endlichen Beobachtungsfenster auf.
- f) Der Erwartungswert des diskreten Signals entspricht dem des kontinuierlichen.

$$E\{x_d\} = E\{x\}$$

Die Varianz des diskreten Signals ergibt sich aus der Varianz des kontinuierlichen Signals zuzüglich der Varianz des Quantisierungsrauschens.

$$\sigma_{x_d}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_{eq}^2$$

- g) Frequenzanaloge Verfahren sind weniger störanfällig und können leichter realisiert werden, da Zähler z.B. auf jedem Mikrocontroller vorhanden sind.

Klausur im Kernfach Messtechnik 22. Februar 2008

Institut für
Industrielle Informationstechnik
Universität Karlsruhe (TH)
Prof. Dr.-Ing. U. Kiencke

A1 (19)	A2 (21)	A3 (21)	A4 (24)	A5 (15)	Gesamt (100)	Note
---------	---------	---------	---------	---------	--------------	------

Aufgabe 1: Korrelationsmesstechnik und Statistik (19 Punkte)

Verwenden Sie für die Bearbeitung weder Bleistifte noch Stifte mit roter Farbe!

- a) Zeichnen Sie zu folgendem Signal $x(t)$ dessen Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ und dessen Leistungsdichte $S_{xx}(f)$! **Begründen Sie Ihre Lösung, beschriften und beziffern Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung. (4 Punkte)**

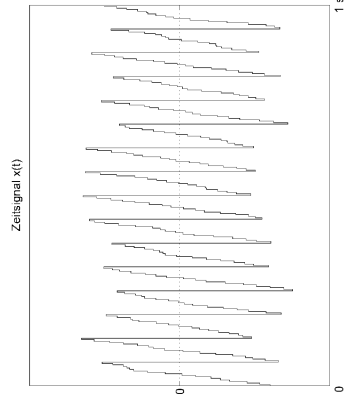


Bild 1: Signal $x(t)$: Signal **a)**

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

- b) Zeichnen Sie zu folgender Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ deren Signal $x(t)$ im Zeitbereich und deren Leistungsdichte $S_{xx}(f)$! **Begründen Sie Ihre Lösung, beschriften und beziffern Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung. (4 Punkte)**

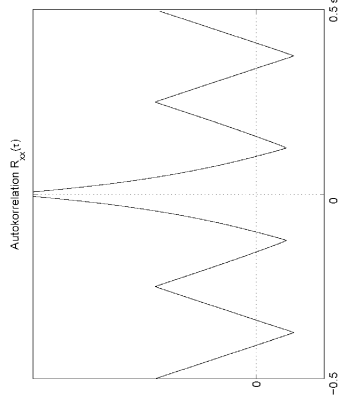


Bild 2: Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$: Signal **b)**

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

- c) Zeichnen Sie zu folgender Leistungsdichte $S_{xx}(f)$ deren Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ und deren Signal $x(t)$ im Zeitbereich! **Begründen Sie Ihre Lösung, beschriften und bezeichnen Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung.** (4 Punkte)
Hinweis: Die Leistungsdichte c) hat Impulse bei $0, \pm 16\text{ Hz}, \pm 48\text{ Hz}, \pm 80\text{ Hz}, \dots$

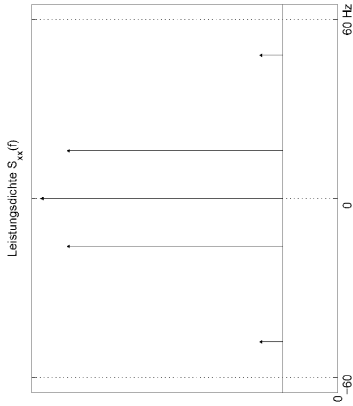


Bild 3: Leistungsdichte $S_{xx}(f)$: Signal c)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Aufgabenteilen.

Eine Stichprobe ergab folgende Ergebnisse

i	1	2	3	4	5	6
x_i	5	5.2	4.87	3.85	5.8	4.4

Tabelle 1: Die Ergebnisse der Stichprobe

- d) Überprüfen Sie in einem Testverfahren, ob die Stichprobe repräsentativ ist. Dabei sei das Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ und der Sollwert $x_{soll} = 4.5$. (4 Punkte)
Hinweis: Die Gaußsche Fehlerfunktion finden Sie in Bild 4 und die statistische Sicherheit mit Hilfe der Student-t-Verteilung in Bild 5.

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Aufgabenteilen.

Statistische Prozessüberwachung

- e) Welchen Nebeneffekt muss man bei der MA-Filterung berücksichtigen? (1 Punkt)
f) Welche Fehler können durch diese kompensiert werden? (1 Punkt)
g) Wie kann eine Drift des systematischen Anteils der Messung detektiert werden? (1 Punkt)

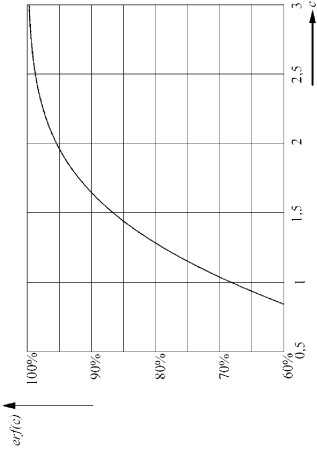


Bild 4: Die Gaußsche Fehlerfunktion

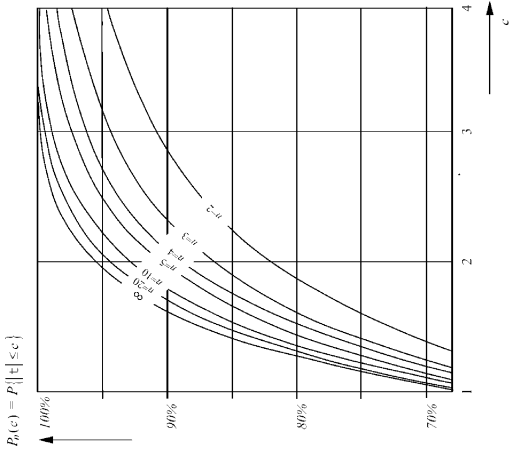


Bild 5: Die Statistische Sicherheit mit der Student-t-Verteilung

Aufgabe 2: Stationäres Verhalten von Messsystemen (21 Punkte)

Für das Qualitätsmanagement soll die Abweichung von Werkstücken von ihrer Solllänge $l_{soll} = 4\text{ cm}$ überprüft werden. Um ein geeignetes Messverfahren zu erhalten, soll die Kennlinie dabei möglichst linear verlaufen.

- a) Erläutern Sie das Prinzip „Herabsetzen des Messbereiches“ anhand einer Skizze und Stichworten! (3 Punkte)
b) Berechnen Sie die resultierende Kennlinie sowie die Teilkenmlinien der einzelnen Glieder eines solchen Verfahrens! Dabei sei die Messspanne gegeben durch $u_G = 3\text{ cm}$ und $u_e = 5\text{ cm}$. Der ideale lineare Messbereich liege dabei bei einer Abweichung vom Sollwert von $\pm 1\%$. Die Empfindlichkeit des eigentlichen Messgerätes sei $S(u) = 2u + 3$ bei einer Kennlinie ohne konstanten Anteil. (6 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Ein Messsystem in der Wüste ist starken Temperaturschwankungen zwischen Tag und Nacht ausgesetzt. Dadurch werden die Messergebnisse stark verfälscht.

- c) Erklären Sie in Stichworten oder anhand einer Tabelle die Unterschiede zwischen superponierenden und deformierenden Störgrößen! (3 Punkte)

Es soll nun die Abhängigkeit des oben genannten Messgerätes von der Temperatur untersucht werden. Dabei gehe die Temperatur linear in die Messkennlinie ein. Um diese Untersuchung durchzuführen wurden folgende Messergebnisse aufgezeichnet:

y	0	1	2	3	4	5
u bei T_1	0.2	2.3	4.4	6.5	8.6	10.7
u bei T_0	0	2	4	6	8	10

Tabelle 2: Temperaturabhängigkeit des Messgerätes

- d) Berechnen Sie die einzelnen Fehleranteile und geben Sie den superponierenden und deformierenden Fehler an! (4 Punkte)
- e) Nennen Sie zwei Verfahren, wie der gesamte auftretende Fehler beseitigt werden kann! (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Gegeben sei folgende zusammengesetzte Zufallsvariable $y = 2x + 1$. Dabei seien das erste Moment sowie das zweite zentrale Moment der Zufallsvariablen x bekannt.

- f) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten r_{xy} in Abhängigkeit von nur bekannten Größen! (2 Punkte)
- g) In welchem Zusammenhang stehen die beiden Zufallsvariablen x und y ? (1 Punkt)

Aufgabe 3: Korrelationsmesstechnik (21 Punkte)

Um die Dicke d von auf einem Fließband vorbeifahrenden ideal reflektierenden Bauteilen zu überprüfen, wird über dem Fließband ein höhenverstellbarer Sensor angebracht. Dieser kann je nach der Dicke der Bauteile neu justiert werden. Abbildung 9 zeigt den Aufbau. Dabei ist d_0 die unbekannte

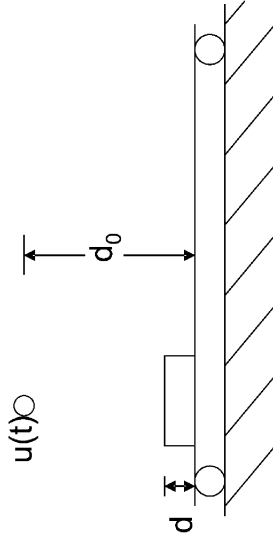


Bild 9: Der Versuchsaufbau

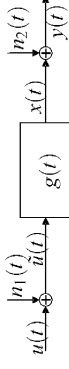
te Höhe des Sensors über dem Fließband. Der Sender strahlt eine Infrarotwelle $u(t)$ senkrecht nach unten aus, welche sich mit der Geschwindigkeit v ausbreitet und sowohl vom Bauteil als auch vom Fließband ideal und verlustfrei reflektiert wird. Dieser Sender empfangt das vom Fließband reflektierte Signal $x(t)$ und das zum Werkstück gehörende $y(t)$.

- a) Geben Sie die empfangenen Signale $x(t)$ und $y(t)$ in Abhängigkeit von $u(t)$ an! (2 Punkte)
- b) Bestimmen Sie die Dicke d mittels Korrelationsmesstechnik! (5 Punkte)
- Hinweis:** Die Kreuzkorrelationen müssen nicht explizit berechnet werden. Die Dicke d_0 ist unbekannt.

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- c) Was ist der Vorteil eines closed-loop Korrelators gegenüber der Laufzeitkorrelation? (1 Punkt)
- Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.
- d) Erklären Sie kurz die Grundidee des Wiener Filters: Was ist sein Ziel und wie ist sein Ansatz? (2 Punkte)

Das folgende LTI-System sei gegeben.



- e) Skizzieren Sie mit Hilfe dieser Abbildung den resultierenden Aufbau mit Wiener Filter! (1 Punkt)
- f) Bestimmen Sie allgemein für obige Abbildung die Kreuzkorrelation $R_{xy}(\tau)$! (2 Punkte)
- g) Die beiden Rauschanteile $n_1(t)$ und $n_2(t)$ seien unkorreliert. Das gleich gelte für $u(t)$ und $n_1(t)$ bzw. $n_2(t)$. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Wiener Filters $H(f)$! (3 Punkte)
- Im Folgenden gelte $n(t) = n_1(t) = n_2(t)$ und $u(t)$ seien unkorreliert.
- h) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Wiener Filters $H(f)$! (3 Punkte)
- i) Nun sei $S_{uu} = \frac{\sqrt{a}}{1+(2\pi f b)^2}$ und $S_{nn} = \sigma_n^2$. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Wiener Filters $H(f)$ bei einer verzerrungsfreien Übertragung im LTI-System $g(t)$! (2 Punkte)

Aufgabe 4: Kurvenanpassung (24 Punkte)

Gegeben sei folgendes Modell mit drei Eingangs- und zwei Ausgangsgrößen:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_0 u_1 + a_1 u_3 \\ y_2 &= (a_2 - a_1) u_2 - \frac{3}{2} a_0 u_3 \end{aligned} \quad (1)$$

Für zwei verschiedene Messungen ergaben sich bei folgender Kombination von Eingangsgrößen die Ausgangsgrößen nach Tabelle 3.

	u_1	u_2	u_3	y_1	y_2
Messung 1	3	2	1	4	9
Messung 2	1	3	2	2	1

Tabelle 3: Die Werte für zwei Messungen

- a) Führen Sie eine Approximation der Parameter aus den Gleichungen (1) mittels eines Least-Squares-Schätzers durch und geben Sie die resultierenden Gleichungen analog zu (1) an. (5 Punkte)

Hinweis: Für

$$A = \begin{pmatrix} e & f & g \\ f & h & k \\ g & k & m \end{pmatrix}$$

gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} hm - k^2 & gk - fm & fk - gh \\ gk - fm & em - g^2 & fg - ek \\ fk - gh & fg - ek & eh - f^2 \end{pmatrix}$$

Die Determinante der zu invertierenden Matrix beträgt $\det(\psi^T \psi) = 336.25$.

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- b) Was ist der Unterschied zwischen Interpolation und Approximation? (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Es wurde der Luftwiderstand eines Fahrzeuges F_{air} für verschiedene Geschwindigkeiten v gemessen. Dabei ergab sich der Zusammenhang nach Tabelle 4.

F_{air} in N	0	9.9	39.5	88.9
v in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	0	2	4	6

Tabelle 4: Der gemessene Luftwiderstand bei einem Fahrzeug

- c) Führen Sie für die Messpunkte aus Tabelle 4 eine Lagrange-Interpolation durch und geben Sie das resultierende Interpolationspolynom in der Form $\tilde{F}_1(v) = a_0 + a_1v + a_2v^2 + \dots$ an. (5 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- d) Führen Sie für die Messpunkte aus Tabelle 4 eine Newton-Interpolation durch und geben Sie das resultierende Interpolationspolynom in der Form $\tilde{F}_N(v) = a_0 + a_1v + a_2v^2 + \dots$ an! (4 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- e) Der allgemeine physikalische Zusammenhang zwischen Luftwiderstand und Geschwindigkeit ergibt sich aus dem Produkt $F_{\text{air}} = c_{\text{air},x} A_L \frac{\rho}{2} v^2$. Dabei soll der Reibungskoeffizient zu $c_{\text{air},x} = 0.9$ und die Dichte von Luft zu $\rho = 1.204 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ angenommen werden. Die effektive Fläche A_L soll näherungsweise als ein Rechteck mit den Seitenlängen $l_1 = 1.9\text{m}$ und $l_2 = 2.4\text{m}$ angenommen werden.

Linearisieren Sie die Kennlinie des Luftwiderstandes mittels Taylor um den Arbeitspunkt $v_{AP} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. (3 Punkte)

- f) Welche der drei Kennlinien aus den Teilaufgaben c), d) und e) weist in dem Bereich [2, 4] den kleinsten maximalen relativen Fehlerbetrag auf? (6 Punkte)

Aufgabe 5: Quantisierung (15 Punkte)

Im Folgenden soll der Sigma-Delta-Wandler näher betrachtet werden. Dabei sei bei einem Modulator der Ordnung k die Übertragungsfunktion des offenen Kreises vereinfachend aus der Übertragungsfunktion des offenen Kreises eines Sigma-Delta-Wandlers erster Ordnung $G(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$ zu $G(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$ berechnen. Der Signal-Störabstand des Modulators ergebe sich näherungsweise an der Grenzfrequenz f_g aus dem quadrierten Verhältnis der Amplitudengänge für Nutz- und Störsignal.

- a) Skizzieren Sie die Struktur eines Sigma-Delta-Modulators 1. Ordnung mit Noise-Shaping und bezeichnen Sie die Signale! (1 Punkt)
- b) Bestimmen Sie den Ausgang $Q(z)$ des Sigma-Delta-Modulators mit Noise-Shaping allgemein in Abhängigkeit der Ordnung k ! (2 Punkte)
- c) Bestimmen Sie näherungsweise das SNR des Sigma-Delta-Modulators mit Noise-Shaping entsprechend obiger Näherung an der Grenzfrequenz f_g allgemein in Abhängigkeit der Ordnung k und der Frequenz f_g ! (3 Punkte)

- d) Die Oversamplingrate betrage $M = 4$. Für welche Ordnung k gilt gerade noch $SNR(k) \geq 0.25$? (3 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- e) Nennen Sie drei Verfahren zur Bestimmung der Frequenz bei rotierenden Wellen! (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- f) Wie wird die charakteristische Funktion berechnet? (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Zur Untersuchung der Periodendauermessung und der Frequenzzählung wurden die relativen Quantisierungsfehler bei verschiedenen Frequenzen bestimmt. Dabei sei für $f_1 = 5\text{Hz}$ $F_{r,1} = 2 \cdot 10^{-3}$ und für $f_2 = 500\text{Hz}$ $F_{r,2} = 2 \cdot 10^{-5}$.

- g) Welches der beiden Verfahren führt zu diesen beiden relativen Quantisierungsfehlern? Begründen Sie Ihre Aussage anhand mathematischer Beziehungen! (2 Punkte)
- h) Wie müsste $F_{r,2}$ für das in Aufgabenteil g) nicht verwendete Verfahren aussehen, wenn $F_{r,1}$ gleich bleiben würde? (1 Punkt)

Lösung

Bemerkung: Die Leistungsdichte und die Autokorrelation von farbigem Rauschen sind im Messtechnik-Buch (Kiencke, Eger, *Messtechnik*, 6. Auflage, Springer-Verlag, 2005) auf Seite 224 abgebildet und werden in der Lösung als *Komponente 1* für Autokorrelation und *Komponente 2* für Leistungsdichte bezeichnet.

- a) Signal a)

- Signal im Zeitbereich: sägezahn-förmig, farbiges Rauschen, Frequenz: 16 Hz
- ⇒ Autokorrelation: parabel-förmig, Komponente 1, Frequenz: 16 Hz
- ⇒ Leistungsdichte: Impulse bei $\pm k \cdot 16\text{Hz}$, Komponente 2

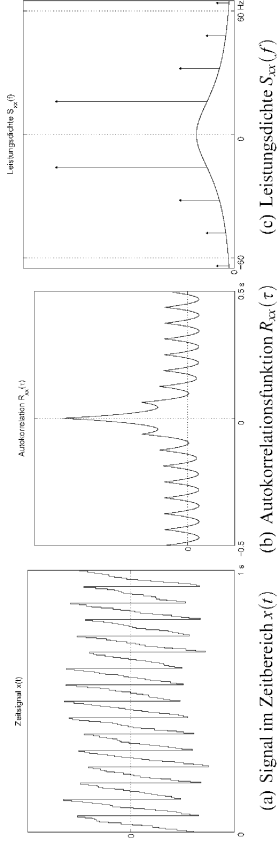


Bild 6: Signal a)

- Autokorrelation: dreieck-förmig, Komponente 1, Offset A^2 , Frequenz: 4 Hz
- ⇒ Signal im Zeitbereich: rechteck-förmig, farbiges Rauschen, Offset A , Frequenz: 4 Hz
- ⇒ Leistungsdichte: Impulse bei $\pm 4 \pm 12 \pm 20 \dots$ Hz, Komponente 2, Impuls bei $f = 0$

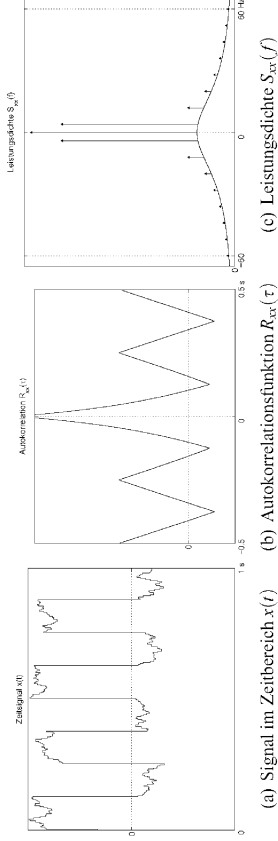


Bild 7: Signal b)

c) Signal c)

- Leistungsdichte: Impulse bei $\pm 16 \pm 48 \dots$ Hz, Impuls bei $f = 0$, Offset
- ⇒ Signal im Zeitbereich : rechteck-förmig, Offset A , weißes Rauschen, $f = 16$ Hz
- ⇒ Autokorrelation : dreieck-förmig, Offset A^2 , Impuls bei $\tau = 0$, $f = 16$ Hz

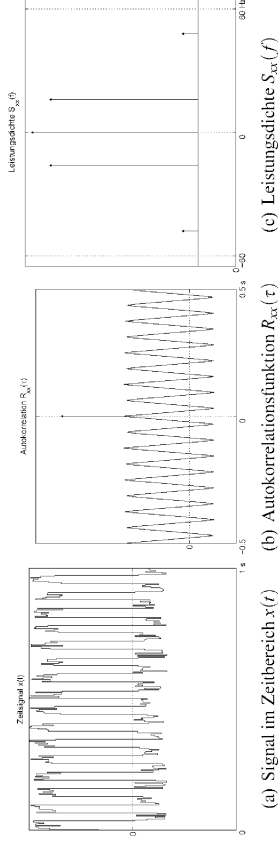


Bild 8: Signal c)

d) Parameter-Test

- Alle notwendigen Voraussetzungen die erfüllt sind:
 - Unabhängigkeit der Messwerte
 - Normalverteilung der Grundgesamtheit
- Der Stichprobenmittelwert ergibt sich zu $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 4.853$ sowie die Standardabweichung der Stichprobe zu $S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = 0.67$.
- Nullhypothese $H_0: \bar{x} = \mu_0$
- statistische Sicherheit $P = 1 - \alpha = 0.95$
- Freiheitsgrade m bei $k = 6$ Klassen: $m = k - 1 = 5$
- Da nur die Stichprobenvarianz bekannt ist wird die t-Verteilung herangezogen. Somit ist $c = \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{S_x} \sqrt{n} = 1.29$.
- Mit Hilfe des Diagramms aus Bild 5 ergibt sich ein $P_n(c) \approx 75\%$.

