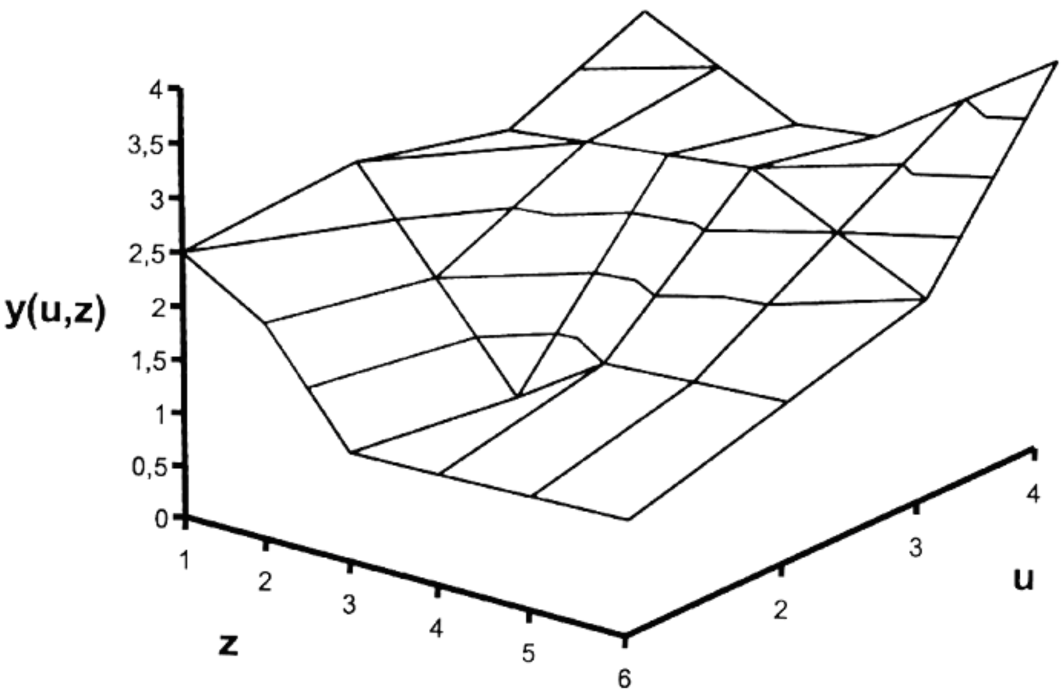
1,40 €

Mess

F10 - H14



Moment!

Bevor Du voll ins Lernen einsteigst – dafür ist die Klausursammlung ja da –, nimm Dir bitte fünf Minuten Zeit, Dich über die Entstehung eben dieser Sammlung zu informieren.

Es ist nämlich nicht so, dass die Klausuren mit Lösungen in genau dieser Form vom Himmel fallen. Die Fachschaft, genauer unser Klausurreferent, investiert eine ganze Menge Zeit und Arbeit, bevor die großen Stapel bedrucktes Papier aus unserer Druckmaschine fallen, die Du dann kurze Zeit später kaufen kannst. Doch das ist nur ein kleiner Teil unserer Arbeit!

Weitere Angebote der Fachschaft, die allesamt nur durch freiwilliges Engagement bestehen können, sind:

- Beratung vor und während des Studiums (Modellberatung, VPA, HPA, Härtefälle u.v.a.m.)
- Fachschaftszeitschrift „Der Funke“
- Protokolldruck
- Exkursionen (u.a. CERN, FZ Jülich, AKW Philipsburg)
- verschiedene Informationsveranstaltungen (u.a. O-Phase, Wege ins Ausland)
- Fachschaftsbibliothek
- Kontaktaufnahme mit Dozenten, Vermittlung in Problemfällen
- und natürlich nicht zu vergessen: die Feste ;-)

Gremienarbeit

Die Gremienarbeit nimmt eine Sonderstellung ein. Sie ist nicht direkt ein Angebot an Euch; wir wirken bei der Berufung neuer Dozenten mit und vertreten die Interessen aller ETECs gegenüber der Fakultät. In den Gremien ***Fakultätsrat*** und ***Studienkommission*** erarbeiten wir zusammen mit den Professoren die Zukunft unseres Studienganges:

- Umstellung auf Bachelor/Master
- Verwendung der Studiengebühren
- Änderungen an der Prüfungsordnung
- Einführung neuer Fächer

Die Gremienarbeit ist ein wichtiger, aber auch zeitintensiver Teil der Fachschaftstätigkeiten. Deshalb kann es vorkommen, dass die Fachschaft auch mal geschlossen ist, wenn wir konzentriert arbeiten müssen.

Die Fachschaftler

Da die Mitarbeit in der Fachschaft selbstverständlich ehrenamtlich erfolgt, kann jeder selbst bestimmen, wieviel Zeit und Arbeit er in die Fachschaft investieren möchte – ob er z.B. einfach eine Öffnungszeit übernimmt oder in einem der Referate (mit-)arbeitet. Einige von uns wurden von Euch bei den unabhängigen Wahlen zu offiziellen Vertretern gewählt. In der Regel sitzen sie zusammen mit den Professoren in den oben bereits erwähnten Gremien der Fakultät.

Mitmachen lohnt sich!

Warum? Zu allererst: Es macht Spaß!

- Zum einen lernt man unglaublich viele nette Leute kennen – Studierende aus anderen Semestern, Professoren bei Veranstaltungen und in Gremien... und das von einer ganz anderen Seite als in der Vorlesung!
- Sich in der Fachschaft zu engagieren heißt mehr als nur zu studieren, es bedeutet aktiv auf die Zukunft des eigenen Studienganges Einfluss zu nehmen: Qualität der Lehre, zukünftige Ausrichtung, neue Professoren usw.
- Aber auch die persönliche Entwicklung kommt nicht zu kurz: Man stärkt seine Teamfähigkeit, kann sich in interessante Projekte einbringen und setzt diese eigenverantwortlich um. In den Gremien erlernt man eine professionelle und zielorientierte Arbeitsweise, und natürlich wollen diese Ergebnisse vor der gesamten Gruppe präsentiert werden!

Ihr seht also, Fachschaftsarbeit besteht nicht nur aus Klausurenverkauf, sondern ist auch soziales Engagement und vermittelt dabei jene „Soft-Skills“, die heute im Berufsleben immer wichtiger werden.

Einstiegsmöglichkeiten

Wo muss ich unterschreiben? – Nein, so läuft es natürlich nicht.

Wir hoffen, dass wir Euch einen tieferen Einblick in die vielleicht noch etwas unbekannten Teile der vielfältigen Fachschaftsarbeit geben konnten. Wenn Ihr Interesse habt, bei uns mitzumachen, kommt doch einfach mal ganz unverbindlich zu einer Öffnungszeit oder einer Sitzung (mittwochs 18 Uhr c.t. im Fachschafts-Büro) vorbei.

Es gibt eine ganze Reihe von Möglichkeiten, bei uns einzusteigen:

- Fachschaftssitzung besuchen
- Öffnungszeiten übernehmen
- bei Festen mithelfen
- die „Ersties“ bei der O-Phase betreuen
- bei aktuellen Vorhaben mitwirken

Wir würden uns freuen, Dich demnächst in unserer Runde begrüßen zu dürfen. :-)

Deine Fachschaft ETEC

Aufgabe 1: Kurvenanpassung (18 Punkte)

Die stromabhängige Wirkungsgradkennlinie eines DC/DC-Wandlers in einem Elektrofahrzeug soll ermittelt werden. Es wurden folgende Ein- und Ausgangswertepaare gemessen:

I/A	25	50	125	250
η/%	87	92,25	94,30	91,90

a) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom für $\eta(I)$ mit Hilfe des Newton- oder Lagrangeverfahrens. Geben Sie das Ergebnis in der Form $\tilde{\eta}(I) = a_0 + a_1 \cdot I + \ldots + a_{n-1} \cdot I^{n-1}$ an.

Benutzen Sie für nicht ganzzahlige Zwischenergebnisse die Exponentialschreibweise $m \cdot 10^e$, wobei m auf den Bereich $[1, \ldots, 10)$ zu normieren und auf drei Nachkommastellen zu runden ist.

(6 Punkte)

Es wurden weitere Messwertpaare ermittelt, welche in Bild 1 geplottet sind.

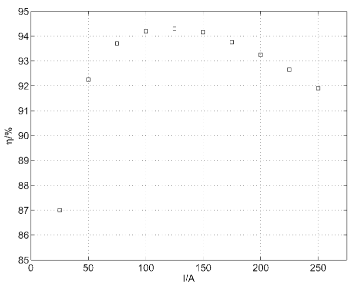


Bild 1: Wirkungsgradkennlinie eines DC/DC-Wandlers

b) Beurteilen Sie mit Hilfe von Bild 1, ob das Ergebnis aus **a)** eine geeignete Näherung darstellt.

Hinweis: Untersuchen Sie die Extremstellen und -werte Ihres Ergebnisses aus **a)**

(3 Punkte)

c) Überprüfen Sie, ob Ihre Interpolationsfunktion aus **a)** die Interpolationsbedingung $\eta(I_i) = \tilde{\eta}(I_i)$ erfüllt. Begründen Sie kurz das Ergebnis.

(2 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

Eine Spline-Interpolation mit den Werten aus Tabelle 1 liefert die Spline-Koeffizienten in Tabelle 2.

Index	0	1	2	3	4
I/A	25	50	75	200	250
η/%	87	92,25	93,70	93,25	91,90

Tabelle 1: Gemessene Werte für die Eingangsgröße I und die Ausgangsgröße η

Intervall i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	$-6{,}0188 \cdot 10^{-5}$	0	$2{,}4762 \cdot 10^{-1}$	87,00
1	$5{,}7741 \cdot 10^{-5}$	$-4{,}5141 \cdot 10^{-3}$	$1{,}3476 \cdot 10^{-1}$	92,25
2	$1{,}2949 \cdot 10^{-7}$	$-1{,}8357 \cdot 10^{-4}$	$1{,}7323 \cdot 10^{-2}$	93,70
3	$9{,}0007 \cdot 10^{-7}$	$-1{,}3501 \cdot 10^{-4}$	$-2{,}2500 \cdot 10^{-2}$	93,25

Tabelle 2: Koeffizienten der aus Tabelle 1 ermittelten kubischen Splines

d) Ermitteln Sie rechnerisch die zweiten Ableitungen η'' in den Stützstellen. Entsprechen diese Werte den erwarteten?

(2 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

Es soll die Phase φ einer harmonischen Schwingung $y(t) = A \cdot \sin(2\pi f t + \varphi)$ mit der Frequenz $f =$ 1,5 Hz ermittelt werden. Hierzu wurden fünf Messwerte aufgezeichnet:

t/s	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
y/V	0,9295	−0,7345	−0,5217	0,9953	0,0744

e) Ermitteln Sie den Wert der Phase φ. Berechnen Sie hierzu zunächst mit Hilfe des Least-Squares-Verfahrens die Parameter a und b des Signalmodells $y(t) = a \cdot \cos(2\pi f t) + b \cdot \sin(2\pi f t)$.

(5 Punkte)

Aufgabe 2: Zufällige Messfehler (18 Punkte)

a) Zeichnen Sie zur Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ in Bild 2 deren Signal $x(t)$ im Zeitbereich und deren Leistungsdichte $S_{xx}(f)$! **Begründen Sie Ihre Lösung, beschriften und beziffern Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung.**

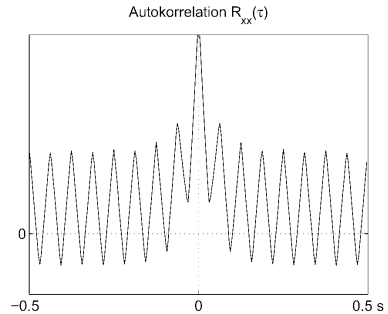


Bild 2: Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$: Signal **a)**

(4 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

Zwei vierseitige Würfel wurden 10000 mal gemeinsam gewürfelt und Ihre Augenzahlen $\mathtt{W}_1$ und $\mathtt{W}_2$ protokolliert. Aus den Daten wurde folgendes Histogramm $\hat{p}_{\mathtt{W}_1\mathtt{W}_2}(\mathtt{W}_1 = n, \mathtt{W}_2 = m)$ erstellt:

$\hat{p}_{\mathtt{W}_1\mathtt{W}_2}(n,m)$	$\mathtt{W}_1 = 1$	$\mathtt{W}_1 = 2$	$\mathtt{W}_1 = 3$	$\mathtt{W}_1 = 4$
$\mathtt{W}_2 = 1$	0,0396	0,0387	0,0435	0,0383
$\mathtt{W}_2 = 2$	0,0414	0,0414	0,0432	0,0461
$\mathtt{W}_2 = 3$	0,0449	0,0424	0,0406	0,0396
$\mathtt{W}_2 = 4$	0,1280	0,1249	0,1250	0,1224

Tabelle 3: Histogramm von $[\mathtt{W}_1, \mathtt{W}_2]^{\mathrm{T}}$

b) Bestimmen Sie die Randdichten und Erwartungswerte der Zufallsvariablen $\mathtt{W}_1$ und $\mathtt{W}_2$ (gewürfelte Augenzahlen). Geben Sie die Berechnungsvorschrift für die Kovarianz ausschließlich abhängig von den Größen n, m und $\hat{p}_{\mathtt{W}_1\mathtt{W}_2}(n,m)$ an.

(5 Punkte)

c) Halten Sie die Würfel für manipuliert? Begründen Sie Ihre Aussage knapp. *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

Der aus der Stichprobe bestimmte Korrelationskoeffizient $\hat{r}_{\mathtt{W}_1\mathtt{W}_2}$ hat den Wert $-0{,}0134$, die geschätzte Kovarianz $C_{\mathtt{W}_1\mathtt{W}_2}$ ist $-0{,}0171$.

d) Welche Aussagen lassen sich damit über die Korreliertheit und statistische Abhängigkeit zwischen den Würfeln treffen? War dies so zu erwarten?

(2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

Es sei nun bekannt, dass $\mathtt{W}_1$ gleichverteilt ist und $\mathtt{W}_2$ folgender Wahrscheinlichkeitsverteilung unterliegt:

m	1	2	3	4
$p_{\mathtt{W}_2}(m)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

e) Überprüfen Sie die Nullhypothese "H_0: $\mathtt{W}_1$ und $\mathtt{W}_2$ sind stat. unabhängig" mit Hilfe eines χ^2-Anpassungstests bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$. (Benutzen Sie Tabelle 3) *(6 Punkte)*

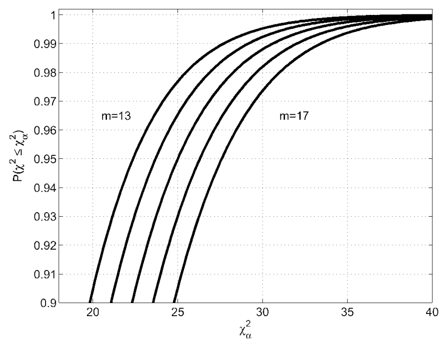


Bild 3: Wahrscheinlichkeit von $\chi^2 \le \chi^2_\alpha$ bei $m = k-1$ Freiheitsgraden

Aufgabe 3: Stationäres Verhalten von Messsystemen (22 Punkte)

Gegeben ist ein Messsystem mit der Messkennlinie $y(u) = 2u^3 - 12u^2 + 4u + 29$.

a) Bestimmen Sie den günstigsten Messbereich der Breite 2 im Intervall $[0,4]$. *(4 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

Es werden nun zwei gleichartige Messsysteme mit der o. g. Kennlinie nach Bild 5 verschaltet.

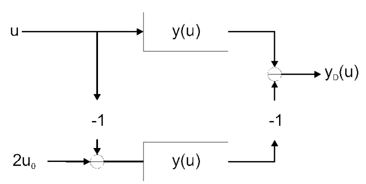


Bild 5: Verschaltung zweier identischer Messsysteme

b) Bestimmen Sie zunächst die resultierende Kennlinie $y_D(u)$ allgemein in Abhängigkeit von y. Entwickeln Sie dieses Ergebnis allgemein in eine Taylorreihe um den Arbeitspunkt u_0 und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

Hinweis: Setzen Sie **nicht** das gegebene $y(u) = 2u^3 - 12u^2 + 4u + 29$ ein! *(4 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

c) Bestimmen Sie qualitativ (Wendepunkte und Extremstellen beachten!) die resultierende Kennlinie $y_D(u)$ für $y(u) = 2u^3 - 12u^2 + 4u + 29$ und $u_0 = 2$ graphisch. Zeichnen Sie als Zwischenschritte die Kennlinien für $y(u)$, $y(-u)$, $y(-u+2u_0)$ jeweils in ein neues Diagramm. Achten Sie auf die Achsenbeschriftung! *(6 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

Die Kennlinie $y_D(u)$ sei nun gegeben als $y_D(u) = 4u^3 - 24u^2 + 8u + 48$.

d) Bestimmen Sie die Empfindlichkeit der Kennlinien $y(u)$ und $y_D(u)$ um den Arbeitspunkt $u_0 = 2$! *(1 Punkt)*

e) Nähern Sie für den Messbereich $u \in [1,3]$ sowohl $y(u)$ als auch $y_D(u)$ durch eine ideale Kennlinie an und bestimmen Sie jeweils den absoluten Kennlinienfehler, der dadurch entsteht. *(4 Punkte)*

f) Wäre es Ihrer Meinung nach sinnvoll, hier eine Toleranzbandjustierung vorzunehmen? Begründen Sie knapp! *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

g) Ist $e(u,z) = 4z^2 + 1$ eine superponierende Störgröße? Ist $K(y) = \ln y$ ein geeignetes Gegenkopplungsglied, um sie zu beseitigen? *(2 Punkte)*

Aufgabe 4: Korrelation (18 Punkte)

Gegeben sei ein stochastischer Prozess $X(t,\xi) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} X_i(\xi)\delta(t - iT)$, $T > 0$. Die Zufallsvariablen $X_i(\xi)$ seien voneinander unabhängig und normalverteilt mit Erwartungswert $\mu_i > 0$ und Varianz σ_i^2, also $X_i(\xi) \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$.

a) Bestimmen Sie die Autokorrelationsfunktion $R_{XX}(t_1,t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\}$.

Hinweis: Überlegen Sie, welche Terme von $X(t,\xi)$ aus der Erwartungswertbildung herausgezogen werden können. *(5 Punkte)*

b) Ist der Prozess X schwach stationär, d.h. gilt $R_{XX}(t_1,t_2) = R_{XX}(t_1+\tau, t_2+\tau)$ $\forall \tau \in \mathbb{R}$? Begründen Sie Ihre Antwort! *(3 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

Ein weiterer stochastischer Prozess Y besitze die ähnliche Form

$$Y(t,\xi) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} X_i(\xi)[\sigma(t - iT) - \sigma(t - (i+1)T)], \quad T > 0.$$

Dabei bezeichnet $\sigma(t)$ die Sprungfunktion, also $\sigma(t) = 1$ $\forall t \ge 0$ sowie 0 sonst.

c) Sind die Prozesse $X(t,\xi)$ und $Y(t,\xi)$ unkorreliert, d. h. gilt $E\{X(t_1,\xi)Y(t_2,\xi)\} = E\{X(t_1,\xi)\}E\{Y(t_2,\xi)\}$, $\forall t_1,t_2 \in \mathbb{R}$? Begründen Sie Ihre Antwort! *(5 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

d) Unter welcher der folgenden Bedingungen A)-C) besitzt der Prozess Y schwache Stationarität:

A) $[\forall i \in \mathbb{N} : \mu_i = \mu_0]$ und $\sigma_i^2 = e^{-|i|}$?

B) $\mu_i = e^{-|i|}$ und $\sigma_i^2 = 0$?

C) $\mu_i = e^{-|i|}$ und $[\forall i \in \mathbb{N} : \sigma_i^2 = \sigma_0^2]$?

Begründen Sie jeweils knapp und berechnen Sie im Falle der Stationarität ebenfalls das Leistungsdichtespektrum von Y.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die AKF von Y! *(5 Punkte)*

Aufgabe 5: Quantisierung und Abtastung (24 Punkte)

a) Halten Sie ein periodisches Rechtecksignal der Form

$$x(t) = a \cdot \left(2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} [\sigma(t-iT) - \sigma(t-(i+0,5)T)] - 1 \right), \qquad a \in \mathbb{R}, T > 0$$

für ein geeignetes Dithersignal? Begründen Sie mit Hilfe der charakteristischen Funktion.

(3 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

b) Ein Dithersignal soll nach der A/D-Umsetzung durch folgendes Filter beseitigt werden:

$$y_n' = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} y_{n-k}, \qquad m \in \mathbb{N}^+, n \in \mathbb{Z}.$$

Welche Eigenschaft muss das Dithersignal haben, damit es durch dieses Filter entfernt werden kann? *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

c) Bei welchem A/D-Umsetzer tritt das Phänomen “Noise-Shaping” auf? *(1 Punkt)*

d) Erläutern Sie knapp was man unter “Noise-Shaping” versteht und mit welcher weiteren Technik “Noise-Shaping” üblicherweise kombiniert wird. Wie lässt sich mit dieser Kombination bei der A/D-Umsetzung das SNR verbessern? *(3 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

e) Sie möchten ein Signal mit $E\{y\} = 20\,\text{mV}$ und $\sigma_y^2 = 105\,\text{mV}^2$, dessen Amplitudendichte als dreiecksverteilt angenommen wird, digitalisieren. Durch ein Vorfilter erreichen Sie eine hinreichende Bandbegrenzung ab 28 kHz. Sie haben die drei A/D-Umsetzer aus unten stehender Tabelle zur Auswahl. Welchen verwenden Sie und warum?

ADU	Auflösung	Abtastfrequenz	Eingangsbereich
ADU1	16 Bit	60 kHz	±5 V
ADU2	8 Bit	1 MHz	0 bis 0,05 V
ADU3	12 Bit	100 kHz	±20 V

(6 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

f) Sie möchten ein Signal mit der Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau) = e^{-10^4\tau^2}$ bei einer Abtastrate von $t_a = 13\,\text{ms}$ abtasten. Berechnen Sie das *SNR* für entstehende Anti-Aliasing-Fehler (in dB).

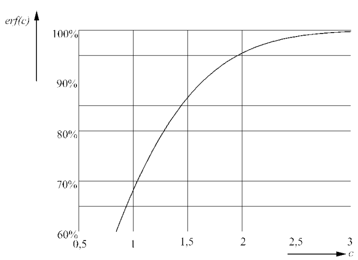


Bild 8: Gauß’sche Fehlerfunktion $erf(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-c}^{c} e^{-z^2/2} dz$ *(6 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

g) Sie möchten Drehzahlen im Bereich 1 – 1000 Hz messen und benötigen aufgrund der nachfolgenden Verarbeitungskette spätestens alle 100 ms einen Messwert. Sie haben eine Taktquelle mit der Referenzfrequenz $f_0 = 10\,\text{kHz}$ und ein Zahnrad mit 100 Zähnen zur Verfügung. Welche(s) der Verfahren Periodendauermessung und Frequenzzählung können Sie hierzu alleine verwenden? *(3 Punkte)*

h) Der zu untersuchende Frequenzbereich wird eingeschränkt auf 1 – 50 Hz, sonst gelten die gleichen Voraussetzungen wie in **g)**. Können Sie die Periodendauermessung verwenden? *(1 Punkt)*

Lösung Aufgabe 1:

a) Lagrange-Verfahren:

$$L_0(I) = \frac{(I-I_1)(I-I_2)(I-I_3)}{(I_0-I_1)(I_0-I_2)(I_0-I_3)} = \frac{(I-50)(I-125)(I-250)}{(-25)(-100)(-225)} = \frac{I^3 - 425I^2 + 50000I - 1562500}{-562500}$$
$$= -1,778 \cdot 10^{-6} I^3 + 7,556 \cdot 10^{-4} I^2 - 8,889 \cdot 10^{-2} I + 2,778$$

$$L_1(I) = \frac{(I-I_0)(I-I_2)(I-I_3)}{(I_1-I_0)(I_1-I_2)(I_1-I_3)} = \frac{(I-25)(I-125)(I-250)}{25 \cdot (-75)(-200)} = \frac{I^3 - 400I^2 + 406265I - 781250}{375000}$$
$$= 2,667 \cdot 10^{-6} I^3 - 1,067 \cdot 10^{-3} I^2 + 1,083 \cdot 10^{-1} I - 2,083$$

$$L_2(I) = \frac{(I-I_0)(I-I_1)(I-I_3)}{(I_2-I_0)(I_2-I_1)(I_2-I_3)} = \frac{(I-25)(I-50)(I-250)}{100 \cdot 75 \cdot (-125)} = \frac{I^3 - 325I^2 + 20000I - 312500}{-937500}$$
$$= -1,067 \cdot 10^{-6} I^3 + 3,467 \cdot 10^{-4} I^2 - 2,133 \cdot 10^{-2} I + 3,333 \cdot 10^{-1}$$

$$L_3(I) = \frac{(I-I_0)(I-I_1)(I-I_2)}{(I_3-I_0)(I_3-I_1)(I_3-I_2)} = \frac{(I-25)(I-50)(I-125)}{225 \cdot 200 \cdot 125} = \frac{I^3 - 200I^2 + 10625I - 156250}{5625000}$$
$$= 1,778 \cdot 10^{-7} I^3 - 3,556 \cdot 10^{-5} I^2 + 1,889 \cdot 10^{-3} I - 2,778 \cdot 10^{-2}$$

$$\tilde{\eta}_L(I) = \eta_0 \cdot L_0(I) + \eta_1 \cdot L_1(I) + \eta_2 \cdot L_2(I) + \eta_3 \cdot L_3(I)$$

$$\begin{aligned}
= \quad & 87 \cdot (\;-1,778 \cdot 10^{-6}\, I^3 + 7,556 \cdot 10^{-4}\, I^2 \quad -8,889 \cdot 10^{-2}\, I + 2,778\;) \\
& +92,25 \cdot (\;2,667 \cdot 10^{-6}\, I^3 - 1,067 \cdot 10^{-3}\, I^2 \quad +1,083 \cdot 10^{-1}\, I - 2,083\;) \\
& +94,30 \cdot (\;-1,067 \cdot 10^{-6}\, I^3 + 3,467 \cdot 10^{-4}\, I^2 \quad -2,133 \cdot 10^{-2}\, I + 3,333 \cdot 10^{-1}\;) \\
& +91,90 \cdot (\;1,778 \cdot 10^{-7}\, I^3 - 3,556 \cdot 10^{-5}\, I^2 \quad +1,889 \cdot 10^{-3}\, I - 2,778 \cdot 10^{-2}\;)
\end{aligned}$$

$$= 7,066 \cdot 10^{-6}\, I^3 - 3,268 \cdot 10^{-3}\, I^2 + 4,185 \cdot 10^{-1}\, I + 7,841 \cdot 10^{1}$$

Newton-Verfahren:

Differenzenschema:

I	$\Delta^0\eta = \eta$	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^3\eta$
25	87,00			
		$\frac{5,25}{25} = 2,100 \cdot 10^{-1}$		
50	92,25		$\frac{-1,827 \cdot 10^{-1}}{100} = -1,827 \cdot 10^{-3}$	
		$\frac{2,05}{75} = 2,733 \cdot 10^{-2}$		$\frac{1,594 \cdot 10^{-3}}{225} = 7,086 \cdot 10^{-6}$
125	94,30		$\frac{-4,653 \cdot 10^{-2}}{200} = -2,327 \cdot 10^{-4}$	
		$\frac{-2,4}{125} = -1,920 \cdot 10^{-2}$		
250	91,90			

Der Newton-Ansatz bei 4 Stützstellen lautet:

$$\tilde{\eta}_L(I) = a_0 + a_1(I-I_0) + a_2(I-I_0)(I-I_1) + a_3(I-I_0)(I-I_1)(I-I_2)$$

mit

$$(I-I_0)(I-I_1) = I^2 - (I_0+I_1)I + I_0I_1$$
$$(I-I_0)(I-I_1)(I-I_2) = I^3 - (I_0+I_1+I_2)I^2 + (I_0I_1 + I_0I_2 + I_1I_2)I - I_0I_1I_2$$

folgt

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}_L(I) =& a_3 I^3\\ &+(a_2-(I_0+I_1+I_2)a_3)\,I^2\\ &+(a_1-(I_0+I_1)a_2+(I_0I_1+I_0I_2+I_1I_2)a_3)\,I\\ &+(a_0-I_0a_1+I_0I_1a_2-I_0I_1I_2a_3)\end{aligned}$$

Einsetzen der a_i aus dem Differenzenschema und der I_i aus der Aufgabenstellung liefert:

$$\tilde{\eta}_L(I)=7{,}086\cdot 10^{-6}I^3-3{,}244\cdot 10^{-3}I^2+4{,}223\cdot 10^{-1}I+7{,}836\cdot 10^{1}.$$

b) Die Interpolationsfunktion und Ihre Ableitungen haben die Form:

$$\begin{aligned} y &= ax^3 + bx^2 + cx + d\\ y' &= 3ax^2 + 2bx + c\\ y'' &= 6ax + 2b \end{aligned}$$

Für einen Extremwert muss $y'=0$ gelten, was auf

$$x_{1/2}=-\frac{b}{3a}\pm\sqrt{\frac{b^2-3ac}{9a^2}}$$

führt. Die Werte aus **a)** (Lagrange-Verfahren) liefern

$$I_{1/2}=154{,}1655\pm\sqrt{\frac{1{,}8085\cdot 10^{-6}}{4.4936\cdot 10^{-10}}}=154{,}1655\pm 63{,}4402$$

$$I_1=217{,}5675 \qquad \eta''(I_1)=2{,}688\cdot 10^{-3} \qquad \eta(I_1)=87{,}5398$$

$$I_2=90{,}7635 \qquad \eta''(I_2)=-2{,}688\cdot 10^{-3} \qquad \eta(I_2)=94{,}7560$$

Somit ist $\eta(90{,}7635)=94{,}7560$ ein Maximum und $\eta(217{,}5675)=87{,}5398$ ein Minimum. Die Interpolationsfunktion hat also einen Wendepunkt im Messintervall, was nicht zu den weiteren Messdaten passt. V. a. $\eta(217{,}5675)=87{,}5398$ weicht deutlich von den weiteren Messwerten ab. Das Ergebnis aus **a)** ist somit ungeeignet.