Die Nullhypothese H_0 wird angenommen, da $P_n(c) < P$.

- Der gleitende Mittelwert ist um M Zeitschritte verzögert.
- Zufällige mittelfrequente Störungen können kompensiert werden.
- Durch Aufstellen eines Signalmodells kann das Driften präzisiert werden mit z.B. einem LS-Schätzer.

Lösung

- Die Abbildung zeigt den Aufbau des Verfahrens „Hierabsetzen des Messbereiches“. Dabei wird



durch das Vorschalten eines linearen Gliedes S_0 mit einer Empfindlichkeit $S_0 < 1$ die Eingangsgroße auf einen kleinen Bereich skaliert. Innerhalb dieses kleinen Bereiches zeigt die Kennlinie $S(u)$ nahezu lineares Verhalten. Das lineare nachgeschaltete Messglied mit der Empfindlichkeit $S_1 > 1$ hebt die Skalierung des ersten wieder auf.

- Die Gesamtkennlinie berechnet sich zu

$$(y - y_a) = S_0 S_1 S_2 (u - u_a)$$

Um die Empfindlichkeiten der zwei neuen Glieder zu bestimmen, wird diese Kennlinie nun in ihre Einzelkomponenten zerlegt. Für das erste Messglied gilt die Übertragung

$$(u_1 - u_{1a}) = S_0 (u - u_a)$$

Dabei soll der Bereich $\Delta u = u_e - u_a = 2$ auf den Bereich $\Delta u_1 = 4 \cdot 1.01 - 4 \cdot 0.99 = 0.08$ übertragen werden. Damit ergibt sich $S_0 = \frac{\Delta u_1}{\Delta u} = 0.04$.

Analog dazu findet nun die Übertragung über das eigentliche Messglied statt.

$$(u_2 - u_{2a}) = S(u_{1a})(u_1 - u_{1a})$$

Der Bereich $\Delta u_1 = 0.08$ wird mittels der Empfindlichkeit $S(u_{1a}) = 10.92$ auf den Bereich $\Delta u_2 = 0.8736$ übertragen. Um nun noch die unbekannte Größe u_{2a} zu bestimmen, wird der Verlauf der Kennlinie aus deren Empfindlichkeit bestimmt. Aus $y(u) = u^2 + 3u$ ergibt sich $y(u_{1a}) = 28$. Um diesen Wert muss nun der Bereich Δu_2 liegen. Somit ergibt sich $u_{2a} = 28 - \frac{\Delta u_2}{2} = 27.5632$.

Die Kennlinie des letzten Messgliedes ergibt sich zu

$$(y - y_a) = S_1 (u_2 - u_{2a})$$

Da hierbei $S_1 = \frac{1}{S_0} = 25$ gelten muss, ergibt sich $\Delta y = 21.84$ und daraus $y_a = y(u_{1a}) - \frac{\Delta y}{2} = 17.08$.

Zusammenfassend resultiert die Gesamtkennlinie zu

$$(y - 17.08) = 10.92 (u - 3)$$

sowie die drei Einzelkennlinien zu

$$\begin{aligned} (u_1 - 3.96) &= 0.04 (u - 3) \\ (u_2 - 27.5632) &= 10.92 (u_1 - 3.96) \\ (y - 17.08) &= 25 (u_2 - 27.5632) \end{aligned}$$

- Die Unterschiede sind folgender Tabelle zu entnehmen.

Eigenschaft	superponierende Fehler	deformierende Fehler
Abhängigkeit von ΔS	Δz	Δz und Δy
	$= 0$	$\neq 0$
Nullpunktfehler $\Delta e(z)$	$\neq 0$	$= 0$

- d) Da $F_{def}(0) = 0$ kann der superponierende Fehler an der Stelle 0 berechnet werden.

$$F_{sup}(0) = u(y_0, z_1) - u(y_0, z_0) = 0.2 = a(z_1 - z_0)$$

$$\Rightarrow a = \frac{0.2}{\Delta T}$$

$$F_{sup} = \frac{0.2}{\Delta T}(z - z_0)$$

Der deformierende Fehler ergibt sich somit zu

$$F_{def}(y_1) = u(y_1, z_1) - u(y_1, z_0) - F_{sup}(y_1) = 0.3 - 0.2 = b\Delta T\Delta y$$

$$\Rightarrow b = \frac{0.1}{\Delta T\Delta y}$$

$$F_{def} = \frac{0.1}{\Delta T\Delta y}(z - z_0)(y - y_0)$$

- e) Die Temperaturschwankungen könnten durch eine geeignete Abschirmung von dem Messgerät ferngehalten werden. Eine weitere Möglichkeit wäre den superponierenden und deformierenden Fehler durch die Differenzenmethode bzw. Gegenkopplung zu kompensieren. Eine weitere Möglichkeit wäre ein Zerhacker.

- f) Der Korrelationskoeffizient berechnet sich zu

$$r_{xy} = \frac{E\{(x - \mu_x)(2x - 2\mu_x)\}}{\sqrt{E\{(x - \mu_x)^2\}E\{(2x - 2\mu_x)^2\}}} = \frac{2\sigma_x^2}{2\sigma_x^2} = 1.$$

- g) Einen Zusammenhang mit $r_{xy} = 1$ bezeichnet man als starre Bindung.

Lösung

- a) Die zwei empfangenen Signale ergeben sich zu

$$x(t) = u\left(t - \frac{2d_0}{v}\right)$$

$$y(t) = u\left(t - \frac{2(d_0 - d)}{v}\right)$$

- b) Für die Berechnung der Dicke d muss zunächst die Höhe d_0 des Sensors bestimmt werden. Hierzu wird im Kalibrierungsschritt zunächst die Kreuzkorrelation R_{xu} berechnet. Diese ergibt sich zu

$$R_{xu} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t + \tau - \frac{2d_0}{v})u(t)dt.$$

Sie wird genau dann maximal, wenn die beiden Teilintegranden übereinstimmen. Dafür ergibt sich die Beziehung

$$\tau_1 - \frac{2d_0}{v} = 0$$

$$\Rightarrow d_0 = \frac{\tau_1 v}{2}.$$

Im zweiten Schritt kann dann die Dicke der vorbeikommenden Werkstücke bestimmt werden. Dazu muss die Kreuzkorrelation R_{yu} berechnet werden. Sie ist

$$R_{yu} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t + \tau - \frac{2(d_0 - d)}{v})u(t)dt$$

Aus den gleichen Überlegungen resultiert das Maximum dieser Korrelation genau dann, wenn

$$\tau_2 = \frac{2(d_0 - d)}{v}$$

ist. Daraus ergibt sich die gesuchte Dicke zu

$$d = \frac{(\tau_1 - \tau_2)v}{2}.$$

- c) Die Zeitdifferenz τ wird kontinuierlich gemessen und ist nicht erst am Ende bekannt.
- d) Das Ziel des Wiener Filters ist es Rauschen zu unterdrücken. Dafür zieht es keine Filterung sondern eine Rekonstruktion des Eingangssignals zu Rate, bei der der Erwartungswert des Fehlerquadrates minimiert werden soll.
- e) Die Abbildung 10 zeigt den Aufbau.
- f) Die Kreuzkorrelation berechnet sich zu

$$R_{yy}(\tau) = E\{u(t + \tau)(n_2(t) + g^*(t) * (u(t) + n_1(t)))\}$$

$$= R_{u\tau_2} + R_{un} * g^*(-\tau) + R_{un_1} * g^*(-\tau).$$

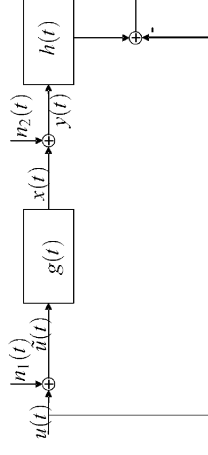


Bild 10: Das System mit Wiener Filter

- g) Die Übertragungsfunktion des Wiener Filters berechnet sich aus

$$H(f) = \frac{S_{yy}(f)}{S_{yy}(f)}.$$

Die Autoleistungsdichte berechnet sich aus

$$S_{yy}(f) = S_{n_2n_2}(f) + S_{\hat{u}\hat{u}}|G(f)|^2 = S_{n_2n_2}(f) + (S_{uu}(f) + S_{n_1n_1}(f))|G(f)|^2.$$

Die Kreuzleistungsdichte kann mit Hilfe vom vorhergehenden Aufgabenteil aus der Fourier-transformierten der Kreuzkorrelation berechnet werden. Sie ergibt sich zu

$$S_{yy}(f) = S_{u\tau_2}(f) + S_{un}(f)G^*(f) + S_{un_1}G^*(f).$$

Da $u(t)$ und $n_i(t)$ unkorreliert sind resultiert die Übertragungsfunktion zu

$$H(f) = \frac{S_{un}(f)G^*(f)}{S_{n_2n_2}(f) + (S_{uu}(f) + S_{n_1n_1}(f))|G(f)|^2}.$$

u) Für die Berechnung der Kreuzleistungsdichte ändert sich nichts, da auch $u(t)$ und $n(t)$ unkorreliert sind. Aufgrund der Korreliertheit von $x(t)$ und $n(t)$ ändert sich allerdings die Autoleistungsdichte zu

$$\begin{aligned} S_{yy}(f) &= S_{mm}(f) + S_{xx}(f) + S_{mn}(f) + S_{nx}(f) \\ &= S_{mm}(f) + (S_{mx}(f) + S_{nm}(f))G(f)^2 + S_{nn}(f)G(f) + S_{mn}(f)G(f) + S_{nm}(f)G^*(f) + S_{mx}G^*(f) \\ &= S_{mm}(f) + (S_{mx}(f) + S_{nm}(f))|G(f)|^2 + S_{nn}(f)|G(f)|^2 + G^*(f) + G(f). \end{aligned}$$

Damit resultiert die Übertragungsfunktion zu

$$H(f) = \frac{S_{nn}(f)G^*(f)}{S_{mm}(f)|G(f)|^2 + S_{nn}(f)(1 + |G(f)|^2 + G^*(f) + G(f))}.$$

i) Eine verzerrungsfreie Übertragung ist gleichbedeutend mit $G(f) = 1$. Damit resultiert die Übertragungsfunktion zu

$$H(f) = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + 4(1 + (2\pi fb)^2)S_{nn}(f)}.$$

Lösung

a) Die Messgleichung für eine LS-Schätzung setzt sich folgendermaßen zusammen:

$$\hat{\underline{y}} = \begin{pmatrix} y_{1,1} \\ y_{2,1} \\ y_{1,2} \\ y_{2,2} \end{pmatrix} = \underline{\Psi} \underline{a} = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{3,1} & 0 \\ -\frac{3}{2}u_{3,1} & -u_{2,1} & u_{2,1} \\ u_{1,2} & u_{3,2} & 0 \\ -\frac{3}{2}u_{3,2} & -u_{2,2} & u_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Die gesuchten Parameter ergeben sich aus der Formel

$$\underline{a} = (\underline{\Psi}^T \underline{\Psi})^{-1} \underline{\Psi}^T \underline{y}.$$

Die dafür benötigte Pseudoinverse berechnet sich im ersten Schritt zu

$$(\underline{\Psi}^T \underline{\Psi})^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{3}{2} & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{85}{4} & 17 & -12 \\ 17 & 18 & -13 \\ -12 & -13 & 13 \end{pmatrix}^{-1}$$

Mit Hilfe der Angabe im Hinweis lässt sich diese Inverse lösen zu

$$(\underline{\Psi}^T \underline{\Psi})^{-1} = \frac{1}{336.25} \begin{pmatrix} 65 & -65 & -5 \\ -65 & 132.25 & 72.25 \\ -5 & 72.25 & 93.5 \end{pmatrix}$$

Daraus resultieren die gewünschten Parameter zu

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = (\underline{\Psi}^T \underline{\Psi})^{-1} \underline{\Psi}^T \underline{y} = \frac{1}{336.25} \begin{pmatrix} 130 & 22.5 & -65 & -15 \\ -62.75 & -22.5 & 199.5 & 15 \\ 57.25 & 50 & 139.5 & 78.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.7175 \\ -0.1175 \\ 3.0833 \end{pmatrix}.$$

Die gesuchten Polynome haben somit die Form

$$\begin{aligned} y_1 &= 1.7175u_1 - 0.1175u_3 \\ y_2 &= 3.2008u_2 - 2.576255u_3 \end{aligned}$$

b) Bei der Interpolation geht die Kennlinie exakt durch die Stützstellen. Bei der Approximation durchschneidet die Kennlinie die Stützstellen in der Regel nicht.

c) Das gesuchte Polynom berechnet sich aus

$$\hat{F}_L = 0L_0 + 9.9NL_1 + 39.5NL_2 + 88.9NL_3.$$

Die einzelnen Lagrange-Polynome berechnen sich dabei aus

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{v(v-4)(v-6)}{2(-2)(-4)} = \frac{1}{16}(v^3 - 10v^2 + 24v) \frac{s^3}{m^3} \\ L_2 &= \frac{v(v-2)(v-6)}{4 \cdot 2 \cdot (-2)} = -\frac{1}{16}(v^3 - 8v^2 + 12v) \frac{s^3}{m^3} \\ L_3 &= \frac{v(v-2)(v-4)}{6 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{1}{48}(v^3 - 6v^2 + 8v) \frac{s^3}{m^3}. \end{aligned}$$

Daraus resultiert das Interpolationspolynom aus obiger Formel zu

$$\hat{F}_L = 2.083 \cdot 10^{-3} \frac{Ns^3}{m^3} v^3 + 2.45 \frac{Ns^2}{m^2} v^2 + 4.167 \cdot 10^{-2} \frac{Ns}{m} v.$$

d) Das Newton Verfahren liefert einheitslos

v_i	F_i	ΔF_i	$\Delta^2 F_i$	$\Delta^3 F_i$
0	0			
2	9.9	$\rangle 4.95$		
4	39.5	$\rangle 14.8$	$\rangle 2.4625$	
6	88.9	$\rangle 24.7$	$\rangle 2.475$	$\rangle 2.083 \cdot 10^{-3}$

Für die Koeffizienten a_i erhält man: $a_0 = 0N$, $a_1 = 4.95 \frac{Ns}{m}$, $a_2 = 2.4625 \frac{Ns^2}{m^2}$, $a_3 = 2.083 \cdot 10^{-3} \frac{Ns^3}{m^3}$.

Damit ergibt sich:

$$\hat{F}_N(t) = 2.083 \cdot 10^{-3} \frac{Ns^3}{m^3} v^3 + 2.45 \frac{Ns^2}{m^2} v^2 + 4.167 \cdot 10^{-2} \frac{Ns}{m} v$$

e) Die linearisierte Kennlinie ergibt sich aus

$$\hat{F}_T = F(v_{AP}) + \frac{\partial F}{\partial v} \big|_{v=v_{AP}} (v - v_{AP}).$$

Wird die Ableitung der gegebenen physikalischen Gleichung gebildet so ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \hat{F}_T &= F(v_{AP}) + c_{air} v_{AP}^4 \rho v_{AP} (v - v_{AP}) \\ &= 2.47 \frac{Ns^2}{m^2} v_{AP}^2 + 4.94 \frac{Ns^2}{m^2} v_{AP} (v - v_{AP}) = 19.76 \frac{Ns}{m} v - 39.51N. \end{aligned}$$

$$SNR = \frac{P_{sig}}{P_{stör}}.$$

Setzen wir darin die Übertragungsfunktion vom Signal zum Ausgang und von der Störung zum Ausgang als Betragsquadrat ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} SNR &= \frac{\left| \frac{1}{(z-1)^{k+1}} \right|^2}{\left| \frac{(z-1)^k}{(z-1)^{k+1}} \right|^2} \\ &= \frac{1}{|(z-1)^{k|2}} = \frac{1}{|(e^{j\frac{2\pi}{f_d} f_a} - 1)^{k|2}}. \\ SNR &= \frac{1}{|(e^{j\frac{2\pi}{f_d} f_a} - 1)^{k|2}} = \frac{1}{|(e^{j\frac{\pi}{2}} - 1)^{k|2}} \\ &= \frac{1}{|(j-1)^{k|2}} \geq 0.25 \end{aligned}$$

d) Mit $f_a = Mf_g$ ergibt sich die Ungleichung

Durch Einsetzen ergibt sich, dass das SNR genau 0.25 für $k = 2$ beträgt.

- e) Frequenzzählverfahren, Periodendauermessung, Phasenregler oder Frequenzregler
- f) Die charakteristische Funktion ist die Fouriertransformierte der Amplitudendichte.
- g) Der relative Quantisierungsfehler bei den beiden Verfahren berechnet sich zu

$$F_{r,PD\dot{M}} \leq Z \frac{f}{f_0}$$

bzw.

$$F_{r,FZ} \leq \frac{1}{ZfT_{ref}}.$$

Somit ist bei der Periodendauermessung $F_{r,PD\dot{M}} \propto f$ und bei der Frequenzzählung $F_{r,FZ} \propto \frac{1}{f}$. Da $F_{r,2} < F_{r,1}$ müssen diese beiden relativen Fehler vom Frequenzzählverfahren verursacht worden sein.

h) Gesucht ist $F_{r,2}$ für die Periodendauermessung. Aus dem ersten relativen Fehler ergibt sich für die unbekannten Größen

$$\frac{Z}{f_0} = \frac{F_{r,1}}{f_1} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ s.}$$

Damit lässt sich die gesuchte Größe zu

$$F_{r,PD\dot{M},2} \leq Z \frac{f_2}{f_0} = 2 \cdot 10^{-1}$$

berechnen.

zunächst müssen die maximalen und minimalen relativen Fehler der einzelnen Kennlinien zur realen physikalischen Gleichung $F_{air} = av^2$ berechnet werden, um diese danach zu vergleichen. Dabei sei $a = 2.47 \frac{\text{Ns}^2}{\text{m}^2}$. Für die Lagrange-Interpolation ergibt sich der relative Fehler zu

$$F_{rel,L} = \frac{\hat{F}_L - F_{air}}{F_{air}} = \frac{2.083 \cdot 10^{-3} \text{Ns}^3}{a} v + \frac{2.45 \text{Ns}^2}{a} \frac{1}{m^2} + \frac{4.167 \cdot 10^{-2} \text{Ns}}{av} - 1. \quad (2)$$

Das Maximum dieses Fehlers lässt sich über die ersten beiden Ableitungen bestimmen. Die erste Ableitung

$$\frac{\partial F_{rel,L}}{\partial v} = \frac{2.083 \cdot 10^{-3} \text{Ns}^2}{a} - \frac{4.167 \cdot 10^{-2} \text{Ns}^2}{av^2} \frac{\text{m}^2}{\text{m}^2} \quad (3)$$

ist im Intervall $[2, 4]$ immer kleiner Null. Somit müssen die Ränder näher betrachtet werden. Am unteren Rand bei $v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ beträgt der Fehler $F_{rel,L,max} = 2.025 \cdot 10^{-3}$. Für $v = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ergibt sich der Betrag des Fehlers von $F_{rel,F,min} = -5.0627 \cdot 10^{-4}$. Dieser fällt viel geringer aus, so dass das Maximum bei $v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ liegt.

Da die Newton-Interpolation das gleiche Ergebnis liefert wie die Lagrange-Interpolation ergibt sich auch hierbei ein maximaler relativer Fehler von $F_{rel,F,max} = 2.025 \cdot 10^{-3}$.

Der relative Fehler der Linearisierung mittels Taylor ergibt sich zu

$$F_{rel,T} = \frac{19.76 \text{Ns}}{av} - \frac{39.51}{av^2} \text{N} - 1. \quad (4)$$

Dieser ist genau dann Null, wenn $v = 3.999 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Die zweite Ableitung ergibt

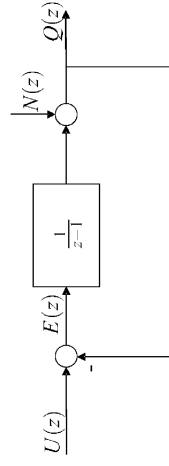
$$\frac{\partial^2 F_{rel,T}}{\partial^2 v} = 2 \frac{19.76 \text{Nm}}{av^3} - 6 \frac{39.51 \text{Nm}^2}{av^4} \frac{1}{\text{s}^2} \quad (5)$$

und ist für $v = 3.999 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ kleiner Null. Somit ist das Maximum des Fehlers bei $v = 3.999 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ gleich $F_{rel,T,max} = 2.531 \cdot 10^{-4}$. Da die Steigung innerhalb des Bereiches positiv ist liegt das Minimum bei $v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und beträgt $F_{rel,T,min} = -0.999$. Damit ist der betragsmäßig größte Fehler bei der Linearisierung mittels Taylor $F_{rel,T,min} = 0.999$.

Ein Vergleich der drei Verfahren zeigt, dass die Linearisierung mittels Newton bzw. Lagrange-Interpolation den kleinsten maximalen relativen Fehlerbetrag aufweist.

Lösung

a) Die Abbildung zeigt den Aufbau des Modulators



b) Nach Abbildung berechnet sich der Ausgang allgemein zu

$$\hat{Q}(z) = N(z) + G(z)(U(z) - \hat{Q}(z)) = (1 + G(z))^{-1} N(z) + (1 + G(z))^{-1} G(z) U(z).$$

Mit $G(z) = (z-1)^{-k}$ ergibt sich daraus in Abhängigkeit von der Ordnung

$$\hat{Q}_k(z) = \frac{(z-1)^k}{(z-1)^k + 1} N(z) + \frac{1}{(z-1)^k + 1} U(z).$$

Messtechnik

6. August 2008

Aufgabe 1: Korrelationsmesstechnik und Statistik (24 Punkte)

Verwenden Sie für die Bearbeitung weder Bleistifte noch Stifte mit roter Farbe!

- a) Zeichnen Sie zu folgendem Zeitsignal $x(t)$ dessen Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ und dessen Leistungsdichte $S_{xx}(f)$! Begründen Sie Ihre Lösung, beschriften und beziffern Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung. (4 Punkte)

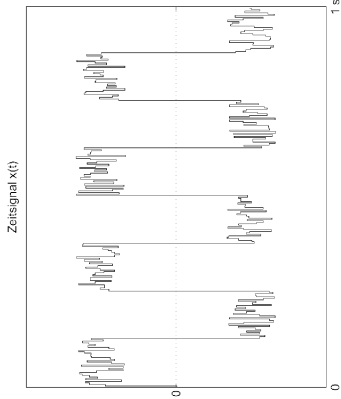


Abbildung 1: Signal $x(t)$: Zeitsignal a)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

- b) Zeichnen Sie zu folgender Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ deren Signal $x(t)$ im Zeitbereich und deren Leistungsdichte $S_{xx}(f)$! Begründen Sie Ihre Lösung, beschriften und beziffern Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung. (4 Punkte)

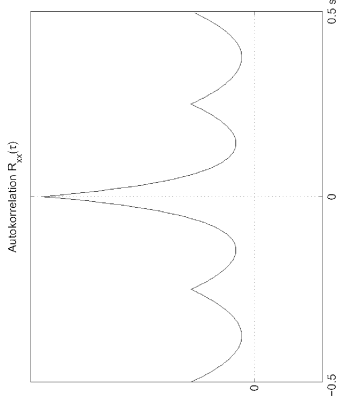


Abbildung 2: Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$: Signal b)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

- c) Zeichnen Sie zu folgender Leistungsdichte $S_{xx}(f)$ deren Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ und deren Signal $x(t)$ im Zeitbereich! Begründen Sie Ihre Lösung, beschriften und beziffern Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung. (4 Punkte)
Hinweis: Die Leistungsdichte c) hat Impulse bei $\pm 16\text{Hz}$.

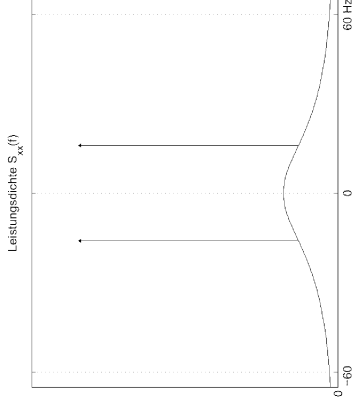


Abbildung 3: Leistungsdichte $S_{xx}(f)$: Signal c)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Aufgabenteilen.

- d) Wie können zufällige Störungen bei linearen Messkurvenlinien kompensiert werden? (2 Punkte) (Hinweis: Unterscheiden Sie zwei Arten von Störungen!)

- e) Gegeben sei die lineare Messkurvenlinie

$$y = \frac{8}{9}u + \frac{5}{3}.$$

Dabei sei die Messgröße u von einem weißen Gaußschem Rauschen e additiv überlagert. Führen Sie eine Filterung mit dem zugehörigen Verfahren aus Teilaufgabe d) durch. (1 Punkt)

- f) Welches Problem kann mit dieser Methode bei nichtlinearen Funktionen auftreten? Welche Abhilfe gibt es? (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Aufgabenteilen.

Fehlerfortpflanzung

- g) Gegeben sei eine Federwaage nach Abbildung 4. Bestimmen Sie die Masse m in Abhängigkeit des Weges s und der Federsteifigkeit c . (1 Punkt)



Abbildung 4: Federwaage

$$c(T) = \kappa E(T). \quad (1)$$

Dabei bezeichnet κ eine Konstante.

Bestimmen Sie die Varianz σ_m^2 der Masse in Abhängigkeit der Varianzen σ_E^2 , σ_g^2 und σ_s^2 . (2 Punkte)

i) Es gelte

$$E = \alpha s + \beta T + \gamma$$

mit den Konstanten α , β und γ .

Bestimmen Sie die Varianz σ_E^2 in Abhängigkeit der Varianzen σ_s^2 und σ_T^2 . (1 Punkt)

j) Bestimmen Sie die Varianz $\hat{\sigma}_m^2$ in Abhängigkeit der Varianzen σ_g^2 , σ_s^2 und σ_T^2 mit Hilfe der Ergebnisse aus den beiden Teilaufgaben **h)** und **i)**. (3 Punkte)

Aufgabe 2: Stationäres Verhalten von Messsystemen (21 Punkte)

a) Wie können Messfehler bei Kennlinienfehlern unter Normalbedingungen reduziert werden?

Nennen Sie zwei mögliche Verfahren. (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

b) Wie ist eine ideale Kennlinie charakterisiert? (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

c) Gegeben sei folgende Kennlinie:

$$y = y_a + e^{(u-u_a)}.$$

Bestimmen Sie die zugehörige ideale Kennlinie. (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

d) Skizzieren Sie den Aufbau des Verfahrens „Hinterinanderschalten zweier nichtlinearer Glieder“ und benennen Sie die relevanten Größen. (1 Punkt)

e) Wie müsste die zusätzliche Kennlinie bei Verwendung des Verfahrens „Hinterinanderschalten zweier nichtlinearer Glieder“ aussehen, damit die Nichtlinearität der Kennlinie

$$y = y_a + e^{(u-u_a)}$$

kompensiert werden kann? Wie sieht dann die linearisierte Kennlinie $\hat{y}$ aus? (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

f) Beschreiben Sie den Unterschied zwischen Toleranzband- und Fixpunktjustierung. (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

g) Nennen Sie die Charakteristika von superponierenden Störgrößen. (1 Punkt)

h) Nennen Sie drei Verfahren, mit denen superponierende Fehler eliminiert werden können und erklären Sie jeweils, warum dies möglich ist. (3 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Gegeben sei die Funktion

$$z = 2x + y + 2,$$

sowie der Korrelationskoeffizient r_{xy} , die Kreuzkovarianz C_{xy} , die Standardabweichung σ_y und die 1. Momente von x und y .

i) Ermitteln Sie den Mittelwert μ_z und die Varianz σ_z^2 in Abhängigkeit von nur bekannten Größen. (4 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Aufgabenteilen.

Korrelation von Messwerten

Es seien folgende Messwerte gegeben:

x_i	0.2	0.45	0.6	0.8	1.1	1.6	1.8	2
y_i	0.4	0.3	0.51	0.9	1.01	1.8	1.7	2.1

Tabelle 1: Messdaten

j) Bestimmen Sie die Stichprobenmittelwerte $\bar{x}$ und $\bar{y}$ gemäß Tabelle 1. (1 Punkt)

k) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten $\hat{r}_{xy}$ der Messdaten aus Tabelle 1. (3 Punkte)

Aufgabe 3: Korrelationsmesstechnik (17 Punkte)

Gegeben sei das System nach Abbildung 9 mit:

$$x(t) = A \sin(\omega t)$$

$$\hat{y}(t) = B \sin^2(\omega t).$$

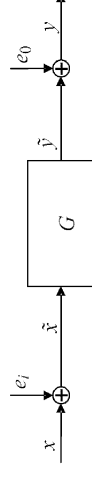


Abbildung 9: System 1

Darin seien $e_0(t)$ und $e_i(t)$ weiße Gaußsche Rauschprozesse mit

$$R_{e_i e_i} = \sigma_{e_i}^2 \delta(t) \quad \text{und} \quad R_{e_0 e_0} = \sigma_{e_0}^2 \delta(t).$$

Zusätzlich seien e_0 , $\hat{y}$ und e_o , e_i unkorreliert.

a) Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion $R_{\hat{y}\hat{y}}$. (4 Punkte)

b) Bestimmen Sie das Verhältnis von empfangener Leistung $P_{\hat{y}}$ zu gesendeter Leistung P_x ohne Rauschen $e_0(t)$ sowie das Verhältnis von empfangener Leistung $P_{\hat{y}}$ zu gesendeter Leistung P_x mit Rauschen $e_0(t)$. (5 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

c) Nennen Sie zwei Nachteile der Laufzeitkorrelation. (1 Punkt)

Gegeben sei das System nach Abbildung 10 mit:

$$R_{ce} = b^2 e^{-\frac{a}{2}|t|}, R_{me} = e^{-\frac{b}{2}|t|} \quad \text{und} \quad G_M(s) = -\frac{Tb}{2 + 2Ts}.$$

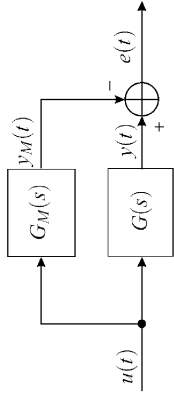


Abbildung 10: System 2

- d)** Berechnen Sie $G(f)$ unter Annahme einer stabilen minimalphasigen Gesamtübertragungsfunktion. (5 Punkte)
- e)** Es gelte $T = \frac{2}{a}$. Bestimmen Sie S_{yy} . (2 Punkte)

Aufgabe 4: Regressionsrechnung (22 Punkte)

- a)** Was ist das Ziel der Regressionsrechnung? (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- b)** Nennen Sie einen Nachteil der Regressionsrechnung. (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- c)** Berechnen Sie mit Hilfe der Regressionsrechnung die lineare Kennlinie aus den Messdaten in Tabelle 2. Geben Sie die resultierende Kennlinie in der Form $\hat{y} = a_1 u + a_2$ an. (3 Punkte)

y	-1	-1.1	0	0.9	2.1	2.55
u	1.5	1.8	2	2.4	2.8	3

Tabelle 2: Messdaten

- d)** Wie würde sich das Ergebnis aus **c)** bei Verwendung der Least-Squares-Methode ändern? (1 Punkt)
- e)** Wie sieht der Ansatz für das zugehörige Signalmodell der äquivalenten Least-Squares-Schätzung aus? (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Kennfeldinterpolation

Es wurde die Raddrehzahl ω in Abhängigkeit von der beschleunigenden Kraft F_A sowie der bremsenden Kraft F_B gemessen (siehe Tabelle 3).

ω in [1/s]	$F_A = 2 \text{ N}$	$F_A = 4 \text{ N}$	$F_A = 6 \text{ N}$
$F_B = 0 \text{ N}$	0.32	0.6	0.9
$F_B = 1 \text{ N}$	0.1	0.3	0.55
$F_B = 2 \text{ N}$	0.05	0.13	0.3

Tabelle 3: Gemessene Raddrehzahl ω in Abhängigkeit von beschleunigender Kraft F_A und bremsender Kraft F_B

- g)** Bestimmen Sie den Schätzwert der Raddrehzahl für $F_A = 3 \text{ N}$ und $F_B = 0.5 \text{ N}$. (1 Punkt)
- h)** Wie sähe das Ergebnis aus **g)** unter Vernachlässigung der quadratischen Terme aus? (2 Punkte)
- i)** Wie groß ist der relative Fehler in dem betrachteten Intervall, der durch die Vernachlässigung der quadratischen Terme entsteht? Für welches F_B ist der relative Fehlerbetrag maximal, wenn $F_A = 3 \text{ N}$ gilt? (5 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- j)** Gegeben sei folgendes Polynom, welches mittels Newton-Interpolation gewonnen wurde:

$$\hat{y}_N = \frac{7}{48}u^3 - \frac{3}{24}u^2 - \frac{4}{3}u + 3.$$

Dabei wurden die Stützstellen $u_0 = 0$, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$ und $u_3 = 6$ verwendet.

Geben Sie das zugehörige Polynom mit der zusätzlichen Stützstelle ($u_4 = 3$, $y_4 = 2$) in der Form

$$\hat{y}_L = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots$$

an. Dabei soll das resultierende Polynom $\hat{y}_L$ das Ergebnis der Lagrange-Interpolation repräsentieren. (4 Punkte)

Aufgabe 5: Quantisierung (16 Punkte)

Es sei folgendes Signal gegeben: $x(t) = 5 \sin(\omega t)$, welches AD gewandelt wurde. Dabei wurde ein SNR des Quantisierungsrauschens von $\text{SNR}_q = 158,297 \text{ dB}$ erzielt.

- a)** Bestimmen Sie die Auflösung in Bit unter Annahme eines linearen Quantisierungsmodells. (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Im Folgenden wird das Frequenzzähl-Verfahren betrachtet. Dabei sei die Anzahl der Zähne $z = 50$, $T_{ref} = 1 \text{ s}$ und $f_0 = 1 \text{ MHz}$.

- b)** Ab welcher Frequenz f_q lohnt sich das Frequenzzähl-Verfahren im Vergleich zur Periodendauerermessung? (3 Punkte)
- c)** Wie hoch wäre der Zählerstand N bei der Frequenz f_q aus Aufgabenteil **b)** mit dem Frequenzzähl-Verfahren? (1 Punkt)
- d)** Es gelte $N_{\max} = 500$. Wie viele Zähne werden benötigt, um bis $f \leq 5 f_q$ messen zu können? Verwenden Sie für f_q das Ergebnis aus Aufgabenteil **b)** bei der Frequenz $f = f_q$. (1 Punkt)
- e)** Bestimmen Sie das Verhältnis des relativen maximalen Quantisierungsfehlers des Verfahrens aus Teilaufgabe **d)** zu dem des Verfahrens aus Teilaufgabe **b)**. (1 Punkt)
- f)** Würde das Frequenzzähl-Verfahren aus Teilaufgabe **b)** ebenfalls auf $N_{\max} = 500$ begrenzt werden, wie könnte dann einem Ansteigen des relativen maximalen Fehlers entgegengewirkt werden? Für welche Werte würde dieser Fehler konstant bleiben? (2 Punkte)

g) Welchen der drei AD-Wandler aus Tabelle 4 würde Sie bevorzugen?

Hinweis: Beachten Sie die Breite der Quantisierungsstufen q , die Signalfrequenz f_G und die Abtastfrequenz f_a . (2 Punkte)

	q in V	f_a in kHz	f_G in kHz
A	2	20	8
B	0.5	40	18
C	0.2	40	21

Tabelle 4: Charakteristika der drei AD-Wandler

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

h) Erklären Sie den Unterschied zwischen Abtastung und Quantisierung. (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

i) Was ist der Unterschied zwischen der Abtastung mit idealen δ -Impulsen und der Realität und womit ist dieser zu begründen? (2 Punkte)

Lösung

Bemerkung: Die Leistungsdichte und die Autokorrelation von farbigem Rauschen sind im Messtechnik-Buch (Kiencke, Eger, Messtechnik, 6. Auflage, Springer-Verlag, 2005) auf Seite 224 abgebildet und werden in der Lösung als *Komponente 1* für Autokorrelation und *Komponente 2* für Leistungsdichte bezeichnet.

a) Signal a)

- Signal im Zeitbereich: rechteck-förmig, weißes Rauschen, Frequenz: 4 Hz
 $\Rightarrow$ Autokorrelation: dreieck-förmig, Impuls bei $\tau = 0$, Frequenz: 4 Hz
 $\Rightarrow$ Leistungsdichte: Impulse bei $\pm(2k + 1) \cdot 4\text{Hz}$, Offset

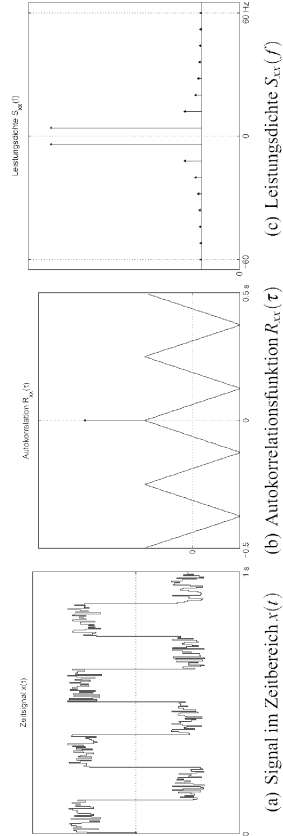


Abbildung 5: Signal a)

b) Signal b)

- Autokorrelation: parabel-förmig, Komponente 1, Offset A^2 , Frequenz: 4 Hz
 $\Rightarrow$ Signal im Zeitbereich: sägezahn-förmig, farbiges Rauschen, Offset A , Frequenz: 4 Hz
 $\Rightarrow$ Leistungsdichte: Impulse bei $\pm 4 \pm 8 \pm 12 \dots \text{Hz}$, Komponente 2, Impuls bei $f = 0$

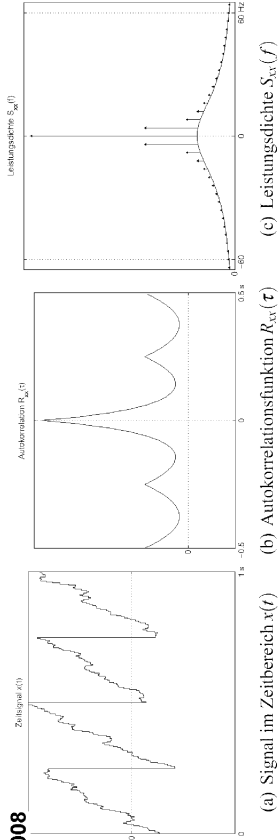


Abbildung 6: Signal b)

c) Signal c)