Die Werte aus **a)** (Newton-Verfahren) liefern

$$I_{1/2}=152{,}6014\pm\sqrt{\frac{1{,}5463\cdot 10^{-6}}{4.5190\cdot 10^{-10}}}=152{,}6014\pm 58{,}4959$$

$$I_1=211{,}0973 \qquad \eta''(I_1)=2{,}487\cdot 10^{-3} \qquad \eta(I_1)=89{,}6046$$

$$I_2=94{,}1055 \qquad \eta''(I_2)=-2{,}487\cdot 10^{-3} \qquad \eta(I_2)=95{,}2777$$

c) Einsetzen der gegebenen Werte für I in das Ergebnis aus **a)** liefert:

I/A	25	50	125	250
$\tilde{\eta}_L(I_i)$/%	86,9494	92,0483	93,4608	89,1913
$\tilde{\eta}_N(I_i)$/%	87,0007	92,2507	94,2998	91,9038
$\eta(I_i)$/%	87	92,25	94,30	91,90

Wie man sieht, ist die Interpolationsbedingung nicht exakt erfüllt. Dies kommt durch Rundungsfehler in den vorigen Aufgabenteilen.

d) Die zweite Ableitung eines kubischen Splines lautet (vgl. **b)**):

$$\eta_i''(I)=6a_i\cdot(I-I_i)+2b_i$$

Am Intervallsanfang gilt stets $I=I_i$ und somit

$$\begin{aligned}\eta_0''&=2\cdot b_0=0\\ \eta_1''&=2\cdot b_1=-9{,}0282\cdot 10^{-3}\\ \eta_2''&=2\cdot b_2=-3{,}6714\cdot 10^{-4}\\ \eta_3''&=2\cdot b_3=-2{,}7002\cdot 10^{-4}.\end{aligned}$$

Für die letzte Stützstelle gilt:

$$\eta_i''(I_4)=6a_i\cdot(I_4-I_3)+2b_i=1\cdot 10^{-9}.$$

Eigentlich müsste per Definition $\eta_i''(I_4)=0$ gelten, was hier aber durch Rundungsfehler nicht exakt zutrifft.

e) Das LS-Gleichungssystem lautet:

$$\mathbf{y}=\Psi\cdot\mathbf{b}$$

mit:

$$\mathbf{y}=\begin{pmatrix}0{,}9295\\-0{,}7345\\-0{,}5217\\0{,}9953\\0{,}0744\end{pmatrix}$$

$$\Psi=\begin{pmatrix}\cos(2\pi\cdot 1{,}5\cdot 0{,}1) & \sin(2\pi\cdot 1{,}5\cdot 0{,}1)\\ \cos(2\pi\cdot 1{,}5\cdot 0{,}3) & \sin(2\pi\cdot 1{,}5\cdot 0{,}3)\\ \cos(2\pi\cdot 1{,}5\cdot 0{,}5) & \sin(2\pi\cdot 1{,}5\cdot 0{,}5)\\ \cos(2\pi\cdot 1{,}5\cdot 0{,}7) & \sin(2\pi\cdot 1{,}5\cdot 0{,}7)\\ \cos(2\pi\cdot 1{,}5\cdot 0{,}9) & \sin(2\pi\cdot 1{,}5\cdot 0{,}9)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}5878 & 0{,}8090\\ -0{,}9511 & 0{,}3090\\ 0 & -1\\ 0{,}9511 & 0{,}3090\\ -0{,}5878 & 0{,}8090\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}.$$

Mit der Pseudoinversen berechnet man a und b:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}&=(\Psi^{\mathrm{T}}\Psi)^{-1}\Psi^{\mathrm{T}}\mathbf{y}\\ &=\begin{pmatrix}2{,}5 & 0\\ 0 & 2{,}5\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}2{,}1478\\1{,}4144\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0\\ 0 & 0{,}4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2{,}1478\\1{,}4144\end{pmatrix}\\ &\approx\begin{pmatrix}0{,}8591\\0{,}5658\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Es gilt $A\cdot\sin(2\pi ft+\varphi)=A\cdot(\sin(2\pi ft)\cos(\varphi)+\cos(2\pi ft)\sin(\varphi))$ und somit über Koeffizientenvergleich

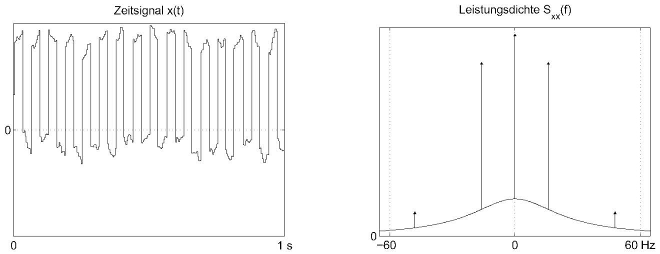
$$\begin{aligned}a&=A\cdot\sin(\varphi)\\ b&=A\cdot\cos(\varphi)\end{aligned}$$

Daraus folgt $\tan(\varphi)=\frac{a}{b}$ und somit $\varphi=\arctan\frac{a}{b}=0{,}9884\approx\frac{\pi}{3}$.

Lösung Aufgabe 2: .

a)

$x(t)$	Rechteck $f_0=16Hz$	farbiges Rauschen	Offset
$R_{xx}(\tau)$	Dreieck $f_0=16Hz$	Überhöhung um $\tau=0$	Offset
$S_{xx}(f)$	Impulse bei $f=(2k+1)\cdot f_0, k\in\mathbb{Z}$	"Glocke" um $f=0$	$\delta(f)$



(a) $x(t)$ (b) $S_{XX}(f)$

Bild 4: Signal $x(t)$ und Autoleistungsdichte $S_{xx}(f)$: Signal **a)**

b) Die Randdichten sind:

$$\hat{p}_{W_1}(m) = \sum_{n=1}^{4} \hat{p}_{W_1W_2}(n,m)$$

$$\hat{p}_{W_2}(n) = \sum_{m=1}^{4} \hat{p}_{W_1W_2}(n,m)$$

W_1	1	2	3	4
$\hat{p}_{W_1}(m)$	0,2539	0,2474	0,2523	0,2464
W_2	1	2	3	4
$\hat{p}_{W_2}(n)$	0,1601	0,1721	0,1675	0,5003

Die Erwartungswerte sind

$$E\{W_1\} = \sum_{n=1}^{4} n \cdot \hat{p}_{W_1}(n) = 2{,}4912$$

$$E\{W_2\} = \sum_{m=1}^{4} m \cdot \hat{p}_{W_2}(m) = 3{,}0080.$$

Die Kovarianz berechnet man zu:

$$\begin{aligned} C_{W_1W_2} &= E\{W_1 \cdot W_2\} - E\{W_1\} \cdot E\{W_2\} \\ &= \sum_{n=1}^{4}\sum_{m=1}^{4} n \cdot m \cdot \hat{p}_{W_1W_2} - \left(\sum_{n=1}^{4} n \cdot \sum_{m=1}^{4} \hat{p}_{W_1W_2}(n,m)\right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{4} m \cdot \sum_{n=1}^{4} \hat{p}_{W_1W_2}(n,m)\right) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} C_{W_1W_2} &= E\{(W_1 - E\{W_1\})(W_2 - E\{W_2\})\} \\ &= \sum_{n=1}^{4}\sum_{m=1}^{4} \left(n - \sum_{n=1}^{4} n \cdot \sum_{m=1}^{4} \hat{p}_{W_1W_2}(n,m)\right)\left(m - \sum_{m=1}^{4} m \cdot \sum_{n=1}^{4} \hat{p}_{W_1W_2}(n,m)\right). \end{aligned}$$

c) Sowohl die Wahrscheinlichkeitsverteilung, als auch der Mittelwert von W_1 entsprechen ziemlich gut der theoretisch erwarteten Gleichverteilung mit Mittelwert 2,5. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von W_1 weicht jedoch deutlich davon ab und auch der Mittelwert liegt mit 3,0080 deutlich über dem theoretischen Wert. Daher ist anzunehmen, dass der zweite Würfel manipuliert worden ist.

d)
- Korreliertheit: unkorreliert
- stat. Abhängigkeit: keine Aussage möglich

Da (ohne Manipulation) keine Bindung zwischen den beiden Würfeln zu erwarten ist, scheint ein niedriger Korrelationskoeffizient realistisch.

e) Die Nullhypothese ist identisch mit der Nullhypothese: "$p_{W_1W_1} = p_{W_1} \cdot p_{W_2}$", welche sich mit dem χ^2-Test prüfen lässt.

- Das Histogramm $\hat{p}_{W_1W_2}$ ist bereits in Tabelle 3 gegeben.
- Die Voraussetzungen "unabhängige Messwerte" und "hoher Stichprobenumfang" gelten als erfüllt.
- Das Signifikanzniveau ist mit $\alpha = 0{,}05$ in der Aufgabenstellung festgelegt.
- Berechnung der Hilfsgrößen:
  - n_i lässt sich aus dem Histogramm direkt ablesen, indem man das Komma um vier Stellen nach rechts verschiebt (10000 Versuche).
  - $p_i = p_{W_1} \cdot p_{W_2} = \frac{p_{W_2}}{4}$.

m	1	2	3	4
$n \cdot p_i(m)$	416,6667	416,6667	416,6667	1250

$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$	1	2	3	4
1	1,0251	2,1123	0,8067	2,7203
2	0,0171	0,0171	0,5643	4,7171
3	2,5091	0,1291	0,2731	1,0251
4	0,7200	0,0008	0	0,5408

- Somit ist $\chi^2 = 17{,}1780$. Aus der Grafik bestimmt man $\chi^2_\alpha = 25$ für $P = 0{,}95$ und $m = k - 1 = 15$. Somit ist $\chi^2 < \chi^2_\alpha$ und die beiden Variablen werden als statistisch unabhängig akzeptiert.

Lösung Aufgabe 3:

a) Untersuchung auf Wendepunkte im Intervall:

$$\begin{aligned} y(u) &= 2u^3 - 12u^2 + 4u + 29 \\ y'(u) &= 6u^2 - 24u + 4 \\ y''(u) &= 12u - 24 \\ y'''(u) &= 12 \end{aligned}$$

$$y''(u) = 12u - 24 = 0 \Rightarrow u = 2,\ y''' \neq 0 \Rightarrow \text{ Wendepunkt bei } u = 2$$

Kriterium für Arbeitsbereich mit Wendepunkt:

$$\begin{aligned} &S(u_a + d) - S(u_a) = 0 \\ &\left(6(u_a+2)^2 - 24(u_a+2) + 4\right) - \left(6u_a^2 - 24u_a + 4\right) = 0 \\ &24u_a + 24 - 48 = 24u_a - 24 = 0 \\ &u_a = 1 \end{aligned}$$

Der günstigste Messbereich ist also $[1,3]$.

b) Differenzkennlinie: $y_D(u) = y(u) - y(-u + 2u_0)$.
Taylorreihenentwicklung um $u = u_0$ (man beachte: $-u + 2u_0|_{u=u_0} = u_0$):

$$\begin{aligned} y_D(u - u_0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(u_0)}{k!}(u-u_0)^k - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(u_0)}{n!}(-u + 2u_0 - u_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(u_0)}{k!}\left((u-u_0)^k - (-1)^k(u-u_0)^k\right) \\ &= 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(2k+1)}(u_0)}{(2k+1)!}(u-u_0)^{2k+1} \end{aligned}$$

c) Entweder neu oder aus **a)** ermittelt man den Wendepunkt zu $y(2) = 5$ und die Extrema als:

$$y'(u) = 6u^2 - 24u + 4 = 0 \Rightarrow u_{1/2} = 2 \pm \sqrt{\frac{10}{3}}$$

Da $u_1 > 2 : y''(2 + \sqrt{10/3}) > 0$

Da $u_2 < 2 : y''(2 - \sqrt{10/3}) < 0$

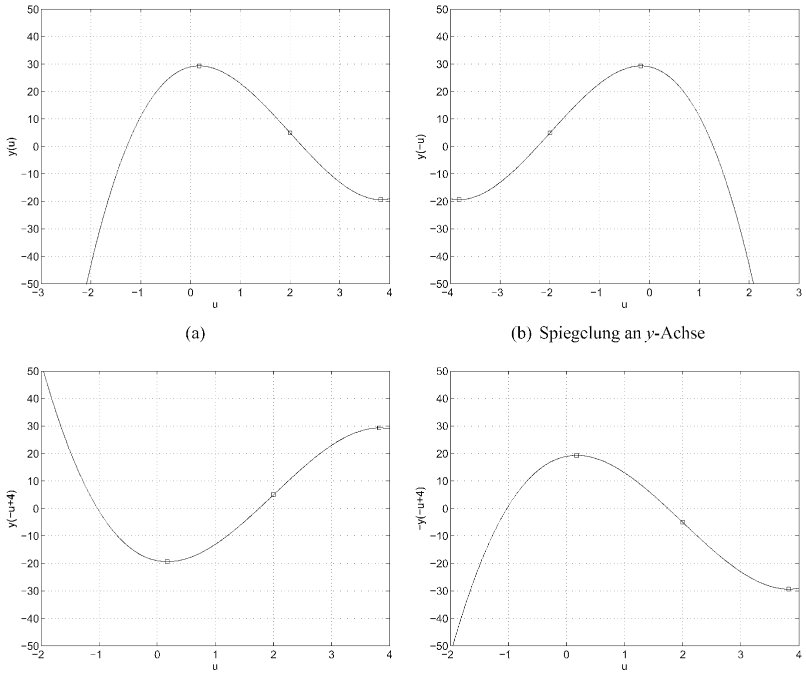
Somit ist $y(3{,}8257) = -19{,}3432$ Minimum und $y(0{,}1743) = 29{,}3432$ Maximum. Die Extrem- und Wendepunkte der Zwischenergebnisse sind somit:

Funktion	Minimum	Maximum	Wendepunkt
$y(u)$	$y(3{,}8257) = -19{,}3432$	$y(0{,}1743) = 29{,}3432$	$y(2) = 5$
$y(-u)$	$y(-3{,}8257) = -19{,}3432$	$y(-0{,}1743) = 29{,}3432$	$y(-2) = 5$
$y(-u+2u_0)$	$y(0{,}1743) = -19{,}3432$	$y(3{,}8257) = 29{,}3432$	$y(2) = 5$
$-y(-u+2u_0)$	$y(3{,}8257) = -29{,}3432$	$y(0{,}1743) = 19{,}3432$	$y(2) = -5$
$y_D(u)$	$y(3{,}8257) = -48{,}6864$	$y(0{,}1743) = 48{,}6864$	$y(2) = -5$

Die Zeichnungen sind in Bild 6 und Bild 7 zu sehen.

d) $S = y'$ und somit:

$$S_y(2) = y'(2) = 6 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 + 4 = -20$$
$$S_{y_D}(2) = y_D'(2) = 12 \cdot 2^2 - 48 \cdot 2 + 8 = -40$$



(a) (b) Spiegelung an y-Achse

(c) Verschieben um $2u_0$ nach rechts (d) Spiegeln an u-Achse

Bild 6: Zwischenergebnisse

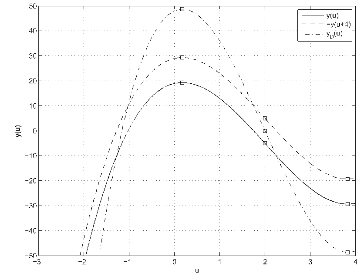


Bild 7: $y_D(u)$ durch graphische Addition

e) Ideale Kennlinien mit $u_a = 1$, $u_e = 3$:

Funktion	y_a	y_e	$y_i(u) = \frac{y_e - y_a}{u_e - u_a}(u - u_a) + y_a$
$y(u)$	23	-13	$-18(u-1) + 23 = -18u + 41$
$y_D(u)$	36	-36	$-36(u-1) + 36 = -36u + 72$

Absoluter Fehler $|y(u) - \tilde{y}(u)|$:

$y(u)$	$\tilde{y}(u)$	$\lvert y(u) - \tilde{y}(u)\rvert$
$2u^3 - 12u^2 + 4u + 29$	$-18u + 41$	$\lvert 2u^3 - 12u^2 + 22u - 12\rvert$
$4u^3 - 24u^2 + 8u + 48$	$-36u + 72$	$\lvert 4u^3 - 24u^2 + 44u - 24\rvert$

f) Nein, da im Messintervall ein Wendepunkt liegt. (Alternative Begründung: Absoluter Fehler wechselt Vorzeichen im Messintervall).

g) Da e unabhängig von u ist, ist der Fehler über dem ganzen Messbereich konstant und somit eine superponierende Störgröße.
Superponierende Störgrößen lassen sich nicht durch Gegenkopplung beseitigen.

Lösung Aufgabe 4:

a) Es gilt

$$\begin{aligned} R_{XX}(t_1, t_2) &= E\{X(t_1)X(t_2)\} \\ &= E\left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} X_i(\xi)X_j(\xi)\delta(t_1 - iT)\delta(t_2 - jT) \right\} \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(t_1 - iT)\delta(t_2 - jT)E\{X_i(\xi)X_j(\xi)\}. \end{aligned}$$

Wobei

$$E\{X_i(\xi)X_j(\xi)\} = C_{X_iX_j} + E\{X_i(\xi)\}E\{X_j(\xi)\}$$
$$E\{X_{i/j}(\xi)\} = \mu_{i/j}$$
$$C_{X_iX_j} = \sigma_i^2 \delta_{ij} \qquad (X_i, X_j \text{ sind stat. Unabh.})$$

$$R_{XX}(t_1, t_2) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(t_1 - iT)\delta(t_2 - jT)[\mu_i\mu_j + \sigma_i^2 \delta_{ij}].$$

b) Der Prozess X ist nicht schwach stationär, denn es gilt nicht $R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_1 + \tau, t_2 + \tau)$.
Gegenbeispiel: Für $t_1 = t_2 = 0$ und $\tau = T/2$ ergibt sich:

$$R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(0, 0) = \mu_0^2 + \sigma_0^2 \neq R_{XX}(t_1 + \tau, t_2 + \tau) = R_{XX}(T/2, T/2) = 0.$$

c) Es gilt:

$$E\{X(t_1,\xi)Y(t_2,\xi)\} = E\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\delta(t_1-iT)\left[\sigma(t_2-jT)-\sigma(t_2-(j+1)T)\right]X_i(\xi)X_j(\xi)\right\}$$
$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\delta(t_1-iT)\left[\sigma(t_2-jT)-\sigma(t_2-(j+1)T)\right]E\{X_i(\xi)X_j(\xi)\}$$
$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\delta(t_1-iT)\left[\sigma(t_2-jT)-\sigma(t_2-(j+1)T)\right]\left[\mu_i\mu_j+\sigma_i^2\delta_{ij}\right],$$

wohingegen

$$E\{X(t_1,\xi)\}E\{Y(t_2,\xi)\} = E\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(t_1-iT)X_i(\xi)\right\}E\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left[\sigma(t_2-jT)-\sigma(t_2-(j+1)T)\right]X_j(\xi)\right\}$$
$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(t_1-iT)\mu_i\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left[\sigma(t_2-jT)-\sigma(t_2-(j+1)T)\right]\mu_j.$$

Z. b. für $t_1=t_2=0$ ist

$$E\{X(t_1,\xi)Y(t_2,\xi)\} = \mu_0^2+\sigma_0^2 \neq \mu_0^2 = E\{X(t_1,\xi)\}E\{Y(t_2,\xi)\}$$

und somit sind die Prozesse korreliert.

d) Analog den Berechnungen aus Teilaufgabe a) folgt für die Autokorrelationsfunktion von Y:

$$R_{YY}(t_1,t_2) = E\{Y(t_1)Y(t_2)\}$$
$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left[\sigma(t_1-iT)-\sigma(t_1-(i+1)T)\right]\left[\sigma(t_2-jT)-\sigma(t_2-(j+1)T)\right]\left[\mu_i\mu_j+\sigma_i^2\delta_{ij}\right]$$

Für die einzelnen Normalverteilungen folgt:

A) Keine schwache Stationarität. Gegenbeispiel:

$$R_{YY}(1/2,1/2) = \mu_0^2+1 \neq R_{YY}(3/2,3/2) = \mu_0^2+e^{-1}.$$

B) Schwache Stationarität.

Beweis: Für $t_1\in[iT,(i+1)T)$, $t_2\in[jT,(j+1)T)$ sowie
$t_1+\tau\in[kT,(k+1)T)$, $t_2+\tau\in[lT,(l+1)T)$ folgt

$$R_{YY}(t_1,t_2) = \mu_i\mu_j = \mu_0^2 = \mu_k\mu_l = R_{YY}(t_1+\tau,t_2+\tau).$$

C) Keine schwache Stationarität. Gegenbeispiel:

$$R_{YY}(1/2,1/2) = 1+\sigma_0^2 \neq R_{YY}(3/2,3/2) = e^{-1}+\sigma_0^2.$$

Für Fall B) ergibt sich das Leistungsdichtespektrum zu

$$S_{YY}(f) = \mathscr{F}\{R_{YY}(t_1-t_2)\} = \mathscr{F}\left\{\mu_0^2\right\} = \mu_0^2\delta(f).$$

Lösung Aufgabe 5:

a) Die Amplitudendichte eines Rechtecksignals ist $f_x(x) = 0{,}5\,\delta(x+a)+0{,}5\,\delta(x-a)$. Für die Charakteristische Funktion gilt somit:

$$\Phi_x(f) = \mathscr{F}\{f_x(x)\}$$
$$= \mathscr{F}\{0{,}5\delta(x+a)+0{,}5\delta(x-a)\}$$
$$= 0{,}5e^{j2\pi fa}+0{,}5e^{-j2\pi fa}$$
$$= \cos(2\pi fa).$$

Da $|\Phi_x(f)| \overset{|f|\to\infty}{\to} 0$ nicht gilt, ist das Rechtecksignal nicht als Dither geeignet.

b) Das Filter ist ein Mittelwertbilder. Das Dithersignal muss mittelwertfrei sein.

c) Noise-Shaping tritt beim Sigma-Delta-Umsetzer auf.

d) Als Noise-Shaping bezeichnet man die Hochpasswirkung des Sigma-Delta-Modulators auf das Quantisierungsrauschen, im Gegensatz zur Allpasswirkung auf das Nutzsignal.
Üblicherweise wird das Signal zusätzlich überabgetastet, d. h. die Abtastfrequenz ist deutlich höher, als es für das Nutzsignal aufgrund des Abtasttheorems nötig wäre.
Dadurch werden die Signalenergien von Quantisierungsrauschen und Nutzsignal im Spektralbereich separiert und lassen sich durch eine anschließende Tiefpassfilterung gut voneinander trennen.

e) Mit allen ADUs kann das Abtasttheorem eingehalten werden.
Wir müssen die Min-Max-Werte des Eingangssignals bestimmen, um zu prüfen, ob der Eingangsbereich der ADUs geeignet ist. Eine mittelwertfreie Dreiecksverteilung lässt sich beschreiben durch:

$$f_y(y) = \begin{cases} c+\frac{c}{a}y, & -a\le y<0 \\ c-\frac{c}{a}y, & 0\le y\le a \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Wobei $c=\frac{1}{a}$ gewählt werden muss, damit $\int_{-\infty}^{\infty} f_y(y) = c\cdot a = 1$ gilt und $f_y(y)$ tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist. Nun muss a aus der Varianz bestimmt werden. Die Varianz einer Dreiecksverteilung ist:

$$C_{yy} = 2\int_0^a y^2 f_y(y)dy = \int_0^a \frac{2y^3}{a^2}+\frac{2y^2}{a}dy = \left.\frac{y^4}{2a^2}+\frac{2y^3}{3a}\right|_0^a = \frac{7}{6}a^2 \overset{!}{=} 100{,}5\,\mathrm{mV}^2$$
$$\Rightarrow a = 0{,}3\,\mathrm{V}$$

Da der Mittelwert $E\{y\}$ bekannt ist, folgt, dass der Eingangsbereich des zu verwendende ADUs das Intervall $[-280\,\mathrm{mV}, 320\,\mathrm{mV}]$ enthalten muss. Dies ist sowohl für ADU1 als auch ADU3 gegeben, ADU 2 scheidet aus. Ein weiteres Kriterium ist die Breite der Quantisierungsstufen:

$$q = \frac{(A_{max}-A_{min})}{2^N}$$
$$q_1 = \frac{10V}{2^{16}} = 152{,}5879\,\mu\mathrm{V}$$
$$q_3 = \frac{40V}{2^{12}} = 9{,}7656\,\mathrm{mV}$$

Da die Quantisierungsstufen von ADU1 über 50 mal kleiner sind als die von ADU3, sollte man ADU1 verwenden.

f) Zunächst bestimmt man die Leistungsdichte des Signals:

$$S_{xx}(f) = \mathscr{F}\{R_{xx}(\tau)\} = \mathscr{F}\left\{e^{-k\tau^2}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{k}}e^{-(\pi f)^2/k}.$$

Dann die Leistung des Nutzsignals und der Störung:

$$P_{nutz} = \int_{-f_a/2}^{f_a/2} S_{xx}(f)df = \sqrt{\frac{\pi}{k}} \int_{-f_a/2}^{f_a/2} e^{-\pi^2 f^2/k} df.$$

Durch Substitution lässt sich dieses Integral auf die Gauß'sche Fehlerfunktion zurückführen:

$$\sqrt{\frac{2}{k}}\pi f = z \qquad \sqrt{\frac{2}{k}}\pi df = dz$$

$$P_{nutz} = \sqrt{\frac{\pi}{k}}\sqrt{\frac{k}{2}}\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi f_a}{\sqrt{2k}}}^{\frac{\pi f_a}{\sqrt{2k}}} e^{-z^2/2} dz = erf\left(\frac{\pi f_a}{\sqrt{2k}}\right).$$

Aus der angegebenen Abbildung entnimmt man $P_{sig} = erf\left(\frac{\pi f_a}{\sqrt{2 \cdot 10^4}} \approx 1{,}7\right) = 0{,}9$.

Die Störleistung lässt sich leicht bestimmen mit

$$P_{st} = P_{sig} - P_{nutz} = R_{xx}(0) - P_{nutz} = 1 - P_{nutz} = 0{,}1$$

Das SNR ist:

$$SNR_{\mathrm{dB}} = 10\log\frac{P_{sig}}{P_{nutz}} = 10\log 9 = 9{,}5424\mathrm{dB}$$

g) Laut Aufgabenstellung sind $Z = 100$, $T_0 = 100\mu s$, $f_{min} = 1\mathrm{Hz}$ und $f_{max} = 1\mathrm{kHz}$. Generell gelten bei der Frequenzerfassung $\varphi_0 = \frac{2\pi}{Z}$ sowie:

$$\hat{\omega} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta T} \qquad \hat{\omega}_G = \frac{\varphi_0}{T_0} = \frac{2\pi}{ZT_0}$$

$$\hat{f} = \frac{\hat{\omega}}{2\pi} \qquad \hat{f}_G = \frac{1}{Z \cdot T_0}$$

$$\Delta\varphi_{PDM} = \varphi_0 = \frac{2\pi}{Z} \qquad \Delta T_{PDM} = N \cdot T_0$$

$$\Delta\varphi_{FZM} = N \cdot \varphi_0 = \frac{N2\pi}{Z} \qquad \Delta T_{FZV} = T_0$$

$$\hat{f}_{PDM} = \frac{1}{NT_0 Z} \qquad \hat{f}_{FZV} = \frac{N}{T_0 Z}$$

Hierbei ist $\hat{f}_G = 100\mathrm{Hz}$ beim Frequenzzählverfahren die kleinste und bei der Periodendauermessung die größte noch anzuzeigende Frequenz (wenn $N = 1$). Somit kann mit den gegebenen Komponenten keines der beiden Verfahren den gesamten Messbereich erfassen.

h) Nun gilt $f_{max} < \hat{f}_G$ (vgl. **g)**). Es muss noch überprüft werden, ob die Messungen stets rechtzeitig eintreffen:

$$\Delta T_{max} = \Delta T_{f_{min}} = N \cdot T_0 = \frac{1}{Z f_{min}} = 10\mathrm{ms} \leq 100\mathrm{ms} = T_{max}.$$

Somit kann das Verfahren eingesetzt werden.

Aufgabe 1: Kurvenanpassung (20 Punkte)

Bei einem neuartigen Messgerät ist die Eingangsgröße l eine Länge und die eigentliche Messgröße V ein Volumen. Die Kennlinie des Messgerätes soll aus folgenden gemessenen Wertepaaren ermittelt werden:

l/ mm	0	2	3	4
V/ mm^3	0	2588	3503	497

Tabelle 1: Aufgezeichnete Messwertpaare

a) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom für $V(l)$ mit Hilfe des Lagrange-Verfahrens. Geben Sie das Ergebnis in der Form $\tilde{V}_L(l) = a_0 + a_1 \cdot l + \ldots + a_{n-1} \cdot l^{n-1}$ an.

Hinweis: Runden Sie alle Zwischenergebnisse auf vier Nachkommastellen! *(5 Punkte)*

b) Es wurde ein weiteres Messwertpaar $V(1) = 511$ mm^3 ermittelt. Aktualisieren Sie ihr Polynom $\tilde{V}_L(l)$ aus **a)** mit dem rekursiven Ansatz des Newton-Verfahrens. *(3 Punkte)*

c) Bestimmen Sie den Parametervektor **a**, den ein Least-Squares-Schätzers mit den Basisfunktionen

$$\phi_0(l) = 1, \qquad \phi_1(l) = l, \qquad \phi_2(l) = l^2, \qquad \phi_3(l) = l^3$$

aus den Werten in Tabelle 1 ermittelt. *(1 Punkt)*

d) Ist Ihr Ergebnis aus **a)** physikalisch plausibel?

Hinweis: Untersuchen Sie die Extremstellen und -werte Ihres Ergebnisses aus **a)**. *(3 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

e) Führen Sie eine Spline-Interpolation mit den Werten aus Tabelle 1 durch. *(5 Punkte)*

f) Ist die physikalische Plausibilität Ihres Ergebnisses aus **e)** im Intervall $[0;2]$ mm gegeben? *(1 Punkt)*

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

g) Gegeben sei ein Messgerät, dessen Ausgangswerte von einem mittelwertfreien Fehler überlagert sind und dessen Kennlinie durch eine Gerade angenähert werden kann. Beschreiben Sie stichpunktartig, wie Sie diese Kennlinie bestimmen können. (Welche Anzahl Stützstellen, welches Interpolations-/Approximationsverfahren würden Sie verwenden?) *(2 Punkte)*

Aufgabe 2: Stationäres Verhalten von Messsystemen (20 Punkte)

Gegeben sei ein Messsystem mit der realen Kennlinie $y(u) = -45u^3 + 216u^2 - 120u + 20$.

a) Bestimmen Sie den optimalen Messbereich der Breite 0,5 im Intervall $[0;4]$. *(4 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

b) Bestimmen Sie die ideale Kennlinie $y_{\mathrm{i}}(u)$ bei Fixpunktjustierung im Intervall $[1{,}35;1{,}85]$. *(1 Punkt)*

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

c) Approximieren Sie die Kennlinie um den Arbeitspunkt $u_{\mathrm{op}} = 1{,}6$ durch eine Taylorreihe $\tilde{y}(u)$, die nach dem linearen Glied abbricht. *(1 Punkt)*

d) Bestimmen Sie für obige Näherung den maximalen absoluten Kennlinienfehler und das Integral des Betrages des absoluten Fehlers im Messbereich $\int_{u_{\mathrm{a}}}^{u_{\mathrm{e}}} |\tilde{y}(u) - y_{\mathrm{i}}(u)| \mathrm{d}u$. *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

Sie wollen nun mit Hilfe zweier Verstärker mit den Kennlinien $f_i(u) = V_i \cdot u + u_i$, $\quad i \in \{1,2\}$ die Kennlinie $y(u)$ um den Arbeitspunkt $u_{\mathrm{op}} = 1{,}6$ linearisieren. Sie verwenden eine Schaltung gemäß Bild 1. Es gilt $V_1 \ll V_2$.

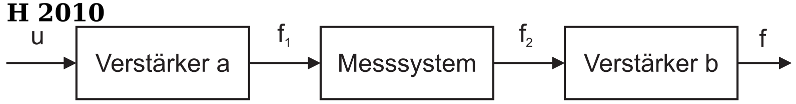


Bild 1: Blockschaltbild einer linearisierenden Schaltung

e) Wie heißt das verwendete Verfahren? In welcher Reihenfolge müssen Sie die Verstärker verschalten: $a \hat{=} 1, b \hat{=} 2$ oder $a \hat{=} 2, b \hat{=} 1$? *(2 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

f) Der erste Verstärker soll die Abweichung vom Arbeitspunkt um den Faktor k reduzieren. Bestimmen Sie die Verstärkung V_i und den Offset u_i des ersten Verstärkers in Abhängigkeit von u_{op} und k. *(1 Punkt)*

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

g) Bestimmen Sie die Gesamtkennlinie und deren ersten beiden Ableitungen abhängig von den Größen $y(u), V_1, V_2, u_1$ und u_2. *(2 Punkte)*

h) Bestimmen Sie den Offset u_i des zweiten Verstärkers in Abhängigkeit von dessen Verstärkung V_i und dem Wert $y(u_{\text{op}})$, so dass die Schaltung mit und ohne Verstärker im Arbeitspunkt den gleichen Messwert liefert.