- Leistungsdichte: Impulse bei $\pm 16\text{Hz}$, Komponente 2
 $\Rightarrow$ Signal im Zeitbereich : sinus-förmig, farbiges Rauschen, $f = 16\text{Hz}$
 $\Rightarrow$ Autokorrelation : cosinus-förmig, Komponente 1, $f = 16\text{Hz}$

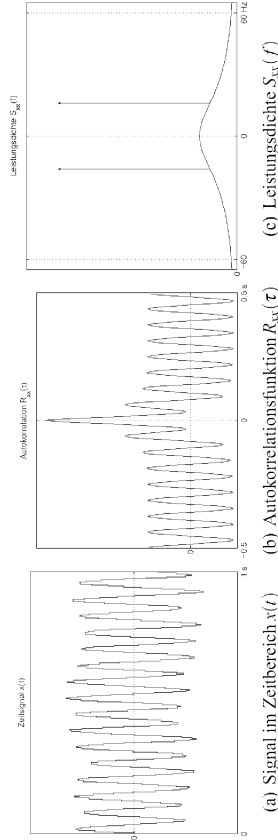


Abbildung 7: Signal c)

- d) • Für mittelwertfreie Störungen: Mittelwertbildung
- Bei nicht mittelwertfreien Störungen: Mittelwertbildung + Kompensation des systematischen Fehlers (z.B. durch Subtraktion)

e)

$$y = \frac{8}{9}u + \frac{5}{3}$$
$$y_{\text{ges}} = \frac{8}{9}u + \frac{5}{3} + \frac{8}{9}e$$
$$\mu_{y_{\text{ges}}} = \frac{8}{9}\mu_u + \frac{5}{3} + \frac{8}{9}\underbrace{\mu_e}_{=0} \Rightarrow \text{mittelwertfreie Störungen werden herausgefiltert}$$

f) Mittelwertfreie Störungen können bei nichtlinearen Messkennlinien nicht durch eine reine Mittelwertbildung herausgefiltert werden. Ein Offset bleibt stets erhalten. Um den Offset zu beseitigen, muss die Funktion zuerst linearisiert werden.

g) Gesucht: $m(s)$

Die Gewichtskraft mg wirkt der Federkraft cs entgegen: $mg = cs$. Daraus resultiert die Masse:

$$m = \frac{cs}{g}$$

Der neue Zusammenhang für die Masse ergibt sich zu:

$$m = \frac{cs}{g} = \frac{\kappa E(T)s}{g} = m(E(T), s, g).$$

Nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz ergibt sich für die statistisch voneinander unabhängigen Messwerte:

$$\begin{aligned}\sigma_m^2 &= \left(\frac{\partial m}{\partial E(T)}\right)^2 \cdot \sigma_E^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial s}\right)^2 \cdot \sigma_s^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial g}\right)^2 \cdot \sigma_g^2 \\ &= \left(\frac{\kappa s}{g}\right)^2 \cdot \sigma_E^2 + \left(\frac{\kappa E(T)}{g}\right)^2 \cdot \sigma_s^2 + \left(\frac{\kappa E(T)s}{g^2}\right)^2 \cdot \sigma_g^2.\end{aligned}$$

i) Gesucht: $\sigma_E^2(\sigma_s^2, \sigma_T^2)$

Nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz gilt:

$$\begin{aligned}E &= \alpha s + \beta T + \gamma \\ \Rightarrow \sigma_E^2 &= \alpha^2 \sigma_s^2 + \beta^2 \sigma_T^2\end{aligned}$$

j) Gesucht: $\hat{\sigma}_m^2(\sigma_s^2, \sigma_E^2, \sigma_T^2)$

Aufgrund der statistischen Abhängigkeit ergibt sich:

$$\hat{\sigma}_m^2 = \sigma_m^2 + 2 \frac{\partial m}{\partial E} \sigma_E \sigma_{r_{Es}}$$

Aufgrund der starren Bindung gilt: $r_{Es} = 1$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_m^2 &= \left(\frac{\kappa s}{g}\right)^2 \cdot (\alpha^2 \sigma_s^2 + \beta^2 \sigma_T^2) + \left(\frac{\kappa(\alpha s + \beta T + \gamma)}{g}\right)^2 \cdot \sigma_s^2 + \left(\frac{\kappa s(\alpha s + \beta T + \gamma)}{g^2}\right)^2 \cdot \sigma_g^2 \\ &\quad + 2 \frac{\kappa s}{g} \cdot \frac{\kappa(\alpha s + \beta T + \gamma)}{g} \cdot \sigma_s \sqrt{\alpha^2 \sigma_s^2 + \beta^2 \sigma_T^2}\end{aligned}$$

Lösung

- Herabsetzen des Messbereiches
- Hintereinanderschalten zweier nichtlinearer Glieder
- Wahl des günstigsten Messbereichs
- Differenzmethode
- Gegenkopplung
- Die ideale Messkennlinie ist durch eine konstante Empfindlichkeit charakterisiert. Ebenso durchschneidet sie den Anfangs- und durch den Endpunkt des Messbereiches.
- Die ideale Messkennlinie ist gegeben durch:

$$y_i - y_a = S_i(u - u_a).$$

Mit der Kennlinie

$$y_e = y_a + e^{(u_e - u_a)}$$

resultiert die ideale Empfindlichkeit zu:

$$S_i = \frac{y_e - y_a}{u_e - u_a} = \frac{e^{(u_e - u_a)}}{u_e - u_a}.$$

$$y_i = y_a + S_i(u - u_a) = y_a + \frac{u - u_a}{u_e - u_a} e^{(u_e - u_a)}.$$

d) Lösung siehe Abbildung 8 (vergleiche Messtechnik, Abb. 3.9):

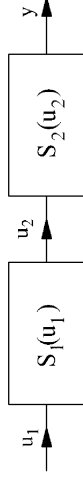


Abbildung 8: Hintereinanderschalten von zwei nichtlinearen Gliedern

e) Um aus der nichtlinearen Kennlinie

$$y = e^{(u_2 - u_a)} + y_a$$

die lineare Kennlinie

$$\hat{y} = S_i(u_1 - u_a) + y_a$$

zu gewinnen, muss das Messglied

$$u_2 = u_a + \ln(S_i(u_1 - u_a))$$

vorgeschaltet werden.

- Bei der Fixpunktjustierung geht die Kennlinie durch den Anfangs- und Endpunkt hindurch. Der Fehler ist damit im Anfangs- und Endpunkt gleich Null. Bei der Toleranzbandjustierung wird die Kennlinie gegenüber der Fixpunktjustierung so additiv verschoben, dass der maximale Fehler im Messbereich minimal wird.
- Die Empfindlichkeit der Kennlinie ändert sich nicht: $\Delta S = 0$. Der Nullpunktfehler ändert sich in Abhängigkeit der Störgröße z mit $e(z) = e(z_0) + \Delta e(z)$.
- Bei der Abschimmung treten superponierende Fehler erst gar nicht auf.
- Differenzmethode: Superponierende Fehler gehören zum geraden Anteil der Messkennlinie. Daher werden sie durch die Differenzmethode eliminiert.
- Zerhacker: Der superponierende Fehler wird zu höheren Frequenzen verschoben und kann dann durch eine Tiefpassfilterung eliminiert werden.
- Der Erwartungswert berechnet sich zu:

$$E\{z\} = E\{2x + y + 2\} = 2\mu_x + \mu_y + 2.$$

Um die unbekannte Standardabweichung von x zu erhalten, folgt die Beziehung:

$$C_{xy} = r_{xy} \sigma_x \sigma_y \Rightarrow \sigma_x = \frac{C_{xy}}{r_{xy} \sigma_y}.$$

Damit resultiert die Varianz zu:

$$\begin{aligned}\sigma_z^2 &= E\{z^2\} - \mu_z^2 = E\{4x^2 + y^2 + 4 + 4xy + 4y + 8x\} - 2\mu_x - \mu_y - 2 \\ &= 4E\{x^2\} + E\{y^2\} + 4 + 4r_{xy} + 4\mu_y + 8\mu_x - 2\mu_x - \mu_y - 2 \\ &= 4(\sigma_x^2 + \mu_x^2) + \sigma_y^2 + \mu_y^2 + 2 + 4r_{xy} + 3\mu_y + 6\mu_x \\ &= 4 \frac{C_{xy}}{r_{xy} \sigma_y} + 4\mu_x^2 + \sigma_y^2 + \mu_y^2 + 2 + 4r_{xy} + 3\mu_y + 6\mu_x.\end{aligned}$$

$$\hat{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 1.069, \quad \hat{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = 1.09.$$

k) Der Korrelationskoeffizient berechnet sich allgemein zu

$$\hat{r}_{xy} = \frac{\hat{C}_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Die Stichprobenvarianzen ergeben sich zu:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x})^2 = 0.444,$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2 = 0.4822.$$

Die Kovarianz lautet:

$$\hat{C}_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x})(y_i - \hat{y}) = 0.4532.$$

Daraus resultiert:

$$\hat{r}_{xy} = 0.979.$$

Lösung

a) Gesucht: $R_{yy}(t)$

Aufgrund der Unkorreliertheit ergibt sich:

$$\begin{aligned} R_{yy} &= R_{\hat{y}\hat{y}} + R_{e_0e_0} + \underbrace{R_{\hat{y}e_0} + R_{e_0\hat{y}}}_{=0} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T B^2 \sin^2(\omega(t+\tau)) \sin^2(\omega\tau) d\tau + \sigma_{e_0}^2 \delta(\tau) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T B^2 (\sin^2(\omega\tau) \cos(\omega\tau) + \sin(\omega\tau) \cos(\omega\tau) \sin(\omega\tau))^2 d\tau + \sigma_{e_0}^2 \delta(\tau) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{B^2}{2T} \left(\sin^2(\omega\tau) \cdot \left(\frac{T}{4} - \frac{2}{32\omega} \sin(4\omega T) \right) \right. \\ &\quad \left. + \cos^2(\omega\tau) \left(\frac{6}{8}T - \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega T) + \frac{2}{32\omega} \sin(4\omega T) \right) \right) + \sigma_{e_0}^2 \delta(\tau) \\ &= \frac{B^2}{2} \left(\frac{3}{4} \cos^2 \omega\tau + \frac{1}{4} \sin^2 \omega\tau \right) + \sigma_{e_0}^2 \delta(\tau) \end{aligned}$$

b) Gesucht: 1) $\frac{\hat{P}_x}{P_x}$ unter Vernachlässigung des Rauschens:

$$\hat{P}_{\hat{y}} = R_{\hat{y}\hat{y}}(0) = \frac{B^2}{2} \cdot \frac{3}{4}$$

Die Autokorrelationsfunktion der Eingangsgröße x ergibt sich zu:

$$R_{xx} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A^2 \sin(\omega(t+\tau)) \sin(\omega\tau) d\tau = \frac{A^2}{2} \cos(\omega\tau)$$

$$P_x = R_{xx}(0) = \frac{A^2}{2}$$

Das Verhältnis der beiden Leistungen ergibt sich zu:

$$\frac{P_{\hat{y}}}{P_x} = \left(\frac{B}{A} \right)^2 \cdot \frac{3}{4}$$

2) $\frac{P_y}{P_x}$ unter Berücksichtigung des Rauschens:

$$\frac{P_y}{P_x} = \infty, \text{ da } \delta(\tau=0) = \infty.$$

- c) • Numerisch Aufwändig
- Ergebnis steht erst am Ende des Integrationsintervalls zur Verfügung

d) Gegeben: G_{in} , R_{ee} und R_{nn}

Gesucht: $G(f)$

Die Gesamtübertragungsfunktion $G_e(f) = G(f) - G_M(f)$ berechnet sich aus

$$S_{ee} = |G_e(f)|^2 S_{nn}.$$

Die beiden Leistungsdichten sind:

$$S_{ee} = \frac{b^2 a}{\frac{a^2}{4} + (2\pi f)^2}, \quad S_{nn} = \frac{b}{\frac{b^2}{4} + (2\pi f)^2}.$$

Daraus resultiert das Betragsquadrat von $G_e(f)$ zu:

$$|G_e(f)|^2 = \frac{S_{ee}}{S_{nn}} = \frac{ba \left(\frac{b^2}{4} + (2\pi f)^2 \right)}{\frac{a^2}{4} + (2\pi f)^2}.$$

Unter Annahme einer stabilen minimalphasigen Übertragungsfunktion ergibt sich dann:

$$G_e(f) = \sqrt{ab} \cdot \frac{\frac{b}{2} + j2\pi f}{\frac{a}{2} + j2\pi f}.$$

Die Gesamtübertragungsfunktion resultiert zu:

$$G(f) = G_e(f) + G_M(f) = G_e(f) - \frac{Tb}{2 + 2Tj2\pi f} = \frac{\sqrt{ab} \cdot \left(\frac{b}{2} + j2\pi f \right) \left(\frac{1}{T} + j2\pi f \right) - \frac{b}{2} \left(\frac{a}{2} + j2\pi f \right)}{\left(\frac{a}{2} + j2\pi f \right) \left(\frac{1}{T} + j2\pi f \right)}.$$

e) Für $T = \frac{2}{a}$ ergibt sich die Übertragungsfunktion zu:

$$G(f) = \sqrt{ab} \cdot \frac{\left(\frac{b}{2} + j2\pi f \right) - \frac{b}{2}}{\frac{a}{2} + j2\pi f}.$$

Dies führt auf

$$S_{yy} = |G(f)|^2 \cdot S_{nn} = \frac{b \left(ab \left(\frac{b^2}{4} + (2\pi f)^2 \right) + \frac{b^2}{4} - 2\sqrt{ab} \frac{b^2}{4} \right)}{\left(\frac{a^2}{4} + (2\pi f)^2 \right) \left(\frac{b^2}{4} + (2\pi f)^2 \right)}.$$

- a) Bestimmung eines Polynoms durch eine Reihe von mit Rauschen überlagerten Messpunkten.
 b) Wenn die Ordnung des Regressionspolynoms erhöht werden soll, müssen alle Koeffizienten neu berechnet werden.
 c) Gesucht ist eine Gerade der Form $\hat{y}(u) = a_1 u + a_0$. Die Minimierung der Gütefunktion

$$Q = \sum_{k=0}^{n-1} (y_k - a_1 u_k - a_0)^2$$

führt auf die beiden gesuchten Parameter

$$a_1 = \frac{n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} u_k y_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k \sum_{k=0}^{n-1} y_k}{n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} u_k^2 - \left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k \right)^2}, \quad a_0 = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y_k - a_1 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k.$$

Für die einzelnen Summen gilt:

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = 13.5, \quad \sum_{k=0}^{n-1} y_k = 3.45, \quad \sum_{k=0}^{n-1} u_k^2 = 32.09, \quad \sum_{k=0}^{n-1} u_k y_k = 12.21.$$

Damit folgen die beiden Parameter zu $a_0 = -5.26$ und $a_1 = 2.59$. Die Kennlinie lautet damit:

$$\hat{y} = 2.59u - 5.26.$$

- d) Da der LS-Schätzer den gleichen Ansatz verwendet, ergibt sich das gleiche Ergebnis wie bei der Regressionsrechnung.
 e) Äquivalente LS-Schätzung:

$$\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 1 & u_0 \\ 1 & u_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & u_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ -1.1 \\ 0 \\ 0.9 \\ 2.1 \\ 2.55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 \\ 1 & 1.8 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2.4 \\ 1 & 2.8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

- f) Kennfeldinterpolation für $u_0 = 2, u_1 = 4, z_0 = 0$ und $z_1 = 1$:

$$\begin{aligned} \hat{\omega} &= \omega(u_0, z_0) + \frac{\omega(u_1, z_0) - \omega(u_0, z_0)}{u_1 - u_0} \Delta u + \frac{\omega(u_0, z_1) - \omega(u_0, z_0)}{z_1 - z_0} \Delta z \\ &+ \frac{\omega(u_2, z_0) - 2\omega(u_1, z_0) + \omega(u_0, z_0)}{2(u_1 - u_0)^2} \Delta u^2 + \frac{\omega(u_1, z_1) - \omega(u_0, z_1) - \omega(u_1, z_0) + \omega(u_0, z_0)}{(u_1 - u_0)(z_1 - z_0)} \Delta u \Delta z \\ &+ \frac{\omega(u_0, z_2) - 2\omega(u_0, z_1) + \omega(u_0, z_0)}{2(z_1 - z_0)^2} \Delta z^2 \\ &= 0.32 + \frac{0.6 - 0.32}{2} \Delta u + \frac{0.1 - 0.32}{1} \Delta z + \frac{0.9 - 2 \cdot 0.6 + 0.32}{2 \cdot 2^2} \Delta u^2 \\ &+ \frac{0.3 - 0.1 - 0.6 + 0.32}{2 \cdot 1} \Delta u \Delta z + \frac{0.05 - 2 \cdot 0.1 + 0.32}{2 \cdot 1^2} \Delta z^2 \\ &= 0.32 + 0.14 \Delta u - 0.22 \Delta z + 0.0025 \Delta^2 u - 0.04 \Delta u \Delta z + 0.085 \Delta^2 z \end{aligned}$$

- g) Für $u_3 = 3$ und $z_3 = 0.5$ gilt $\Delta u = u_3 - u_0 = 1$ und $\Delta z = z_3 - z_0 = 0.5$. Eingesetzt in die interpolierte Funktion $\hat{\omega}$ folgt: $\hat{\omega} = 0.3538$.
 h) Unter Vernachlässigung der quadratischen Terme gilt: $\hat{\omega}^* = 0.32 + 0.14 \Delta u - 0.22 \Delta z - 0.04 \Delta u \Delta z$. Werden $\Delta u = 1$ und $\Delta z = 0.5$ aus der vorangegangenen Teilaufgabe eingesetzt, dann folgt: $\hat{\omega}^* = 0.33$.

$$F_r = \frac{\hat{\omega}^* - \hat{\omega}}{\hat{\omega}} = \frac{-0.0025 \Delta^2 u - 0.085 \Delta^2 z}{0.32 + 0.14 \Delta u - 0.22 \Delta z + 0.0025 \Delta^2 u - 0.04 \Delta u \Delta z + 0.085 \Delta^2 z}$$

Für F_r folgt $\Delta u = 1$ und damit

$$F_r = \frac{\hat{\omega}^* - \hat{\omega}}{\hat{\omega}} = \frac{-0.0025 - 0.085 \Delta^2 z}{0.4625 - 0.26 \Delta z + 0.085 \Delta^2 z}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_r}{\partial \Delta z} &= \frac{-0.17 \Delta z \cdot (0.4625 - 0.26 \Delta z + 0.085 \Delta^2 z) - (-0.0025 - 0.085 \Delta^2 z) \cdot (-0.26 + 0.17 \Delta z)}{(0.4625 - 0.26 \Delta z + 0.085 \Delta^2 z)^2} \\ &= \frac{0.0221 \Delta^2 z - 0.0782 \Delta z - 6.5 \cdot 10^{-4}}{(0.4625 - 0.26 \Delta z + 0.085 \Delta^2 z)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F_r}{\partial \Delta z} = 0 \Leftrightarrow 0.0221 \Delta^2 z - 0.0782 \Delta z - 6.5 \cdot 10^{-4} = 0 \Rightarrow \Delta z_1 = 3.5468, \Delta z_2 = -0.0083.$$

Da beide Lösungen nicht im betrachteten Bereich liegen, müssen die Ränder näher untersucht werden.

$$F_r(\Delta z = 1) = -0.3043, \quad F_r(\Delta z = 0) = -0.0054.$$

Der Betrag des relativen Fehlers wird somit für $\Delta z = 1$ maximal.

- j) Das Ergebnis der Lagrange-Interpolation ist identisch mit dem der Newton-Interpolation. Daher kann die Berechnung weiterhin mit der Newton-Interpolation erfolgen:

$$\begin{aligned} \hat{y}_L(u_4) &= \hat{y}_N(u_4) + a_4(u_4 - 2)(u_4 - 4)(u_4 - 6) \\ \Rightarrow a_4 &= \frac{\hat{y}_L(u_4) - \hat{y}_N(u_4)}{(u_4 - 2)(u_4 - 4)(u_4 - 6)} = \frac{2 - \frac{87}{48}}{3 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-3)} = \frac{\frac{9}{48}}{9} = \frac{1}{48} \\ \Rightarrow \hat{y}_L &= \frac{1}{48} u^4 - \frac{5}{48} u^3 + \frac{19}{24} u^2 - \frac{7}{3} u + 3. \end{aligned}$$

Lösung

- a) Das SNR kann bei sinusförmigem Eingangssignal zu

$$\text{SNR}_q = 10 \log \left(\frac{3}{2} \cdot 2^N \right)$$

berechnet werden. Daraus folgt

$$N = \frac{1}{2} \cdot \log \left(\frac{2}{3} \cdot 10^{\frac{\text{SNR}_q}{10}} \right) = 26 \text{ Bit}$$

- b) Die maximalen Quantisierungsfehler ergeben sich zu

$$F_{r,\text{FZ}} = \frac{1}{z_f T_{\text{ref}}}, \quad F_{r,\text{PDM}} = \frac{f}{f_0} z_f.$$

Damit das Frequenzzählverfahren besser ist, muss

$$F_{r,\text{FZ}} \leq F_{r,\text{PDM}}$$

gelten. Daraus folgt:

$$f^2 \geq \frac{f_0}{z_f^2 T_{\text{ref}}} = 400 \text{ Hz}^2 \Rightarrow f \geq 20 \text{ Hz}.$$

$$\omega_q = \frac{N \cdot 2\pi}{z \cdot T_{ref}} \Rightarrow N = f_q \cdot z \cdot T_{ref} = 1000$$

d) Die Anzahl der Zähne ergibt sich zu:

$$z = \frac{N_{max}}{5 f_q T_{ref}} = 5$$

e) Das Verhältnis der relativen Fehler ergibt sich zu:

$$\frac{F_{r,neu}}{F_{r,alt}} = \frac{z_1 f_q T_{ref}}{z_2 f_q T_{ref}} = \frac{z_1}{z_2} = 10$$

f) Das Referenz-Zeitintervall müsste verkürzt werden auf:

$$T_{ref} = \frac{N_{max}}{5 f_q z} = 0.1 \text{ s}$$

- g) AD-Wandler C verletzt das Abtasttheorem. Von den verbleibenden beiden Wandlern hat B die höhere Auflösung. Die Wahl fällt damit auf AD-Wandler B.
- h) Die Quantisierung entspricht einer Abtastung der Amplitudendichte. Durch die Abtastung wird ein zeitkontinuierliches Signal zeitlich diskretisiert, durch die Quantisierung wird dagegen die Amplitudendichte diskretisiert.
- i) Ideale δ -Impulse sind in der Praxis nicht möglich. Daher kommt es zur Faltung mit einem Rechteckfenster, wodurch die Wirkung einer Mittelwertbildung und somit einer Verfälschung des Eingangssignals einwirkt.

Klausur im Kernfach
Messtechnik
2. April 2009

A1 (21)	A2 (23)	A3 (23)	A4 (16)	A5 (17)	Gesamt (100)	Note
---------	---------	---------	---------	---------	--------------	------

Aufgabe 1: Kurvenanpassung (21 Punkte)

- a) Was ist das Ziel der Kurvenapproximation? Was genau ist der Unterschied zur Kurveninterpolation? (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- b) Im Folgenden soll die Kennlinie eines unbekannten Spannungsverstärkers analysiert werden. Dazu wird für unterschiedliche anliegende Spannungen der Ausgang des Verstärkers protokolliert. Tabelle 1 zeigt für verschiedene Referenzspannungen u die Ausgabe y des Spannungsverstärkers. Bestimmen Sie nach der Lagrange-Methode das Interpolationspolynom in der Form $\hat{y}_1(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots$. (5 Punkte)

Index	0	1	2
u/V	4	5	6
y/V	1,674	1,897	2,079

Tabelle 1: Messdaten

- c) Zusätzlich zu den Werten aus Tabelle 1 wird ein weiterer Messpunkt aufgenommen. Dabei wird bei einer Spannung $u = 6,5V$ am Ausgang des Messgerätes der Wert $y = 2,160V$ abgelesen. Berechnen Sie nun ausgehend vom Ergebnis aus b) nach dem Newton-Verfahren das Interpolationspolynom. (4 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- d) Berechnen Sie nach dem Least-Squares-Ansatz die Geradengleichung für die Messpunkte aus Tabelle 1. (5 Punkte)

Durch die Analyse des Schaltungsplans lässt sich die exakte Kennlinie des Verstärkers bestimmen:

$$y = 1V \cdot \ln\left(\frac{u}{0,75V}\right)$$

- e) Unter Zuhilfenahme der exakten Kennlinie soll nun der relative Fehler F_{rel} bezogen auf die Approximationsgerade aus d) bestimmt werden. Berechnen Sie diesen für die Stützstellen aus Tabelle 1. (4 Punkte)
- f) Ist in Betracht des relativen Fehlers an den Stützstellen die vorgenommene Approximation vertretbar? Falls nicht, nennen Sie eine Maßnahme zur Verbesserung. (1 Punkt)

Aufgabe 2: Stationäres Verhalten von Messsystemen (23 Punkte)

- a) Wie können Messfehler bei Kennlinienfehlern unter Normalbedingungen reduziert werden? Nennen Sie zwei mögliche Verfahren. (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Gegeben ist die folgende Kennlinie eines Sensors:

$$y(x) = 7 + x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4$$

- b) Bestimmen Sie die Empfindlichkeit S des Sensors. (1 Punkt)
- c) Berechnen Sie die maximale Empfindlichkeit $S_{\max}$ des Sensors. (4 Punkte)
- d) Skizzieren Sie qualitativ die Empfindlichkeit. Beachten Sie dabei die berechneten Werte aus Teilaufgabe c). (2 Punkte)
- e) Im günstigsten Messbereich sollen die Empfindlichkeit möglichst hoch und die Messkennlinie linear sein. Bestimmen Sie auf dieser Grundlage den Arbeitspunkt. Berechnen Sie anschließend den günstigsten Messbereich $[x_a, x_a + 2]$ um den gewählten Arbeitspunkt. (5 Punkte)
- f) Nennen Sie ein Verfahren, mit dessen Hilfe man die Empfindlichkeit des Messsystems erhöhen kann. Skizzieren Sie die Anordnung und berechnen Sie anschließend die resultierende Kennlinie um den Arbeitspunkt aus Teilaufgabe d). (5 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Gegeben sei das Messergebnis y , welches sich mit Hilfe der Messungen x_1, x_2 und x_3 berechnen lässt:

$$y(\mathbf{x}) = y(x_1, x_2, x_3) = 4 + x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^3 - x_3$$

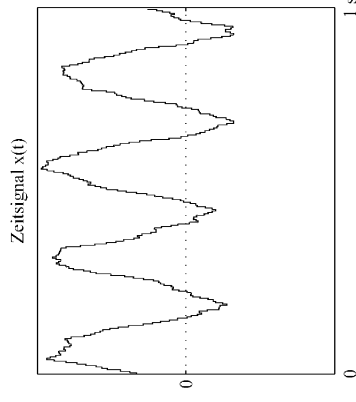
Dabei seien die Varianzen der Messungen σ_1^2, σ_2^2 und σ_3^2 bekannt.

- g) Berechnen Sie allgemein die Varianz σ_y^2 des Messergebnisses y . (3 Punkte)
- h) Berechnen Sie die Varianz σ_y^2 des Messergebnisses y für den Fall, dass x_1 und x_2 starr gebunden sind, x_3 sei dabei unkorreliert zu den anderen Messgrößen. (1 Punkt)

Aufgabe 3: Korrelationsmesstechnik und Statistik (23 Punkte)

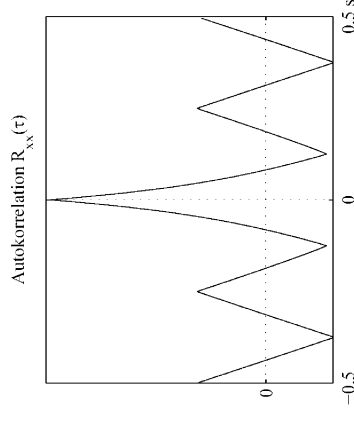
Verwenden Sie für die Bearbeitung weder Bleistifte noch Stifte mit roter Farbe!

- a) Zeichnen Sie zu folgendem Zeitsignal $x(t)$ dessen Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ und dessen Leistungsdichte $S_{xx}(f)$! Begründen Sie Ihre Lösung, beschriften und beziffern Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung. (4 Punkte)



Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

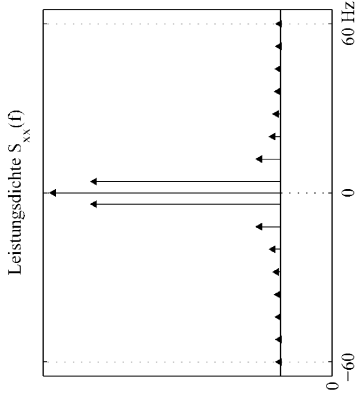
- b) Zeichnen Sie zu folgender Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ deren Signal $x(t)$ im Zeitbereich und deren Leistungsdichte $S_{xx}(f)$! Begründen Sie Ihre Lösung, beschriften und beziffern Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung. (4 Punkte)



Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

- c) Zeichnen Sie zu folgender Leistungsdichte $S_{xx}(f)$ deren Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ und deren Signal $x(t)$ im Zeitbereich! **Begründen Sie Ihre Lösung, beschriften und bezeichnen Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung.** (4 Punkte)

Hinweis: Die Leistungsdichte $c)$ hat Impulse bei $(2k + 1) \cdot 4\text{Hz}$.



Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Aufgabenteilen.

Im Folgenden soll der Wurf zweier Würfel betrachtet werden. Dabei soll der Wurf des ersten Würfels durch die Zufallsvariable x und der andere Würfel durch y beschrieben werden.

- d) In welchem statistischen Zusammenhang stehen die beiden Zufallsvariablen, im Fall, dass beide Würfel nicht gezinkt sind? (1 Punkt)
- e) Beide Würfel werden nun zusammen geworfen und jeweils die Summe der Augenzahlen protokolliert. Berechnen Sie den Erwartungswert der Summe beider Augenzahlen bei der Annahme idealer Würfel. (1 Punkt)
- f) Wie berechnet sich die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion bei Annahme idealer Würfel? Führen Sie dazu die nötige Berechnung durch und zeichnen Sie anschließend die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion. (3 Punkte)
- g) Bei dem gemeinsamen Wurf erwecken die Würfel den Verdacht, dass sie sehr oft die gleiche Augenzahl zeigen. Beschreiben Sie kurz ein Verfahren, um zu testen, ob die Würfel gezinkt sind. (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Aufgabenteilen.

Eine Stichprobe ergab folgende Ergebnisse:

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	7	7,25	6,987	7,325	7,3	7,27	7,105

Tabelle 2: Ergebnisse der Stichprobe

- h) Überprüfen Sie in einem Testverfahren, ob die Stichprobe repräsentativ ist. Dabei sei das Signifikanzniveau $\alpha = 0,005$ und der Sollwert $x_{\text{soll}} = 7,30$. Gliedern Sie dabei Ihr Vorgehen an Hand einer stichpunktartigen Beschreibung des jeweiligen Schrittes. (5 Punkte)

Hinweis: Die Gauß'sche Fehlerfunktion finden Sie in Bild 2 und die statistische Sicherheit mit Hilfe der Student-t-Verteilung in Bild 3.

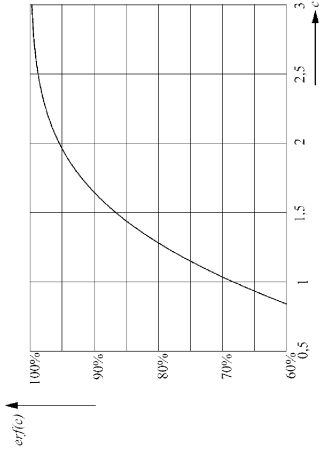


Abbildung 2: Gauß'sche Fehlerfunktion

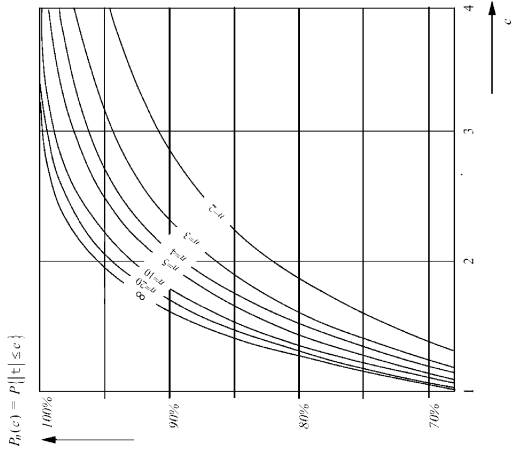
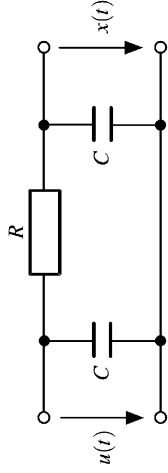


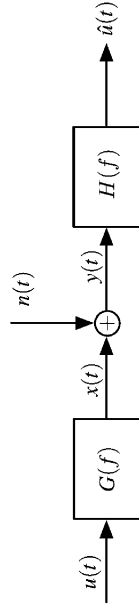
Abbildung 3: Statistische Sicherheit mit der Student-t-Verteilung

Gegeben sei das folgende vereinfachte Ersatzschaltbild einer Übertragungsleitung:



- Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{U(j\omega)}$ des Systems. (1 Punkt)
- Um welche Art eines dynamischen Systems handelt es sich hier? (1 Punkt)

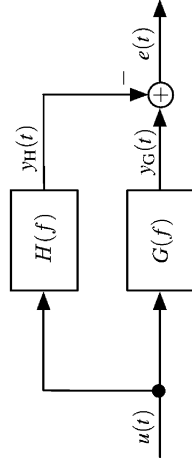
Im Folgenden wird die Schaltung durch ihre Übertragungsfunktion $G(f)$ repräsentiert. Am Eingang werde das Signal $u(t)$ eingespeist. Die bei der Übertragung entstehende Einkopplung von Störungen wird durch eine Addition des Ausgangssignals mit Rauschen $n(t)$ modelliert. Im Weiteren soll das Signal $u(t)$ möglichst fehlerfrei rekonstruiert werden. Dazu durchläuft das Signal $y(t)$ ein weiteres Filter $H(f)$:



- Mit welchem Filter lässt sich das Signal $u(t)$ optimal schätzen? Welche Größe wird hierbei minimiert? (2 Punkte)
- Welche Größen müssen im vorliegenden Fall bekannt sein? (1 Punkt)
- Geben Sie die Übertragungsfunktion $H(f)$ für das angegebene System an. (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Zur Analyse eines unbekannten Systems $G(f)$ werde ihm das bekannte System $H(f)$ parallel geschaltet:



Dabei gelte:

$$R_{uu}(\tau) = \exp\left(-\frac{1}{T}|\tau|\right), \quad R_{ee}(\tau) = \sigma_e^2 \delta(\tau) \quad \text{und} \quad H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fT}.$$

- Bestimmen Sie die Leistungsdichten von $u(t)$ und $e(t)$. Charakterisieren Sie jeweils die Art des Rauschens. (2 Punkte)

- Welche Art von LTI-System charakterisiert die Übertragungsfunktion $H(f)$? (1 Punkt)
- Berechnen Sie unter der Annahme einer stabilen und minimalphasigen Gesamtübertragungsfunktion die gesuchte Übertragungsfunktion $G(f)$. (4 Punkte)
- Berechnen Sie die Leistungsdichte $S_{y_G}(f)$ des Ausgangssignals. (2 Punkte)

Aufgabe 5: Quantisierung (17 Punkte)

- Erklären Sie stichpunktartig den Unterschied und die Parallelen von Abtastung und Quantisierung. (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Im Folgenden wird ein Delta-Sigma-Umsetzer betrachtet. Der Modulator sei dabei ein Integrator der Ordnung k .

- Skizzieren Sie die Struktur des vorliegenden Delta-Sigma-Umsetzers. (2 Punkte)
- Was genau wird durch die Erhöhung der Modulatorordnung k bewirkt? (1 Punkt)
- Berechnen Sie den Ausgang $Q(z)$ des Delta-Sigma-Umsetzers. Beachten Sie dabei Die Modulatorordnung k . (2 Punkte)
- Berechnen Sie den Amplitudengang der Übertragungsfunktion für das Quantisierungssrauschen für die Ordnungen $k = 1$ und $k = 2$. (3 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- Welche Voraussetzungen müssen für das lineare Quantisierungsmodell gelten? Skizzieren Sie dieses Modell. (2 Punkte)
- Folgendes Signal soll umgesetzt werden: $x(t) = 5.2V \cdot \sin(\omega t)$. Für die weitere Verarbeitung ist ein SNR von 140 dB gefordert.
- Berechnen Sie die geforderte Auflösung in Bit, wenn bei der Umsetzung das Quantisierungsrauschen überwiegt. (1 Punkt)
 - Welche Voraussetzung muss erfüllt sein, damit das Signal anschließend fehlerfrei rekonstruiert werden kann? (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Gegeben sei die folgende Autokorrelationsfunktion eines Signals $x(t)$:

$$R_{xx}(\tau) = a e^{-b|\tau|}.$$

- Berechnen sie die mittlere Frequenz des Signals. (3 Punkte)

Aufgabe 1: Kurvenanpassung (21 Punkte)

Lösung

- Kurveninterpolation legt ein Polynom der Ordnung n exakt durch die $(n + 1)$ Messwerte. Die Ordnung n ist durch die Anzahl der Messpunkte gegeben.
 - Approximation versucht ein vorgegebenes Kurvenmodell optimal durch die Messpunkte zu legen. Dabei werden die Messpunkte i.A. nicht exakt getroffen.
 - Im Gegensatz zur Approximation kann bei der Interpolation das Kurvenmodell nicht beliebig gewählt werden.

$$L_0(u) = \frac{u - u_1}{u_0 - u_1} \cdot \frac{u - u_2}{u_0 - u_2} = \frac{(u - 5)(u - 6)}{(-1)(-2)} = 0,5u^2 - 5,5u + 15$$

$$L_1(u) = \frac{u - u_0}{u_1 - u_0} \cdot \frac{u - u_2}{x_1 - u_2} = \frac{(u - 4)(u - 6)}{-1} = -u^2 + 10u - 24$$

$$L_2(u) = \frac{u - u_0}{u_2 - u_0} \cdot \frac{u - u_1}{x_2 - u_1} = \frac{(u - 4)(u - 5)}{2} = 0,5u^2 - 4,5u + 10$$

Damit erhält man für das Interpolationspolynom:

$$y_L = \sum_{i=0}^2 L_i(u) \cdot y_i = -0,0205u^2 + 0,4075u + 0,3720$$

c) Die rekursive Berechnung von a_3 nach dem Newton-Schema führt zu $a_3 = 0,0029$. Damit kann das Polynom bestimmt werden:

$$\begin{aligned} y_N(u) &= a_3 \cdot (u_3 - u_0)(u_3 - u_1)(u_3 - u_2) + y_L(u) = \\ &= 0,0029u^3 - 0,0635u^2 + 0,6196u + 0,0280. \end{aligned}$$

d) Für die Messgleichung nach der Least-Squares-Schätzung gilt:

$$\hat{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \Psi \cdot \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

Damit ergeben sich die gesuchten Parameter $\mathbf{a}$ zu:

$$\mathbf{a} = (\Psi^T \Psi)^{-1} \cdot \Psi^T \mathbf{y}.$$

Für die Bestimmung der Pseudoinversen gilt ferner:

$$(\Psi^T \Psi)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 12,833 & -2,5 \\ -2,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Damit kann nun der Parametervektor bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\Psi^T \Psi)^{-1} \cdot \Psi^T \mathbf{y} = \\ &= \begin{pmatrix} 12,833 & -2,5 \\ -2,5 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1,674 \\ 1,897 \\ 2,079 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8708 \\ 0,2025 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die gesuchte Geradengleichung zu:

$$\hat{y}(u) = 0,2025u + 0,8708.$$

e) Folgende Tabelle zeigt den jeweiligen relativen Fehler:

	1	2	3
Referenzwert u/V	4	5	6
wahrer Wert y_i	1,674	1,897	2,079
Approximationswert $\hat{y}_i$	1,6804	1,8833	2,0858
$F_{\text{rel}} = \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i}$	0,38%	-0,72%	0,33%

f) Der relative Fehler ist an den Stützstellen sehr gering. Offensichtlich liegen die drei Punkte sehr gut auf einer Geraden. Zur Überprüfung für den ganzen Bereich sollten noch weitere Punkte hinzugezogen werden. Ist der Fehler zu groß, so muss der Grad der Approximation erhöht werden.