Hinweis: Verwenden Sie die Werte aus **f)** für Verstärkung und Offset des ersten Verstärkers. *(1 Punkt)*

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass $V_1 \cdot V_2 = 1$ gilt.

i) Zeigen Sie allgemein die linearisierende Wirkung der Schaltung, indem Sie die Krümmung um den Arbeitspunkt u_{op} einmal mit und einmal ohne zusätzliche Verstärker betrachten.
Hinweise:
Die Krümmung einer Funktion $f(x)$ ist durch $\kappa(x) = \frac{f''(x)}{\left(1+(f'(x))^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ gegeben.

Gehen Sie davon aus, dass $k \to \infty$ gilt. *(2 Punkte)*

j) Bestimmen Sie die ideale Kennlinie $f_{\text{i}}(u)$ der mit den Verstärkern linearisierten Schaltung bei Fixpunktjustierung im Intervall $[1{,}35; 1{,}85]$ für $k = 100$ und $u_{\text{op}} = 1{,}6$. *(2 Punkte)*

k) Approximieren Sie die Kennlinie mit Verstärkern um den Arbeitspunkt $u_{\text{op}} = 1{,}6$ durch eine Taylorreihe $\tilde{f}(u)$, die nach dem linearen Glied abbricht. *(1 Punkt)*

l) Bestimmen Sie für obige Näherung den maximalen absoluten Kennlinienfehler und das Integral des Betrages des absoluten Fehlers im Messbereich $\int_{u_{\text{a}}}^{u_{\text{e}}} \left|\tilde{f}(u) - f_{\text{i}}(u)\right| \mathrm{d}u$. *(1 Punkt)*

Aufgabe 3: Zufällige Messfehler und Statistik (21 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass wenn zwei Zufallsvariablen statistisch unabhängig voneinander sind, die Produkte von Funktionen der beiden Zufallsvariablen unkorreliert sind, d.h.:
$f_{\text{xy}}(x,y) = f_{\text{x}}(x) \cdot f_{\text{y}}(y) \quad \Rightarrow \quad E\{g(\text{x}) \cdot h(\text{y})\} = E\{g(\text{x})\} \cdot E\{h(\text{y})\}$. *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

Ein Radarsensor detektiert Objekte in polaren Koordinaten r und φ (der Winkel φ wird hierbei in rad angegeben). Referenzmessungen lassen vermuten, dass beide Größen von additiven, statistisch voneinander unabhängigen Fehlern überlagert sind und damit folgende Wahrscheinlichkeitsdichten besitzen:

$$f_\varphi(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2b}, & \Phi - b \leq \varphi \leq \Phi + b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_{\text{r}}(r) = \mathcal{N}(R, \sigma_{\text{r}}^2),$$

wobei R und Φ die unverfälschten Messwerte sind.
Die nachgelagerte Verarbeitung erfolgt aber in kartesischer Darstellung $\text{x} = \text{r} \cdot \cos(\varphi)$, $\text{y} = \text{r} \cdot \sin(\varphi)$.

b) Bestimmen Sie die Erwartungswerte $E\{\sin(\varphi)\}$, $E\{\sin(2\varphi)\}$, $E\{\cos(\varphi)\}$ und $E\{\cos(2\varphi)\}$.
Hinweis: Benutzen Sie die folgenden Additionstheoreme, um Ihre Ergebnisse zu vereinfachen:
$\cos(a) - \cos(b) = -2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$
$\sin(a) - \sin(b) = 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$ *(4 Punkte)*

c) Bestimmen Sie die Varianzen, Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten von x und y, also σ_{x}^2, σ_{y}^2, C_{xy} und r_{xy} für folgende Werte: $R = 50\,\text{m}, \sigma_{\text{r}}^2 = 0{,}25\,\text{m}^2, \Phi = \frac{\pi}{3}\,\text{rad}, b = 3 \cdot 10^{-3}\pi\,\text{rad}$.

Hinweise:
Nehmen Sie an, **a)** gelöst zu haben.
Verwenden Sie:
$\sin(x)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$
$\cos(x)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$ *(8 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

d) Bestimmen Sie die Größen σ_{x}^2 und σ_{y}^2 mit Hilfe des Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetzes. Verwenden Sie folgende Werte: $R = 50\,\text{m}, \sigma_{\text{r}}^2 = 0{,}25\,\text{m}^2, \Phi = \frac{\pi}{3}\,\text{rad}$ und $b = 3 \cdot 10^{-3}\pi\,\text{rad}$. *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

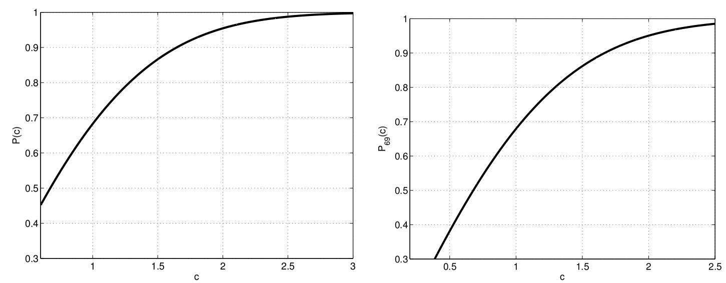
Eine Klausur ergab folgenden Notenspiegel:

Note	1,0	1,3	1,7	2,0	2,3	2,7	3,0	3,3	3,7	4,0	4,7	5,0
Absolute Häufigkeit	3	3	4	4	8	8	6	8	9	10	4	3

e) Berechnen Sie Stichprobenmittelwert und -varianz der Noten. *(2 Punkte)*

Aus langjährigen Betrachtungen ist bekannt, dass die Noten normalverteilt sind, aber mit unterschiedlichen Parametern. Im Sommersemester gilt $\mu_1 = 2{,}94$ und $\sigma_1^2 = 0{,}89$, im Wintersemester $\mu_2 = 3{,}34$ und $\sigma_2^2 = 1{,}31$.

f) Überprüfen Sie mit Hilfe von Signifikanztests für den Stichprobenmittelwert, ob obige Klausur bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}1$ aus einer der beiden Grundgesamtheiten stammen kann. *(4 Punkte)*



(a) für Standardnormalverteilung (b) für t-Verteilung

Bild 2: Verteilungsfunktionen der Standardnormalverteilung und der t-Verteilung mit 69 Freiheitsgraden

Aufgabe 4: Korrelation (19 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für stationäre stochastische Prozesse der Zusammenhang $P_x = R_{xx}(0)$ gilt. *(2 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

b) Wie sieht ein mögliches Zeitsignal mit der Autokorrelationsfunktion $1 - \cos(2\pi\tau)$ qualitativ aus? *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

Gegeben sei ein mittelwertfreies, amplitudenbegrenztes Signal $X(t)$ mit der Periodendauer T.

c) Zeigen Sie, dass auch die AKF $R_{XX}(\tau)$ mit T periodisch ist. *(2 Punkte)*

d) Berechnen Sie die AKF des Signals $\tilde{X}(t)$ in Abhängigkeit von $R_{XX}(\tau)$ wenn:

- $\tilde{X}(t)$ das mit dem Faktor A multiplizierte Signal $X(t)$ ist.
- $\tilde{X}(t)$ das Signal $X(t)$ ist, dem ein Offset B hinzugefügt wird. *(4 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

e) Zeichnen Sie zu folgender Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ deren Signal $x(t)$ im Zeitbereich und deren Leistungsdichte $S_{xx}(f)$! **Begründen Sie Ihre Lösung, beschriften und beziffern Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung.** *(4 Punkte)*

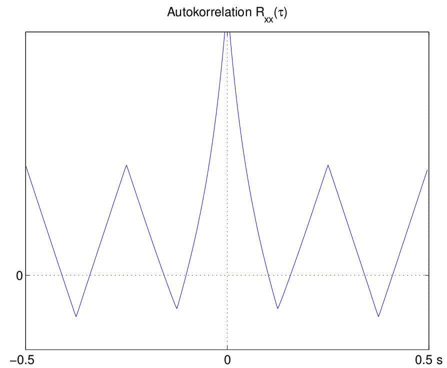


Bild 3: Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

Ein Sinussignal $u(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ wird durch ein LTI-System mit der Übertragungsfunktion $G(f)$ verzerrt und anschließend mit einem zu $u(t)$ unkorrelierten, additiven Störsignal $n(t)$ überlagert. Sie wollen das ursprüngliche Signal so rekonstruiren, dass die Leistung des Differenzsignals, zwischen ursprünglichem Signal und dessen Rekonstruktion, minimal wird. Sie verwenden hierzu ein Filter mit der Übertragunsfunktion $H(f)$.

f) Müssen Sie, um $H(f) = \frac{S_{uu}(f)G^*(f)}{S_{uu}(f)|G(f)|^2+S_{nn}(f)}$ verwenden zu können, die Mittelwertfreiheit des Störsignals voraussetzen? *(1 Punkt)*

g) Bestimmen Sie $H(f)$, wenn das verzerrende LTI-System das Ersatzschaltbild in Bild 4 hat0 und das Störsignal die AKF $R_{nn}(\tau) = A \cdot \delta(\tau)$ besitzt. Skizzieren Sie sowohl Real- als auch Imaginärteil von $H(f)$ für $A = \frac{1}{4\left(1+(2\pi f L/R)^2\right)}$. *(5 Punkte)*

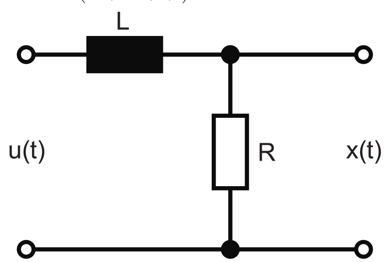


Bild 4: Blockschaltbild eines LTI-Systems

Aufgabe 5: Quantisierung und Abtastung (20 Punkte)

a) Halten Sie ein periodisches Dreiecksignal für ein geeignetes Dithersignal? Begründen Sie mit Hilfe der Amplitudendichte und der charakteristischen Funktion. *(3 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

Nehmen Sie an, dass der Winkelfehler in **Aufgabe 3** ausschließlich durch Quantisierung hervorgerufen wird.

b) Welches Signalmodell für das Quantisierungsrauschen liegt dieser Annahme zugrunde? Wann ist dieses Modell gerechtfertigt? *(2 Punkte)*

c) Wie viele Bits werden dann mindestens benötigt, um einen Winkelmesswert zu speichern?
Hinweis: Verwenden Sie $b = 3 \cdot 10^{-3}\pi$ rad. *(2 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

d) Auf welcher Seite (Eingang oder Ausgang) eines A/D-Umsetzers sollte sich das Anti-Aliasing-Filter befinden, wenn das umzusetzende Signal nicht bandbegrenzt ist? *(1 Punkt)*

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

e) Wirkt sich ein Jitterfehler stärker auf hoch- oder auf niederfrequente Signale aus? *(1 Punkt)*

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

f) Die geforderte Steilheit eines analogen Anti-Aliasing-Filters führt zu einer Filterordnung, die technisch nicht mehr realisierbar ist. Welche der folgenden Maßnahmen würden Sie vorschlagen, um zu einem realisierbaren Filter zu gelangen? (Kurze Begründung)

1. Dithersignal verwenden
2. Anzahl Quantisierungsstufen erhöhen
3. Abtastfrequenz erhöhen
4. Verstärker vorschalten *(1 Punkt)*

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

g) Ein A/D-Umsetzer mit 8 Bit Auflösung und einem Eingangsbereich von $\pm A$ Volt wird mit einem Rechtecksignal maximaler Amplitude angesteuert. Berechnen Sie das SNR in Dezibel für den Quantisierungsfehler bei erfülltem Quantisierungstheorem. *(3 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

Sie wollen ein Signal $y(t)$ A/D umsetzen. Es besteht aus einem Nutzsignal mit der Leistungsdichte $S_{NN}(f) = A_N^2$ für $|f| < f_N (= 20\,\text{kHz})$ und einer additiven, mittelwertfreien Störung mit der Leistungsdichte $S_{SS}(f) = A_S^2$ für $f_{S1} (= 60\,\text{kHz}) \leq |f| \leq f_{S2} (= 100\,\text{kHz})$.

h) Zeigen Sie, das bei Unkorreliertheit von Nutzsignal und Störung $S_{yy}(f) = S_{NN}(f) + S_{SS}(f)$ gilt.

Hinweis: Sie können Stationarität der Signale voraussetzen. *(1 Punkt)*

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

Sie sollen mit einem festen Budget das Signal umsetzen und die Störung entfernen. Bei gleichen Kosten sind folgende Lösungen realisierbar:

1. Sie verwenden einen A/D-Umsetzer mit einer Abtastfrequenz von $f_{a,1} = 50\,\text{kHz}$ und ein analoges Tiefpassfilter der Ordnung $N = 5$ mit einstellbarer Grenzfrequenz $f_{g,1}$.
2. Sie verwenden einen A/D-Umsetzer mit einer Abtastfrequenz von $f_{a,2} = 1\text{MHz}$ und ein digitales Tiefpassfilter der Ordnung $N = 100$ mit einstellbarer Grenzfrequenz $f_{g,2}$.

i) Können Sie mit beiden Filtern erreichen, dass die Störung mindestens um den Faktor 100 gedämpft wird, das Nutzsignal aber höchstens um 1%?

Hinweis: Verwenden Sie $|G(f)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{f}{f_g}\right)^{2N}}$ für die Filter. *(3 Punkte)*

j) Welche Lösung würden Sie wählen? Begründen Sie mit dem Signal-Störabstand (SNR) des umgesetzten und gefilterten Signals.

Hinweise: Nehmen Sie für die Filter folgende Näherung an: $|G(f)|^2 \approx \begin{cases} 1 & \text{für} |f| \leq f_g, \\ \left(\frac{f_g}{f}\right)^{2N} & \text{für} |f| > f_g. \end{cases}$

(3 Punkte)

Aufgabe 1: Kurvenanpassung (20 Punkte)

Lösung

a) Lagrange-Verfahren: $L_0(l)$ braucht nicht bestimmt werden, da $V(l_0) = 0$ ist.

$$L_1(l) = \frac{(l-l_0)(l-l_2)(l-l_3)}{(l_1-l_0)(l_1-l_2)(l_1-l_3)} = \frac{(l-0)(l-3)(l-4)}{2\cdot(-1)(-2)} = \frac{l^3-7l^2+12l}{4}$$
$$= \frac{1}{4}l^3 - \frac{7}{4}l^2 + 3l$$

$$L_2(l) = \frac{(l-l_0)(l-l_1)(l-l_3)}{(l_2-l_0)(l_2-l_1)(l_2-l_3)} = \frac{(l-0)(l-2)(l-4)}{3\cdot 1\cdot(-1)} = \frac{l^3-6l^2+8l}{-3}$$
$$= -\frac{1}{3}l^3 + 2l^2 - \frac{8}{3}l$$

$$L_3(l) = \frac{(l-l_0)(l-l_1)(l-l_2)}{(l_3-l_0)(l_3-l_1)(l_3-l_2)} = \frac{(l-0)(l-2)(l-3)}{4\cdot 2\cdot 1} = \frac{l^3-5l^2+6l}{8}$$
$$= \frac{1}{8}l^3 - \frac{5}{8}l^2 + \frac{3}{4}l$$

$$\tilde{V}_L(l) = V_0\cdot L_0(l) + V_1\cdot L_1(l) + V_2\cdot L_2(l) + V_3\cdot L_3(l)$$

$$\begin{aligned} = \quad & l^3\cdot \quad (2588 \cdot \tfrac{1}{4} + 3508\cdot -\tfrac{1}{3} + 497 \cdot \tfrac{1}{8}) \\ & +l^2\cdot \quad (2588 \cdot -\tfrac{7}{4} + 3508\cdot 2 + 497 \cdot -\tfrac{5}{8}) \\ & +l\cdot \quad (2588 \cdot 3 + 3508\cdot -\tfrac{8}{3} + 497 \cdot \tfrac{3}{4}) \end{aligned}$$

$$= -458{,}5417\, l^3 + 2166{,}3750\, l^2 - 1204{,}5833\, l$$

b) Mit dem rekursiven Ansatz nach Newton für $l_4 = 1\,\text{mm}$ folgt aus $V(l_4) = V_L(l_4) + \tilde{a}_4\cdot(l_4-l_0)(l_4-l_1)(l_4-l_2)(l_4-l_3)$:

$$\tilde{a}_4 = \frac{V(l_4) - V_L(l_4)}{(l_4-l_0)(l_4-l_1)(l_4-l_2)(l_4-l_1)}$$
$$= \frac{511 - 503{,}2500}{(1-0)(1-2)(1-3)(1-4)} \approx -1{,}2917$$

$$\begin{aligned} V_N(l) &= V_L(l) - 1{,}2917\cdot(l-0)(l-2)(l-3)(l-4) \\ &= -458{,}5417\, l^3 + 2166{,}3750\, l^2 - 1204{,}5833\, l - 1{,}2917\cdot\left(l^4 - 9\, l^3 + 26\, l^2 - 24\, l\right) \\ &= -1{,}2917\, l^4 - 446{,}9164\, l^3 + 2132{,}7908\, l^2 - 1173{,}5825\, l \end{aligned}$$

c) Dieser Least-Squares-Schätzer setzt als Approximationsfunktion ein Polynom 3. Grades an und hat 4 Messpunkte, d.h. das Gleichungssystem ist exakt bestimmt, er liefert also die gleichen Koeffizienten wie das Lagrangeverfahren.
$\mathbf{a} = [0,\ -1204{,}5833,\ 2166{,}3750,\ -458{,}5417]^{\mathrm{T}}$

d) Die Interpolationsfunktion und Ihre Ableitungen haben die Form:

$$\begin{aligned} y &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ y' &= 3ax^2 + 2bx + c \\ y'' &= 6ax + 2b \end{aligned}$$

Für einen Extremwert muss $y' = 0$ gelten, was auf

$$x_{1/2} = -\frac{b}{3a} \pm \sqrt{\frac{b^2-3ac}{9a^2}}$$

führt. Die Werte aus **a)** liefern

$$l_{1/2} = 1{,}5748 \pm \sqrt{\frac{3036125{,}6181}{1892344{,}4157}} = 1{,}5748 \pm 1{,}2667$$

$l_1 = 0{,}3082$	$V''(l_1) = 3484{,}9$	$V(l_1) = -178{,}9$
$l_2 = 2{,}8415$	$V''(l_2) = -3484{,}9$	$V(l_2) = 3548{,}6$

Somit ist $V(2{,}8415) = 3548{,}6\ \text{mm}^3$ ein Maximum und $V(0{,}3082) = -178{,}9\ \text{mm}^3$ ein Minimum.
Da die Messgröße ein Volumen ist, sind negative Werte aber physikalisch unmöglich und das Interpolationsergebnis ist somit nicht plausibel.

e) Bestimmung der zweiten Ableitungen in den Stützstellen:

$$V_0'' = V_3'' = 0$$

$$\begin{pmatrix} V_1'' \\ V_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{6}{h_1}(V_2-V_1) - \frac{6}{h_0}(V_1-V_0) \\ \frac{6}{h_2}(V_3-V_2) - \frac{6}{h_1}(V_2-V_1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} V_1'' \\ V_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2275 \\ -23526 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 627{,}3913 \\ -6038{,}3478 \end{pmatrix}$$

Mit Gleichung (2.44) im Messtechnik-Buch folgen die Koeffizienten der drei Splines:

$a_0 = 52{,}2826$	$a_1 = -1110{,}9565$	$a_2 = 1006{,}3913$
$b_0 = 0$	$b_1 = 313{,}6957$	$b_2 = -3019{,}1739$
$c_0 = 1084{,}8694$	$c_1 = 1712{,}2609$	$c_2 = -993{,}2174$
$d_0 = 0$	$d_1 = 2588$	$d_2 = 3503$

f) Aufgrund der Aufgabenstellung muss nur der erste Spline untersucht werden. Da $l_0 = 0$ und $b_0 = d_0 = 0$ gilt:

$$s_0(l) = a_0\cdot l^3 + c_0\cdot l$$

Die Interpolationsfunktion ist somit im angegebenen Intervall stets ≥ 0 (da $a_0 > 0$ und $c_0 > 0$) und somit physikalisch plausibel.

g)
- Da Ausgangswerte fehlerbehaftet: Approximation statt Interpolation, hier: Least-Squares-Schätzer
- Um Messfehler möglichst gut zu unterdrücken: möglichst viele Stützstellen

Aufgabe 2: Stationäres Verhalten von Messsystemen (20 Punkte)

a) Untersuchung auf Wendepunkte im Intervall:

$$\begin{aligned} y(u) &= -45u^3 + 216u^2 - 120u + 20 \\ y'(u) &= -135u^2 + 432u - 120 \\ y''(u) &= -270u + 432 \\ y'''(u) &= -270 \end{aligned}$$

$$y''(u) = -270u + 432 = 0 \Rightarrow u = 1{,}6,\ \ y''' \neq 0 \Rightarrow \text{ Wendepunkt bei } u = 1{,}6$$

Kriterium für Arbeitsbereich mit Wendepunkt:

$$S(u_a+d)-S(u_a)=0$$

$$\left(-135(u_a+0{,}5)^2+432(u_a+0{,}5)-120\right)-\left(-135u_a^2+432u_a-120\right)=0$$

$$-135u_a-33{,}75+216=0$$

$$u_a=1{,}35$$

Der günstigste Messbereich ist also $[1{,}35;1{,}85]$.

b) Ideale Kennlinien mit $u_a=1{,}35$, $u_e=1{,}85$:

y_a	y_e	$y_i(u)=\frac{y_e-y_a}{u_e-u_a}(u-u_a)+y_a$
140,9431	252,3369	$222{,}7876(u-1{,}35)+140{,}9431=222{,}7876u-159{,}8202$

c) $T(u)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{y^{(k)}(u_{op})}{k!}\cdot\left(u-u_{op}\right)^k$

hier:

$\tilde{y}(u)=T_1(u)=y(1{,}6)+y'(1{,}6)\cdot(u-1{,}6)=196{,}64+225{,}6\cdot(u-1{,}6)=225{,}6u-164{,}32$

d) $F_{abs}=y_i-\tilde{y}$. Beides sind Geraden mit unterschiedlichen Steigungen $\Rightarrow$ ein Maximum kann also nur an den der Rändern des Messbereiches auftreten.

	y_a	y_e
$\tilde{y}$	140,24	253,04
y_i	140,9431	252,3369
$\lvert\Delta\rvert$	0,7031	0,7031

Der absolute Fehler ist also mit 0,7031 sowohl am Messanfang als auch -ende am größten.

Das gesuchte Integral ist gerade die Fläche zwischen den beiden Geraden, kann also in zwei Dreiecke zerlegt werden, wenn ein Schnittpunkt im Messbereich existiert.

Der Schnittpunkt beider Geraden liegt bei:
$m_1\cdot u+c_1=m_2\cdot u+c_2\Rightarrow u=\frac{c_2-c_1}{m_1-m_2}$. Die Werte aus **b)** und **c)** liefern: $u=1{,}6000$.

Somit gilt:
$\int\limits_{u_a}^{u_e}\left|\tilde{y}(u)-y_i(u)\right|\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\cdot 0{,}7031\cdot 0{,}25+\frac{1}{2}\cdot 0{,}7031\cdot 0{,}25=0{,}1758$

e) Es handelt sich um das Verfahren „Herabsetzen des Messbereiches“. Die korrekte Zuordnung lautet $a\widehat{=}1, b\widehat{=}2$.

f) $y(u)=V_i\cdot u+u_i\overset{!}{=}\frac{1}{k}(u-u_{op})+u_{op}=\frac{1}{k}u+\frac{k-1}{k}u_{op}$
Koeffizientenvergleich liefert:
$V_i=\frac{1}{k}$, $u_i=\frac{k-1}{k}u_{op}$.

g)

$$f(u)=V_2\cdot y(V_1\cdot u+u_1)+u_2$$
$$f'(u)=V_1\cdot V_2\cdot y'(V_1\cdot u+u_1)$$
$$f''(u)=V_1^2\cdot V_2\cdot y''(V_1\cdot u+u_1)$$

h) $V_2\cdot y(V_1\cdot u+u_1)+u_2\overset{!}{=}y(u_{op})$
Im Arbeitspunkt mit den Werten aus **f)**:
$V_2\cdot y(u_{op})+u_2=y(u_{op})\Rightarrow u_2=y(u_{op})\cdot(1-V_2)$.

i) $\kappa_{ohne}(u)=\frac{y''(u)}{\left(1+(y'(u))^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

$\kappa_{lin}(u)=\frac{V_1^2V_2\cdot y''(V_1u+u_1)}{\left(1+\left[V_1V_2\cdot y'(V_1u+u_1)\right]^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

Für $k\to\infty$ gilt:

$V_1u+u_1=\frac{1}{k}u+\frac{k-1}{k}u_{op}\to u_{op}$.

Des Weiteren gilt $V_1\cdot V_2=1$ und somit:

$\kappa_{lin}(u_{op})\approx\frac{V_1\cdot y''(u_{op})}{\left(1+(y'(u_{op}))^2\right)^{\frac{3}{2}}}=V_1\cdot\kappa_{ohne}(u_{op})$.

Da $V_1\ll 1$ wird die Krümmung um den Arbeitspunkt also stark herabgesetzt.

j) Ideale Kennlinien mit $u_a=1{,}35$, $u_e=1{,}85$:
$f(u)=k\cdot y(\frac{1}{k}u+\frac{k-1}{k}u_{op})+y(u_{op})\cdot(1-k)$

$$\frac{1}{k}u_a+\frac{k-1}{k}u_{op}=1{,}5975 \qquad y(1{,}5975)=196{,}0760$$
$$\frac{1}{k}u_e+\frac{k-1}{k}u_{op}=1{,}6025 \qquad y(1{,}6025)=197{,}2040$$

f_a	f_e	$f_i(u)=\frac{f_e-f_a}{u_e-u_a}(u-u_a)+f_a$
140,24	253,04	$225{,}6(u-1{,}35)+140{,}24=225{,}6u-164{,}32$

k) $\tilde{f}(u)=T_1(u)=f(1{,}6)+f'(1{,}6)\cdot(u-1{,}6)=y(1{,}6)+y'(1{,}6)\cdot(u-1{,}6)=\tilde{y}(u)=f_i(u)$

l) Da $\tilde{f}(u)=f_i(u)$ ist das gesuchte Integral gleich null.

Aufgabe 3: Zufällige Messfehler und Statistik (21 Punkte)

a) $E\{g(\mathrm{x})h(\mathrm{y})\}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(\mathrm{x})h(\mathrm{y})f_{\mathrm{xy}}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(\mathrm{x})h(\mathrm{y})f_{\mathrm{x}}(x)f_{\mathrm{y}}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(\mathrm{x})f_{\mathrm{x}}(x)\mathrm{d}x\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(\mathrm{y})f_{\mathrm{y}}(y)\mathrm{d}y=E\{g(\mathrm{x})\}\cdot E\{h(\mathrm{y})\}$

b) $E\{\sin(\varphi)\}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin(\varphi)f_\varphi(\varphi)\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2b}\int\limits_{\Phi-b}^{\Phi+b}\sin(\varphi)\mathrm{d}\varphi$

$$=\frac{1}{2b}\left(\cos(\Phi-b)-\cos(\Phi+b)\right)=\frac{1}{b}\cdot\sin(\Phi)\sin(b)=\sin(\Phi)\cdot\mathrm{si}(b)$$

$$E\{\sin(2\varphi)\}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin(2\varphi)f_\varphi(\varphi)\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2b}\int\limits_{\Phi-b}^{\Phi+b}\sin(2\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{4b}\left(\cos(2\Phi-2b)-\cos(2\Phi+2b)\right)=\frac{1}{2b}\cdot\sin(2\Phi)\sin(2b)=\sin(2\Phi)\cdot\mathrm{si}(2b)$$

$$E\{\cos(\varphi)\}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos(\varphi)f_\varphi(\varphi)\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2b}\int\limits_{\Phi-b}^{\Phi+b}\cos(\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{2b}\left(\sin(\Phi+b)-\sin(\Phi-b)\right)=\frac{1}{b}\cdot\cos(\Phi)\sin(b)=\cos(\Phi)\cdot\mathrm{si}(b)$$

$$E\{\cos(2\varphi)\}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos(2\varphi)f_\varphi(\varphi)\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2b}\int\limits_{\Phi-b}^{\Phi+b}\cos(2\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{4b}\left(\sin(2\Phi+2b)-\sin(2\Phi-2b)\right)=\frac{1}{2b}\cdot\cos(2\Phi)\sin(2b)=\cos(2\Phi)\cdot\mathrm{si}(2b)$$

c) $E\{\mathrm{x}\}=E\{\mathrm{r}\cos(\varphi)\}=E\{\mathrm{r}\}E\{\cos(\varphi)\}=R\cdot\cos(\Phi)\,\mathrm{si}(b)=24{,}9996\,\mathrm{m}$

$$E\{\mathrm{x}^2\}=E\{\mathrm{r}^2(\cos(\varphi))^2\}=E\{\mathrm{r}^2\}E\{(\cos(\varphi))^2\}=(\sigma_{\mathrm{r}}^2+R^2)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\Phi)\,\mathrm{si}(2b)\right)$$

$$=625{,}0995\,\mathrm{m}^2$$

$$\sigma_{\mathrm{x}}^2=E\{\mathrm{x}^2\}-(E\{\mathrm{x}\})^2=0{,}1195\,\mathrm{m}^2$$

$$E\{y\} = E\{r\sin(\varphi)\} = E\{r\}E\{\sin(\varphi)\} = R\cdot\sin(\Phi)\,\mathrm{si}(b) = 43{,}3006\,\mathrm{m}$$

$$E\{y^2\} = E\{r^2(\sin(\varphi))^2\} = E\{r^2\}E\{(\sin(\varphi))^2\} = (\sigma_r^2+R^2)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2\Phi)\,\mathrm{si}(2b)\right) = 1875{,}1505\,\mathrm{m}^2$$

$$\sigma_y^2 = E\{y^2\} - (E\{y\})^2 = 0{,}2085\,\mathrm{m}^2$$

$$E\{x\cdot y\} = E\{r^2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\} = E\{r^2\}\cdot\frac{1}{2}E\{\sin(2\varphi)\} = \frac{1}{2}(\sigma_r^2+R^2)\sin(2\Phi)\,\mathrm{si}(2b) = 1082{,}5759\,\mathrm{m}^2$$

$$C_{xy} = E\{x\cdot y\} - E\{x\}E\{y\} = \frac{1}{2}\sin(2\Phi)\left\{\sigma_r^2\mathrm{si}(2b) + R^2\mathrm{si}(b)\left[\cos(b)-\mathrm{si}(b)\right]\right\} = 0{,}0782\,\mathrm{m}^2$$

$$r_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} = 0{,}4838$$

d) Da φ gleichverteilt ist, gilt: $\sigma_\varphi^2 = \frac{4b^2}{12} = 29{,}6088\cdot 10^{-6}\mathrm{rad}^2$. Da r und φ unabhängig sind, gilt $r_{x\varphi} = 0$.