Aufgabe 2: Stationäres Verhalten von Messsystemen (23 Punkte)

Lösung

a) Mögliche Verfahren sind:

- Herabsetzen des Messbereiches
- Hintereinanderschalten zweier nichtlinearer Glieder
- Wahl des günstigsten Messbereichs
- Differenzmethode
- Gegenkopplung

b) Die Empfindlichkeit berechnet sich zu:

$$S(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1.$$

c) Zunächst wird die Ableitung der Empfindlichkeit $S'(x)$ bestimmt:

$$S'(x) = \frac{dS}{dx} = y''(x) = (x+1)(x-3).$$

Nullsetzen der Gleichung führt zu den beiden Lösungen:

$$x_1 = -1 \quad \text{und} \quad x_2 = 3.$$

Für die dritte Ableitung der Kennlinie gilt:

$$S''(x) = \frac{d^2 S}{dy} = y'''(x) = 2x - 2.$$

Ausgewertet an der Stelle x_1 ergibt sich:

$$S''(-1) = -4.$$

Für die Stelle x_2 ergibt sich:

$$S''(3) = 4.$$

Somit liegt bei $x_1 = -1$ aufgrund des negativen Wertes von $S''(-1)$ ein Maximum der Empfindlichkeit vor. Für die Empfindlichkeit gilt $S(-1) = 2\frac{2}{3}$.

d) Abbildung 1 zeigt die Empfindlichkeit. Wichtig hierbei sind die beiden Extrema, welche den Verlauf der Kurve sehr gut charakterisieren.

e) Als Arbeitspunkt wird $x_1 = -1$ bestimmt. An dieser Stelle hat die Empfindlichkeit ihr Maximum. Gleichzeitig stellt dieser Punkt einen Wendepunkt der Kennlinie dar. Für die Wahl des günstigsten Messbereiches wird das folgende Kriterium angewendet:

$$S(x_a + 2) - S(x_a) = 0.$$

Damit ergibt sich:

$$S(x_a + 2) - S(x_a) = 2x^2 - 7\frac{1}{3}.$$

Damit lässt sich x_a zu $\pm\sqrt{\frac{11}{3}}$ bestimmen. Durch die Wahl des Arbeitspunktes ergibt sich somit das Intervall des günstigsten Arbeitsbereiches:

$$x \in \left[-\sqrt{\frac{11}{3}}; -\sqrt{\frac{11}{3}} + 2 \right].$$

Bemerkung: Die Leistungsdichte und die Autokorrelation von farbigem Rauschen sind im Messtechnik-Buch (Kiencke, Eger, *Messtechnik*, 7. Auflage, Springer-Verlag, 2008) auf Seite 224 abgebildet und werden in der Lösung als *Komponente 1* für Autokorrelation und *Komponente 2* für Leistungsdichte bezeichnet.

a) Signal a)

- Signal im Zeitbereich: sinus-förmig, farbiges Rauschen, Frequenz: 4 Hz, Offset
- ⇒ Autokorrelation: sinus-förmig, Komponente 1, Frequenz: 4 Hz, Offset
- ⇒ Leistungsdichte: Impulse bei ± 4 Hz, Komponente 2, Impuls bei $f = 0$

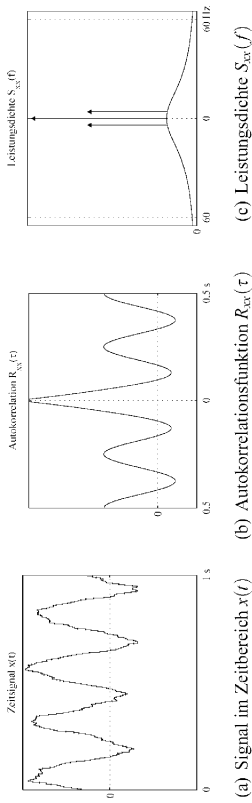


Abbildung 4: Signal a)

b) Signal b)

- Autokorrelation: dreieck-förmig, Komponente 1, Frequenz: 4 Hz
- ⇒ Signal im Zeitbereich: rechteck-förmig, farbiges Rauschen, Frequenz: 4 Hz
- ⇒ Leistungsdichte: Impulse bei $\pm(2k+1) \cdot 4$ Hz, $k \in \mathbb{N}$, Komponente 2

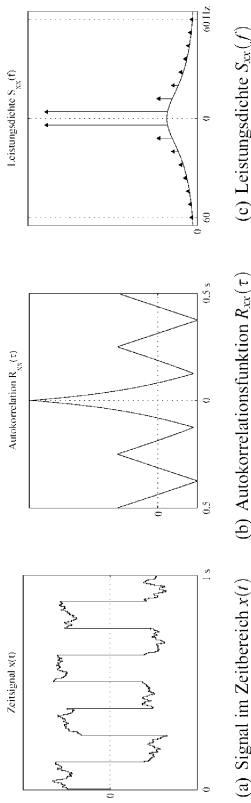


Abbildung 5: Signal b)

c) Signal c)

- Leistungsdichte: Impulse bei $\pm(2k+1) \cdot 4$ Hz, $k \in \mathbb{N}$, Impuls bei $f = 0$, Offset
- ⇒ Signal im Zeitbereich: rechteck-förmig, weißes Rauschen, Offset
- ⇒ Autokorrelation: dreieck-förmig, Impuls bei $\tau = 0$, $f = 4$ Hz, Offset

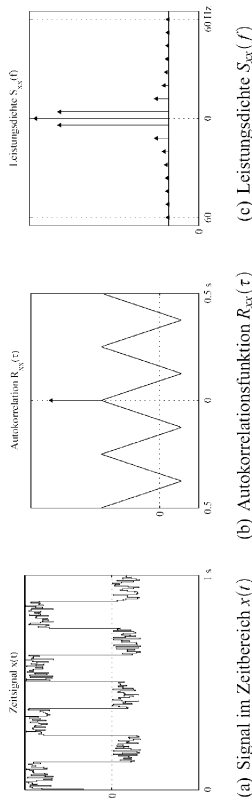


Abbildung 6: Signal c)

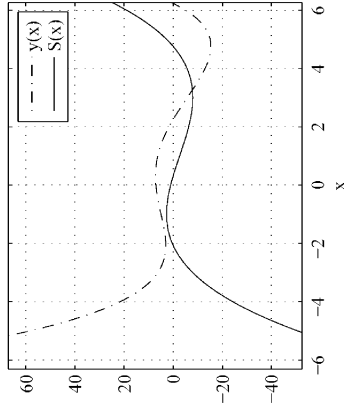
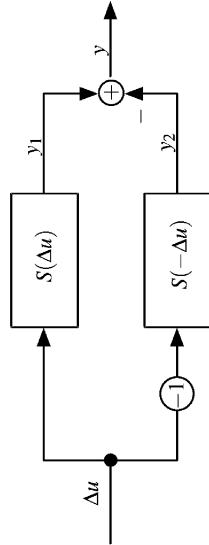


Abbildung 1: Empfindlichkeit $S(x)$

f) Durch die Anwendung der Differenzmethode wird die Empfindlichkeit erhöht. Durch die Elimination der geraden Teile der Funktion und die Verdoppelung der ungeraden Anteile verdoppelt sich die Empfindlichkeit. Folgende Skizze zeigt das Schema der Differenzmethode:



Für die resultierende Kennlinie gilt für $x_{AP} = -1$:

$$y_D \approx 2S(x_{AP})\Delta x \left(1 + \frac{S''(x_{AP})\Delta x^2}{S(x_{AP}) \cdot 3!} \right) = -\frac{4}{3}\Delta x^3 + \frac{16}{3}\Delta x.$$

Damit ergibt sich für die Empfindlichkeit der Differenzmethode $S_D = 2 \cdot S(x_{AP}) = \frac{16}{3}$.

g) Zunächst werden die partiellen Ableitungen gebildet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x_1} &= 2x_1, \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} &= x_2^2, \\ \frac{\partial y}{\partial x_3} &= -1. \end{aligned}$$

Nun kann die resultierende Varianz berechnet werden:

$$\sigma_y^2 = 4x_1^2\sigma_1^2 + x_2^4\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 4x_1x_2^2\sigma_1\sigma_2r_{12} - 4x_1\sigma_1\sigma_3r_{13} - 2x_2^2\sigma_2\sigma_3r_{23}.$$

h) Durch die Angabe kam auf die jeweiligen r_{ij} geschlossen werden: $r_{12} = 1$. Alle anderen Korrelationskoeffizienten sind null:

$$\sigma_y^2 = 4x_1^2\sigma_1^2 + x_2^4\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 4x_1x_2^2\sigma_1\sigma_2.$$

MESS - F 2009

2. Ermittlung des Stichprobenmittelwertes und der Standardabweichung der Stichprobe:

- $\bar{x} = 7,177$
 - $S_x = 0,1435$
3. Aufstellen der Nullhypothese:
- Nullhypothese H_0 : $\bar{x} = \mu_0$
4. Ermittlung der statistischen Sicherheit:
- $P = 1 - \alpha = 0,995$

5. Festlegen der Prüfgröße:

$$c = \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{S_x} \sqrt{n} = 2,2724$$

6. Bestimmen der Wahrscheinlichkeit der Prüfgröße:

- Aus der Grafik wird der Wert für $P_n(c)$ abgelesen: $P_n(c) \approx 0,94$

7. Testentscheidung:

- Die Nullhypothese H_0 wird angenommen, da $P_n(c) < P$.

Aufgabe 4: Korrelationsmesstechnik (16 Punkte)

a)

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega RC + 1}$$

b) Bei dem System handelt es sich um ein LTI-Tiefpassfilter.

c) Mit Hilfe eines Wiener-Filters lässt sich das ursprüngliche Signal $u(t)$ optimal schätzen. Dabei wird der Erwartungswert des quadratischen Fehlersignals minimiert.

d) Als Größen müssen die Leistungsdichte des Eingangssignals $S_{uu}(f)$ und die Leistungsdichte des Rauschens $S_{nn}(f)$ bekannt sein. Alternativ können diese auch aus der jeweiligen Autokorrelationsfunktion $R_{uu}(\tau)$ bzw. $R_{nn}(\tau)$ durch Fouriertransformation berechnet werden.

e) Die Übertragungsfunktion des Wiener Filters berechnet sich zu:

$$H(f) = \frac{S_{uu}(f)G^*(f)}{S_{uu}(f)|G(f)|^2 + S_{nn}(f)} = \frac{S_{uu}(1 + j2\pi fRC)}{S_{uu} + S_{nn}(1 + (2\pi fRC)^2)}$$

f) Zunächst werden die beiden Autokorrelationsfunktionen Fouriertransformiert:

$$F\{R_{uu}\} = S_{uu}(f) = \frac{2T}{(2\pi fT)^2 + 1},$$

$$F\{R_{nn}\} = S_{nn}(f) = \sigma_v^2.$$

- Bei S_{uu} handelt es sich um farbiges Rauschen: bei großen Frequenzen nimmt die Rauschleistung ab.

- Bei S_{nn} handelt es sich um weißes Rauschen. Hier bleibt die Rauschleistung über allen Frequenzen konstant.

g) Es handelt sich um ein PT1-Glied (Tiefpass).

e) Der Erwartungswert statistisch unabhängiger Zufallsgrößen berechnet sich:

$$\mu_z = \mu_x + \mu_y = 3,5 + 3,5 = 7.$$

f) Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion zweier statistisch unabhängiger Zufallsvariablen berechnet sich aus der Faltung der einzelnen Dichten:

$$f_z = f_x * f_y.$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion f_x lautet:

$$f_x = \frac{1}{6}\delta[x-1] + \frac{1}{6}\delta[x-2] + \frac{1}{6}\delta[x-3] + \frac{1}{6}\delta[x-4] + \frac{1}{6}\delta[x-5] + \frac{1}{6}\delta[x-6].$$

Analog dazu f_y :

$$f_y = \frac{1}{6}\delta[y-1] + \frac{1}{6}\delta[y-2] + \frac{1}{6}\delta[y-3] + \frac{1}{6}\delta[y-4] + \frac{1}{6}\delta[y-5] + \frac{1}{6}\delta[y-6].$$

Demnach ergibt sich für die diskrete Faltung der beiden Funktionen die neue Zufallsvariable z :

$$\begin{aligned} f_z &= \frac{1}{36}\delta[z-2] + \frac{2}{36}\delta[z-3] + \frac{3}{36}\delta[z-4] + \frac{4}{36}\delta[z-5] + \frac{5}{36}\delta[z-6] + \frac{6}{36}\delta[z-7] + \\ &+ \frac{5}{36}\delta[z-8] + \frac{4}{36}\delta[z-9] + \frac{3}{36}\delta[z-10] + \frac{2}{36}\delta[z-11] + \frac{1}{36}\delta[z-12]. \end{aligned}$$

Die resultierende Dichte beschreibt eine Dreiecksfunktion mit der Spitze bei der Augenzahl 7. Das Histogramm in Abbildung 7 zeigt die Dreiecksverteilung fit ein Experiment mit insgesamt 50000 Würfeln.

g) Durch die Analyse der Verteilung der Augenzahlen bei einem Wurfexperiment lässt sich auf die statistische Abhängigkeit schließen. Bei vollkommener Unabhängigkeit ergibt sich als Dichte die eben errechnete Dreiecksfunktion.

h) Signifikanztest für den Stichprobenmittelwert

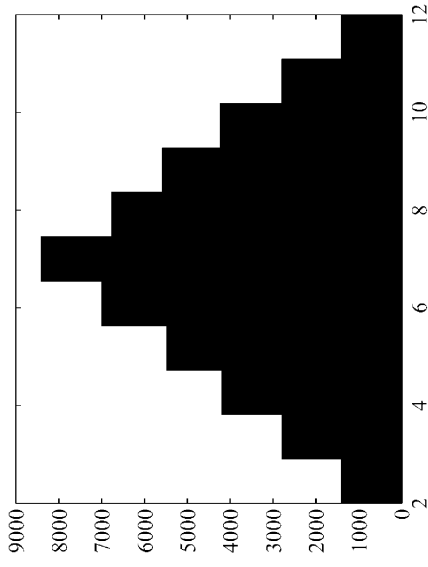


Abbildung 7: Würfelexperiment mit insgesamt 50000 Würfeln

1. Voraussetzungen prüfen:

- Unabhängigkeit der Messwerte
- Normalverteilung der Grundgesamtheit mit μ_0

$$|G_{\text{ges}}|^2 = \frac{S_{\text{oe}}}{S_{\text{ue}}} = \frac{\sigma_e^2 (2\pi fT)^2 + 1}{2T}.$$

Unter der Annahme einer minimalphasigen Lösung kann nun auf $G_{\text{ges}}(f)$ geschlossen werden:

$$G_{\text{ges}}(f) = \sigma_e \frac{(j2\pi fT) + 1}{\sqrt{2T}}.$$

Nun kann die Übertragungsfunktion $G(f)$ berechnet werden:

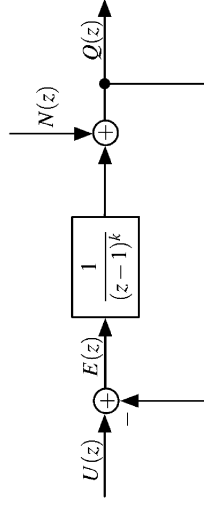
$$\begin{aligned} G(f) &= H(f) + G_{\text{ges}}(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fT} + \sigma_e \frac{(j2\pi fT) + 1}{\sqrt{2T}} = \\ &= \frac{\sqrt{2T} + \sigma_e [(1 + j2\pi fT)(1 + j2\pi fT)]}{\sqrt{2T}(1 + j2\pi fT)} = \\ &= \frac{\sqrt{2T} + \sigma_e (1 + j2\pi fT)^2}{\sqrt{2T}(1 + j2\pi fT)}. \end{aligned}$$

i) Für die Leistungsdichte am Ausgang des Blocks $G(f)$ gilt:

$$\begin{aligned} S_{y_{\text{GVG}}} &= |G(f)|^2 \cdot S_{\text{ue}} = \left| \frac{\sqrt{2T} + \sigma_e (1 + j2\pi fT)^2}{\sqrt{2T}(1 + j2\pi fT)} \cdot \frac{2T}{(2\pi fT)^2 + 1} \right|^2 = \\ &= \sqrt{2T} \frac{(\sigma_e - \sigma_e (2\pi fT)^2 + \sqrt{2T})^2 + (\sigma_e 4\pi fT)^2}{(1 + (2\pi fT)^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5: Quantisierung (17 Punkte)

- Unterschied: Die Quantisierung bezieht sich auf die Abbildung eines kontinuierlichen Wertverlaufes auf diskrete Werte. Die Abtastung bezieht sich auf die zeitliche Komponente eines Signals. Dabei wird das Signal zu festen Zeitpunkten abgetastet.
 - Parallelen: Sowohl bei der Abtastung sowie bei der Quantisierung gibt es ein entsprechendes Theorem. Dieses zeigt die Bedingungen auf, unter welchen das abgetastete / quantisierte Signal ohne Fehler rekonstruiert werden kann.
- b) Der vorliegende Sigma-Delta-Wandler wird durch die folgende Struktur charakterisiert:



- c) Durch die Erhöhung der Modulatorordnung k wird die Rauschleistung zu höheren Frequenzen verschoben. Durch eine anschließende Tiefpassfilterung kann damit der SNR verbessert werden.
- d) Für $Q(z)$ kann die folgende Gleichung bestimmt werden:

$$(U(z) - Q(z)) \left(\frac{1}{(z-1)^k} \right) + N(z) = Q(z).$$

Damit kann $Q(z)$ bestimmt werden:

$$Q(z) = \frac{1}{1 + (z-1)^k} \cdot U(z) + \frac{(z-1)^k}{1 + (z-1)^k} \cdot N(z).$$

$$\left| \frac{Q(z)}{N(z)} \right| = \sqrt{2 - 2 \cos(2\pi f/f_g)} = 2 |\sin(\pi f/f_g)|.$$

Für die Ordnung $k=2$ hingegen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \left| \frac{Q(z)}{N(z)} \right| &= \left| \frac{z^2 - 2z + 1}{z^2 - 2z + 2} \right| = \\ &= \frac{(\cos(4\pi f/f_g) - 2(\cos(2\pi f/f_g) + 1))^2 + (-\sin(4\pi f/f_g) + 2(\sin(2\pi f/f_g))^2}{(\cos(4\pi f/f_g) - 2(\cos(2\pi f/f_g) + 2))^2 + (-\sin(4\pi f/f_g) + 2(\sin(2\pi f/f_g))^2)^2}. \end{aligned}$$

f) Voraussetzungen:

- Eingangssignal $x(t)$ ist unkorreliert zum Quantisierungsrauschen
- Genügend Quantisierungsstufen

Abbildung 8 zeigt das lineare Quantisierungsmodell.

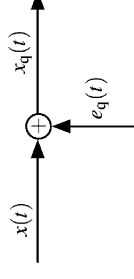


Abbildung 8: Lineares Quantisierungsmodell

g) Die Anzahl der Bits berechnet sich zu:

$$N = \frac{\log(2/3 \cdot 10^{14})}{2 \cdot \log(2)} = 22,96.$$

Somit muss der Umsetzer über mindestens 23 Bits verfügen.

h) Die Abtastfrequenz muss mindestens das zweifache der Signalfrequenz betragen. Für $\omega = 2\pi f$ gilt daher: $f_g \geq 2 \frac{\omega}{2\pi}$

i) Durch Fouriertransformation erhält man die Leistsuchdichtefunktion S_{xx} :

$$S_{xx} = \frac{2ab}{(2\pi f)^2 + b^2}.$$

Durch Integration über alle Frequenzen erhält man die Signalleistung P_x :

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) df = R_{xx}(0) = a.$$

Nun kann die mittlere Frequenz berechnet werden:

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot \frac{S_{xx}(f)}{P_x} df = \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot \frac{2b}{(2\pi f)^2 + b^2} df = \\ &= \frac{b}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u}{u^2 + b^2} du = \frac{b}{4\pi^2} [\ln(u^2 + b^2)]_{-\infty}^{\infty} = 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 1: Kurvenanpassung (18 Punkte)

Die Entfernung y eines Fahrzeugs zu einem Ortsfesten LIDAR-Scanner wird über der Zeit t aufgezeichnet. Es werden folgende Werte gemessen:

t/s	1	2	3
y/m	28,75	53,29	87,44

Tabelle 1: Messwerte



Bild 1: Entfernungsmessung mit LIDAR

- a) Führen Sie eine Lagrange-Interpolation für $y(t)$ durch und geben Sie das Ergebnis in der Form $y(t) = a_0 + a_1 \cdot t + \dots + a_{n-1} \cdot t^{n-1}$ an. (5 Punkte)
- b) Es wird noch der Wert $y(4) = 105,98$ m gemessen. Führen Sie mit Hilfe Ihres Ergebnisses aus a) eine rekursive Newton-Interpolation durch. Geben Sie das Ergebnis in derselben Form an wie in a). (3 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

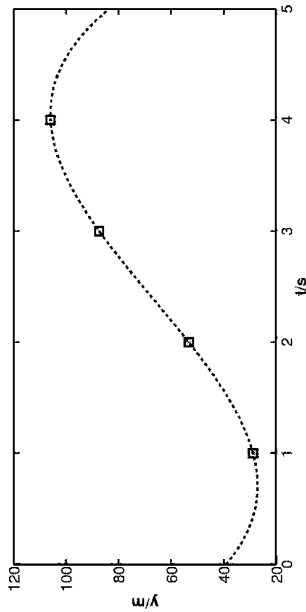


Bild 2: Ergebnis der Newton-Interpolation

- c) In Bild 2 sehen Sie den Plot des resultierenden Polynoms aus b). Wieso widerspricht dieses Ergebnis der Annahme, das Auto würde konstant beschleunigen? (1 Punkt)
- d) Wodurch lässt sich die Nichtlinearität der Interpolationsfunktion erklären, wenn das beobachtete Auto tatsächlich mit konstanter Geschwindigkeit gefahren ist? (1 Punkt)
- e) Wir wissen nun, dass sich das Auto mit konstanter Geschwindigkeit fortbewegt. Bestimmen Sie mittels einer Least-Squares-Schätzung diese konstante Geschwindigkeit. (Hinweis: Verwenden Sie nur die Messwerte aus Tabelle 1) (3 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

- f) Führen Sie mit den Messwerten aus Tabelle 1 eine Spline-Interpolation durch. (5 Punkte)

Aufgabe 2: Stationäres Verhalten von Messsystemen und Messfehler (22 Punkte)

Ein Messgerät hat laut Datenblatt die Kennlinie $y(u) = 0,5 \sin u + 1$.

- a) Bestimmen Sie den günstigsten Messbereich der Breite π im Intervall $[0; 2\pi]$. (4 Punkte)
- b) Bestimmen Sie die Empfindlichkeit in der Mitte des gewählten Messbereiches. (1 Punkt)

- c) Durch die Methode "Herabsetzen des Messbereichs" soll die Kennlinie des Messgerätes um den Mittelpunkt des Messbereiches linearisiert werden. Ihnen stehen hierzu zwei Verstärker zur Verfügung, deren Offset und Verstärkung Sie einstellen können. Das Eingangssignal u nimmt Werte im Bereich $[-3; 9]$ an und soll durch den ersten Verstärker auf den Bereich $[0,9\pi; 1,1\pi]$ abgebildet werden. Der Ausgang des zweiten Verstärkers soll den Ausgangsbereich $[0; 100]$ haben und die Gesamtanordnung eine positive Empfindlichkeit aufweisen. Berechnen Sie die Verstärkungen und Offsets der Verstärker. (4 Punkte)
 - d) Berechnen Sie die Kennlinie der Gesamtanordnung, wenn Sie die Kennlinie des Messgerätes durch eine Taylorreihe um den Arbeitspunkt π approximieren, die nach dem linearen Glied abgebrochen wird. (3 Punkte)
- Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.
- e) Bestimmen Sie den relativen Kennlinienfehler, der durch Fixpunktjustierung im Messbereich $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ entsteht. Geben Sie diesen Fehler am Messanfang und am Messende an. (4 Punkte)
 - f) Beschreiben Sie drei Möglichkeiten, diesen Fehler zu reduzieren und welche Hilfsmittel Sie dazu benötigen. (3 Punkte)
- Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.
- g) Beschreiben Sie was eine superponierende Störgröße kennzeichnet, und durch welche Maßnahmen $m(n)$ man Sie entfernen kann. (3 Punkte)

Aufgabe 3: Korrelationsmesstechnik und zufällige Messfehler (21 Punkte)

- a) Zeichnen Sie zu folgendem Signal $x(t)$ dessen Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ und dessen Leistungsdichte $S_{xx}(f)$! Begründen Sie Ihre Lösung, beschriften und beziffern Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung. (4 Punkte)

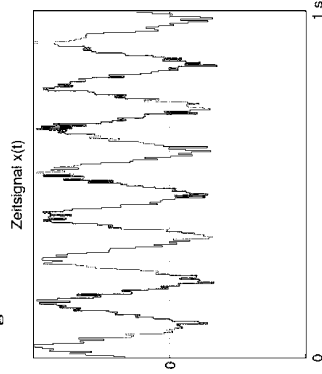


Bild 3: Signal $x(t)$: Signal a)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

- b) Zeichnen Sie zu folgender Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ deren Signal $x(t)$ im Zeitbereich und deren Leistungsdichte $S_{xx}(f)$! Begründen Sie Ihre Lösung, beschriften und beziffern Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung. (4 Punkte)

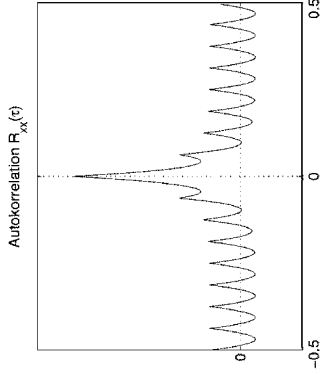


Bild 4: Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$; Signal **b)**

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

Die Verbunddichte der beiden Zufallsvariablen x und y ist gegeben durch:

$$f_{xy}(x,y) = k \quad \text{für } |x| + |y| \leq 1.$$

- c) Für welchen Wert von k ist $f_{xy}(x,y)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte? (3 Punkte)
- d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte für y wenn x bekannt ist (bedingte Wahrscheinlichkeit). (3 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

Von zwei Messgrößen x_1 und x_2 ist leider nur die Summe $x_1 + x_2$ einer Messung zugänglich. Beiden Größen sei jeweils ein gleichverteilter Fehler e_1 bzw. e_2 überlagert. Die Verteilung des Messfehlers $e = e_1 + e_2$ wird als

$$f_e(e) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e, & -2 \leq e < 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e, & 0 \leq e \leq 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

angenommen (vgl. Bild 5).

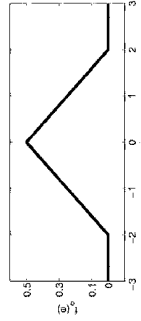


Bild 5: Vermutete Wahrscheinlichkeitsdichte von e

- e) Bestimmen Sie $f_{e_1}(e)$ und $f_{e_2}(e)$ bei statistischer Unabhängigkeit der beiden Größen. (2 Punkte)
- f) Es wird nun e mehrmals gemessen und die Messwerte in acht gleich große Klassen im Bereich $[-2;2]$ eingeteilt (vgl. Tabelle 2). Überprüfen Sie, ob die Verteilung dieser Stichprobe mit der vermuteten Verteilung von e bei einem Signifikanzniveau von 0,05 übereinstimmt. (5 Punkte)

linker Klassenrand	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5
rechter Klassenrand	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
n_i	4	10	14	25	22	18	5	2

Tabelle 2: Messwerte

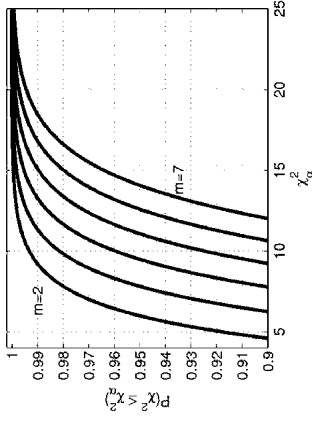


Bild 6: Wahrscheinlichkeit von $\chi^2 \leq \chi_\alpha^2$ bei $m = k - 1$ Freiheitsgraden

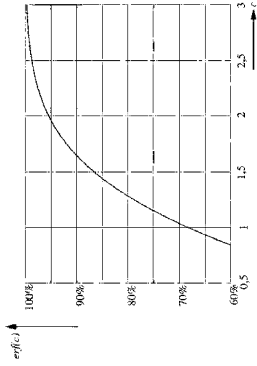


Bild 7: Gauß'sche Fehlerfunktion
 $\text{erf}(z) = P(|\xi| \leq z)$

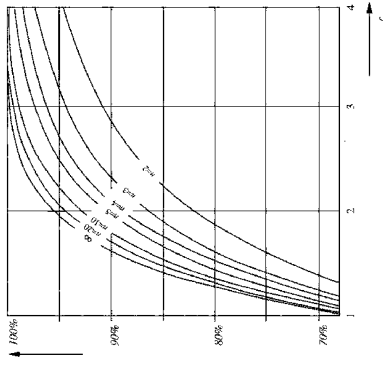
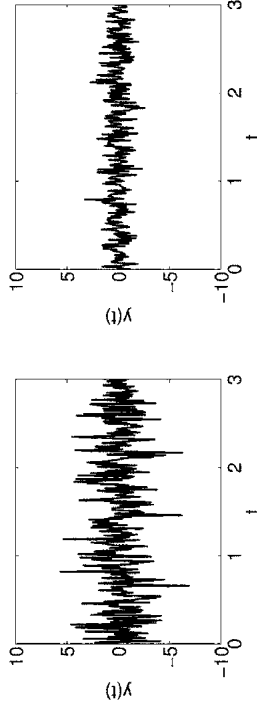


Bild 8: Student-t-Verteilung abhängig von n

Aufgabe 4: Korrelationsmesstechnik (19 Punkte)

In Abbildung 11 sehen Sie mehrere Musterfunktionen stochastischer Prozesse.



(a) Musterfunktion 1

(b) Musterfunktion 2

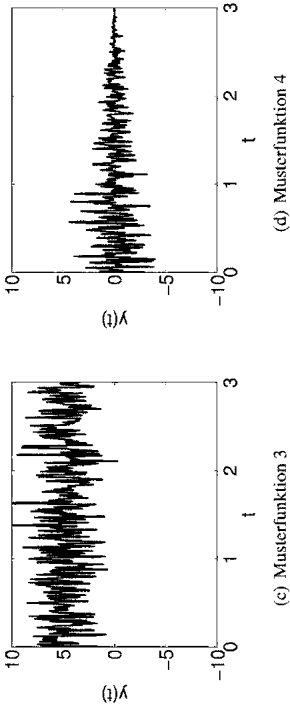


Bild 11: Verschiedene Musterfunktionen stochastischer Prozesse

- a) Musterfunktion 1 ist eine Realisierung eines Gauß'schen weißen Rauschens mit der Amplitudendichte $\mathcal{N}(\mu = 0; \sigma^2 = 4)$. Bestimmen Sie den Erwartungswert $E\{y(t_1) \cdot y(t_2)\}$. (1 Punkt)
- Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

- b) Die Musterfunktionen 2 und 3 sind ebenfalls Realisierungen eines Gauß'schen weißen Rauschens. Schätzen Sie deren Parameter grob ab. (2 Punkte)
- Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

- c) Können die Musterfunktionen 1 bis 3 von einem gemeinsamen stochastischen Prozess stammen? Falls nicht, begründen Sie warum. Falls ja, überlegen Sie ob dieser Prozess ergodisch sein kann. (2 Punkte)
- Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

- d) Was bedeutet Stationarität eines stochastischen Prozesses für dessen Wahrscheinlichkeitsdichte? Ist Musterfunktion 4 stationär? Was bedeutet dieses Ergebnis für die Ergodizität des zugrundeliegenden Prozesses? (2 Punkte)
- Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

- e) Gegeben sind zwei Zufallssignale $x(t)$ und $y(t)$. Sie kennen die Autokorrelationsfunktionen $R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)$ und $R_{yy}(\tau) = \beta e^{-\alpha|\tau|}$. Nehmen Sie an, Sie wollen AKF des Signals $z(t) = x(t) - y(t)$ berechnen. Mit welcher/welchen der folgenden Annahmen ist dies möglich?

- Annahme der statistischen Unabhängigkeit von $x(t)$ und $y(t)$
- Annahme der Unkorreliertheit von $x(t)$ und $y(t)$
- Kenntnis der Kreuzkorrelationsfunktion $R_{xy}(\tau)$
- Kenntnis der Kreuzkorrelationsfunktion $R_{yx}(\tau)$

• Keine weitere Information

Welche der Punkte sind äquivalent? Welche sind in anderen enthalten? (3 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

- f) Wie sieht das Zeitsignal zu der Autokorrelationsfunktion $\frac{1}{2} \sin(2\pi f_0 \tau)$ qualitativ aus? (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

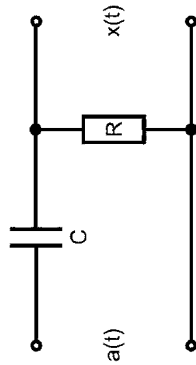


Bild 12: Ersatzschaltbild

Ein Nutzsignal $a(t)$, mit $R_{aa}(\tau) = \sigma_a^2 \delta(\tau)$, wird durch ein RC-Glied wie in Bild 12 verzerrt. Zusätzlich wird das Ausgangssignal $x(t)$ mit einem unkorrelierten weißen Rauschen $n(t)$ mit der mittleren Leistung σ_n^2 additiv verfälscht.

- g) Berechnen Sie die Leistungsdichte $S_{xx}(f)$ des Summensignals $u(t) = x(t) + n(t)$. (4 Punkte)
- h) Nennen Sie ein Filter, welches $a(t)$ so rekonstruiert, dass der quadratische Rekonstruktionsfehler im zeitlichen Mittel minimal wird. (1 Punkt)
- i) Geben Sie die Übertragungsfunktion dieses Filters in der Form $H(f) = \Re(H(f)) + j \cdot \Im(H(f))$ an. (3 Punkte)

Aufgabe 5: Erfassung amplituden- und frequenzanaloger Signale (20 Punkte)

- a) Leiten Sie das lineare Quantisierungsmodell her. Gehen Sie von der Annahme aus, dass das Quantisierungstheorem eingehalten sei. (5 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

- b) Ein A/D-Umsetzer mit 8-Bit Auflösung und einem Eingangsbereich von $\pm A$ Volt wird mit einem Sägezahnsignal maximaler Amplitude angesteuert. Berechnen Sie das SNR in Dezibel für den Sägezahnfehler bei erfülltem Quantisierungstheorem. (Hinweis: Die mittlere Leistung können Sie aus der Betrachtung einer Periodendauer gewinnen). (5 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

- c) Wie können Sie sicherstellen, dass das Quantisierungstheorem für beliebige Eingangssignale näherungsweise erfüllt ist? (1 Punkt)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

- d) Sie möchten ein Signal mit $E\{y\} = 20 \text{ mV}$ und $\sigma_y^2 = \frac{100}{3} (\text{mV})^2$, dessen Amplitudendichte als gleichverteilt angenommen wird, digitalisieren. Durch ein Vorfilter erreichen Sie eine hinreichende Bandbegrenzung ab 28 kHz. Sie haben die drei A/D-Umsetzer in Tabelle 4 zur Auswahl. Welchen nehmen Sie und warum? (4 Punkte)

ADU	Auflösung	Abtastfrequenz	Eingangsbereich
ADU1	16 Bit	50 kHz	$\pm 50 \text{ mV}$
ADU2	8 Bit	1 MHz	0 bis 0,05 V
ADU3	12 Bit	100 kHz	$\pm 20 \text{ V}$

Tabelle 4: ADU-Kennwerte

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

- e) Bestimmen Sie ab welcher Drehzahl die Erfassung der Drehzahl durch das Frequenzzählverfahren vorteilhafter als die Erfassung durch Periodendauermessung ist, wenn pro Umdrehung 200 Winkelmessungen überschritten werden. Nehmen Sie an, das T_{ref} bei der Frequenzzählung 1 ms beträgt und $f_0 = 1000 \text{ Hz}$ bei der Periodendauermessung. (3 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

- f) Wenn Sie ein System mit harten Echtzeitanforderungen haben, welches Verfahren würden Sie verwenden wollen? (1 Punkt)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

- g) Welche Parameter würden Sie wie anpassen, um das Frequenzzählverfahren auch für sehr niedrige Drehzahlen nutzen zu können? (1 Punkt)

Lösung

Aufgabe 1: Kurvenanpassung (18 Punkte)

a) Lagrange-Polynome:

$$\begin{aligned} L_0(t) &= \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)} = \frac{(t-t_2)(t-t_3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + 3 \\ L_1(t) &= \frac{(t-t_0)(t-t_2)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)} = \frac{(t-t_1)(t-t_3)}{(2-1)(2-3)} = -t^2 + 4t - 3 \\ L_2(t) &= \frac{(t-t_0)(t-t_1)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)} = \frac{(t-1)(t-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + 1 \\ y_L(t) &= y_0 \cdot L_0(t) + y_1 \cdot L_1(t) + y_2 \cdot L_2(t) \\ &= 28,75 \cdot \left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + 3\right) + 53,29 \cdot (-t^2 + 4t - 3) + 87,44 \cdot \left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + 1\right) \\ &= 4,8050t^2 + 10,1250t + 13,8200 \end{aligned}$$

b) Mit dem rekursiven Ansatz nach Newton für $t_3 = 4$ s folgt aus

$$y(t_3) = y_L(t_3) + \tilde{a}_3 \cdot (t_3 - t_0)(t_3 - t_1)(t_3 - t_2):$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_3 &= \frac{y(t_3) - y_L(t_3)}{(t_3 - t_0)(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)} \\ &= \frac{105,98 - 131,20}{(4-1)(4-2)(4-3)} \approx -4,2033 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_N(t) &= y_L(t) - 4,2033 \cdot (t-1)(t-2)(t-3) \\ &= 4,8050t^2 + 10,1250t + 13,8200 - 4,2033 \cdot (t^3 - 6t^2 + 11t - 6) \\ &= -4,2033t^3 + 30,0250t^2 - 36,1117t + 39,0400 \end{aligned}$$

c) Bei konstanter Beschleunigung gilt $y(t) = at^2 + v_0t + y_0$, $y'(t)$ wäre also ein Polynom 2. Grades und $y'''(t) = 0$. Aus **a)** oder dem Plot erkennbar ist aber, dass $y_L(t)$ mind. 3. Grades ist, und somit $y'''(t) \neq 0$.

d) Messfehler

e) Bei konstanter Geschwindigkeit gilt $y(t) = vt + y_0$. In Matrixschreibweise erhalten wir also:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t_0 \\ 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ v \end{pmatrix}.$$

Mit der Pseudoinversen berechnet man y_0 und v :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_0 \\ v \end{pmatrix} &= (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T y. \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 28,75 \\ 53,29 \\ 87,44 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 169,48 \\ 397,65 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 169,48 \\ 397,65 \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} -2,1967 \\ 29,3450 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die gesuchte Geschwindigkeit beträgt somit $29,345 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

f) Bestimmung der zweiten Ableitungen in den Stützstellen:

$$\begin{aligned} y_0'' &= y_2'' = 0 \\ y_1'' &= \frac{\frac{6}{h_1}(y_2 - y_1) - \frac{6}{h_0}(y_1 - y_0)}{2(h_0 + h_1)} = \frac{6(34,15 - 24,54)}{2 \cdot 2} = 14,415 \end{aligned}$$