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial\varphi}r\cos(\varphi) = -r\sin(\varphi)$$
$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}r\cos(\varphi) = \cos(\varphi)$$
$$\frac{\partial y}{\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial\varphi}r\sin(\varphi) = r\cos(\varphi)$$
$$\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}r\sin(\varphi) = \sin(\varphi)$$

Mit dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$\sigma_x^2 = \left(\left.\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right|_{R,\Phi}\right)^2\sigma_\varphi^2 + \left(\left.\frac{\partial x}{\partial r}\right|_{R,\Phi}\right)^2\sigma_r^2 = R^2(\sin(\Phi))^2\sigma_\varphi^2 + (\cos(\Phi))^2\sigma_r^2 = 0{,}1180\,\mathrm{m}^2$$

$$\sigma_y^2 = \left(\left.\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right|_{R,\Phi}\right)^2\sigma_\varphi^2 + \left(\left.\frac{\partial y}{\partial r}\right|_{R,\Phi}\right)^2\sigma_r^2 = R^2(\cos(\Phi))^2\sigma_\varphi^2 + (\sin(\Phi))^2\sigma_r^2 = 0{,}2060\,\mathrm{m}^2$$

e)
$$\hat{x} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}x_n = \frac{1}{70}(3\cdot1+3\cdot1{,}3+4\cdot1{,}7+4\cdot2+8\cdot2{,}3+8\cdot2{,}7+6\cdot3+8\cdot3{,}3+9\cdot3{,}7+10\cdot4 +4\cdot4{,}7+3\cdot5) = \frac{213{,}2}{70} = 3{,}0457$$

$$S_x^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}x_n^2 - \frac{N}{N-1}\hat{x}^2 = \frac{1}{69}(3\cdot1{,}0^2+3\cdot1{,}3^2+4\cdot1{,}7^2+4\cdot2{,}0^2+8\cdot2{,}3^2+8\cdot2{,}7^2+6\cdot3{,}0^2 +8\cdot3{,}3^2+9\cdot3{,}7^2+10\cdot4{,}0^2+4\cdot4{,}7^2+3\cdot5{,}0^2) - \frac{70}{69}\cdot3{,}0457^2 = 10{,}4921-9{,}4107 = 1{,}0815$$

f) Signifikanztest für Stichprobenmittelwert:

1. Vorausetzungen werden als erfüllt angenommen.
2. Stichprobenmittelwert und Varianz aus **e)**
3. Nullhypothesen : $H_{0,SS}: \hat{x} = \mu_1$, $H_{1,SS}: \hat{x} \neq \mu_1$
   $H_{0,WS}: \hat{x} = \mu_2$, $H_{1,WS}: \hat{x} \neq \mu_2$

4. Prüfgrößen: Varianz nicht aus Stichprobe bestimmt, also mit Normalverteilung rechnen ($\sigma_{\hat{x}^2} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$).
$$c_1 = \frac{|\hat{x}-\mu_1|}{\sigma_1^2}\sqrt{N} = 0{,}9937$$
$$c_2 = \frac{|\hat{x}-\mu_2|}{\sigma_2^2}\sqrt{N} = 1{,}8796$$
5. Signifikanzniveau:
   $P = 1-\alpha = 0{,}9$
6. $P(c_{1/2})$ aus Bild 2(a) ablesen:
   $P(c_1) \approx 0{,}68$
   $P(c_2) \approx 0{,}94$
7. Entscheidung:
   $P(c_1) \leq P \Rightarrow$ Annahme der Hypothese die Klausur könne aus dem Sommersemester stammen
   $P(c_2) > P \Rightarrow$ Ablehnung der Hypothese die Klausur könne aus dem Wintersemester stammen

Aufgabe 4: Korrelation (19 Punkte)

a) $P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f)\mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f\tau}\mathrm{d}f\mathrm{d}\tau$
$= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)\delta(\tau)\mathrm{d}\tau = R_{xx}(0)$

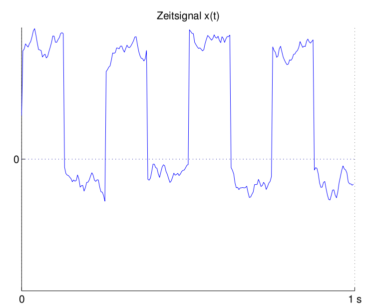
b) Die gegebene Funktion kann keine AKF sein, da ihr Maximum nicht bei $\tau = 0$ liegt.

c) Amplitudenbegrenzte periodische Signale sind Leistungssignale, also wird die AKF wie folgt berechnet:
$R_{XX}(\tau+T) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)X(t+\tau+T)\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)X(t+\tau)\mathrm{d}t = R_{XX}(\tau)$

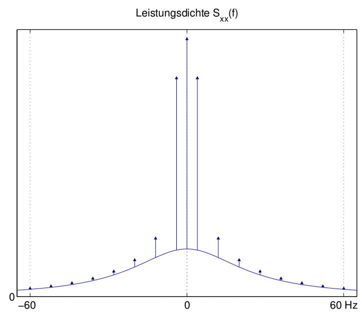
d) Multiplikation mit A: $R_{\tilde{X}\tilde{X}}(\tau) = E\{A\cdot X(t)\cdot A\cdot X(t+\tau)\} = A^2\cdot R_{XX}(\tau)$
Addition von B:
$$R_{\tilde{X}\tilde{X}}(\tau) = E\{(B+X(t))\cdot(B+X(t+\tau))\} = E\{B^2\} + B\cdot E\{X(t)\} + B\cdot E\{X(t+\tau)\} + E\{X(t)X(t+\tau)\} = B^2 + R_{XX}(\tau)$$

e)

$x(t)$	Rechteckfolge mit $f_0 = 4$Hz	farbiges Rauschen	Offset A
$R_{xx}(\tau)$	Dreieckfolge mit $f_0 = 4$Hz	Überhöhung um $\tau = 0$	Offset A^2
$S_{xx}(f)$	abklingende Impulsfolge bei $f = (2k+1)f_0, k\in\mathbb{Z}$	"Glocke" um $f = 0$	$A^2\cdot\delta(f)$



(a) $x(t)$



(b) $S_{XX}(f)$

Bild 5: Signal $x(t)$ und Autoleistungsdichte $S_{xx}(f)$: Signal **b)**

f) Für die Herleitung dieser Formel (vgl. Kap. 6.4.5., S. 239 Messtechnik Buch) wurde ausgenutzt, dass $S_{un}(f) = 0$ ist, d. h. $R_{un}(\tau) = 0$. Damit dies allgemein gilt, müssen beide Signale unkorreliert sein und mindestens eines der beiden mittelwertfrei. Da aber schon $u(t)$ mittelwertfrei ist, braucht dies hier für $n(t)$ nicht zu gelten.

g) Aus der Aufgabenstellung direkt ableitbar:

$$R_{uu}(f) = \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 \tau) \qquad \text{vgl. Beispiel 6.3. Messtechnik Buch.}$$

$$\Rightarrow S_{uu}(f) = \frac{1}{4}\left(\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right) = \frac{1}{4}\left(\delta_{f_0} + \delta_{-f_0}\right)$$

$$S_{nn} = A$$

$$G(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f L/R}$$

$$|G(f)|^2 = \frac{1}{1 + (2\pi f L/R)^2}$$

$$G^*(f) = \frac{1}{1 + (2\pi f L/R)^2} + j\frac{2\pi f L/R}{1 + (2\pi f L/R)^2}$$

Da $n(t)$ unkorreliert zu $u(t)$ kann folgender Ansatz verwendet werden:

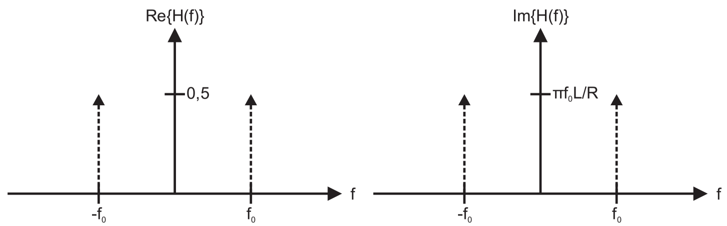
$$H(f) = \frac{S_{uu}(f)G^*(f)}{S_{uu}(f)|G(f)|^2 + S_{nn}(f)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\left(\delta_{f_0} + \delta_{-f_0}\right)}{(1 + (2\pi f L/R)^2)\left(\frac{\frac{1}{4}\left(\delta_{f_0} + \delta_{-f_0}\right)}{1+(2\pi f L/R)^2} + A\right)} + j2\pi f L/R \cdot \frac{\frac{1}{4}\left(\delta_{f_0} + \delta_{-f_0}\right)}{(1 + (2\pi f L/R)^2)\left(\frac{\frac{1}{4}\left(\delta_{f_0} + \delta_{-f_0}\right)}{1+(2\pi f L/R)^2} + A\right)}$$

$$= \frac{\left(\delta_{f_0} + \delta_{-f_0}\right)}{\left(\delta_{f_0} + \delta_{-f_0}\right) + 4\left[1 + (2\pi f L/R)^2\right]A} + j2\pi f L/R \cdot \frac{\left(\delta_{f_0} + \delta_{-f_0}\right)}{\left(\delta_{f_0} + \delta_{-f_0}\right) + 4\left[1 + (2\pi f L/R)^2\right]A}$$

D. h. sowohl Real- als auch Imaginärteil von $H(f)$ sind nur bei $f = \pm f_0$ ungleich null und nehmen hier die Werte $\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{\pi f_0 L}{R}$ an ($A = \frac{1}{4\left(1+(2\pi f L/R)^2\right)}$).

Dies führt zu folgenden Skizzen:



(a) $\Re\{H(f)\}$ (b) $\Im\{H(f)\}$

Bild 6: Real- und Imaginärteil der Übertragungsfunktion des Rekonstruktionsfilters

Aufgabe 5: Quantisierung und Abtastung (20 Punkte)

a)
- Die Amplitudendichte $f_x(x)$ eines Dreiecksignals ist eine Gleichverteilung mit einer Breite entsprechend der Amplitude des Signals.
- Die charakteristische Funktion $\Phi_x(f)$ ist die Fourier-Transformierte der Amplitudendichte:
  $\Phi_x(f) = \mathscr{F}\{f_x(x)\}$, also eine si-Funktion.
- Da $|\Phi_x(f)| \overset{|f|\to\infty}{\longrightarrow} 0$ gilt, ist das Dreiecksignal als Dither verwendbar.

b) Ein additives, gleichverteiltes Quantisierungsrauschen folgt aus dem linearen Quantisierungsmodell. Dieses Modell ist zulässig, wenn das Quantisierungstheorem eingehalten ist.

c) Beim linearen Quantisierungsmodell gilt für das Quantisierungsrauschen n und die Breite einer Quantisierungsstufe:
$\sigma_n^2 = \frac{q^2}{12} = \sigma_\varphi^2 \Rightarrow q = 2b$.
Die Anzahl an Quantisierungsstufen wird damit zu:
$N = \frac{Messbereichsbreite}{Quantisierungsstufenbreite} = \frac{2\pi}{2b} = \frac{1}{3\cdot 10^{-3}} = 333{,}3$.
Somit sind $n = \lceil \mathrm{ld} N \rceil = 9$ bit nötig.

d) Auf der Eingangsseite, da sonst die nicht entfernten hochfrequenten Anteile des Signals zu Aliasing führen.

e) Hochfrequente Signale, da diese sich zeitlich schneller ändern, so das $|y(t) - y(t - t_{Jitter})|$ größer wird.

f) Abstastfrequenz erhöhen, da dadurch die geforderte Steilheit und somit die Filterordnung gesenkt werden kann.

g) Gesucht: $SNR[\mathrm{dB}] = 10\log\frac{P_{\mathrm{sig}}}{P_{\mathrm{stör}}}$.
Leistungsberechnung:

$$P_{\mathrm{sig}} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} A^2\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty}\frac{A^2 2T}{2T} = A^2$$

$$P_{\mathrm{stör}} = \frac{q^2}{12} = \frac{\left(\frac{2A}{2^8}\right)^2}{12} = \frac{A^2}{2^{16}\cdot 3}$$

$$SNR_q[\mathrm{dB}] = 10\log\left(A^2\frac{2^{16}\cdot 3}{A^2}\right) = 10\cdot(\log 3 + 16\log 2) \approx 52{,}936\,\mathrm{dB}$$

h) $y(t) = n(t) + s(t)$

$$\Rightarrow R_{yy}(\tau) = E\{n(t)n(t-\tau) + n(t)s(t-\tau) + s(t)n(t-\tau) + s(t)s(t-\tau)\}$$
$$= R_{NN}(\tau) + 2R_{NS}(\tau) + R_{SS}(\tau)$$

Da beide Signale unkorreliert sind und $s(t)$ mittelwertfrei ist:
$R_{NS}(\tau) = E\{n(t)s(t-\tau)\} = E\{n(t)\}E\{s(t-\tau)\} = 0$.
$S_{yy}(f) = \mathfrak{F}\{R_{yy}(\tau)\} = S_{NN}(f) + S_{SS}(f)$.

i) Da $|G(f)|^2$ monoton fällt, erfährt das Nutzsignal die stärkste Dämpfung bei f_N und die Störung die niedrigste Dämpfung bei f_{S1}.

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\left(\frac{f_N}{f_g}\right)^{2N}} \overset{!}{\geq} 0{,}99 \qquad \frac{1}{1+\left(\frac{f_S 1}{f_g}\right)^{2N}} \overset{!}{\leq} 0{,}01$$

Aus $\frac{1}{x} = \frac{1}{1+\left(\frac{f}{f_g}\right)^{2N}}$ folgt $f_g^{2N} = \frac{f^{2N}}{x-1}$ und damit $f_g = f\cdot(x-1)^{-\frac{1}{2N}}$.

Da die Ordnung des analogen Filters niedriger ist, wird dieses zunächst überprüft. Die gegebenen Werte liefern $f_g \geq 31{,}6660$ kHz und $f_g \leq 37{,}8955$ kHz, d.h. die Anforderungen werden mit dem analogen Filter erfüllt, solange f_g im Bereich $[31{,}6660 - 37{,}8955]$ kHz gewählt wird. Aufgrund der höheren Ordnung ist das digitale Filter ebenfalls in der Lage, die Anforderungen zu erfüllen.

j) Mit der Näherung für $|G(f)|^2$ ist P_{Sig} bei beiden Filter identisch, solange die Grenzfrequenz entsprechend zu **i)** gewählt wird:
$P_{Sig} = 2\int_0^{f_g}|G(f)|^2\cdot S_{NN}(f)\mathrm{d}f = 2A_N^2 f_N$.
Die Störleistung berechnet sich zu:

$$P_{Noi} = 2\int_{f_{S1}}^{f_{S2}}|G(f)|^2\cdot S_{SS}(f)\mathrm{d}f = 2A_S^2\int_{f_{S1}}^{f_{S2}}\left(\frac{f_g}{f}\right)^{2N}\mathrm{d}f$$

Mess - H 2010

Um zu zeigen, dass P_{Noi} monoton fällt für wachsendes N, wird nach N abgeleitet:

$$\frac{d}{dN}P_{Noi} = 2A_S^2 \int_{f_{S1}}^{f_{S2}} \frac{d}{dN}\left(\frac{f_g}{f}\right)^{2N} \mathrm{d}f = 4A_S^2 \int_{f_{S1}}^{f_{S2}} \ln\left(\frac{f_g}{f}\right) \cdot \left(\frac{f_g}{f}\right)^{2N} \mathrm{d}f$$

Da $f_g < f_{S1} < f_{S2}$ ist $\frac{f_g}{f} < 1$ im gesamten Integrationsbereich und der ln somit negativ. Die Ableitung der Störleistung ist somit negativ für alle N, die Störleistung fällt also mit steigendem N, das Signal-Störverhältnis $\frac{P_{Sig}}{P_{Noi}}$ steigt somit bei höherer Filterordnung und es ist die Variante mit dem digitalen Filter nach der Umsetzung zu bevorzugen.

Mess - F 2011

Aufgabe 1: Kurvenanpassung (19 Punkte)

Ein Luftdruckmessgerät liefert an seinem Ausgang eine Spannung y. Laut den Angaben des Herstellers sollte das Gerät bei einer Umgebungstemperatur von $T_1 = 20°\mathrm{C}$ betrieben werden. Um die Kennlinie des Gerätes zu ermitteln, führen Sie zunächst bei der spezifizierten Temperatur eine Messung jeweils am Messanfang, -ende und in der Mitte des Messbereiches durch. Um zu überprüfen, inwieweit das Gerät auch bei anderen Temperaturen betrieben werden kann, nehmen Sie eine zweite Messreihe bei einer Umgebungstemperatur von $T_2 = 25\,°\mathrm{C}$ auf.

u/ hPa	1	2	3
y_{T_1}/ mV	1	1,5	2,5
y_{T_2}/ mV	1	0,0	0,5

Tabelle 1: Aufgezeichnete Messwertpaare für $T_1 = 20\,°\mathrm{C}$ bzw. $T_2 = 25\,°\mathrm{C}$.

a) Wenn Sie die Abweichung $\Delta T = T - T_1$ der Temperatur vom spezifizierten Wert als Störgröße auffassen, handelt es sich anhand der Messdaten dabei um eine rein superponierende Störgröße? Falls ja, setzen Sie ein passendes Modell an und bestimmen Sie die freien Parameter.
Falls nein, geben Sie an, ob Sie hier den deformierenden Fehler durch $F_{\mathrm{def}}(\Delta u, \Delta T) = a \Delta T \Delta u$ vollständig modellieren können. *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen.

b) Nehmen Sie an, Sie sollen für beide Temperaturen jeweils eine Kennlinie durch Interpolation bestimmen. Welchen Vorteil hat in diesem Falle das Verfahren nach Lagrange gegenüber dem nach Newton? *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen.

c) Bestimmen Sie die Kennlinien $y_{T_i}(u),\ i \in \{1;2\}$, aus den gegebenen Werten mit Hilfe des Interpolationsverfahrens nach Lagrange. *(6 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen.

d) Begründen Sie, warum Sie das Gerät bei einer Temperatur von $25\,°\mathrm{C}$ nicht im Eingangsbereich von $u \in [1\,\mathrm{hPa}; 3\,\mathrm{hPa}]$ betreiben können. *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen.

e) Bestimmen Sie $y(u = 1{,}5\,\mathrm{hPa},\ T = 22{,}5\,°\mathrm{C})$ durch bilineare Interpolation. *(4 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen.

Bei einem Messgerät wissen Sie aus physikalischen Überlegungen, dass die Kennlinie des Gerätes sich als eine Ursprungsgerade mit einem überlagerten Sinus unbekannter Amplitude und der Frequenz $f_0 = 0{,}2$ annähern lässt. Zusätzlich ist den Ausgangswerten y eine mittelwertbehaftete, normalverteilte Störung überlagert.

Sie haben folgende Messwertpaare ermittelt:

u	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
y	1,4957	1,5980	1,6680	1,7096	1,7665	1,8151	1,8284	1,8262	1,8296	1,8283

f) Stellen Sie das zugehörige Signalmodell eines Least-Squares-Schätzers zunächst für einen Messwert auf und geben Sie es dann in Matrixschreibweise $\mathbf{y} = \Phi \cdot \mathbf{a}$ an. Bestimmen Sie hierbei Φ numerisch.
Hinweis: Sie brauchen die gesuchten Parameter nicht zu bestimmen! *(2 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den vorherigen.

g) Beschreiben Sie, wie Sie hier den Einfluss der Störung verringern können. *(2 Punkte)*

Aufgabe 2: Stationäres Verhalten von Messsystemen (19 Punkte)

Sie haben folgende Bauteile gegeben:

- Zwei baugleiche Messgeräte mit der Kennlinie $u_\mathrm{M}(i) = \arctan(i)$, welche einen Strom i als Eingangs- und eine Spannung u als Ausgangsgröße besitzen.
- Ein Verstärkerglied A_1 mit der Kennlinie $y_1(i_1,i_2) = (i_1+i_2)\cdot V_1$, welches als Ein- und Ausgangssignale Ströme besitzt.
- Ein Verstärkerglied A_2 mit der Kennlinie $y_2(u_1,u_2) = u_1\cdot V_2 + u_2$, welches als Ein- und Ausgangssignale Spannungen besitzt.
- Jeweils eine konstante Strom- bzw. Spannungsquelle mit einstellbaren Kenngrößen i_c und u_c.

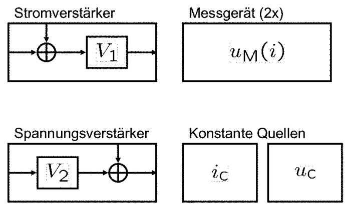


Bild 1: Zur Verfügung stehende Blöcke

Verwenden Sie in der folgenden Aufgabe die Schaltsymbole entsprechend Bild 1. Die Verstärkungsfaktoren V_1 und V_2 können Sie im Bereich $[-100;100]$ stufenlos einstellen. Sie wollen die Kennlinie $u_\mathrm{M}(i)$ um den Arbeitspunkt i_0 herum linearisieren.

a) Skizzieren Sie, wie Sie die gegebenen Bauteile für eine Differenzschaltung verschalten müssen. Geben Sie an, welche Werte Sie für V_1, V_2, i_c und u_c einstellen müssen.
Hinweis: Durch die Differenzschaltung soll die Gesamtübertragungsfuktion $u_\mathrm{Ges,D}(i) = u_\mathrm{M}(i_0+\Delta i) - u_\mathrm{M}(i_0-\Delta i)$ resultieren. *(3 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig vom vorherigen Aufgabenteil.

b) Skizzieren Sie, wie Sie die gegebenen Bauteile für die Methode „Herabsetzen des Messbereiches“ verschalten müssen. Geben Sie an, welche Werte Sie für V_1, V_2, i_c und u_c einstellen müssen, damit Sie eine maximale Linearisierung erreichen und die Gesamtkennlinie im Arbeitspunkt keinen Offset besitzt, d. h. $u_\mathrm{Ges,H}(i_0) = u_\mathrm{M}(i_0)$. Es soll weiterhin $V_1\cdot V_2 = 1$ gelten. *(5 Punkte)*

Im Folgenden sollen die Geräte im Messbereich $[0{,}5;1{,}5]$ betrieben werden mit $i_0 = 1$.

c) Bestimmen Sie die Empfindlichkeit der beiden Gesamtschaltungen nach **a)** und **b)** im Arbeitspunkt i_0. *(3 Punkte)*

d) Bestimmen Sie für beide Schaltungen die Kennlinie nach Fixpunktjustierung. *(2 Punkte)*

e) Nehmen Sie an, die soeben berechneten idealen Kennlinien seien eine ausreichend gute Näherung der tatsächlichen Kennlinien, um als „wahre“ Kennlinie betrachtet zu werden. Bestimmen Sie nun für beide Schaltungen den relativen Kennlinienfehler am Messanfang und -ende, wenn man die Taylorreihenentwicklung erster Ordnung um den Arbeitspunkt i_0 als Kennliniennäherung verwenden würde. Geben Sie den Fehler in Prozent an, gerundet auf zwei Nachkommastellen. *(4 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen.

f) Können Sie mit den gegebenen Bauteilen eine Gegenkopplung realisieren? Wenn ja skizzieren Sie die Schaltung, wenn nein, begründen Sie. *(1 Punkt)*

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den vorherigen.

g) Da ein Messgerät sehr schwache Ausgangspegel liefert, muss sein Ausgangssignal mit mehreren kaskadierten Verstärkern verstärkt werden. Für welche der Verstärkerstufen würden Sie den geringsten Offsetfehler fordern? (Mit knapper Begründung) *(1 Punkt)*

Aufgabe 3: Zufällige Messfehler und Statistik (22 Punkte)

u	Δy	u	Δy	u	Δy	u	Δy
−0,9292	0,0926	−0,0289	0,2962	−0,1989	1,5102	−0,2368	0,1971
0,9471	0,0615	0,8430	0,1680	−0,0857	1,0576	0,3128	0,0920
−0,4495	0,6975	0,2441	0,4293	−0,1446	1,0929	−0,6422	0,2176
−0,3803	0,1337	0,0681	1,4029	0,2240	0,9461	0,1692	0,2821
0,0663	0,4742	0,4478	0,9088	0,7949	0,0277	0,4478	0,1964
−0,4151	0,0407	−0,3949	0,4405	0,4158	0,9921	−0,0568	1,2862
0,2362	1,3822	−0,0577	1,3498	0,6285	0,1187	−0,0050	0,8721
0,1285	0,1166	0,1644	0,3884	−0,3373	0,0450	0,9086	0,0373
−0,0666	1,2342	0,3441	1,1236	−0,5656	0,5400	−0,2892	0,9579
0,0366	0,9001	0,0160	0,9128	0,2158	1,5336	0,0040	0,0599
0,4152	0,7883	0,4435	0,7488	−0,2382	0,7982	0,0236	1,1352
−0,4144	0,3013	0,3261	0,6917	0,5518	0,2664	0,5492	0,3747
−0,1343	0,4032	0,5017	0,4598				

Tabelle 2: Zueinander gehörende Paare u und Δy (Stichprobenumfang $n = 50$).

Für ein Messgerät wurde ein physikalisches Modell erarbeitet. Bei Messungen zeigten sich jedoch Abweichungen Δy der tatsächlichen Ausgangsgröße von den prädizierten Werten des Modells.

In Tabelle 2 finden Sie 50 aufgezeichnete Werte der angelegten Messgröße u und der zugehörigen Abweichung Δy der Messung vom Modellwert.

Durch Betrachtung des zugehörigen Histogramms kommen Sie zu der Vermutung, die Verbunddichte $f_{\mathrm{u},\Delta\mathrm{y}}(u,\Delta y)$ könne folgende Form haben:

$$f_{\mathrm{u},\Delta\mathrm{y}}(u,\Delta y) = \begin{cases} \frac{2}{A^2} & \text{für} \quad |u| \le \frac{A}{2} \text{ und } 0 \le \Delta y \le A - 2|u| \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie das Gebiet der u-Δy-Ebene, in dem $f_{\mathrm{u},\Delta\mathrm{y}}(u,\Delta y) \neq 0$ gilt. *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen.

b) Überprüfen Sie Ihre Vermutung bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$, wenn $A = 2$. Verwenden Sie in Δy-Richtung 2 gleich breite Klassen im Intervall $[0;A]$ und in u-Richtung 4 gleich breite Klassen im Intervall $\left[-\frac{A}{2};\frac{A}{2}\right]$. *(6 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen.

c) Wenn Sie das Signifikanzniveau anheben, was sind die Folgen für die Wahrscheinlichkeit

- einer fälschlichen Ablehnung der Nullhypothese (Fehler 1. Art)?
- einer fälschlichen Akzeptanz der Nullhypothese (Fehler 2. Art)?

(2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen.

Im Folgenden akzeptieren wir die vermutete Verbunddichte mit $A = 2$ als wahre Dichte.

d) Überprüfen Sie, ob Δy und u statistisch unabhängig sind und bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathrm{E}\{\Delta y\}$ der Modellabweichung. *(4 Punkte)*

e) Wie wahrscheinlich ist es, dass die Abweichung Δy kleiner oder gleich 0,5 ist, wenn Sie den Eingangswert $u = 0{,}3$ an das Messgerät anlegen? *(3 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen.

f) Die Addition zweier statistisch unabhängiger Zufallsvariablen bewirkt welche mathematische Verknüpfung Ihrer Wahrscheinlichkeitsdichten? *(1 Punkt)*

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den vorherigen.

Bei der Betrachtung von Stereobildern kann man ein Paar korrespondierender Punkte im linken und rechten Bild entweder durch die Koordinaten $\mathtt{l}$ bzw. $\mathtt{r}$ der Pixel im jeweiligen Bild beschreiben, oder durch deren Mittelwert $\mathtt{m} = \frac{\mathtt{l}+\mathtt{r}}{2}$ und die Disparität $\mathtt{d} = \mathtt{r} - \mathtt{l}$.

g) Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten $r_{\mathtt{l},\mathtt{r}}$, wenn Sie annehmen $\mathtt{m}$ und $\mathtt{d}$ seien unkorreliert und normalverteilt mit den Parametern $\mathrm{E}\{\mathtt{m}\} = M$, $\mathrm{E}\left\{(\mathtt{m}-M)^2\right\} = \sigma_{\mathtt{m}}^2$ bzw. $\mathrm{E}\{\mathtt{d}\} = D$, $\mathrm{E}\left\{(\mathtt{d}-D)^2\right\} = \sigma_{\mathtt{d}}^2$ *(4 Punkte)*

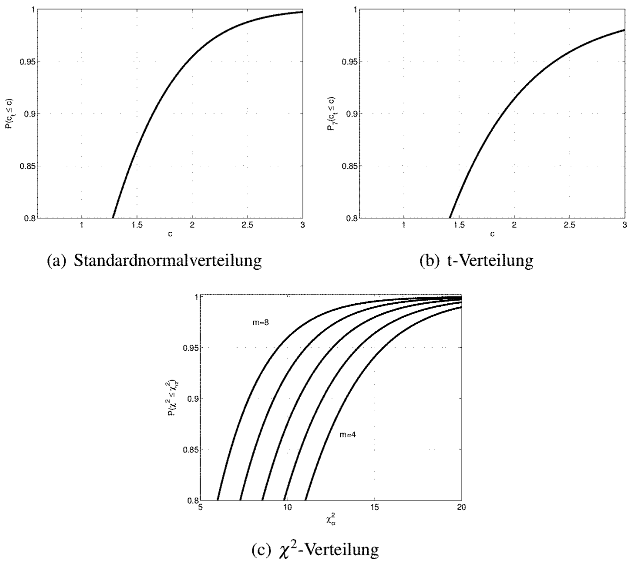


Bild 4: Verteilungsfunktionen für verschiedene Zufallsvariablen

Aufgabe 4: Korrelation (21 Punkte)

a) Zeichnen Sie zu folgendem Signal $x(t)$ im Zeitbereich dessen Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ und dessen Autoleistungsdichte $S_{xx}(f)$! **Begründen Sie Ihre Lösung, beschriften und beziffern Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Lösung.** *(4 Punkte)*

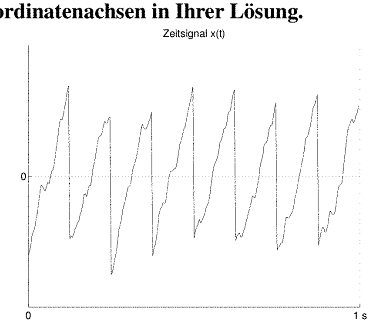


Bild 6: Signal $x(t)$ im Zeitbereich

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

b) **Berechnen** Sie die Autokorrelationsfunktion eines mittelwertfreien Sägezahnsignals $x(t)$ mit der Periodendauer T_0 und einer maximalen Amplitude von $\max\{x(t)\} = A$, welches punktsymmetrisch zum Ursprung ist.
Hinweis : Stellen Sie zunächst die Beschreibung des Signals auf. *(4 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen.

c) Geben Sie zu jeder der folgenden Amplitudendichten an, ob der zu Grunde liegende stochastische Prozess stationär ist. Begründen sie knapp.

- $f_{\mathrm{x}}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left(\mathrm{e}^{-\frac{(xt-\mu t)^2}{2\sigma^2}}\right)^{\frac{1}{t^2}}$
- $f_{\mathrm{x}}(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2k} & \text{für } x \in [-t;t], t \in [-T,T], k = 2tT \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

(2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen.

d) Können Sie mit den Angaben aus Teilaufgabe **c)** die Autokorrelationsfunktionen der zugehörigen stochastischen Prozesse bestimmen? *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen.