Mit Gleichung (2.44) im Messtechnik Buch folgen die Koeffizienten der beiden Splines:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{6} \cdot 14,415 = 2,4025 & a_1 &= \frac{1}{6} \cdot -14,415 \\ b_0 &= 0 & b_1 &= 7,2075 \\ c_0 &= 24,54 - \frac{14,415}{6} = 22,1375 & c_1 &= 34,15 - \frac{2 \cdot 14,415}{6} = 29,345 \\ d_0 &= 28,75 & d_1 &= 53,29 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Stationäres Verhalten von Messsystemen und Messfehler (22 Punkte)

a) Überprüfen ob Wendepunkt im Messbereich:

$$\begin{aligned} y'(u) &= \frac{1}{2} \cos u \\ y''(u) &= -\frac{1}{2} \sin u \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow u = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Innerhalb des Messbereiches liegen also die Wendepunkte $0, \pi, 2\pi$. Kriterium I. aus dem Messtechnik-Buch (Gleichung 3.40) ist also anwendbar:

$$\begin{aligned} S(u_a + d) - S(u_a) &= y'(u_a + \pi) - y'(u_a) \\ &= \frac{1}{2} \left(\underbrace{\cos(u_a + \pi) - \cos u_a}_{=-\cos(u_a)} \right) = -\cos u_a \stackrel{!}{=} 0 \\ &\Rightarrow u_a = \frac{\pi}{2} + m\pi, m \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Es wären $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ im Messbereich, da aber das gesamte Intervall $[u_a, u_a + \pi]$ im Messbereich liegen soll, entfällt $\frac{3\pi}{2}$. Somit ist der optimale Messbereich also $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

b) $S_0 = y'(\pi) = -\frac{1}{2}$

c) Die Kennlinie eines solchen Verstärkers ist allgemein gegeben durch $f_i(u_i) = S_i u_i + u_{i0}$. Für den ersten Verstärker muss also gelten:

$$\begin{aligned} 0,9\pi &= -3S_1 + u_{10} & \Rightarrow u_{10} &= 0,9\pi + 3S_1 \\ 1,1\pi &= 9S_1 + u_{10} = 9S_1 + 0,9\pi + 3S_1 \\ &\Rightarrow S_1 \approx 0,0524 & u_{10} &\approx 2,9845 \end{aligned}$$

Der Eingangsbereich des zweiten Verstärkers ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} 0,5 \sin(0,9\pi) + 1 &\approx 1,1545 \\ 0,5 \sin(1,1\pi) + 1 &\approx 0,8455 \end{aligned}$$

Für den zweiten Verstärker muss also gelten:

$$\begin{aligned} 0 &= 1,1545S_3 + u_{30} & \Rightarrow u_{30} &= -1,1545S_3 \\ 100 &= 0,8455S_3 + u_{30} = 0,8455S_3 - 1,1545S_3 \\ &\Rightarrow S_3 \approx -323,6246 & u_{30} &\approx 373,6246 \end{aligned}$$

d) Taylorreihenansatz mit Abbruch nach nichtlinearem Glied um π :

$$\begin{aligned} f_2(u_2) &\approx y(\pi) + y'(\pi) \cdot (u_2 - \pi) = 1 - \frac{1}{2}(u_2 - \pi) \approx 2,5708 - \frac{u_2}{2} \\ &\Rightarrow S_2 \approx -0,5 & u_{20} &\approx 2,5708 \end{aligned}$$

Die Gesamtanordnung hat dann die Kennlinie:

$$y(u) = f_3(f_2(f_1(u))) = S_3 S_2 S_1 u + S_3 S_2 u_{10} + S_3 u_{20} + u_{30} \\ \approx 8,4790u + 161,8123 \cdot 2,9845 - 323,6246 \cdot 2,5708 + 373,6246 = 8,4790u + 24,5793$$

e) Bestimmung der idealen Kennlinie bei Fixpunktjustierung:

$$y_i(u) = \frac{y(u_a + d) - y(u_a)}{d} \cdot (u - u_a) + y(u_a) = \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{3\pi}{2} + 1 - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} - 1}{\pi} \cdot \left(u - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} + 1 \\ = -\frac{1}{\pi} \cdot \left(u - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{\pi} u + 2$$

Relativer Messfehler:

$$F_r(u) = \frac{y_i(u) - y(u)}{y(u)} = \frac{-\frac{u}{\pi} + 2 - \frac{1}{2} \sin u - 1}{\frac{1}{2} \sin u + 1} = \frac{-\frac{u}{\pi} - \frac{1}{2} \sin u + 1}{\frac{1}{2} \sin u + 1}$$

Durch Fixpunktjustierung wird der Fehler im Messanfang und Messende zu 0.

- f) • Herabsetzen des Messbereichs, benötigt zwei Verstärker, einen mit $S \ll 1$ und einen mit $S \gg 1$
- Hintereinanderschaltung zweier nicht linearer Glieder, benötigt zusätzliches Glied, welches die eigentliche Kennlinie umkehrt
- Gegenkopplung, benötigt Rückkopplungsglied, dessen physikalische Ein- und Ausgangsgrößen gleich den physikalischen Aus- und Eingangsgrößen des eigentlichen Messsystems sind
- Differenzschaltung, benötigt ein zweites identisches Messsystem und einige Verschaltungelemente (Summationsglied, Invertierer...)
- g) Eine superponierende Störgröße wirkt additiv auf die Messgröße ein und ist unabhängig von der Eingangsgröße ($e(u, z) = e(z)$). Sie ist leicht durch die Differenzmethode zu entfernen.

Aufgabe 3: Korrelationsmesstechnik und zufällige Messfehler (21 Punkte)

$x(t)$	Sinus $f_0 = 8\text{Hz}$	Offset	Weißes Rauschen
$R_{xx}(\tau)$	cosinus $f_0 = 8\text{Hz}$	Offset	$\delta(\tau)$
$S_{xx}(f)$	Impulse bei $f = \pm f_0$	Offset	Offset

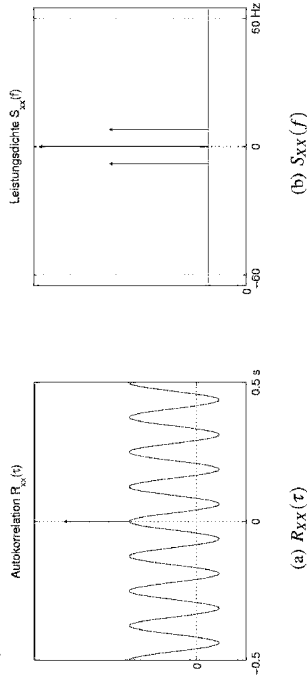


Bild 9: Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ und Autoleistungsdichte $S_{xx}(f)$: Signal a)

$x(t)$	Sägezahn $f_0 = 16\text{Hz}$	farbiges Rauschen
$R_{xx}(\tau)$	parabelförmig $f_0 = 16\text{Hz}$	Überhöhung um $\tau = 0$
$S_{xx}(f)$	Impulse bei $f = k \cdot f_0, k \in \mathbb{Z}$	“Glocke“ um $f = 0$

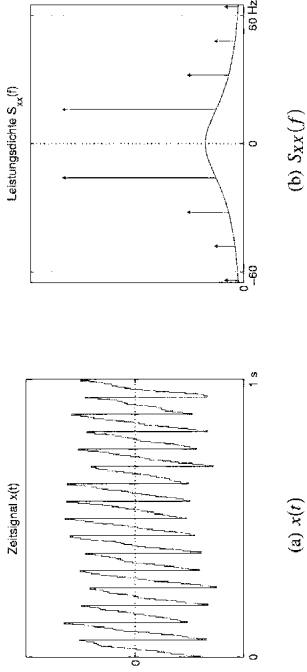


Bild 10: Signal $x(t)$ und Autoleistungsdichte $S_{xx}(f)$: Signal b)

c) Durch Fallunterscheidung erhält man aus $|x| + |y| \leq 1$ folgende Ungleichungen:

$$\begin{aligned} y &\geq -1 - x & \text{für } x < 0, y < 0 \\ y &\leq 1 + x & \text{für } x < 0, y \geq 0 \\ y &\geq x - 1 & \text{für } x \geq 0, y < 0 \\ y &\leq 1 - x & \text{für } x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

Somit ist $f_{xy}(x, y)$ in einem quadratischen Bereich der Fläche 2 definiert, und folglich muss $k = \frac{1}{2}$ gewählt werden, damit $\int \int f_{xy}(x, y) dx dy = 1$ und $f_{xy}(x, y) \geq 0$ gelten.

d) Die bedingte Wahrscheinlichkeit $f_y(y|x)$ ist definiert als:

$$f_y(y|x) = \frac{f_{xy}(x, y)}{f_x(x)}$$

Es fehlt also noch die Randdichte $f_x(x)$:

$$f_x(x) = \begin{cases} \int_{-x-1}^{x+1} k dy = 2k \cdot (1+x) & \text{für } -1 \leq x < 0 \\ \int_{x-1}^{1-x} k dy = 2k \cdot (1-x) & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

bzw. $f_x(x) = 2k(1-|x|)$ für $|x| \leq 1$. Somit ist:

$$f_y(y|x) = \frac{k}{2k(1-|x|)} = \frac{1}{2-2|x|} \quad \text{für } |y| \leq 1-|x|$$

e) Bei statistischer Unabhängigkeit der Größen gilt, wegen $e = e_1 + e_2$,

$$f_e(e) = f_{e_1}(e) * f_{e_2}(e).$$

Da sowohl e_1 als auch e_2 gleichverteilt sind, und e dreieck- und nicht trapezförmig ist, müssen die Breiten der beiden Gleichverteilungen identisch und gleich der halben Breite der Dreiecksverteilung sein. Also:

$$f_{e_1}(e) = f_{e_2}(e) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } |e| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

f) χ^2 Test: • Voraussetzungen (großes n , Unabhängigkeit der Messwerte) gelten als erfüllt

- Histogramm liegt vor und Klassengrößen sind in Ordnung
- Nullhypothese:

$$H_0 : f_e(e) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e, & -2 \leq e < 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e, & 0 \leq e \leq 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- $P = 1 - \alpha = 0,95$
- Bestimme χ^2 : Mit den Hilfsgrößen aus Tabelle 3 ist $\chi^2 = 3,7105$

p_i	0,03125	0,09375	0,15625	0,21875	0,21875	0,15625	0,09375	0,03125
$n_i - np_i$	0,875	0,625	-1,625	3,125	0,125	2,375	-4,375	-1,125
$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$	0,245	0,0417	0,169	0,4464	0,0007	0,361	2,0417	0,4050

Tabelle 3: Hilfsgrößen für den χ^2 -Test

- Freiheitsgrade: $m = k - 1 = 7$
- $P(\chi^2 \leq \chi^2_\alpha) = 0,95$, daraus folgt mit der Grafik: $\chi^2_\alpha \approx 13,75$
- Da $\chi^2 \leq \chi^2_\alpha$ wird die Hypothese angenommen.

Aufgabe 4: Korrelationsmesstechnik (19 Punkte)

- a) Da $y(t)$ weißes Rauschen ist, sind Werte zu verschiedenen Zeiten unkorreliert $\Rightarrow E\{y(t_1)y(t_2)\} = 4 \cdot \delta(t_1 - t_2)$.
- b) Die zu bestimmenden Parameter sind jeweils μ und σ .
- $$\mu_2 \approx 0 \quad \sigma_2 \approx 1$$
- $$\mu_3 \approx 5 \quad \sigma_3 \approx 2$$

- c) Natürlich können sie alle von einem stochastischen Prozess stammen, allerdings kann dieser dann nicht ergodisch sein, z.B. da die Zeitmittelwerte (μ_1, μ_2 und μ_3) nicht alle identisch sind.
- d) Stationarität bedeutet $f_X(x, t) = f_X(x, t + \tau)$. Musterfunktion 4 ist nicht stationär, da z.B. der Erwartungswert $E\{y(t)\}$ deutlich erkennbar von der Zeit abhängt. Da Stationarität eine notwendige Voraussetzung für Ergodizität ist, kann der, der Musterfunktion 4 zugrunde liegende, stochastische Prozess nicht ergodisch sein.

- e) Es gilt:
- $$R_{zz}(\tau) = R_{xx}(\tau) - R_{xy}(\tau) - R_{yx}(\tau) + R_{yy}(\tau)$$
- $$R_{xy}(\tau) = R_{yx}^*(-\tau) = R_{yx}(-\tau) \text{ (reelle Signale).}$$
- Damit $R_{zz}(\tau)$ bestimmt werden kann benötigt man also noch entweder die Annahme der Unkorreliertheit, damit $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(\tau) = 0$, oder die Angabe einer der beiden KKF's (die andere erhält man dann durch die Symmetriebedingung). Statistische Unabhängigkeit beinhaltet Unkorreliertheit, ist aber restriktiver als diese allein.

- f) Da die angegebene Funktion weder symmetrisch ist, noch ihr Maximum im Ursprung hat, kann es sich nicht um eine Autokorrelationsfunktion handeln.

- g) Da $x(t)$ und $n(t)$ unkorreliert sind, ist $S_{un}(f) = S_{xx}(f) + S_{nn}(f)$. Des Weiteren gilt:

$$S_{nn}(f) = \sigma_n^2$$

$$S_{xx}(f) = |G(f)|^2 S_{aa}(f)$$

- $G(f)$ bestimmt man aus dem Schaltbild zu $G(f) = \frac{j2\pi f RC}{1 + j2\pi f RC}$. Durch Fouriertransformation von $R_{aa}(\tau)$ erhält man $S_{aa}(f) = \sigma_a^2$. Also gilt:

$$S_{un}(f) = \frac{(2\pi f RC)^2}{1 + (2\pi f RC)^2} \sigma_a^2 + \sigma_n^2$$

- h) Gesucht ist das Wiener-Filter/Optimal-Filter.

- i) Da das Rauschen additiv und unkorreliert zu $x(t)$ ist, gilt:

$$H(f) = \frac{S_{un}(f)}{S_{un}(f)} = \frac{S_{un}(f)G^*(f)}{S_{un}(f)|G(f)|^2 + S_{nn}(f)}$$

$$= \frac{\frac{-j2\pi f RC}{1 - j2\pi f RC} \sigma_a^2}{\frac{(-j2\pi f RC)(j2\pi f RC)}{(1 - j2\pi f RC)(1 + j2\pi f RC)} \sigma_a^2 + \sigma_n^2}$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{\frac{j2\pi f RC}{1 + j2\pi f RC} \sigma_a^2 - \frac{1 - j2\pi f RC}{j2\pi f RC} \sigma_n^2} = \frac{\sigma_a^2}{\frac{j2\pi f RC}{1 + j2\pi f RC} \sigma_a^2 - \frac{-(2\pi f RC)^2 \sigma_a^2 - \sigma_n^2 - (2\pi f RC)^2 \sigma_n^2}{j2\pi f RC - (2\pi f RC)^2}}$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{(2\pi f RC)^2 - j2\pi f RC} \cdot \frac{\sigma_a^2}{(2\pi f RC)^2 (\sigma_a^2 + \sigma_n^2) + \sigma_n^2}$$

$$= \frac{(2\pi f RC)^2 \sigma_a^2}{(2\pi f RC)^2 (\sigma_a^2 + \sigma_n^2) + \sigma_n^2} - j \frac{2\pi f RC \sigma_a^2}{(2\pi f RC)^2 (\sigma_a^2 + \sigma_n^2) + \sigma_n^2}$$

Aufgabe 5: Erfassung amplituden- und frequenzanaloger Signale (20 Punkte)

- a) Allgemein ist die charakteristische Funktion des quantisierten Signals:

$$\Phi_{x_q}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_x(f - \frac{k}{q}) \cdot \frac{\sin(\pi q(f - \frac{k}{q}))}{\pi q(f - \frac{k}{q})}$$

(vgl. Messtechnik-Buch Gleichung (7.18)).

Wenn das Quantisierungstheorem erfüllt ist, überlappen sich die spektralen Wiederholungen der charakteristischen Funktion nicht.

Die Multiplikation der charakteristischen Funktion des Eingangssignals $\Phi_x(f - \frac{k}{q})$ mit dem

Ausdruck $\frac{\sin(\pi q(f - \frac{k}{q}))}{\pi q(f - \frac{k}{q})}$ entspricht einer Faltung der beiden Wahrscheinlichkeitsdichten, wobei die Wahrscheinlichkeitsdichte, welche zu $\frac{\sin(\pi q(f - \frac{k}{q}))}{\pi q(f - \frac{k}{q})}$ gehört gerade eine Gleichverteilung auf dem Intervall $[-\frac{q}{2}, \frac{q}{2}]$ ist.

Der Faltung zweier Wahrscheinlichkeitsdichten entspricht die Addition der beiden Zufallsvariablen, so dass das quantisierte Signal als das Originalsignal plus ein gleichverteilter Quantisierungsfehler modelliert werden kann (= lineares Quantisierungsmodell).

- b) Gesucht: $SNR[\text{dB}] = 10 \log \frac{P_{\text{sig}}}{P_{\text{stör}}}$.
Betrachtung einer Periode:

$$x(t) = 2A \frac{t}{T}; \quad t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$$

$$P_{\text{sig}} = \frac{E_{\text{periode}}}{T_{\text{periode}}} = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{4A^2}{T^2} t^2 dt$$

$$= \frac{4A^2}{T^3} \frac{1}{3} t^3 \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{4A^2}{3T^3} \frac{T^3}{4} = \frac{A^2}{3}$$

$$P_{\text{stör}} = \frac{q^2}{12} = \frac{(\frac{2A}{8})^2}{12} = \frac{A^2}{2^{16} \cdot 3}$$

$$SNR_q[\text{dB}] = 10 \log \left(\frac{A^2}{3} \frac{2^{16} \cdot 3}{A^2} \right) = 10 \cdot 16 \log 2 \approx 48,165 \text{ dB}$$

- c) Addition eines Signals, dessen charakteristische Funktion bandbegrenzt ist (entspricht Multiplikation mit bandbegrenzter charakteristische Funktion) und das später wieder entfernt werden kann. Dieses Verfahren heißt Dithering.
- d) ADU 1 scheidet aus, da mit ihm nicht das Abtasttheorem eingehalten werden kann. Zunächst ist zu prüfen, ob der Eingangsbereich der beiden anderen ADU geeignet ist. Hierzu müssen wir die Min-Max-Werte des Eingangssignals bestimmen:

$$\sigma_y^2 = \frac{100}{3} \mu V^2 = \frac{(y_{\max} - y_{\min})^2}{12} \Rightarrow (y_{\max} - y_{\min}) = 0,02 \text{ V}$$

Da der Mittelwert $E\{y\}$ bekannt ist, folgt, dass der Eingangsbereich des zu verwendende ADUs das Intervall $[10 \text{ mV}, 30 \text{ mV}]$ enthalten muss. Dies ist sowohl für ADU2 als auch ADU3 gegeben. Ein weiteres Kriterium ist die Breite der Quantisierungsstufen:

$$q = \frac{(A_{\max} - A_{\min})}{2^N}$$

$$q_2 = \frac{50 \text{ mV}}{2^8} = 195,313 \mu V$$

$$q_3 = \frac{40 \text{ V}}{2^{12}} = 9,7656 \text{ mV}$$

Da die Quantisierungsstufen von ADU2 ca. 50 mal kleiner sind als die von ADU3, sollte man ADU2 verwenden.

- e) Das Winkelinkrement pro Zahnrad beträgt $\phi_0 = \frac{2\pi}{200} = \frac{\pi}{100}$. Die relativen Fehler der Verfahren entnimmt man dem Messtechnik-Buch zu:

$$F_{r,FZV} = \frac{\phi_0}{\omega_q T_{ref}}$$

$$F_{r,PD\dot{M}} = \frac{\omega_q}{\phi_0 f_0}$$

Gesucht ist ω_q so dass:

$$F_{r,FZV} \leq F_{r,PD\dot{M}}$$

$$\frac{\phi_0}{\omega_q T_{ref}} \leq \frac{\omega_q}{\phi_0 f_0}$$

$$\omega_q^2 \geq \phi_0^2 \frac{f_0}{T_{ref}} = \frac{\pi^2 \cdot 10^3}{10^4 \cdot 10^{-3}} = 100\pi^2$$

Da $w_q = 2\pi f$ gilt also für die Frequenz $f \geq 5 \text{ Hz}$ und somit ist ab einer Drehzahl von über 300 $\frac{1}{\min}$ die Frequenzzählung vorteilhafter.

- f) Da die Frequenzzählung unabhängig von der Drehzahl deterministisch alle T_{ref} einen Wert liefert, ist unter diesen Bedingungen dieses Verfahren vorteilhafter.

- g) Um $F_{r,FZV} = \frac{\phi_0}{\omega_q T_{ref}}$ zu senken bei konstantem ω_q , kann man T_{ref} erhöhen oder ϕ_0 senken, bzw. die Anzahl der Winkelinkremente Z erhöhen.