Gegeben sei ein stochastisches Messsignal $\mathrm{x}(t)$, welches durch ein Messsystem verfälscht wird. Am Ausgang wird dem verfälschten Signal ein dazu unkorreliertes Rauschen $\mathrm{n}(t)$ additiv überlagert. Sie kennen die Leistungsdichten der Signale $\mathrm{x}(t)$ und $\mathrm{n}(t)$ sowie den Amplitudengang $|G(f)|$ des Messgerätes, welche alle in Abbildung 7 dargestellt sind.

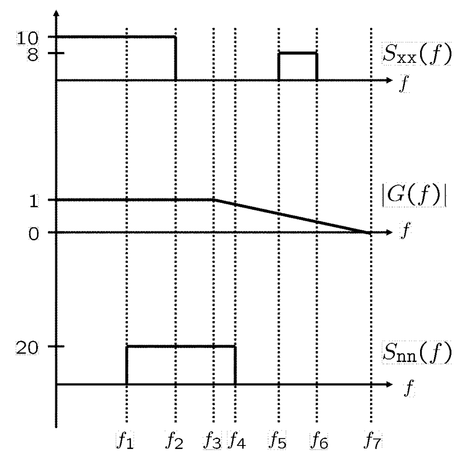


Bild 7: Leistungsdichte des Signals und der Störung sowie Amplitudengang der Verzerrung

e) Skizzieren Sie den Amplitudengang des Filters zur optimalen linearen Rekonstruktion von $\mathrm{x}(t)$. Gehen Sie von folgenden Beziehungen aus:

$$f_2 = 2f_1 \qquad f_5 = f_3 + \frac{1}{4}(f_7 - f_3)$$

$$f_6 = f_3 + \frac{3}{4}(f_7 - f_3) \qquad f_7 = 3f_2\,.$$

(6 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen.

Ein stochastischer Prozess besitze zwei Musterfunktionen $x_\xi(t)$:

$$x_1(t) = (-1)^{\lfloor t/T_0 \rfloor} \cdot A$$
$$x_2(t) = (-1)^{\lfloor t/T_0 \rfloor + 1} \cdot A\,.$$

f) ξ unterliegt einer Zweipunktverteilung mit dem Parameter p_1 ($p_2 = 1 - p_1$). Prüfen Sie, ob für diesen stochastischen Prozess die Mittelung bezüglich der Schar- und die Mittelung bezüglich der Zeit für die ersten beiden Momente erster Ordnung identische Ergebnisse liefern. Verwenden Sie einmal $p_1 = 0{,}5$ und einmal $p_1 = 0{,}3$. (Gefragt ist, ob für beide Werte von p_1 die Identität jeweils für alle angegebenen Momente gilt). *(4 Punkte)*

Aufgabe 5: Quantisierung und Abtastung (19 Punkte)

Sie möchten ein Signal mit der AKF $R_{xx}(\tau) = A \cdot \mathrm{si}(\pi f_0 \tau)$ zunächst mit einer Abtastfrequenz von $f_A = 40\,\mathrm{kHz}$ zeitlich abtasten und anschließend quantisieren. Es gelte $A = 3$ und $f_0 = 50\,\mathrm{kHz}$.

a) Welche Kategorie von Fehlern, die in der Realität auftreten, tritt nicht auf, wenn Sie einen idealen Taktgeber für das Abtastglied haben? *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen Aufgabenteilen.

b) Berechnen Sie das SNR für die entstehenden Aliasing-Fehler. *(3 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen.

Um den Aliasing-Fehler zu verringern, haben Sie zwei Filter zur Verfügung. Filter 1 besitzt die Ordnung $N = 2$ und eine Grenzfrequenz von $f_{g,1} = 10\,\mathrm{kHz}$. Filter 2 besitzt die Ordnung $N = 4$ und eine Grenzfrequenz von $f_{g,2} = 15\,\mathrm{kHz}$.

c) Welches Filter führt zu einem größeren SNR? Verwenden Sie für die Übertragungsfunktionen beider Filter folgende Näherung:

$$|G(f)|^2 = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad |f| \le f_g \\ \left(\frac{f_g}{f}\right)^{2N} & \text{für} \quad |f| > f_g \end{cases}$$

(5 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen.

Sie wollen ein Signal $x(t) = 0{,}1 \cdot \sin(2\pi \cdot 0{,}1\,\mathrm{Hz}\,t)$ AD umsetzen mit einer Abstastfrequenz von $f_A = 20\,\mathrm{Hz}$. Ihr Quantisierer besitzt eine Auflösung von 8 Bit im Eingangsbereich $[-30;30]$.

d) Welche Schwierigkeit entsteht hierbei? Welche der folgenden Maßnahmen würden das Problem beheben können?

- Dithering
- Anzahl Quantisierungsstufen erhöhen
- Abtastfrequenz erhöhen
- Verstärker vorschalten

(2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen.

e) Welchen Zweck hat Dithering? Wie müssen Sie ein Dithersignal und das eigentliche Nutzsignal miteinander verknüpfen, um die gewünschte Wirkung zu erzielen? *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen.

f) Kann es eine Zufallsvariable geben, deren charakteristische Funktion folgende Form besitzt:

$$\phi_x(f) = \begin{cases} \frac{1}{f_0} & \text{für} \quad |f| \le \frac{f_0}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen.

g) Sie wollen ein Signal mit der Amplitudendichte $f_x(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \mathrm{si}^2(A\pi x)$ mit einem Quantisierer mit N Bit Auflösung und einem Eingangsbereich von $-A$ bis A quantisieren. Welche Bedingung muss für N gelten, damit Sie das lineare Quantisierungsmodell verwenden können? Welche Varianz hätte dann der Quantisierungsfehler? *(4 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den vorherigen.

h) Zeigen Sie, dass für reelle Signale die mittlere Frequenz nach der Berechnungsvorschrift $\overline{f} = \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot S_{xx}(f)\,\mathrm{d}f$ stets $\equiv 0$ ist. *(1 Punkt)*

Lösung

Aufgabe 1: Kurvenanpassung (19 Punkte)

a) Die Differenz $\Delta y(u) = y_{T_2}(u) - y_{T_1}(u)$ der beiden Kennlinien in den Messpunkten nimmt folgende Werte an:

u/ hPa	1	2	3
Δy/ mV	0	$-1{,}5$	-2

Der Fehler ist nicht konstant bezüglich u, also kein rein superponierender Fehler.
Da die 3 Werte für $\Delta y(u)$ offensichtlich nicht auf einer Geraden liegen, können Sie durch das angegebene Modell (plus superponierendem Fehler) nicht vollständig beschrieben werden.

b) Da die Stützstellen bei beiden Kennlinien identisch sind, müssen die Lagrangepolynome nur einmal berechnet werden und können wiederverwendet werden, wohingegen das Differenzenschema komplett zweimal berechnet werden müsste.

c) Lagrange-Polynome bestimmen:

$$L_0(u) = \frac{(u-u_1)(u-u_2)}{(u_0-u_1)(u_0-u_2)} = \frac{(u-2)(u-3)}{-1\cdot -2} = \frac{u^2-5u+6}{2}$$
$$= 0{,}5u^2 - 2{,}5u + 3$$

$$L_1(u) = \frac{(u-u_0)(u-u_2)}{(u_1-u_0)(u_1-u_2)} = \frac{(u-1)(u-3)}{1\cdot -1} = \frac{u^2-4u+3}{-1}$$
$$= -u^2 + 4u - 3$$

$$L_2(u) = \frac{(u-u_0)(u-u_1)}{(u_2-u_0)(u_2-u_1)} = \frac{(u-1)(u-2)}{2\cdot 1} = \frac{u^2-3u+2}{2}$$
$$= 0{,}5u^2 - 1{,}5u + 1$$

Interpolationsfunktionen bestimmen:

$$\tilde{y}_1(u) = L_0(u)\cdot y_{T_1,0} + L_1(u)\cdot y_{T_1,1} + L_2(u)\cdot y_{T_1,2}$$

$$\begin{aligned} = \quad & u^2 \quad (\quad 0{,}5\cdot 1 - 1\cdot 1{,}5 \quad +0{,}5\cdot 2{,}5) \\ & +u \quad (\quad -2{,}5\cdot 1 + 4\cdot 1{,}5 \quad -1{,}5\cdot 2{,}5) \\ & + \quad (\quad 3\cdot 1 - 3\cdot 1{,}5 \quad +1\cdot 2{,}5) \end{aligned}$$

$$= 0{,}25u^2 - 0{,}25u + 1$$

$$\tilde{y}_2(u) = L_0(u)\cdot y_{T_2,0} + L_1(u)\cdot y_{T_2,1} + L_2(u)\cdot y_{T_2,2}$$

$$\begin{aligned} = \quad & u^2 \left(0{,}5\cdot 1 + 0{,}5\cdot 0{,}5 \right) \\ & +u \left(-2{,}5\cdot 1 - 1{,}5\cdot 0{,}5 \right) \\ & + \left(3\cdot 1 + 1\cdot 0{,}5 \right) \end{aligned}$$

$$= 0{,}75u^2 - 3{,}25u + 3{,}5$$

d)
- Die aufgenommenen Messwerte für $T = T_2$ sind nicht monoton steigend oder fallend, d. h. es muss bei einer stetigen Kennlinie ein Extrempunkt im Messbereich liegen.
- Somit ist bei der erhöhten Temperatur die Kennlinie im Messbereich aber nicht eindeutig umkehrbar.
- D. h. aus der Ausgangsspannung kann nicht eindeutig auf den zu bestimmenden Luftdruck geschlossen werden.

Somit ist diese Kennlinie nicht zum Messen im angegebenen Messbereich geeignet.

e) Anschauliche Lösung:
Der zu bestimmende Punkt liegt im Schwerpunkt des Rechtecks, das durch die Eckpunkte (u_0,T_1), (u_1,T_1), (u_0,T_2), (u_1,T_2) bestimmt wird, d. h . alle vier Punkte tragen bei der bilinearen Interpolation gleich stark zum Interpolationsergebnis bei
$\Rightarrow y(u = 1{,}5\,\text{hPa}, T = 22{,}5\,°\text{C}) = \frac{1}{4}\left[y(u_0,T_1) + y(u_1,T_1) + y(u_0,T_2) + y(u_1,T_2)\right] = 0{,}875.$

Alternativ: Tatsächliches Rechnen.
Normierte Eingangsgrößen $\Delta_{\text{n},i}u = \frac{u-u_i}{u_{i+1}-u_i}$ bzw. $\Delta_{\text{n},i}T = \frac{T-T_i}{T_{i+1}-T_i}$ führen auf $\Delta_{\text{n},0}u = 0{,}5$ und $\Delta_{\text{n},0}T = 0{,}5$ und somit:

$$\begin{aligned} \tilde{y}(u = 1{,}5\,\text{hPa}, T = 22{,}5\,°\text{C}) = (1-0{,}5)\left[(1-0{,}5)\cdot y_{T_1,0} + 0{,}5\cdot y_{T_1,1}\right] \\ + 0{,}5\cdot\left[(1-0{,}5)\cdot y_{T_2,0} + 0{,}5\cdot y_{T_2,1}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 0{,}25y_{T_1,0} + 0{,}25y_{T_1,1} + 0{,}25y_{T_2,0} + 0{,}25y_{T_2,1} \\ &= 0{,}875 \end{aligned}$$

f) Signalmodell: $y(u) = a_0 + a_1\cdot u + a_2\cdot\sin(2\pi f_0 u)$
Hierbei erfasst der Parameter a_0 den Mittelwert der zufälligen Störung, a_1 die Steigung der Ursprungsgeraden und a_3 die Amplitude des Sinus. Da das Messgerät im stationären Zustand betrieben wird (sonst würden wir nicht die Kennlinie verwenden), ist die „Frequenz" des Sinus natürlich nicht auf die Zeit zu beziehen, da sie hier keine Rolle spielt. In Matrixschreibweise für mehrere Messwerte:

$$\begin{bmatrix} 1{,}4957 \\ 1{,}5980 \\ 1{,}6680 \\ 1{,}7096 \\ 1{,}7665 \\ 1{,}8151 \\ 1{,}8284 \\ 1{,}8262 \\ 1{,}8296 \\ 1{,}8283 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0{,}1 & 0{,}1253 \\ 1 & 0{,}2 & 0{,}2487 \\ 1 & 0{,}3 & 0{,}3681 \\ 1 & 0{,}4 & 0{,}4818 \\ 1 & 0{,}5 & 0{,}5878 \\ 1 & 0{,}6 & 0{,}6845 \\ 1 & 0{,}7 & 0{,}7705 \\ 1 & 0{,}8 & 0{,}8443 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}9048 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

g)
- Entfernen des Mittelwertes der zufälligen Störung (z. B. über den LS-Schätzer aus Aufgabe **f)** den Mittelwert der zufälligen Störung schätzen (a_0) und vorab abziehen, oder Differenzmethode).
- Zusätzliche Mittelung über mehrere auf diese Weise bereinigte Werte entfernt den mittelwertfreien Anteil der Störung.

Aufgabe 2: Stationäres Verhalten von Messsystemen (19 Punkte)

a) Man gelangt zu dem Schaubild, indem man zunächst überlegt, wie man die Eingangswerte $i_0 + \Delta i = i$ und $i_0 - \Delta i = 2i_0 - i$ der beiden parallel zu verschaltenden Messgeräte erzeugt. Das Eingangssignal i kann also direkt mit dem Eingang eines der beiden Messgeräte verbunden werden. Vor den Eingang des anderen muss man dann den gegebenen Stromverstärker mit der konstanten Stromquelle schalten. Anschließend muss nur noch der Spannungsverstärker benutzt werden um die Differenzbildung zu realisieren. Das resultierende Schaltbild findet man in Bild 2. Damit $u_{\text{Ges,D}}(i) = u_\text{m}(i_0+\Delta i) - u_\text{m}(i_0-\Delta i) = u_\text{m}(i) - u_\text{m}(2i_0 - i)$ gilt, müssen folgende Werte eingestellt werden:

$$V_1 = -1 \qquad V_2 = -1$$
$$i_\text{c} = -2i_0\,.$$

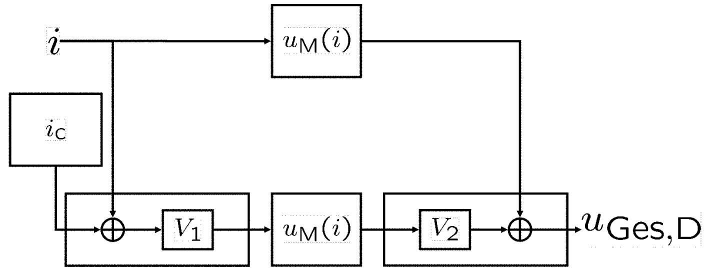


Bild 2: Differenzschaltung

b) Für die Methode „Herabsetzen des Messbereiches" muss ein Verstärker jeweils vor und einer hinter das Messgerät gesetzt werden. Auch wenn man die zweiten Eingänge der Verstärker zunächst frei lässt, wird spätestens durch die weiteren Anforderugen an die Schaltung ersichtlich, dass auch diese mit den konstanten Quellen beschaltet werden müssen. Dem resultierenden Schaltbild in Bild 3 entnimmt man die Gesamtübertragungsfunktion

$$u_{\text{Ges,H}}(i) = u_\text{c} + V_2\cdot u_\text{M}\left(V_1\cdot[i+i_\text{c}]\right)\,.$$

Um eine möglichst gute Linearisierung zu erhalten, sollte das Signal nach dem ersten Verstärker möglichst wenig aus dem Arbeitspunkt ausgelenkt werden, d. h. V_1 sollte möglichst klein sein und somit, wegen $V_1\cdot V_2 = 1$, V_2 möglichst groß. Durch die Wertebegrenzung aus der Aufgabenstellung ist also $V_2 = 100 = V_1^{-1}$ die optimale Wahl der Verstärkungen.

Damit das Verhalten im Arbeitspunkt gleich bleibt, müssen noch die Werte der konstanten Quellen gewählt werden:

$$\begin{aligned} V_1\cdot(i_0 + i_\text{c}) &\overset{!}{=} i_0 \\ \Rightarrow i_\text{c} &= i_0\cdot\frac{1-V_1}{V_1} = 99\cdot i_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_\text{c} + V_2\cdot u_\text{M}(i_0) &\overset{!}{=} u_\text{M}(i_0) \\ \Rightarrow u_\text{c} &= u_\text{M}(i_0)\cdot(1-V_2) = -99\cdot u_\text{M}(i_0) \end{aligned}$$

Somit müssen folgende Werte eingestellt werden:

$$V_1 = \frac{1}{100} \qquad V_2 = 100$$
$$i_\text{c} = 99i_0 \qquad u_\text{c} = -99u_\text{M}(i_0)\,.$$

Eine Wahl von $i_\text{c} = i_0$ und $u_\text{c} = u_\text{M}(i_0)$ erfüllt zwar ebenfalls die Bedingung, dass das Verhalten im Arbeitspunkt unverändert bleibt, linearisiert das System aber um den Punkt $i = 0$, was nicht der Aufgabenstellung entspricht.

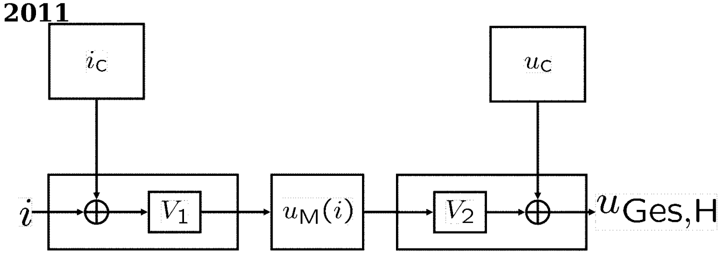


Bild 3: Herabsetzen des Messbereiches

c) Differenzschaltung:
Wir erwarten eine Verdoppelung der Empfindlichkeit des ursprünglichen Messgerätes.

$$S_{\mathrm{D}}(i) = u'_{\mathrm{Ges,D}}(i) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i}\left(u_{\mathrm{m}}(i) - u_{\mathrm{m}}(2i_0 - i)\right) = u'_{\mathrm{m}}(i) + u'_{\mathrm{m}}(2i_0 - i)$$
$$\text{für } i = i_0 = 1 \text{ und } u_{\mathrm{m}}(i) = \arctan(i)$$
$$= 2\cdot u'_{\mathrm{m}}(i_0) = \frac{2}{1+i_0^2} = 1\ .$$

Herabsetzen des Messbereiches:
Wir erwarten keine Veränderung der Empfindlichkeit im Arbeitspunkt.

$$S_{\mathrm{H}}(i) = u'_{\mathrm{Ges,H}}(i) = \underbrace{V_1\cdot V_2}_{=1}\cdot u'_{\mathrm{m}}(V_1\cdot(i+i_{\mathrm{c}}))$$
$$\text{für } i = i_0 = 1, i_{\mathrm{c}} = i_0\frac{1-V_1}{V_1} \text{ und } u_{\mathrm{m}}(i) = \arctan(i)$$
$$= u'_{\mathrm{m}}(V_1\cdot i_0 + i_0(1-V_1)) = u'_{\mathrm{m}}(i_0)$$
$$= \frac{1}{1+i_0^2} = \frac{1}{2}.$$

d) Die ideale Kennlinie bei Fixpunktjustierung hat allgemein die Form:

$$u_{\mathrm{fix}}(i) = \frac{u_{\mathrm{e}} - u_{\mathrm{a}}}{i_{\mathrm{e}} - i_{\mathrm{a}}}\cdot(i - i_{\mathrm{a}}) + u_{\mathrm{a}}$$

Mit den Ergebnisse aus **a)** und **b)** erhält man:

$$i_{\mathrm{a}} = 0{,}5 \qquad i_{\mathrm{e}} = 1{,}5$$
$$u_{\mathrm{Ges,D,a}} = u_{\mathrm{Ges,D}}(i_{\mathrm{a}}) = -0{,}5191 \qquad u_{\mathrm{Ges,D,e}} = u_{\mathrm{Ges,D}}(i_{\mathrm{e}}) = 0{,}5191$$
$$u_{\mathrm{Ges,H,a}} = u_{\mathrm{Ges,H}}(i_{\mathrm{a}}) = 0{,}5348 \qquad u_{\mathrm{Ges,H,e}} = u_{\mathrm{Ges,H}}(i_{\mathrm{e}}) = 1{,}0348\ .$$

Und somit sind die gesuchten Kennlinien:

$$u_{\mathrm{fix,D}}(i) = 1{,}0382\cdot(i-0{,}5) - 0{,}5191$$
$$u_{\mathrm{fix,H}}(i) = 0{,}5\cdot(i-0{,}5) + 0{,}5348$$

e) Die Steigungen der durch die Tayorreihenentwicklung erster Ordnung entstehenden Geraden $u_{\mathrm{Tay}}(i) = u'(i_0)\cdot(i-i_0) + u(i_0)$ sind bereits aus Aufgabenteil **c)** bekannt. Weiterhin gelten

$$u_{\mathrm{Ges,D,0}} = 0 \text{ (auf Grund der Differenzschaltung)}$$
$$u_{\mathrm{Ges,H,0}} = \frac{\pi}{4} \text{ (identisch zu } u_{\mathrm{m}}(i_0))$$

und somit

$$u_{\mathrm{Tay,D}}(i) = 1\cdot(i-1)$$
$$u_{\mathrm{Tay,H}}(i) = 0{,}5\cdot(i-1) + \frac{\pi}{4}\ .$$

Die benötigten Werte am Messanfang und -ende sind

$$u_{\mathrm{Tay,D,a}} = -0{,}5 \qquad u_{\mathrm{Tay,D,e}} = 0{,}5$$
$$u_{\mathrm{Tay,H,a}} = 0{,}5354 \qquad u_{\mathrm{Tay,H,e}} = 1{,}0354\ ,$$

und folglich gelten

$$F_{\mathrm{r,D,a}} = \frac{u_{\mathrm{Tay,D,a}} - u_{\mathrm{fix,D,a}}}{u_{\mathrm{fix,D,a}}} = -3{,}68\,\% \qquad F_{\mathrm{r,D,e}} = \frac{u_{\mathrm{Tay,D,e}} - u_{\mathrm{fix,D,e}}}{u_{\mathrm{fix,D,e}}} = 3{,}68\,\%$$
$$F_{\mathrm{r,H,a}} = \frac{u_{\mathrm{Tay,H,a}} - u_{\mathrm{fix,H,a}}}{u_{\mathrm{fix,H,a}}} = 0{,}11\,\% \qquad F_{\mathrm{r,H,e}} = \frac{u_{\mathrm{Tay,H,e}} - u_{\mathrm{fix,H,e}}}{u_{\mathrm{fix,H,e}}} = 0{,}06\,\%\ .$$

f) Da kein Glied zur Verfügung steht, welches eine Spannung in einen Strom umsetzt, kann keine Gegenkopplung realisiert werden.

g) Die erste Stufe sollte den geringsten Offsetfehler haben, da dieser durch die anderen Stufen weiter verstärkt wird.

Aufgabe 3: Zufällige Messfehler und Statistik (22 Punkte)

a) Eine Skizze des Gebietes finden Sie in Bild 5(a).

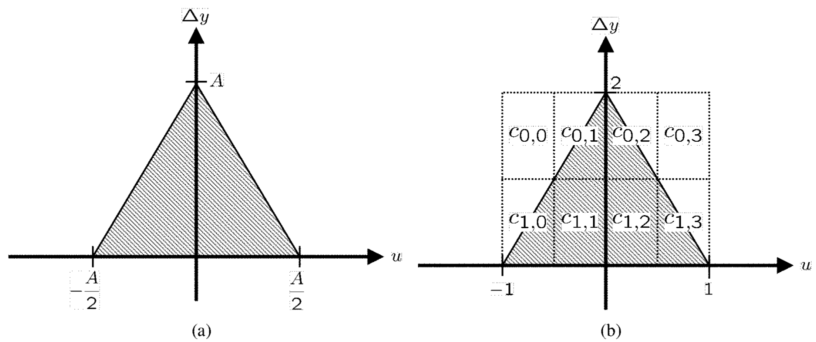


Bild 5: (a) Bereich in dem $f_{\mathrm{u},\Delta\mathrm{y}}(u,\Delta y) \neq 0$ ist. (b) Geforderte Klasseneinteilung.

b) Um die Dichte auf einen bestimmten Verteilungstyp zu testen, nutzen wir den χ^2-Anpassungstest. Die gewünschte Klasseneinteilung findet man in Bild 5(b).

- Die gemessene Anzahl an Werten pro Klasse bei der geforderten Klasseneinteilung bestimmt man aus den Messwertpaaren zu:

	$-1 \le u < -0{,}5$	$-0{,}5 \le u < 0$	$0 \le u < 0{,}5$	$0{,}5 \le u \le 1$
$1 \le \Delta y \le 2$	0	6	5	0
$0 \le \Delta y < 1$	3	12	16	8

- Die Voraussetzungen “unabhängige Messwerte” und “hoher Stichprobenumfang” gelten als erfüllt.
- Das Signifikanzniveau ist mit $\alpha = 0{,}05$ in der Aufgabenstellung festgelegt.
- Berechnung der Prüfgröße:
  - $n_{i,j}$ ist in obiger Tabelle gegeben.
  - Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wert in eine bestimmte Klasse fällt ist:
    $$p_{i,j} = \int_{\Delta y_i}^{\Delta y_{i+1}}\int_{u_j}^{u_{j+1}} f_{\mathrm{u},\Delta\mathrm{y}}(u,\Delta y)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\Delta y\ .$$

Mit der gegebenen Dichte folgt:

$$p_{0,0} = p_{0,3} = 0$$
$$p_{0,1} = p_{0,2} = p_{1,0} = p_{1,3} = \frac{2}{A^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{A}{4}\cdot\frac{A}{2} = \frac{1}{8}$$
$$p_{1,1} = p_{1,2} = 2\cdot p_{0,1} = \frac{1}{4}\,.$$

– Somit sind die benötigten Summanden für die Prüfgröße χ^2:

$\frac{(n_{i,j}-np_{i,j})^2}{np_{i,j}}$	0	1	2	3
0	0	0,01	0,25	0
1	1,69	0,02	0,98	0,49

$$\Rightarrow \chi^2 = \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{3}\frac{(n_{i,j}-np_{i,j})^2}{np_{i,j}} = 3{,}44$$

– Aus Bild 4(c) entnimmt man die obere Schranke für $P(\chi^2 \le \chi^2_\alpha) = 0{,}95$ und $m = 8-1$ zu $\chi^2_\alpha \approx 11{,}1$.

- Somit ist $\chi^2 < \chi^2_\alpha$ und die vorgeschlagene Dichte wird nicht abgelehnt.

c) Ein Anheben des Signifikanzniveaus bedeutet, dass man eher bereit ist, eine wahre Hypothese als falsch zu verwerfen, also steigt die Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art. Damit einher geht aber auch stets eine sinkende Falschalarmrate, d. h. die Wahrscheinlichkeit für Fehler 2. Art sinkt.

d) Um auf statistische Unabhängigkeit zu prüfen, benötigen wir zunächst die Randdichten.

$$f_{\Delta y}(\Delta y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{u,\Delta y}(u,\Delta y)\mathrm{d}u = \int_{-\frac{A}{2}+\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{A}{2}-\frac{\Delta y}{2}} \frac{2}{A^2}\mathrm{d}u = \frac{2}{A^2}\cdot\left[\frac{A}{2}-\frac{\Delta y}{2}+\frac{A}{2}-\frac{\Delta y}{2}\right]$$
$$= \frac{2}{A} - \frac{2}{A^2}\Delta y \qquad \text{für } \Delta y \in [0;A]$$
$$f_u(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{u,\Delta y}(u,\Delta y)\mathrm{d}\Delta y = \int_{0}^{A-2|u|} \frac{2}{A^2}\mathrm{d}\Delta y = \frac{2}{A^2}(A-2|u|)$$
$$= \frac{2}{A} - \frac{4}{A^2}|u| \qquad \text{für } u \in \left[-\frac{A}{2};\frac{A}{2}\right]$$

Die Annahme der statistischen Unabhängigkeit beider ZV widerlegt man mit einem Gegenbeispiel für $\Delta y = u = 0$:

$$f_{\Delta y}(0)\cdot f_u(0) = \frac{4}{A^2} \neq \frac{2}{A^2} = f_{u,\Delta y}(0,0)\,.$$

Den gesuchten Erwartungswert berechnet man wie folgt:

$$\mathrm{E}\{\Delta y\} = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta y\cdot f_{\Delta y}(\Delta y)\mathrm{d}\Delta y = \int_{0}^{A} \Delta y\cdot\left(\frac{2}{A}-\frac{2}{A^2}\Delta y\right)\mathrm{d}\Delta y$$
$$= \frac{2}{A}\left(\frac{A^2}{2}-0\right) - \frac{2}{A^2}\left(\frac{A^3}{3}-0\right) = \frac{A}{3}\,.$$

e) Wir bestimmen zunächst die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{\Delta y|u}(\Delta y|u)$:

$$f_{\Delta y|u}(\Delta y|u) = \frac{f_{u,\Delta y}(u,\Delta y)}{f_u(u)} = \frac{\frac{2}{A^2}}{\frac{2(A-2|u|)}{A^2}} = \frac{1}{A-2|u|} \qquad \text{für } u \in \left[-\frac{A}{2};\frac{A}{2}\right] \text{ und } \Delta y \in [0;A-2|u|]$$

Damit können wir die gesuchte Wahrscheinlichkeit bestimmen:

$$P(|\Delta y| \le 0{,}5|u=0{,}3) = P(\Delta y \le 0{,}5|\,u=0{,}3) = \int_0^{0,5} f_{\Delta y|u}(\Delta y|u)\mathrm{d}\Delta y$$
$$= \frac{1}{A-2|u|}\cdot\int_0^{0,5} 1\mathrm{d}\Delta y = \frac{0{,}5}{2-0{,}6} = 0{,}3571$$

f) Faltung.

g) Es gilt:

$$\mathtt{m} = \frac{\mathtt{l}+\mathtt{r}}{2} \qquad\qquad \mathtt{d} = \mathtt{r}-\mathtt{l}$$
$$\Leftrightarrow \mathtt{l} = \mathtt{m} - \frac{\mathtt{d}}{2} \qquad\qquad \mathtt{r} = \mathtt{m} + \frac{\mathtt{d}}{2}$$

Wir suchen $r_{\mathtt{r},\mathtt{l}} = \frac{C_{\mathtt{r},\mathtt{l}}}{\sigma_\mathtt{r}\sigma_\mathtt{l}}$.

$$\mathrm{E}\{\mathtt{l}\} := L = M - \frac{D}{2} \qquad\qquad \mathrm{E}\{\mathtt{r}\} := R = M + \frac{D}{2}$$

$$\sigma_\mathtt{l}^2 = \mathrm{E}\{\mathtt{l}^2\} - L^2 = \mathrm{E}\left\{\mathtt{m}^2 - \mathtt{md} + \frac{\mathtt{d}^2}{4}\right\} - \left(M^2 - MD + \frac{D^2}{4}\right)$$
$$= \sigma_\mathtt{m}^2 + M^2 - MD + \frac{\sigma_\mathtt{d}^2}{4} + \frac{D^2}{4} - \left(M^2 - MD + \frac{D^2}{4}\right) = \sigma_\mathtt{m}^2 + \frac{\sigma_\mathtt{d}^2}{4}$$

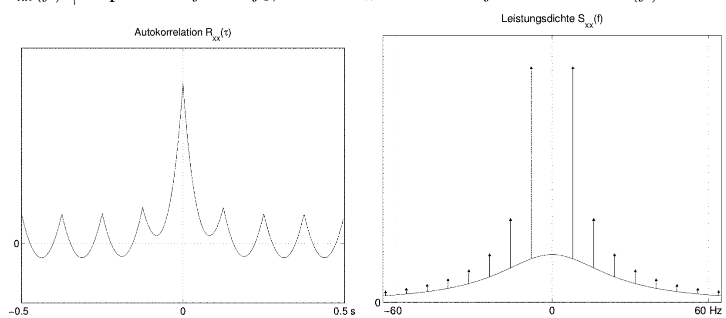
$$\sigma_\mathtt{r}^2 = \mathrm{E}\{\mathtt{r}^2\} - R^2 = \mathrm{E}\left\{\mathtt{m}^2 + \mathtt{md} + \frac{\mathtt{d}^2}{4}\right\} - \left(M^2 + MD + \frac{D^2}{4}\right)$$
$$= \sigma_\mathtt{m}^2 + M^2 + MD + \frac{\sigma_\mathtt{d}^2}{4} + \frac{D^2}{4} - \left(M^2 + MD + \frac{D^2}{4}\right) = \sigma_\mathtt{m}^2 + \frac{\sigma_\mathtt{d}^2}{4}$$
$$C_{\mathtt{l},\mathtt{r}} = \mathrm{E}\{(\mathtt{l}-\mathrm{E}\{\mathtt{l}\})(\mathtt{r}-\mathrm{E}\{\mathtt{r}\})\} = \mathrm{E}\{\mathtt{l}\cdot\mathtt{r}\} - L\cdot R$$
$$= \mathrm{E}\left\{\mathtt{m}^2 - \frac{\mathtt{d}^2}{4}\right\} - M^2 + \frac{D^2}{4} = \sigma_\mathtt{m}^2 - \frac{\sigma_\mathtt{d}^2}{4}$$

$$\Rightarrow r_{\mathtt{l},\mathtt{r}} = \frac{C_{\mathtt{l},\mathtt{r}}}{\sigma_\mathtt{l}\sigma_\mathtt{r}} = \frac{\sigma_\mathtt{m}^2 - \frac{\sigma_\mathtt{d}^2}{4}}{\sigma_\mathtt{m}^2 + \frac{\sigma_\mathtt{d}^2}{4}} = \frac{1-\left(\frac{\sigma_\mathtt{d}}{2\sigma_\mathtt{m}}\right)^2}{1+\left(\frac{\sigma_\mathtt{d}}{2\sigma_\mathtt{m}}\right)^2}\,.$$

Aufgabe 4: Korrelation (21 Punkte)

a)

$x(t)$	Sägezahn $f_0 = 8\,\mathrm{Hz}$	farbiges Rauschen	kein Offset
$R_{xx}(\tau)$	parabelförmig $f_0 = 8\,\mathrm{Hz}$	Überhöhung um $\tau = 0$	kein Offset
$S_{xx}(f)$	Impulse bei $f = k\cdot f_0, k \in \mathbb{Z}$	„Glocke“ um $f = 0$	kein $\delta(f)$



(a) $R_{xx}(\tau)$ (b) $S_{XX}(f)$

Bild 8: Autokorrelation $R_{xx}(\tau)$ und Autoleistungsdichte $S_{xx}(f)$

b) Das Signal in Bild 9 lässt sich wie folgt beschreiben:

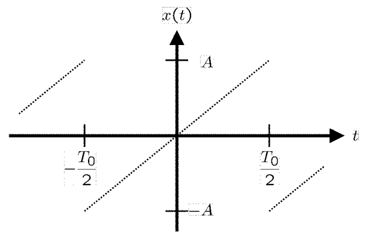


Bild 9: Sägezahnsignal $x(t)$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_0(t+kT_0) \qquad \text{mit}$$

$$x_0(t) = \frac{2A}{T_0}\cdot t \qquad \text{für} \qquad t \in \left[-\frac{T_0}{2};\frac{T_0}{2}\right]$$

Durch die T_0-Periodizität des Signals ist auch die Autokorrelation T_0-periodisch, d. h. im Folgenden wird $\tau \in [0;T_0]$ angenommen. Die Autokorrelation für periodische Zeitsignale kann man wie folgt berechnen:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t+\tau)x(t)\mathrm{d}t = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{kT_0}\int_{-k\frac{T_0}{2}}^{k\frac{T_0}{2}} x(t+\tau)x(t)\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{k}{kT_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t+\tau)x(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T_0}\left[\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}-\tau} x_0(t+\tau)x(t)\mathrm{d}t + \int_{\frac{T_0}{2}-\tau}^{\frac{T_0}{2}} x_0(t-T_0+\tau)x(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$= \frac{4A^2}{T_0^3}\left[\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}-\tau} t^2+t\tau\mathrm{d}t + \int_{\frac{T_0}{2}-\tau}^{\frac{T_0}{2}} t^2+t(\tau-T_0)\mathrm{d}t\right] = \frac{4A^2}{T_0^3}\cdot\left[\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} t^2\mathrm{d}t + \tau\cdot\underbrace{\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} t\mathrm{d}t}_{=0} - T_0\cdot\int_{\frac{T_0}{2}-\tau}^{\frac{T_0}{2}} t\mathrm{d}t\right]$$

$$= \frac{4A^2}{T_0^3}\left[\frac{T_0^3}{12} - \frac{T_0^2}{2}\tau + \frac{T_0}{2}\tau^2\right] = A^2\left[\frac{1}{3} - \frac{2}{T_0^2}\tau(T_0-\tau)\right] .$$

c)
- $f_x(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left(e^{-\frac{(xt-\mu t)^2}{2\sigma^2}}\right)^{\frac{1}{t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ist eine zeitinvariante Normalverteilung. D. h. der Prozess ist stationär.
- Die gegebene Dichte ist für ein festes t eine Gleichverteilung bezüglich x, deren „Breite" von t abhängig ist. D. h. der Prozess ist nicht stationär.

d) Nein, da die Verbunddichten der Prozesse für verschiedene Zeitpunkte unbekannt sind.

e) Der Amplitudengang des Wiener-Optimalfilters lässt sich in der Form

$$|H(f)| = \frac{1}{|G(f)|}\cdot\frac{|G(f)|^2}{|G(f)|^2 + \frac{S_{nn}(f)}{S_{xx}(f)}}$$

darstellen.

Den Amplitudengang des Rekonstruktionsfilters berechnen wir abschnittsweise:

$$\begin{array}{llllll}
f \le f_1 & : & S_{nn}(f)=0 & \text{und} & S_{xx}(f)\neq 0 & \to |H(f)| = \frac{1}{|G(f)|} = 1\\
f_1 \le f \le f_2 & : & S_{nn}(f)=20 & \text{und} & S_{xx}(f)=10 & \to |H(f)| = \frac{1}{|G(f)|}\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}\\
f_2 \le f \le f_4 & : & S_{nn}(f)\neq 0 & \text{und} & S_{xx}(f)=0 & \to |H(f)| = 0\\
f_4 \le f \le f_5 & : & S_{nn}(f)=0 & \text{und} & S_{xx}(f)=0 & \to |H(f)| \text{ ist undefiniert}\\
f_5 \le f \le f_6 & : & S_{nn}(f)=0 & \text{und} & S_{xx}(f)\neq 0 & \to |H(f)| = \frac{1}{|G(f)|}\\
f_6 \le f \le f_7 & : & S_{nn}(f)=0 & \text{und} & S_{xx}(f)=0 & \to |H(f)| \text{ ist undefiniert}
\end{array}$$

Zu $f_5 \le f \le f_6$: aus $f_5 = f_3 + \frac{1}{4}(f_7-f_3)$ und $f_6 = f_3 + \frac{3}{4}(f_7-f_3)$ wissen wir, dass $|G(f)|$ bei f_5 bzw. f_6 die Werte $\frac{3}{4}$ bzw. $\frac{1}{4}$ annimmt. Zwischen diesen Punkten verläuft $|G(f)|$ linear. Daraus ergibt sich der Amplitudengang aus Bild 10.

f) Bei den beiden Musterfunktionen handelt es sich im zwei periodische Rechteckfunktionen. Es gilt außerdem: $x_2(t) = (-1)\cdot(-1)^{\lfloor t/T_0\rfloor}\cdot A = -x_1(t)$. Wir vergleichen die ersten beiden Momente bezüglich der Zeit bzw. der Schar:

Zeitmittelwerte:

$$E_t\{x_1(t)\} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x_1(t)\mathrm{d}t = 0 \qquad \text{da} \int_{-T}^{T} x_1(t)\mathrm{d}t \text{ langsamer als } 2T \text{ wächst.}$$

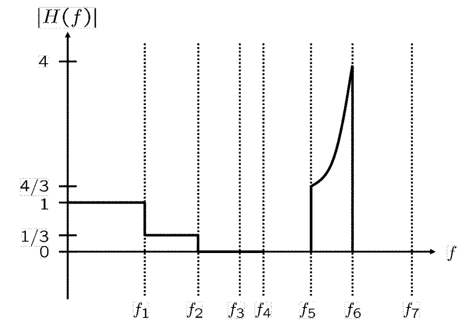


Bild 10: Gesuchter Amplitudengang des Wiener-Optimalfilters.

Analog gilt $E_t\{x_2(t)\} = 0$.

Varianzen bezüglich der Zeit:

$$E_t\left\{x_1^2(t)\right\} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} A^2\mathrm{d}t = A^2$$

$$E_t\left\{x_2^2(t)\right\} = A^2 .$$

Scharmittelwert:

$$E_\xi\{x(t)\} = p_1\cdot x_1(t) + p_2\cdot x_2(t) = x_1(t)\cdot(p_1-p_2) = x_1(t)\cdot(2\cdot p_1 - 1)$$

Varianz bezüglich der Schar:

$$E_\xi\left\{x(t)^2\right\} = p_1\cdot x_1^2(t) + p_2\cdot x_2^2(t) = x_1^2(t)\cdot(p_1+p_2) = x_1^2(t) = A^2$$

Die Varianz ist unabhängig von p_1 identisch für beide Mittelungen.
Für $p_1 = 0{,}5$ wird der Scharmittelwert zu $x_1(t)\cdot(2\cdot p_1-1) = 0 \equiv E_t\{x_i(t)\}$. Somit ist für beide zu untersuchenden Momente der Mittelwert in Schar- und in Zeitrichtung identisch. Mit $p_1 = 0{,}3$ wird der Scharmittelwert zu $x_1(t)\cdot(2\cdot p_1-1) = \pm A\cdot -0{,}4 \neq 0 = E_t\{x_1(t)\}$. Somit ist der Scharmittelwert nicht mit dem zeitlichen Mittelwert mindestens einer Musterfunktion identisch. Somit liefert die Mittelung bezüglich der Schar nicht für alle angegebenen Momente das gleiche Ergebnis wie der entsprechende Zeitmittelwert.

Aufgabe 5: Quantisierung und Abtastung (19 Punkte)

a) Jitterfehler.

b) Die Leistungsdichte des Nutzsignals erhält man durch Fouriertransformation der AKF zu $S_{\mathrm{xx}}(f) = \frac{A}{f_0} \cdot \mathrm{r}_{f_0}(f)$ mit $\mathrm{r}_{f_0}(f) = 1$ für $|f| \leq f_0/2$ und 0 sonst. Die Nutzsignalleistung ist dann die Leistung im Nyquistband:

$$P_{\mathrm{Sig}} = \int_{-\frac{f_A}{2}}^{\frac{f_A}{2}} S_{\mathrm{xx}}(f)\mathrm{d}f = \frac{A}{f_0} \cdot f_a \, .$$

Die Signalleistung außerhalb des Nyquistbandes führt zu Aliasing-Fehlern und wird deshalb als Störleistung aufgefasst:

$$P_{\mathrm{Noi}} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathrm{xx}}(f)\mathrm{d}f - P_{\mathrm{Sig}} = A \cdot f_0 - A \cdot f_A = \frac{A}{f_0} \cdot (f_0 - f_a) \, .$$

Somit ist das gesuchte $\mathrm{SNR} = \frac{P_{\mathrm{Sig}}}{P_{\mathrm{Noi}}} = \frac{f_a}{f_0 - f_a} = 4$.

c) Die Nutzsignalleistung wird mit den Filtern verringert zu:

$$P_{\mathrm{Sig}} = 2\int_0^{f_g} S_{\mathrm{xx}}(f)\mathrm{d}f + 2 \cdot \frac{A}{f_0} \int_{f_g}^{\frac{f_A}{2}} \left(\frac{f_g}{f}\right)^{2N} \mathrm{d}f = \frac{2A}{f_0}\left[f_g + f_g^{2N}\frac{1}{-2N+1}\left(\left(\frac{f_A}{2}\right)^{-2N+1} - f_g^{-2N+1}\right)\right]$$

Die Störleistung wird mit den Filtern verringert zu:

$$P_{\mathrm{Noi}} = 2 \cdot \frac{A}{f_0} \cdot \int_{\frac{f_A}{2}}^{\frac{f_0}{2}} \left(\frac{f_g}{f}\right)^{2N} \mathrm{d}f = 2 \cdot \frac{A}{f_0} \cdot f_g^{2N} \frac{1}{-2N+1}\left(\left(\frac{f_0}{2}\right)^{-2N+1} - \left(\frac{f_A}{2}\right)^{-2N+1}\right)$$

Einsetzen der Werte aus der Aufgabenstellung liefert:

$$P_{\mathrm{Sig},1} = \frac{6}{50 \cdot 10^3} \cdot \left(10 \cdot 10^3 + \left(10 \cdot 10^3\right)^4 \cdot \frac{1}{-3} \cdot \left[(20 \cdot 10^3)^{-3} - (10 \cdot 10^3)^{-3}\right]\right)$$
$$= 12 \cdot 10^{-5} \cdot \left(10^4 - \frac{1}{3}10^{16} \cdot (-8{,}75 \cdot 10^{-13})\right) = 1{,}55$$

$$P_{\mathrm{Noi},1} = \frac{3}{50 \cdot 10^3} \cdot 2 \cdot \left(10 \cdot 10^3\right)^4 \frac{1}{-3}\left[(25 \cdot 10^3)^{-3} - (20 \cdot 10^3)^{-3}\right] = -6 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{2}{3}10^{16} \cdot \left(-6{,}1 \cdot 10^{-14}\right)$$
$$= 0{,}0244$$

$$\rightarrow \mathrm{SNR}_1 = \frac{1{,}55}{0{,}0244} = 63{,}5246$$

$$P_{\mathrm{Sig},2} = \frac{6}{50 \cdot 10^3} \cdot \left(15 \cdot 10^3 + \left(15 \cdot 10^3\right)^8 \cdot \frac{1}{-7} \cdot \left[(20 \cdot 10^3)^{-7} - (15 \cdot 10^3)^{-7}\right]\right)$$
$$= 12 \cdot 10^{-5} \cdot \left(1{,}5 \cdot 10^4 - \frac{1}{7}1{,}5^8 \cdot 10^{32} \cdot (-5{,}0715 \cdot 10^{-30})\right) = 2{,}0228$$

$$P_{\mathrm{Noi},2} = \frac{3}{50 \cdot 10^3} \cdot 2 \cdot \left(15 \cdot 10^3\right)^8 \frac{1}{-7}\left[(25 \cdot 10^3)^{-7} - (20 \cdot 10^3)^{-7}\right]$$
$$= -6 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{2}{7}1{,}5^8 \cdot 10^{32} \cdot \left(-6{,}1741 \cdot 10^{-31}\right)$$
$$= 0{,}0271$$

$$\rightarrow \mathrm{SNR}_2 = \frac{2{,}0228}{0{,}0271} = 74{,}5710$$

Das Filter mit der höheren Ordnung erbringt trotz höherer Grenzfrequenz ein besseres SNR.

d) Der Amplitudenbereich des Eingangssignals ist kleiner als eine Quantisierungsstufe. Alle Maßnahmen außer ein Erhöhen der Abstastfrequenz könnten diesen Sachverhalt verändern.

e) Dithering soll eine Bandbegrenzung der charakteristischen Funktion des zu quantisierenden Signals herbeiführen. Dazu müssen die beiden charakteristischen Funktionen miteinander multipliziert werden, was einer Faltung der Wahrscheinlichkeitsdichten entspricht, was einer Addition der beiden Signale entspricht (wenn der Dither unabhängig vom Signal ist).

f) Die angegebene charakteristische Funktion ist eine Rechteckfunktion. Eine hypothetische zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte (Fourierrücktransformierte) wäre eine si() Funktion. Diese besitzt aber auch negative Werte und ist somit keine zulässige Wahrscheinlichkeitsdichte. Eine solche ZV kann also nicht existieren.

g) Damit das lineare Quantisierungsmodell verwendet werden kann, muss das Quantisierungstheorem eingehalten werden. Um dies zu prüfen, bestimmen wir zunächst die charakteristische Funktion der zu quantisierenden Größe:

$$\Phi_{\mathrm{x}}(f) = \mathscr{F}\{f_{\mathrm{x}}(x)\} = \frac{1}{\pi}\mathscr{F}\left\{\mathrm{si}^2(A\pi x)\right\} = \frac{1}{A\pi}\mathscr{F}\left\{A \cdot \mathrm{si}^2(A\pi x)\right\} = \frac{1}{A\pi} \cdot d_{2A}(f) \, ,$$

mit

$$d_{2A}(f) = \begin{cases} 1 + \frac{f}{A} & \text{für} \quad -A \leq f \leq 0 \\ 1 - \frac{f}{A} & \text{für} \quad 0 < f \leq A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \, .$$

Die charakteristische Funktion ist also bandbegrenzt, wobei $\max\{|f|\} = A$ gilt. Um das Quantisierungstheorem einzuhalten, muss $\max\{|f|\} \leq \frac{1}{2q}$ mit $q = 2A \cdot 2^{-N}$ gelten. Wir lösen nach N auf:

$$A \leq \frac{1}{2}\frac{2^N}{2 \cdot A}$$
$$A^2 \leq 2^{N-2}$$
$$N \geq 2\left(\mathrm{ld}(A) + 1\right)$$

Wenn das lineare Quantisierungsmodell verwendet wird, ist der Quantisierungsfehler gleichverteilt über die Breite q einer Quantisierungstufe und somit

$$\sigma_{\mathrm{e_q}}^2 = \frac{q^2}{12} = A^2 \cdot \frac{2^{-2N+2}}{2^2 \cdot 3} = \frac{A^2}{3} \cdot 2^{-2N} \, .$$

h) Für reelle Signale ist die Autokorrelationsfunktion gerade und somit auch die Leistungsdichte. Das Produkt aus Frequenz und Leistunsdichte ist somit also ungerade. Das Integral über eine ungerade Funktion verschwindet, wenn die Integrationsgrenzen symmetrisch um 0 liegen.

Aufgabe 1: Kurvenanpassung (19 Punkte)

Sie möchten die Flugbahn $h(x)$ eines Balls rekonstruieren und haben dazu folgende Messwerte gegeben:

x / m	0	40	60	70
h(x) / m	0	45,52	50,88	50,365

Sie haben hieraus mit dem Lagrange-Verfahren folgende Flugbahn ermittelt:

$$\tilde{h}(x) = 5{,}5 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 - 0{,}02 \cdot x^2 + 1{,}85 \cdot x\,.$$

a) Halten Sie die berechnete Flugbahn für sinnvoll?
Falls ja, geben Sie die maximale Höhe und den Aufschlagspunkt des Balls, sowie den Aufschlagswinkel an.
Falls nein, begründen Sie und nennen Sie eine mögliche Ursache dafür, dass die Flugbahn nicht sinnvoll aus den Daten rekonstruiert werden kann und wie mit den gegebenen Daten eine sinnvolle Flugbahn ermittelt werden könnte. *(3 Punkte)*

Sie können die folgende Teilaufgabe ohne die Ergebnisse vorheriger Teilaufgaben lösen.

Für ein Messgerät wurden, abhängig von der Messgröße u und der Störgröße z, folgende Messwerte ermittelt:

$y(u;\, z)$	$u_0 = 1$	$u_1 = 2$	$u_2 = 4$	$u_3 = 5$
$z_0 = 1$	5	6	8	11
$z_1 = 3$	8	9	11	14
$z_2 = 4$	9,5	12	20	21
$z_3 = 6$	10	14	21	25

Tabelle 1: Aufgezeichnete Messwertpaare

b) Bestimmen Sie $y(2{,}7;\, 3{,}4)$ durch bilineare Interpolation. *(3 Punkte)*

Sie können die folgende Teilaufgabe ohne die Ergebnisse vorheriger Teilaufgaben lösen.

Sie wollen nun die Kennlinie über dem gesamten Messbereich $u \in [1;\, 5]$, $z \in [1;\, 6]$ durch ein zweidimensionales Polynom der Form

$$y(u;\, z) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} a_{ij} \cdot u^i \cdot z^j$$

interpolieren.

c) Geben Sie die Formel zur Bestimmung der Koeffizienten a_{ij} in Matrixschreibweise an und setzen Sie die entsprechenden Werte aus Tabelle 1 ein. Sie brauchen die Gleichung **nicht** zu lösen. *(3 Punkte)*

Sie können die folgende Teilaufgabe ohne die Ergebnisse vorheriger Teilaufgaben lösen.

d) Es wird nun angenommen, die Störgröße sei konstant $z_a = 3$. Bestimmen Sie die Kennlinie $y(u;\, z = z_a)$ im Intervall $u \in [2;\, 4]$ durch Spline-Interpolation. Geben Sie ihr Ergebnis in der Form $\tilde{y}(u) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot u^i$ an. *(5 Punkte)*

Sie können die folgende Teilaufgabe ohne die Ergebnisse vorheriger Teilaufgaben lösen.

Sie wollen die Parameter α und A eines Verstärkers mit der Kennlinie $y(x) = A \cdot \mathrm{e}^{\alpha x}$ bestimmen. Leider steht Ihnen nur eine schlecht stabilisierte Signalquelle zur Verfügung, so dass dem von Ihnen eingestellten Wert u stets ein mittelwertfreies Rauschen n additiv überlagert ist. Damit haben Sie folgende Messwertreihe aufgenommen:

u	10	20	30	40	50	60
y	0,006	0,016	0,038	0,129	0,277	0,788

e) Bestimmen Sie die Parameter α und A mit Hilfe eines Least-Squares-Schätzers. *(5 Punkte)*

Aufgabe 2: Stationäres Verhalten von Messsystemen (23 Punkte)

Hinweis: Nehmen Sie in der ganzen Aufgabe an, dass u die Einheit mm hat.

Gegeben sei ein Wegaufnehmer, dessen temperaturabhängige Kennlinie für $u \in [0\,\mathrm{mm};\, 3\,\mathrm{mm}]$ in sehr guter Näherung durch

$$y(u;\, \Delta T) = -0{,}5u^3 + 2{,}5(1 + \Delta T^2)u^2 + \Delta T \qquad (1)$$

($\Delta T = T - T_0$) beschrieben werden kann.

a) Geben Sie den superponierenden und den deformierenden Fehler an, wenn Sie die Temperatur als Störgröße auffassen. *(2 Punkte)*

Sie können die folgende Teilaufgabe ohne die Ergebnisse vorheriger Teilaufgaben lösen.

Um sowohl den superponierenden als auch den deformierenden Kennlinienfehler zu verringern, werden zwei Wegaufnehmer gemäß Bild 1 verbaut. Die Längen u_1 und u_2 sind die gemessenen Wege der Wegaufnehmer, wenn $u = 0$. Der Differenzverstärker hat hierbei die Kennlinie $y_a = V \cdot (y_1 - y_2)$.

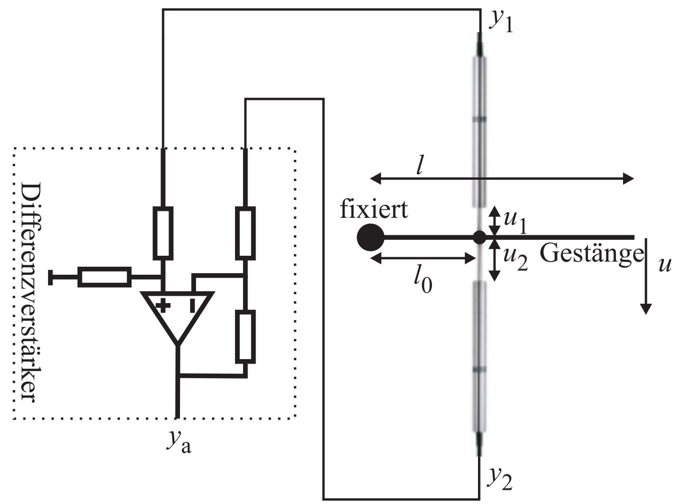


Bild 1: Verschaltung zweier Wegaufnehmer.

b) Welche zwei Methoden zur Reduktion des Kennlinienfehlers wurden hier kombiniert? Beschreiben Sie den Zweck der einzelnen Bauteile und ihrer Anordnung.
Hinweis: Beachten Sie die Wirkung des Gestänges auf die Eingangswerte der beiden Wegaufnehmer. *(4 Punkte)*

Sie können die folgenden Teilaufgaben ohne die Ergebnisse vorheriger Teilaufgaben lösen.

c) Bestimmen Sie die Befestigungsposition l_0 der beiden Sensoren an dem Gestänge der Gesamtlänge l so, dass u mit dem Faktor $\frac{1}{V}$ auf die Wegaufnehmer wirkt. *(1 Punkt)*

d) Bestimmen Sie die Befestigungspositionen u_1 und u_2 der beiden Sensoren quer zum Gestänge so, dass die Kennlinie der Wegaufnehmer um den beliebigen Arbeitspunkt u_0 herum linearisiert wird. *(2 Punkte)*

e) Bestimmen Sie mit diesen Einstellungen die Gesamtkennlinie $y_a(u_0;\, \Delta u;\, \Delta T)$ und die Fehlerkennlinie $e_a(u_0;\, \Delta u;\, \Delta T)$.
Hinweis: Setzen Sie $y(u;\, \Delta T)$ aus (1) ein. Es gilt: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ *(3 Punkte)*

f) Zeigen Sie die temperaturstabilisierende Wirkung der Schaltung, indem Sie die Empfindlichkeiten von y_a und y bezüglich Δu und ΔT jeweils im Arbeitspunkt $u = u_0$ vergleichen. *(4 Punkte)*

g) Bestimmen Sie den relativen Kennlinienfehler am Messanfang und -ende, der entsteht, wenn Sie anstatt der tatsächlichen Kennlinie y_a der Gesamtanordnung deren Taylorreihenentwicklung $y_{a,T}$ 1. Ordnung um den Punkt u_0 verwenden und der Messbereich $u \in [0{,}5u_0;\, 1{,}5u_0]$ gewählt wird. Nehmen Sie an, dass $\Delta T = 0, V = 100$ und $u_0 = \frac{5}{3}$ gilt. *(3 Punkte)*

Sie können die folgende Teilaufgabe ohne die Ergebnisse vorheriger Teilaufgaben lösen.

h) Um den Arbeitspunkt der Gesamtschaltung festzulegen, soll ein Messbereich der Breite 1 mm aus der Kennlinie (1) eines einzelnen Wegaufnehmers ausgewählt werden, in dem $y(u;\, \Delta T)$ unter Normalbedingungen möglichst steil und möglichst „linear“ ist. Geben Sie dessen untere und obere Grenze u_a bzw. u_e sowie den daraus resultierenden Arbeitspunkt $u_0 = \frac{u_e + u_a}{2}$ an.
Hinweis: Überprüfen Sie zunächst, ob ein Wendepunkt im Messbereich vorliegt. *(4 Punkte)*

Aufgabe 3: Zufällige Messfehler und Statistik (19 Punkte)

Gegeben seien zwei Zufallsgrößen x und y. In Bild 2 sind vier mögliche Verbunddichten der Zufallsgrößen dargestellt.

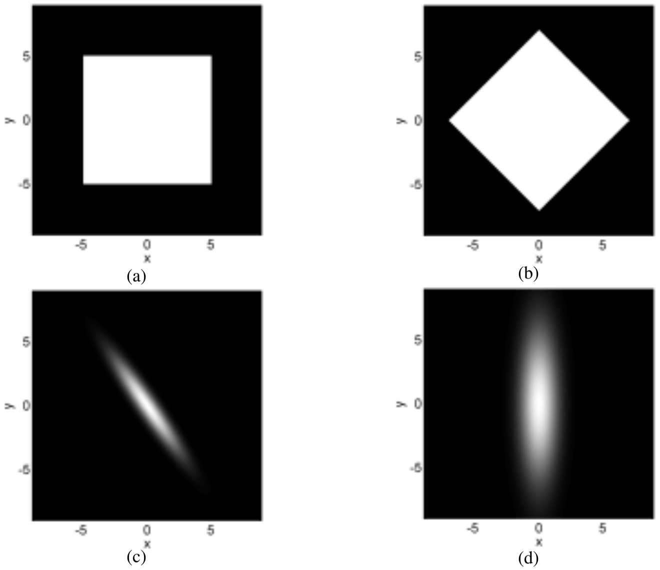


Bild 2: Verbunddichten $f_{xy}(x,y)$. Weiß bedeutet hohe Funktionswerte, schwarz bedeutet $f_{xy}(x,y) = 0$.

a) Geben Sie für alle dargestellten Verbunddichten an, ob x und y statistisch unabhängig sind und falls ja, skizzieren Sie die Randdichten $f_x(x)$ und $f_y(y)$ möglichst genau. *(4 Punkte)*

Sie könne die folgenden Teilaufgabe ohne die Ergebnisse vorheriger Teilaufgaben lösen.

In der unten stehenden Tabelle finden Sie die Verteilung der quantisierten Noten N_q einer Klausur.

Notenintervall	$[-\infty;\ 2{,}0)$	$[2{,}0;\ 3{,}0)$	$[3{,}0;\ 4{,}0)$	$[4{,}0;\ 5{,}0)$	$[5{,}0;\ \infty)$	
quantisierte Note N_q	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	
absolute Häufigkeit n_ν	28	74	76	24	11	$n = \sum n_\nu = 213$

b) Überprüfen Sie, ab welchem Signifikanzniveau α die Hypothese, dass die Noten N normalverteilt sind, abgelehnt wird. Nehmen Sie an, dass die eigentlichen Noten kontinuierlich sind und dass das Quantisierungstheorem eingehalten wurde.
Hinweis: Beachten Sie die Wertetabelle der kumulierten Standard-Normalverteilung in Tabelle 2. *(7 Punkte)*

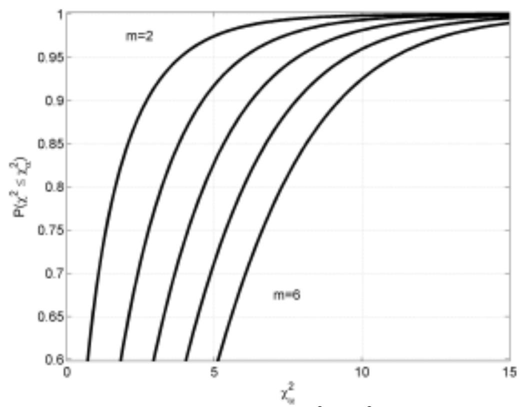


Bild 3: Wahrscheinlichkeit, dass $\chi^2 \le \chi^2_\alpha$ bei m Freiheitsgraden.

Sie können die folgende Teilaufgabe ohne die Ergebnisse vorheriger Teilaufgaben lösen.

Ein Verstärker mit der Kennlinie $y(u) = A \cdot e^{\alpha u}$ wird mit einem zufälligen Signal u mit der Amplitudendichte

$$f_u(u) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{für} \quad a \le u < b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

beschaltet. Es gelte $A = 2$, $\alpha = 0{,}5$, $a = 1$ und $b = 5$.

c) Bestimmen und skizzieren Sie die Amplitudendichte $f_y(y)$ des Ausgangssignals y und ermitteln Sie daraus dessen Varianz σ_y^2. *(5 Punkte)*

Sie können die folgenden Teilaufgaben ohne die Ergebnisse vorheriger Teilaufgaben lösen.

d) Schätzen Sie nun die Varianz $\hat{\sigma}_y^2$ des Ausgangssignals y mit Hilfe des Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetzes und geben Sie den relativen Fehler, der dadurch entsteht, an.
Hinweis: Sollten Sie die vorherige Teilaufgabe nicht gelöst haben, nehmen Sie an, dass $\sigma_y^2 = 36$ gilt. *(3 Punkte)*

x \ Δx	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5754
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7258	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7518	0,7549
0,7	0,7580	0,7612	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7996	0,8023	0,8051	0,8079	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8316	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9178
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9430	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9485	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9700	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9762	0,9767
2,0	0,9773	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

Tabelle 2: Werte der kumulierten Normalverteilung $\Phi(x+\Delta x) = \int_{-\infty}^{x+\Delta x} \mathcal{N}(0,1)\mathrm{d}x$.

Aufgabe 4: Korrelation (18 Punkte)

a) Berechnen Sie die Kreuzkorrelationsfunktion $r_{xy}(\tau)$ für die beiden folgenden Leistungssignale:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_0(t+kT_0) \qquad \text{mit} \qquad x_0(t) = \begin{cases} \frac{2}{T_0}t, & \text{für} \quad |t| \le \frac{T_0}{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$y(t) = \sin\left(2\pi \frac{t}{T_0}\right).$$

(6 Punkte)

Sie können die folgende Teilaufgabe ohne die Ergebnisse vorheriger Teilaufgaben lösen.

b) Beschreiben Sie stichpunktartig, wie eine optische Computer-Maus, die mit einem bildgebendem Sensor ausgestattet ist, ihre Bewegung mittels Korrelationsmesstechnik erkennen kann. *(3 Punkte)*

Sie können die folgende Teilaufgabe ohne die Ergebnisse vorheriger Teilaufgaben lösen.

c) Zeigen Sie, dass die Kreuzkorrelation zweier gemeinsam stationärer Signale $x(t), y(t)$ durch das Hinzufügen von mittelwertfreiem Rauschen $n(t)$ zu einem der Signale nicht beeinflusst wird.
Hinweis: Gehen Sie davon aus, $n(t)$ sei weder mit $x(t)$ noch mit $y(t)$ korreliert. *(2 Punkte)*

Sie können die folgende Teilaufgabe ohne die Ergebnisse vorheriger Teilaufgaben lösen.

d) Die beiden Signale in Bild 7 werden miteinander korreliert. In Bild 8 sind hypothetische Kreuzkorrelationsfunktionen dargestellt. Geben Sie an, welche davon die korrekte ist. Geben Sie an, ob es sich um $r_{xy}(\tau)$ oder $r_{yx}(\tau)$ handelt. Geben Sie für jede der restlichen Alternativen jeweils mindestens einen Grund an, warum es sich nicht um die gesuchte Korrelationsfunktion handeln kann. *(4 Punkte)*

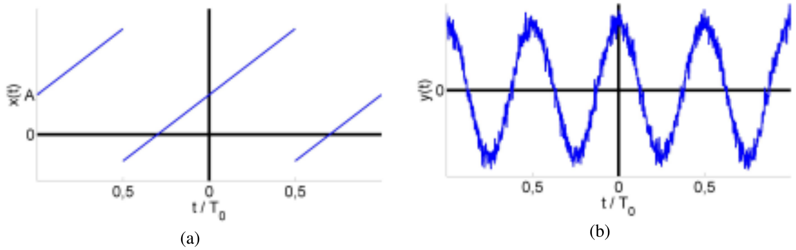


Bild 7: Signale $x(t)$ und $y(t)$ im Zeitbereich.

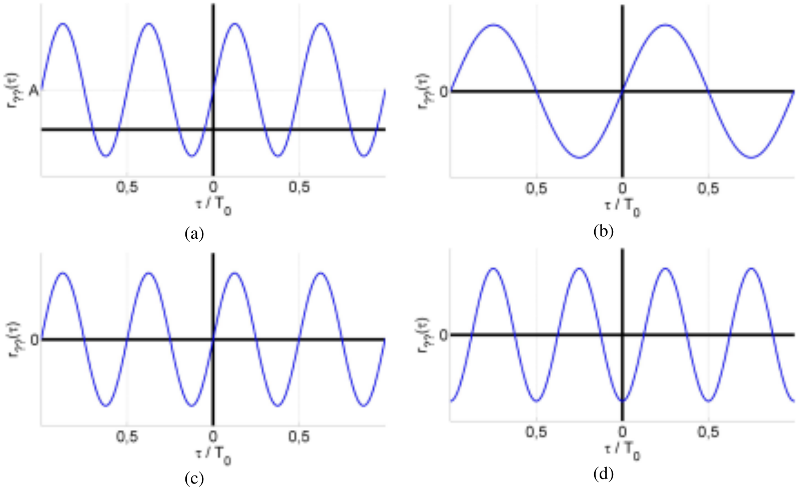


Bild 8: Hypothetische Kreuzkorrelationsfunktionen der Signale aus Bild 7.

Sie können die folgende Teilaufgabe ohne die Ergebnisse vorheriger Teilaufgaben lösen.

e) Bild 9 (b) zeigt den Amplitudengang eines Wiener-Filters. Ordnen Sie den Größen $S_{\mathrm{uu}}(f)$, $S_{\mathrm{nn}}(f)$ und $|G(f)|$ die Kurven $x_1(f), x_2(f)$ und $x_3(f)$ aus Bild 9 (a) zu und begründen Sie ihre Zuordnung. *(3 Punkte)*

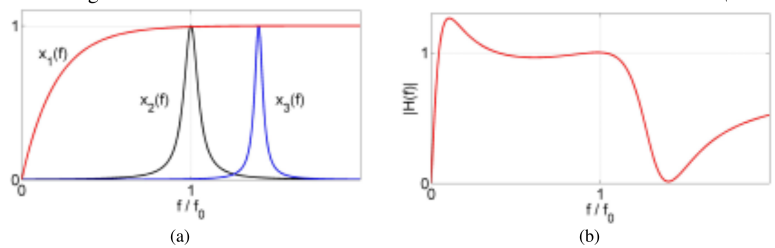


Bild 9: Verläufe der Größen $S_{\mathrm{uu}}(f)$, $S_{\mathrm{nn}}(f)$ und $|G(f)|$ sowie daraus resultierender Amplitudengang des Wiener-Filters.

Aufgabe 5: Quantisierung und Abtastung (21 Punkte)

Sie wollen ein Signal, dessen Amplitudendichte $f_{\mathrm{x}}(x)$ der Standardnormalverteilung entspricht, quantisieren.

a) Wie groß müssen Sie die Breite q einer Quantisierungsstufe wählen, wenn der Betrag des Quantisierungsfehlers $\mathrm{e_q}$ in mindestens 90 % aller Fälle $\leq 0{,}01$ sein soll?
Hinweis: Nehmen Sie an, das Quantisierungstheorem sei erfüllt. *(3 Punkte)*

b) Prüfen Sie, ab welchem q das Quantisierungstheorem für dieses Signal näherungsweise erfüllt ist. Nehmen Sie an, das Theorem sei näherungsweise erfüllt, wenn

$$|\Phi_{\mathrm{x}}(f)| \leq 0{,}01 \cdot \max|\Phi_{\mathrm{x}}(f)|, \qquad \forall f \geq \frac{1}{2q}$$

gilt, wobei $\Phi_{\mathrm{x}}(f)$ die charakteristische Funktion des Signals $\mathrm{x}(t)$ ist. *(3 Punkte)*

Sie können die folgenden Teilaufgaben ohne die Ergebnisse vorheriger Teilaufgaben lösen.

Gegeben sei ein Signal $\mathrm{x}(t)$ mit der AKF : $\quad r_{\mathrm{xx}}(\tau) = A^2\pi \mathrm{e}^{-2\pi|\tau|} \cdot \cos(2\pi f_0 \tau)$.

c) Zeigen Sie, dass die mittlere Frequenz $\overline{f}$ dieses Signals im Sinne von

$$\overline{f} = \int_0^\infty f \cdot \frac{S_{\mathrm{xx}}(f)}{\int_0^\infty S_{\mathrm{xx}}(f')\mathrm{d}f'}\mathrm{d}f$$

nicht existiert. *(5 Punkte)*

Es soll nun folgendes deterministisches Signal als Dithersignal für $\mathrm{x}(t)$ verwendet werden:

$$d(t) = -A + \left[\left(\tfrac{2A}{T} \cdot t + A\right) \mod 2A\right].$$

d) Welches Problem tritt hierbei auf, wenn $T = \frac{1}{f_0+0{,}5}$ gewählt wird?
Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass $f_0 \gg 1$ gilt. *(2 Punkte)*

Sie können die folgende Teilaufgabe ohne die Ergebnisse vorheriger Teilaufgaben lösen.

e) Erläutern Sie kurz, wie Dithering funktioniert. Wie ist es damit möglich, die Anzahl an Quantisierungsstufen, die nötig ist, um das Quantisierungstheorem zu erfüllen, zu reduzieren? *(3 Punkte)*

Sie können die folgende Teilaufgabe ohne die Ergebnisse vorheriger Teilaufgaben lösen.

Bei der zeitlichen Abtastung eines Signals $x(t)$ treten Aliasing-Fehler auf, welche mit einem Tiefpass-Filter verringert werden sollen. Die Übertragungsfunktion des Filters werde durch folgende Formel angenähert:

$$|G(f)|^2 = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad |f| \leq f_{\mathrm{g}} \\ \left(\frac{f_{\mathrm{g}}}{f}\right)^{10} & \text{für} \quad |f| > f_{\mathrm{g}}. \end{cases}$$

f) Bestimmen Sie die Grenzfrequenz f_{g} des Filters in Abhängigkeit der Abtastfrequenz f_{A} so, dass sich ein SNR von 40 dB bezüglich Nutzsignal und Aliasing-Fehler einstellt.
Hinweis: Nehmen Sie an, $S_{\mathrm{xx}}(f)$ sei konstant bezüglich f. *(5 Punkte)*

Lösung

Aufgabe 1

a) Die Interpolationsfunktion und Ihre Ableitungen haben die Form

$$\begin{aligned} \tilde{h} &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ \tilde{h}' &= 3ax^2 + 2bx + c \\ \tilde{h}'' &= 6ax + 2b \,. \end{aligned}$$

Für einen Extremwert muss $\tilde{h}' = 0$ gelten, was auf

$$x_{1/2} = -\frac{b}{3a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 3ac}{9a^2}}$$

führt. Die Werte aus der Aufgabenstellung liefern

$$x_{1/2} = 121{,}2121 \pm \sqrt{\frac{9{,}475 \cdot 10^{-5}}{2{,}7225 \cdot 10^{-8}}} = 121{,}2121 \pm 58{,}9937$$

$$x_1 = 62{,}2184 \qquad \tilde{h}''(x_1) = -0{,}0195 < 0 \qquad \tilde{h}(x_1) = 50{,}9285$$
$$x_2 = 180{,}2058 \qquad \tilde{h}''(x_2) = 0{,}0195 > 0 \qquad \tilde{h}(x_2) = 5{,}7596\,.$$

Somit ist $\tilde{h}(62{,}2184)$ ein Maximum und $\tilde{h}(180{,}2058) = 5{,}7596$ ein Minimum. Die Flughbahn würde also nach dem Abwurf den Boden nicht mehr erreichen, was physikalisch nicht sinnvoll ist. Dies liegt daran, dass die interpolierte Flugbahn exakt durch die mit Messfehlern behafteten Messpunkte geht. Da aus physikalischen Überlegungen klar ist, dass die Flugbahn eine Parabelform hat, könnte man hier auch einen Least-Squares-Schätzer mit passendem Modell ansetzen, um tatsächlich eine parabelförmige Flugbahn, die auch sicher den Boden wieder erreicht, zu erhalten.

b) Der Ansatz zur bilinearen Interpolation lautet:

$$\tilde{y}(\Delta_{n,i}u;\ \Delta_{n,j}z) = a_{00} + a_{01} \cdot \Delta_{n,j}z + a_{10} \cdot \Delta_{n,i}u + a_{11} \cdot \Delta_{n,i}u \cdot \Delta_{n,j}z.$$

Der zu interpolierende Punkt liegt im Intervall $u \in [u_1;\ u_2]$, $z \in [z_1;\ z_2]$, somit sind die normierten Eingangsgrößen

$$\Delta_{n,1}u = \frac{u - u_1}{u_2 - u_1} = 0{,}35 \qquad \Delta_{n,1}z = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = 0{,}4\,.$$

Die Koeffizienten a_{mn} bestimmt man zu

$$a_{00} = y(u_1;\ z_1) = 9$$
$$a_{01} = y(u_1;\ z_2) - y(u_1;\ z_1) = 3$$
$$a_{10} = y(u_2;\ z_1) - y(u_1;\ z_1) = 2$$
$$a_{11} = y(u_2;\ z_2) - y(u_2;\ z_1) - y(u_1;\ z_2) + y(u_1;\ z_1) = 6.$$

Einsetzen liefert $\tilde{y}(2{,}7;\ 3{,}4) = 9 + 3 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}35 + 6 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}4 = 11{,}74\,.$

c) Der Ansatz $y_{pq} = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} a_{ij} \cdot u_p^i \cdot z_q^j$ lässt sich in Matrixform schreiben als:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_{0,0} & \cdots & y_{0,M-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{N-1,0} & \cdots & y_{N-1,M-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}} =$$
$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_0^0 & \cdots & u_0^{N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{N-1}^0 & \cdots & u_{N-1}^{N-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{0,0} & \cdots & a_{0,M-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N-1,0} & \cdots & a_{N-1,M-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} z_0^0 & \cdots & z_{M-1}^0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_0^{M-1} & \cdots & z_{M-1}^{M-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}}$$

Woraus folgt (wenn $N = M$), dass $\mathbf{A} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{Y}\left(\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$. Einsetzen der Messwerte liefert:

$$\begin{bmatrix} a_{0,0} & \cdots & a_{0,M-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N-1,0} & \cdots & a_{N-1,M-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 & 8 & 9{,}5 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 14 \\ 8 & 11 & 20 & 21 \\ 11 & 14 & 21 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 9 & 16 & 36 \\ 1 & 27 & 64 & 216 \end{bmatrix}^{-1}.$$

d) Es soll eine Spline-Interpolation mit den Werten aus der zweiten Zeile von Tabelle 1 durchgeführt werden. Hierzu müssen wir die zweiten Ableitungen in den Stützstellen bestimmen, wobei $y_0'' = y_3'' = 0$ per Definition.

$$\begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{6}{h_1}(y_2 - y_1) - \frac{6}{h_0}(y_1 - y_0) \\ \frac{6}{h_2}(y_3 - y_2) - \frac{6}{h_1}(y_2 - y_1) \end{bmatrix}.$$

Hierbei sind

$$h_0 = 1 \qquad h_1 = 2 \qquad h_2 = 1$$
$$y_0 = 8 \qquad y_1 = 9 \qquad y_2 = 11 \qquad y_3 = 14$$

und somit

$$\begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 6 - 6 \\ 18 - 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{32} \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}75 \\ 2{,}25 \end{bmatrix}.$$

Da wir nur den Teil der Funktion im Intervall $u \in [2;\ 4]$ benötigen, müssen wir nur die Koeffizienten des Splines zu $i = 1$ bestimmen:

$$a_1 = \frac{1}{6h_1}(y_2'' - y_1'') = \frac{1}{12}(2{,}25 + 0{,}75) = 0{,}25$$
$$b_1 = \frac{1}{2}y_1'' = -0{,}375$$
$$c_1 = \frac{1}{h_1}(y_2 - y_1) - \frac{h_1}{6}(y_2'' + 2y_1'') = 1 - \frac{1}{3} \cdot (0{,}75) = 0{,}75$$
$$d_1 = y_1 = 9\,.$$

Für die in der Aufgabenstellung geforderte Form, müssen wir das berechnete Polynom noch umformen:

$$\begin{aligned} \tilde{y}(u) &= 0{,}25(u-2)^3 - 0{,}375(u-2)^2 + 0{,}75(u-2) + 9 \\ = \quad & 0{,}25 \cdot (u^3 \quad -6u^2 \quad +12u \quad -8) \\ & -0{,}375 \cdot (\quad u^2 \quad -4u \quad +4) \\ & +0{,}75 \cdot (\quad u \quad -2) \\ & +9 \cdot (\quad 1) \\ &= 0{,}25u^3 - 1{,}875u^2 + 5{,}25u + 4\,. \end{aligned}$$

e) Aus der Aufgabenstellung geht hervor, dass die Messwerte y über folgende nichtlineare Gleichung mit den eingestellten Werten u zusammenhängen:

$$y = A \cdot \mathrm{e}^{\alpha \cdot (u + \mathtt{n})}\,.$$

Um den Least-Squares-Schätzer anwenden zu können, gehen wir daher auf die Pseudomessungen $\tilde{y} = \ln y$ über, um einen linearen Zusammenhang zu erhalten:

$$\tilde{y} = \ln y = \ln A + \alpha \cdot (u + \mathtt{n}) = \ln A + \alpha u + \alpha \mathtt{n}\,.$$

u	10	20	30	40	50	60
y	0,006	0,016	0,038	0,129	0,277	0,788
$\tilde{y}$	−5,1160	−4,1352	−3,2702	−2,0479	−1,2837	−0,2383

Mit den Größen $\tilde{\mathtt{n}} = \alpha \cdot \mathtt{n}$ und $\tilde{A} = \ln A$ erhalten wir

$$\tilde{y} = \tilde{A} + \alpha u + \tilde{\mathtt{n}}\,,$$

woraufhin wir den Least-Squares-Schätzer anwenden können, da die Basisfunktionen $\phi_1(u) = 1$ und $\phi_2(u) = u$ linear eingehen und $\mathtt{n}$ und somit auch $\tilde{\mathtt{n}}$ mittelwertfrei ist.

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \alpha \end{bmatrix} = \left(\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\right)^{-1}\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{y}} = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{1}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{u} \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{1}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \cdot \tilde{\mathbf{y}}$$
$$= \begin{bmatrix} N & \sum_{i=0}^{N-1} u_i \\ \sum_{i=0}^{N-1} u_i & \sum_{i=0}^{N-1} u_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{N-1} \ln y_i \\ \sum_{i=0}^{N-1} u_i \cdot \ln y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 210 \\ 210 & 9100 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -16{,}0913 \\ -392{,}3690 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{10500} \begin{bmatrix} 9100 & -210 \\ -210 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -16{,}0913 \\ -392{,}3690 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6{,}0984 \\ 0{,}0976 \end{bmatrix}.$$

Somit sind die gesuchten Parameter $\alpha = 0{,}0976$ und $A = \mathrm{e}^{-6{,}0984} = 2{,}2465 \cdot 10^{-3}$.

Aufgabe 2

a) Die Kennlinie lässt sich darstellen als

$$y(u;\,T) = y(u;\,T_0) + e_{\text{sup}}(\Delta T) + e_{\text{def}}(u;\,\Delta T)\,.$$

Bei $T = T_0$ gilt $\Delta T = T - T_0 = 0$, woraus wir $y(u;\,T_0) = -0{,}5u^3 + 2{,}5u^2$ erhalten. Die Fehlerfunktion ist damit

$$y(u;\,T) - y(u;\,T_0) = e(u;\,\Delta T) = \underbrace{2{,}5u^2\Delta T^2}_{e_{\text{def}}} + \underbrace{\Delta T}_{e_{\text{sup}}}\,.$$

b) Das Gestänge setzt die Auslenkung u um auf die Auslenkung $u \cdot \frac{l_0}{l}$, d. h. es wirkt wie ein Verstärker mit einer Verstärkung < 1.
Durch die Anbringung der Wegaufnehmer erhält Wegaufnehmer 1 den Eingangswert $u_1 + \frac{l_0}{l}u$ und Wegaufnehmer 2 den Eingangswert $u_2 - \frac{l_0}{l}u$, d. h. die Eingangsgröße wirkt gegensinnig auf beide Teilsysteme. Diese Anordnung sorgt dafür, dass die Auslenkung der Wegaufnehmer um bestimmte, durch u_1 und u_2 einstellbare, Arbeitspunkte gering bleibt.
Der Differenzverstärker bildet anschließend die Differenz der Einzelmessungen und verstärkt diese.
Hier wird also die Differenzmethode mit einem „umgebenden" Herabsetzen des Messbereiches kombiniert.

c) $\frac{l_0}{l} \overset{!}{=} \frac{1}{V} \Rightarrow l_0 = \frac{l}{V}$.

d) Damit die Kennlinie um u_0 herum linearisiert wird, muss gelten:

$$u_1 + \frac{1}{V}u = u_1 + \frac{u_0 + \Delta u}{V} = u_1 + \frac{u_0}{V} + \frac{\Delta u}{V} \overset{!}{=} u_0 + \frac{\Delta u}{V} \Rightarrow u_1 = \frac{V-1}{V}u_0$$

$$u_2 - \frac{1}{V}u = u_2 - \frac{u_0 + \Delta u}{V} = u_2 - \frac{u_0}{V} - \frac{\Delta u}{V} \overset{!}{=} u_0 - \frac{\Delta u}{V} \Rightarrow u_2 = \frac{V+1}{V}u_0\,.$$

e)

$$y_{\text{a}}(u_0;\,\Delta u;\,\Delta T) = V \cdot (y_1 - y_2) = V \cdot \left[y\left(u_0 + \frac{\Delta u}{V}\right) - y\left(u_0 - \frac{\Delta u}{V}\right)\right]$$

$$= V \cdot \left[\left(-0{,}5\left(u_0 + \frac{\Delta u}{V}\right)^3 + 2{,}5(1+\Delta T^2)\left(u_0 + \frac{\Delta u}{V}\right)^2 + \Delta T\right) - \left(-0{,}5\left(u_0 - \frac{\Delta u}{V}\right)^3 + 2{,}5(1+\Delta T^2)\left(u_0 - \frac{\Delta u}{V}\right)^2 + \Delta T\right)\right]$$

mit $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ folgt

$$y_{\text{a}}(u_0;\,\Delta u;\,\Delta T) = V \cdot \left[-0{,}5 \cdot 2\left(3u_0^2\frac{\Delta u}{V} + \frac{\Delta u^3}{V^3}\right) + 2{,}5\left(1+\Delta T^2\right) \cdot 2 \cdot 2u_0\frac{\Delta u}{V}\right]$$

$$= \left[10(1+\Delta T^2) - 3u_0\right]u_0\Delta u - \frac{1}{V^2}\Delta u^3\,.$$

Mit $e_{\text{a}}(u_0;\,\Delta u;\,\Delta T) = y_{\text{a}}(u_0;\,\Delta u;\,\Delta T) - y_{\text{a}}(u_0;\,\Delta u;\,0)$ folgt

$$e_{\text{a}}(u_0;\,\Delta u;\,\Delta T) = 2{,}5\Delta T^2 \cdot V \cdot 4\frac{u_0\Delta u}{V} = 10u_0\Delta u\Delta T^2$$

f) Die Empfindlichkeiten im Arbeitspunkt sind:

$$\left.\frac{\partial y}{\partial \Delta T}\right|_{u=u_0 \Leftrightarrow \Delta u=0} = 1 + 5(u_0+\Delta u)^2\Delta T\big|_{\Delta u=0} = 1 + 5u_0^2\Delta T$$

$$\left.\frac{\partial y_{\text{a}}}{\partial \Delta T}\right|_{u=u_0 \Leftrightarrow \Delta u=0} = 20u_0\Delta u\Delta T\big|_{\Delta u=0} = 0$$

$$\left.\frac{\partial y}{\partial \Delta u}\right|_{u=u_0 \Leftrightarrow \Delta u=0} = -1{,}5(u_0+\Delta u)^2 + 5(1+\Delta T^2)(u_0+\Delta u)\big|_{\Delta u=0} = 5(1+\Delta T^2)u_0 - 1{,}5u_0^2$$

$$\left.\frac{\partial y_{\text{a}}}{\partial \Delta u}\right|_{u=u_0 \Leftrightarrow \Delta u=0} = 10(1+\Delta T^2)u_0 - 3u_0^2 = 2 \cdot \left.\frac{\partial y}{\partial \Delta u}\right|_{u=u_0}\,.$$

Im Arbeitspunkt ist die linearisierte Schaltung weniger von der Temperatur abhängig als ein einzelner Wegaufnehmer, wobei (wie erwartet) die Empfindlichkeit bezüglich der Eingangsgröße verdoppelt wurde.

g) Die Taylorreihenentwicklung 1. Ordnung ist

$$y_{\text{a,T}} = y_{\text{a}}\big|_{\Delta u=0} + \left.\frac{\partial y_{\text{a}}}{\partial \Delta u}\right|_{\Delta u=0} \cdot \Delta u\,,$$

wobei $y_{\text{a}}\big|_{\Delta u=0} = 0$ aufgrund des Differenzverfahrens und $\left.\frac{\partial y_{\text{a}}}{\partial \Delta u}\right|_{\Delta u=0}$ bereits in Teilaufgabe **f)** berechnet wurde.
Der relative Kennlinienfehler ist dann:

$$F_{\text{r}}(\Delta u) = \frac{y_{\text{a,T}} - y_{\text{a}}}{y_{\text{a}}} = \frac{\frac{\Delta u^3}{V^2}}{y_{\text{a}}(u_0;\,\Delta u;\,\Delta T)} = \left.\frac{\frac{\Delta u^3}{V^2}}{(10(1+\Delta T^2) - 3u_0)u_0\Delta u - \frac{\Delta u^3}{V^2}}\right|_{\Delta T=0;V=100;u_0=\frac{5}{3}}$$

$$= \frac{1}{\frac{25 \cdot 10^4}{3 \cdot \Delta u^2} - 1}\,.$$

Am Messanfang und -ende ergibt sich somit $F_{\text{r}}(\Delta u = -0{,}5u_0) = F_{\text{r}}(\Delta u = 0{,}5u_0) = 8{,}3334 \cdot 10^{-6}$.

h) Überprüfen ob Wendepunkt im Messbereich:

$$y'(u) = -1{,}5u^2 + 5(1+\Delta T^2)u$$

$$y''(u) = -3u + 5(1+\Delta T^2) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow u = \frac{5}{3}(1+\Delta T^2)$$

$$y'''(u) = -3 \neq 0\,.$$

Innerhalb des Messbereiches liegt also ein Wendepunkt bei $u = \frac{5}{3}$ vor ($\Delta T = 0$ bei Normalbedingungen). Kriterium I. aus dem Messtechnik-Buch (Gleichung 3.40) ist also anwendbar:

$$S(u_{\text{a}}+d) - S(u_{\text{a}}) = y'(u_{\text{a}}+1) - y'(u_{\text{a}})$$

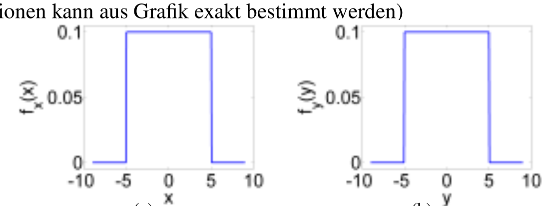
$$= -1{,}5(u_{\text{a}}+1)^2 + 5(u_{\text{a}}+1) - (-1{,}5u_{\text{a}}^2 + 5u_{\text{a}}) = -3u_{\text{a}} - 1{,}5 + 5 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow u_{\text{a}} = \frac{7}{6}\,.$$

Es werden somit $u_{\text{a}} = \frac{7}{6}$, $u_{\text{e}} = \frac{13}{6}$ und $u_0 = \frac{5}{3}$ gewählt.

Aufgabe 3

a) (a) Die Verbunddichte kann offensichtlich als Produkt der beiden Gleichverteilungen in Bild 4 dargestellt werden, somit sind x und y statistisch unabhängig voneinander. (Höhe der Funktionen kann aus Grafik exakt bestimmt werden)

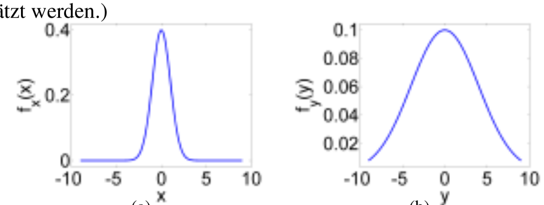


(a) (b)
Bild 4: Randdichten $f_{\text{x}}(x)$ und $f_{\text{y}}(y)$.

(b) Die Verbunddichte kann nicht in das Produkt zweier Randdichten zerlegt werden, somit sind x und y statistisch abhängig voneinander.

(c) Die Verbunddichte kann nicht in das Produkt zweier Randdichten zerlegt werden, somit sind x und y statistisch abhängig voneinander.

(d) Die Verbunddichte kann in das Produkt zweier Normalverteilungen zerlegt werden, somit sind x und y statistisch unabhängig voneinander. Die tatsächlichen Randdichten sind in Bild 5 dargestellt. (Mittelwerte können aus Grafik exakt bestimmt, Varianzen grob abgeschätzt werden.)



(a) (b)
Bild 5: Randdichten $f_{\text{x}}(x)$ und $f_{\text{y}}(y)$.

b) Um zu überprüfen, ob die Noten $\mathtt{N}$ normalverteilt sind, wird ein χ^2-Test durchgeführt. Da die Parameter μ und σ der vermuteten Normalverteilung nicht bekannt sind, müssen diese aus den quantisierten Noten $\mathtt{N}_q$ geschätzt werden. Dies ist möglich, da das Quantisierungstheorem laut Aufgabenstellung eingehalten wurde, so dass $\mu = \mu_q$ und $\sigma^2 = \sigma_q^2 - \frac{q^2}{12}$ (vgl. MT-Buch „Quantisierungstheorem, ff.“). Wir schätzen also diese Kenngrößen:

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_q = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{4} N_{q,i} \cdot n_{v,i} = 3{,}1056$$

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}_q^2 - \frac{q^2}{12} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{4} N_{q,i}^2 \cdot n_{v,i} - \hat{\mu}^2 - \frac{1}{12} = 0{,}9538\,.$$

Wir wollen also die Hypothese $H_0 : f_{\mathtt{N}}(x) = \mathscr{N}(\mu = \hat{\mu}, \sigma^2 = \hat{\sigma}^2)$ überprüfen.
Die Klasseneinteilung ist bereits in der Aufgabenstellung gegeben, und alle Klassen sind ausreichend „bevölkert“.
Für den χ^2-Test benötigen wir noch die Klassenwahrscheinlichkeiten p_i. Hierzu unterziehen wir die Klassengrenzen der Transformation $x' = \frac{x-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}$ und können die p_i dann mit Hilfe der gegebenen Tabelle für die Standardnormaverteilung bestimmen (wobei $\Phi(-x') = 1 - \Phi(x')$):

Grenze x	2,0	3,0	4,0	5,0
transformierte Grenze $x' = \frac{x-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}$	$-1{,}1321$	$-0{,}1081$	0,9158	1,9398
Standardnormalverteilung $\Phi(x')$	0,1271	0,4562	0,8212	0,9738

$$p_1 = \Phi(x_1') = 0{,}1271$$
$$p_2 = \Phi(x_2') - \Phi(x_1') = 0{,}3291$$
$$p_3 = \Phi(x_3') - \Phi(x_2') = 0{,}3650$$
$$p_4 = \Phi(x_4') - \Phi(x_3') = 0{,}1526$$
$$p_5 = 1 - \Phi(x_4') = 0{,}0262$$

Klasse	$[-\infty;\, 2{,}0)$	$[2{,}0;\, 3{,}0)$	$[3{,}0;\, 4{,}0)$	$[4{,}0;\, 5{,}0)$	$[5{,}0;\, \infty)$
$\frac{(n_{v,i}-np_i)^2}{np_i}$	0,0318	0,2172	0,0392	2,2248	5,2629

Nun können wir die Prüfgröße χ^2 bestimmen: $\chi^2 = \sum_{i=0}^{4} \frac{(n_{v,i}-np_i)^2}{np_i} = 7{,}7759$. Da wir zwei Parameter aus der Stichprobe selbst bestimmt haben, müssen wir die Statistik der χ^2-Verteilung mit $m = k-2-1 = 2$ Freiheitsgraden aus Bild 3 verwenden und erkennen, dass bis zu einem Signifikanzniveau von $a \approx 0{,}02$ die Hypothese, dass die Noten normalverteilt sind, akzeptiert wird.

c)

$$\mathrm{y} = g(\mathrm{x}) = A \cdot \mathrm{e}^{\alpha \mathrm{x}} \qquad \frac{\mathrm{d}g(\mathrm{x})}{\mathrm{dx}} = \alpha A \cdot \mathrm{e}^{\alpha \mathrm{x}}$$

$$\mathrm{x} = g^{-1}(\mathrm{y}) = \frac{\ln \mathrm{y} - \ln A}{\alpha}, \qquad \text{für} \qquad \mathrm{y} > 0$$

Mit der Formel zur Transformation von Wahrscheinlichkeitsdichten von Zufallsvariablen folgt:

$$f_{\mathrm{y}}(y) = \left.\frac{f_{\mathrm{x}}(x)}{\left|\frac{\mathrm{d}g(\mathrm{x})}{\mathrm{dx}}\right|}\right|_{\mathrm{x}=g^{-1}(\mathrm{y})} = \frac{1}{b-a} \cdot \left.\frac{1}{|\alpha A \mathrm{e}^{\alpha \mathrm{x}}|}\right|_{\mathrm{x}=\frac{\ln \mathrm{y}-\ln A}{\alpha}} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{\alpha}\frac{1}{y}\,.$$

Zusätzlich müssen wir noch beachten, dass

$$\begin{array}{ccccc} a & \leq & g^{-1}(y) & < & b \\ a & \leq & \dfrac{\ln y - \ln A}{\alpha} & < & b \\ A\mathrm{e}^{\alpha a} & \leq & y & < & A\mathrm{e}^{\alpha b} \\ 3{,}2975 & \leq & y & < & 24{,}3650 \end{array}$$

gelten muss. Somit ist

$$f_{\mathrm{y}}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{1}{y}, & \text{für} \quad 3{,}2975 \leq y < 24{,}3650 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}\,.$$

Die Dichte ist in Bild 6 dargestellt. Der Erwartungswert und damit die Varianz berechnet man zu

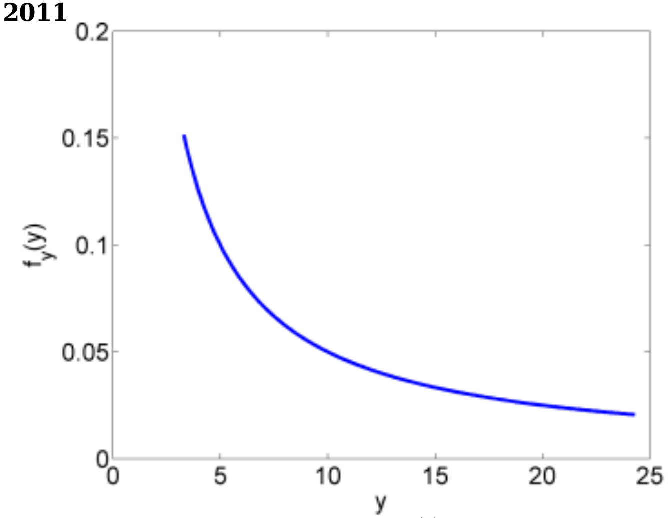


Bild 6: Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{\mathrm{y}}(y)$ der Ausgangsgröße y.

$$\mathrm{E}\{\mathrm{y}\} = \int_{3{,}2975}^{24{,}3650} y \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \frac{1}{2} \cdot 21{,}0675 = 10{,}5338$$

$$\sigma_{\mathrm{y}}^2 = \mathrm{E}\{\mathrm{y}^2\} - \mathrm{E}\{\mathrm{y}\}^2 = \int_{3{,}2975}^{24{,}3650} \frac{y}{2}\mathrm{d}y - 110{,}9609 = \frac{1}{4} \cdot 582{,}7797 - 110{,}9609 = 34{,}73408\,.$$

d) Das Gauß’sche Fehlerfortpflanzungsgesetz führt hier zu

$$\sigma_{\mathrm{y}}^2 \approx \hat{\sigma}_{\mathrm{y}}^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial \mathrm{x}}(\mu_{\mathrm{x}})\right)^2 \cdot \sigma_{\mathrm{x}}^2 = (A\alpha)^2 \cdot \mathrm{e}^{2\alpha\mu_{\mathrm{x}}} \cdot \sigma_{\mathrm{x}}^2\,,$$

wobei

$$\mu_{\mathrm{x}} = 3 \qquad \sigma_{\mathrm{x}}^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{4}{3}$$

gilt. Einsetzen führt auf $\hat{\sigma}_{\mathrm{y}}^2 = \frac{4}{3}\mathrm{e}^3 = 26{,}7807$. Der relative Fehler der Varianz hierbei ist $F_{\mathrm{r}} = \frac{\hat{\sigma}_{\mathrm{y}}^2 - \sigma_{\mathrm{y}}^2}{\sigma_{\mathrm{y}}^2} = -0{,}2290$ (bzw. $-0{,}2561$ mit $\sigma_{\mathrm{y}} = 36$ aus der Aufgabenstellung).

Aufgabe 4

a) Durch die T_0-Periodizität beider Signale ist auch die Autokorrelation T_0-periodisch, d. h. im Folgenden wird $\tau \in [0;\, T_0]$ angenommen. Die Autokorrelation für periodische Zeitsignale kann man wie folgt berechnen:

$$r_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t+\tau)y(t)\mathrm{d}t = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{kT_0}\int_{-k\frac{T_0}{2}}^{k\frac{T_0}{2}} x(t+\tau)y(t)\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{k}{kT_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t+\tau)y(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T_0}\left[\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}-\tau} x_0(t+\tau)y(t)\mathrm{d}t + \int_{\frac{T_0}{2}-\tau}^{\frac{T_0}{2}} x_0(t-T_0+\tau)y(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$= \frac{1}{T_0}\left[\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}-\tau} \frac{2}{T_0}(t+\tau)\sin\left(2\pi\frac{t}{T_0}\right)\mathrm{d}t + \int_{\frac{T_0}{2}-\tau}^{\frac{T_0}{2}} \frac{2}{T_0}(t+\tau-T_0)\sin\left(2\pi\frac{t}{T_0}\right)\mathrm{d}t\right]$$

$$= \frac{2}{T_0^2}\left[\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} t\cdot\sin\left(2\pi\frac{t}{T_0}\right)\mathrm{d}t + \tau\underbrace{\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\sin\left(2\pi\frac{t}{T_0}\right)\mathrm{d}t}_{=0} - T_0\int_{\frac{T_0}{2}-\tau}^{\frac{T_0}{2}}\sin\left(2\pi\frac{t}{T_0}\right)\mathrm{d}t\right]$$

$$= \frac{2}{T_0^2}\left[2\cdot\left(\frac{\sin\left(2\pi\frac{t}{T_0}\right)}{\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2} - \frac{t\cdot\cos\left(2\pi\frac{t}{T_0}\right)}{\frac{2\pi}{T_0}}\right)\Bigg|_0^{\frac{T_0}{2}} - \frac{T_0}{\frac{2\pi}{T_0}}\left(\cos\left(2\pi\frac{\frac{T_0}{2}-\tau}{T_0}\right) - \cos\left(2\pi\frac{\frac{T_0}{2}}{T_0}\right)\right)\right]$$

Mit $\sin(0)=\sin(\pi)=0$, $\cos(0)=1$ und $\cos(\pi)=-1$ erhält man :

$$r_{\mathrm{xy}}(\tau) = \frac{2}{T_0^2}\left[2\cdot\frac{T_0}{2\pi}\frac{T_0}{2} - \frac{T_0^2}{2\pi}\left(\cos\left(\pi-2\pi\frac{\tau}{T_0}\right)+1\right)\right]$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(1+\cos\left(2\pi\frac{\tau}{T_0}\right)-1\right) = \frac{1}{\pi}\cdot\cos\left(2\pi\frac{\tau}{T_0}\right).$$

b)
- Pro Abtastschritt sendet die Maus ein Lichtsignal aus und nimmt dessen Reflektion mit dem bildgebenden Sensor auf.
- Wenn $|v|_{\max}\cdot t_{\mathrm{a}}$ deutlich kleiner ist als die Breite des Erfassungsbereiches des optischen Sensors, und der Untergrund starr, sind die aufgenommenen Bilder zweier Abtastschritte, bis auf eine Verschiebung entsprechend der Bewegung der Maus, nahezu identisch.
- Diese Verschiebung kann als Maximum in der Kreuzkorrelationsfunktion der Bilder erkannt werden.

c) Die Kreuzkorrelation der Signale ohne Rauschen ist:

$$r_{\mathrm{xy}}(\tau) = \mathrm{E}\{\mathrm{x}(t+\tau)\mathrm{y}(t)\}.$$

Durch Hinzuaddieren von $\mathrm{n}(t)$ erhalten wir entweder mit $\mathrm{z}(t)=\mathrm{x}(t)+\mathrm{n}(t)$

$$r_{\mathrm{zy}}(\tau) = \mathrm{E}\{\mathrm{x}(t+\tau)\mathrm{y}(t)+\mathrm{n}(t+\tau)\mathrm{y}(t)\} = r_{\mathrm{xy}}(\tau)+\mathrm{E}\{\mathrm{n}(t+\tau)\}\mathrm{E}\{\mathrm{y}(t)\} = r_{\mathrm{xy}}(\tau),$$

oder mit $\mathrm{z}(t)=\mathrm{y}(t)+\mathrm{n}(t)$

$$r_{\mathrm{xz}}(\tau) = \mathrm{E}\{\mathrm{x}(t+\tau)\mathrm{y}(t)+\mathrm{x}(t+\tau)\mathrm{n}(t)\} = r_{\mathrm{xy}}(\tau)+\mathrm{E}\{\mathrm{x}(t+\tau)\}\mathrm{E}\{\mathrm{n}(t)\} = r_{\mathrm{xy}}(\tau).$$

In beiden Fällen wird die Kreuzkorrelation nicht von $\mathrm{n}(t)$ beeinflusst.

d) Wie in **c)** gezeigt, beeinflusst dass Rauschen in $y(t)$ die KKF nicht, d. h. $y(t)$ kann hier genauso gut als Sinusfunktion betrachtet werden.
- Da $x(t)$ punktsymmetrisch zu $x(0)$ und $y(t)$ gerade ist, ist auch $r_{\mathrm{xy}}(\tau)$ punktsymmetrisch zu $r_{\mathrm{xy}}(0)$, wodurch die Funktion in Bild (d) ausscheidet.
- Die Periodendauer von $y(t)$ beträgt $\frac{T_0}{2}$, somit muss auch die Korrelationsfunktion diese Periodendauer besitzen, womit die Funktion in Bild (b) ausscheidet.
- Wenn man zwei beliebige Signale in Gleich- und Wechselanteil zerlegt, gilt
$$\mathrm{E}\{\mathrm{x}(t+\tau)\mathrm{y}(t)\} = \mathrm{E}\{\tilde{\mathrm{x}}(t+\tau)\tilde{\mathrm{y}}(t)+\mu_{\mathrm{x}}\tilde{\mathrm{y}}(t)+\mu_{\mathrm{y}}\tilde{\mathrm{x}}(t+\tau)+\mu_{\mathrm{x}}\mu_{\mathrm{y}}\} = r_{\tilde{\mathrm{x}}\tilde{\mathrm{y}}}(\tau)+\mu_{\mathrm{x}}\mu_{\mathrm{y}}.$$
Da hier $\mu_y=0$ gilt, hat der Offset von $x(t)$ keinen Einfluss auf die Korrelation, womit die Funktion in Bild (a) ausscheidet.
- Um ein Maximum der Korrelationsfunktion zu erhalten, muss man $y(t)$ gerade um $\frac{T_0}{8}$ nach links verschieben, d. h. $r_{yx}(\tau)$ hat bei $\tau=\frac{T_0}{8}$ ein Maximum und $r_{xy}(\tau)$ bei $\tau=-\frac{T_0}{8}$. Somit handelt es sich bei Bild (c) um $r_{yx}(\tau)$.

e) Das Wiener-Filter hat den Amplitudengang :

$$|H(f)| = \frac{1}{|G(f)|}\frac{|G(f)|^2}{|G(f)|^2+\frac{S_{\mathrm{nn}}(f)}{S_{\mathrm{uu}}(f)}}.$$

- An der Stelle des Maximums von $x_3(f)$ hat $|H(f)|$ ein Minimum, dies spricht dafür, dass $x_3(f)=S_{\mathrm{nn}}(f)$.

- Wenn wir hypothetisch $x_1(f)=S_{\mathrm{uu}}(f)$ und $x_2(f)=|G(f)|$ zuordnen, würden wir für $f<f_0$ mit
$$|H(f)| = \frac{1}{|G(f)|}\underbrace{\frac{|G(f)|^2}{|G(f)|^2+\underbrace{\frac{S_{\mathrm{nn}}(f)}{S_{\mathrm{uu}}(f)}}_{\approx 0}}}_{\approx 1} \approx \frac{1}{x_2(f)} \gg 1$$
erwarten, dass $|H(f)|$ deutlich größer 1 wird. Dies ist nicht der Fall. Ordnen wir jedoch $x_1(f)=|G(f)|$ und $x_2(f)=S_{\mathrm{uu}}(f)$ zu, so entspricht mit den Abschätzungen
$$|H(f)| = \frac{\overbrace{|G(f)|}^{\ll 1}}{\underbrace{|G(f)|^2}_{\ll 1}+\underbrace{\frac{S_{\mathrm{nn}}(f)}{S_{\mathrm{uu}}(f)}}_{\approx 1}} \approx 0 \qquad \text{für } f \ll f_0 \text{ und}$$
$$|H(f)| = \frac{\overbrace{|G(f)|}^{\approx 1}}{\underbrace{|G(f)|^2}_{\approx 1}+\underbrace{\frac{S_{\mathrm{nn}}(f)}{S_{\mathrm{uu}}(f)}}_{<1}} \approx 1 \qquad \text{für } 0 \ll f < f_0$$
der gegeben Amplitudengang $|H(f)|$ unseren Erwartungen.

Die korrekte Zuordnung lautet also $x_1(f)=|G(f)|$, $x_2(f)=S_{\mathrm{uu}}(f)$, und $x_3(f)=S_{\mathrm{nn}}(f)$.

Aufgabe 5

a) Wenn das Quantisierungstheorem eingehalten ist, ist der Quantisierungsfehler $\mathrm{e_q}$ unabhängig vom Eingangssignal und gleichverteilt. Wir suchen das q, für das

$$P\{\mathrm{e_q}\le 0{,}01\} = \int_{-0{,}01}^{0{,}01} f_{\mathrm{e_q}}(e)\mathrm{d}e = \frac{1}{q}\cdot\min(0{,}02;\, q) \overset{!}{\ge} 0{,}9$$

erfüllt ist. Wir erkennen, dass für $q\le 0{,}02$ die Ungleichung stets erfüllt ist. Für $q>0{,}02$ folgt

$$\frac{1}{q}\cdot 0{,}02 \overset{!}{\ge} 0{,}9 \Leftrightarrow q \le \frac{1}{45} \approx 0{,}0222.$$

Damit die Anforderungen aus der Aufgabenstellung erfüllt sind, muss also $0<q\le\frac{1}{45}$ gelten.

b) Allgemein gilt $|\Phi_{\mathrm{x}}(f)|\le\Phi_{\mathrm{x}}(0)=1$. Für die gegebene Amplitudendichte gilt

$$f_{\mathrm{x}}(x) = \mathcal{N}(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \Phi_{\mathrm{x}}(f) = \mathrm{e}^{-2\pi^2 f^2}.$$

Die charakteristische Funktion ist also stets reell, positiv, symmetrisch und im Intervall $(-\infty,0]$ monoton steigend und im Intervall $[0,\infty)$ monoton fallend. Wir suchen somit f_{q}, d. h. das erste f, für das

$$\left|\mathrm{e}^{-2\pi^2 f^2}\right| = \mathrm{e}^{-2\pi^2 f^2} = 0{,}01$$

gilt.

$$\Rightarrow \quad -2\pi^2 f_{\mathrm{q}}^2 = \ln 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad f_{\mathrm{q}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{-\frac{\ln 0{,}01}{2}}$$

Für q muss gelten: $f_{\mathrm{q}}\le\frac{1}{2q} \Leftrightarrow q \le \frac{1}{2f_{\mathrm{q}}} = \frac{\pi}{\sqrt{-2\ln 0{,}01}} \approx 1{,}0352$.

c) Zunächst bestimmt man das Leistungsdichtespektrum des Signals:

$$r_{\mathrm{xx}}(\tau) = A^2\pi\mathrm{e}^{-2\pi|\tau|}\cdot\cos(2\pi f_0\tau) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad S_{\mathrm{xx}}(f) = \frac{A^2 4\pi^2}{4\pi^2+4\pi^2 f^2} * \frac{1}{2}\cdot[\delta(f+f_0)+\delta(f-f_0)]$$
$$= \frac{A^2}{2}\left(\frac{1}{1+(f+f_0)^2}+\frac{1}{1+(f-f_0)^2}\right).$$

Als Nächstes benötigen wir den Normierungsfaktor :

$$\int_0^\infty S_{\mathrm{xx}}(f)\mathrm{d}f = \frac{r_{\mathrm{xx}}(0)}{2} = \frac{A^2\pi}{2}.$$

Somit wird die Formel für die Mittlere Frequenz $\overline{f}$ zu

$$\overline{f} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f\cdot\left(\frac{1}{1+(f+f_0)^2}+\frac{1}{1+(f-f_0)^2}\right)\mathrm{d}f = \frac{1}{\pi}\left[\int_{f_0}^{\infty}\frac{f-f_0}{1+f^2}\mathrm{d}f+\int_{-f_0}^{\infty}\frac{f+f_0}{1+f^2}\mathrm{d}f\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\underbrace{\int_{-f_0}^{f_0}\frac{f}{1+f^2}\mathrm{d}f}_{=0}+2\int_{f_0}^{\infty}\frac{f}{1+f^2}\mathrm{d}f+f_0\int_{-f_0}^{f_0}\frac{1}{1+f^2}\mathrm{d}f\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\ln\left(1+f^2\right)\Big|_{f_0}^{\infty}+2f_0\left(\arctan f\big|_0^{f_0}\right)\right]$$

Man erkennt, dass das Integral divergiert. Die Mittlere Frequenz im Sinne der Aufgabenstellung existiert also nicht.

d) Das beschriebene Signal ist ein Sägezahn, wie in Bild 10 dargestellt. Die Grundfrequenz dieser Schwingung liegt bei $\frac{1}{T}$. Wenn $T = \frac{1}{f_0+0{,}5}$, liegt diese also bei $f_0+0{,}5$. Die Leistungsdichte des Nutzsignals ist an dieser Stelle:

$$S_{xx}(f=f_0+0{,}5) = \frac{A^2}{2}\left(\underbrace{\frac{1}{1+(2f_0+0{,}5)^2}}_{\approx 0}+\frac{1}{1+(0{,}5)^2}\right)\approx\frac{A^2}{2}\cdot\frac{4}{5}$$

was ca. 80 % des maximalen Wertes von knapp über $\frac{A^2}{2}$ entspricht. D. h. die Spektren von Dither und Nutzsignal überlappen sich signifikant, so dass dieser später nicht einwandfrei entfernt werden kann.

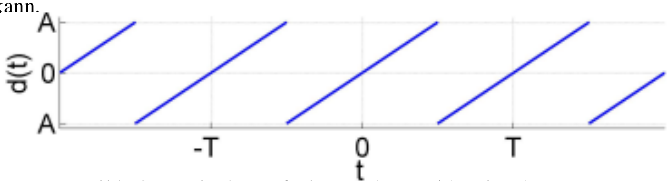


Bild 10: Das in der Aufgabe gegebene Dithersignal.

e)
- Beim Dithering wird dem zu quantisierenden Signal ein Dithersignal **additiv** überlagert.
- Die **Addition der Signale** führt zu einer **Faltung ihrer Amplitudentdichten**.
- Die Faltung zweier Amplitudentdichten entspricht einer **Multiplikation der charakteristischen Funktionen**.
- Die charakteristische Funktion des Nutzsignals wird bei geeignetem Dithersignal **bandbegrenzt**.
- Die **„Grenzfrequenz“ sinkt** und **die maximal zulässige Breite** q **einer Quantisierungsstufe wächst** bei stärkerer Bandbegrenzung des Nutzsignals.
- Die **Anzahl** N **an Quantisierungsstufen sinkt** wenn die Breite q einer Stufe, bei gleichem Amplitudenbereich, wächst.

f) Da kein Leistungsdichtespektrum vorgegeben ist, wird davon ausgegangen, dass $S_{xx}(f) = a =$ const gilt. Wir berechnen die Nutzleistung und die Störleistung zu:

$$P_{\text{nutz}} = 2\left[\int_0^{f_g}S_{xx}(f)\mathrm{d}f+\int_{f_g}^{\frac{f_A}{2}}\left(\frac{f_g}{f}\right)^{10}S_{xx}(f)\mathrm{d}f\right] = 2\left[af_g+a\cdot\frac{1}{9}f_g^{10}\left(f_g^{-9}-\left(\frac{f_A}{2}\right)^{-9}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{9}\cdot af_g\left[10-\left(\frac{2f_g}{f_A}\right)^9\right]$$

$$P_{\text{stoer}} = 2\int_{\frac{f_A}{2}}^{\infty}\left(\frac{f_g}{f}\right)^{10}S_{xx}(f)\mathrm{d}f = 2\left[a\cdot\frac{1}{9}f_g^{10}\left(\infty^{-9}-\left(\frac{f_A}{2}\right)^{-9}\right)\right] = \frac{2}{9}\cdot af_g\left(\frac{2f_g}{f_A}\right)^9.$$

Mit der Abkürzung $x = \frac{2f_g}{f_A}$ erhalten wir das SNR und damit das gesuchte f_g:

$$SNR = \frac{P_{\text{nutz}}}{P_{\text{stoer}}} = \frac{10-x^9}{x^9} = -1+10x^{-9} \overset{!}{=} 10^{\frac{SNR_{\text{soll,dB}}}{10}} = 10^4$$

$$\Rightarrow x = \frac{2f_g}{f_A} = \left(\frac{10}{1+10^4}\right)^{\frac{1}{9}} \Rightarrow f_g = \frac{f_A}{2}\cdot 0{,}4642\,.$$

Aufgabe 1: Kurvenanpassung (22 Punkte)

Ihnen sind folgende Messwertpaare gegeben:

x	0,2	0,35	0,5	0,65
y	3,8	4,6	2,6	−1,1

a) Rekonstruieren Sie die Messkennlinie $y(x)$ mittels des Newton-Interpolations-Verfahrens. Runden Sie die Koeffizienten dabei auf 2 Nachkommastellen. *(6 Punkte)*

b) Wie groß ist der durch die Rundung enstehende relative Fehler an der 2. Stützstelle? *(1 Punkt)*

c) Berechnen Sie die resultierende Kennlinie unter Hinzunahme eines 5. Messwertpaares $x_4 = 0{,}9$ mit $y_4 = 1$. *(4 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen.

Aus der Überlagerung von zwei Sinusschwingungen sind folgende verrauschte Messwerte gegeben:

t/s	0,1	0,2	0,3	0,4
$z(t)$	3,803	3,647	0,676	−1,052

Die Funktion $z(t) = x(t)+y(t)$ setzt sich aus den Sinusschwinungen $x(t) = A\cdot\sin(2\pi t)$ und $y(t) = B\cdot\sin(4\pi t)$ zusammen. Sie möchten nun die Amplituden der beiden Signale mittels einer Least-Squares-Approximation bestimmen.

d) Welche Bedingungen müssen die Basisfunktionen des LS-Verfahrens generell erfüllen? *(1 Punkt)*

e) Nehmen Sie an, dass die Bedingung aus der vorherigen Teilaufgabe für das vorliegende Problem erfüllt ist, und bestimmen Sie nun A und B mittels des LS-Verfahrens. *(4 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen.

Die Bayer-Maske ist ein Farbfilter, das Verwendung in den meisten digitalen Farbfotokameras findet. Um nicht für jedes einzelne Pixel auf dem Sensorchip die einfallende Lichtstärke für den roten, blauen und grünen Spektralbereich einzeln messen zu müssen, wird die Bayer-Maske gemäß Tab. 1 verwendet und lässt pro Pixel jeweils nur rotes, grünes oder blaues Licht auf den Sensor. Um dennoch für jedes Pixel drei Farbwerte (Rot, Grün, Blau) zu bekommen, errechnet man die jeweils fehlenden Farbwerte aus denjenigen von den direkt benachbarten 8 Pixeln, die die entsprechende Farbkomponente aufweisen.

G	B	G	B
R	G	R	G
G	B	G	B

Tabelle 1: Bayer-Maske.

$G_{00} = 50$	$B_{01} = 43$	$G_{02} = 21$	$B_{03} = 22$
$R_{10} = 11$	$G_{11} = 123$	$R_{12} = 144$	$G_{13} = 200$
$G_{20} = 240$	$B_{21} = 17$	$G_{22} = 29$	$B_{23} = 49$

Tabelle 2: Aufgezeichnete Werte.

f) Führen Sie die (bi)lineare Interpolation der fehlenden RGB-Werte für die Pixel 11 und 12 aus Tab. 2 durch, wenn jede Farbkomponente mit 8 Bit (Wertebereich 0-255) quantisiert wird. *(4 Punkte)*

g) Welches weitere einfachere Interpolationsverfahren könnten Sie hier verwenden? Auf welches Problem stoßen Sie, wenn Sie mit diesem Verfahren beispielsweise den Rot-Wert von Pixel 11 interpolieren wollen? *(2 Punkte)*

Aufgabe 2: Stationäres Verhalten von Messsystemen (21 Punkte)

Im Folgenden soll das Verfahren der Gegenkopplung näher untersucht werden.

a) Wann ist prinzipiell eine Gegenkopplung möglich? *(1 Punkt)*

b) Nennen Sie einen Nachteil der Gegenkopplung. Wozu kann dies schlimmstenfalls führen? *(1 Punkt)*

c) Berechnen Sie die Empfindlichkeit $S_g = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}$ am Ausgang eines Systems mit Gegenkopplung für eine allgemeine Messkennlinie $f(v)$. Erklären Sie daraus die linearisierende Wirkung des Verfahrens. *(3 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

d) Wie groß ist der Kennlinienfehler im Arbeitspunkt bei der Differenzmethode? *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

e) Nennen Sie eine Möglichkeit, wie mit systematischen Störeinflüssen, welche vorab bekannt sind, umgegangen werden kann. *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Es soll ein Messverstärker mit drei Stufen entworfen werden. Die einzelnen Stufen zeigen dabei lineares Verhalten. Als mögliche Bauteile stehen drei Elemente nach Tabelle 3 zur Auswahl.

Bauteil	Verstärkung S_k	Nullpunktdrift
A	$S_a = 20$	0,2 mV
B	$S_b = 30$	0,5 mV
C	$S_c = 20$	0,5 mV

Tabelle 3: Daten der zur Verfügung stehenden Bauteile.

f) Skizzieren Sie die Anordnung. *(1 Punkt)*

g) Um welche Art von Fehler handelt es sich bei der Nullpunktdrift? *(1 Punkt)*

h) In welcher Reihenfolge müssen die drei Stufen verschaltet werden, wenn von jedem Bauteil nur eines vorhanden ist? Begründen Sie Ihre Aussage mit dem absoluten Fehler. *(2 Punkte)*

i) Wie müssen allgemein die Empfindlichkeit und die Nullpunktdrift des ersten Verstärkungsglieds gewählt werden? Begründen Sie anhand des relativen und des absoluten Fehlers. *(2 Punkte)*

j) Wie würde die Wahl und Reihenfolge der Bauteile ausfallen, wenn von jedem Bauteil beliebig viele zur Verfügung stehen würden und eine Gesamtverstärkung von 12000 gefordert ist? *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Die Kennlinie eines Temperatursensors ist im Datenblatt wie folgt angegeben:

$$y(u) = 2 \cdot \arctan(u-2)\,.$$

k) Nun muss der Messbereich festgelegt werden, in welchem die Kennlinie möglichst linear verläuft. Wovon hängen die Bedingungen für die Wahl des Messbereiches ab? Geben Sie den günstigsten Messbereich $u_a \le u \le u_a + d$ für $d = 2$ an. *(3 Punkte)*

l) Berechnen Sie für den Messbereich aus der vorherigen Aufgabe die zugehörige ideale Kennline $y_i(u)$. *(1 Punkt)*

m) Bestimmen Sie den Betrag des absoluten Fehlers $F_{abs}(u) = |y(u) - y_i(u)|$ und berechnen Sie dessen Maxima im Messbereich $u_a \le u \le u_e$. *(3 Punkte)*

Aufgabe 3: Statistik (17 Punkte)

Aus einer Stichprobe haben Sie folgende 20 voneinander unabhängige Messwerte x gegeben:

−2,4	2,3	−0,9	1,2	1,1	1,7	−1,3	1,3	−0,7	1,3
0,3	0,1	0,4	0,3	0,2	0,6	−0,6	1,2	−1,1	−0,4

Tabelle 4: Messwerte.

a) Teilen Sie die Stichprobe in 5 gleich breite Klassen im Wertebereich −2,5 bis +2,5 ein und zeichnen Sie das Histogramm. *(2 Punkte)*

b) Nehmen Sie an, dass die Stichprobenwerte annähernd eine unsymmetrische Dreiecksverteilung mit den Grenzen −2,5 und 2,5 besitzen. Geben Sie eine mathematische Beschreibung dieser Verteilungsdichte $f_{tri}(x)$ an, wenn ihr Maximum bei $x = 1$ liegt. *(3 Punkte)*

c) Zeichnen Sie mittels Ihres Ergebnisses aus der vorherigen Aufgabe die erwartete Verteilung im Bezug auf die Größe der Stichprobe in Ihr Histogramm ein. *(1 Punkt)*

Um Ihre Annahme zu überprüfen, verwenden Sie den χ^2-Anpassungstest.

d) Nennen Sie alle Anforderungen an die Stichprobe und die Klasseneinteilung für den χ^2-Anpassungstest und prüfen Sie, ob diese erfüllt sind. Hinweis: Der Stichprobenumfang wird als ausreichend groß angenommen. *(2 Punkte)*

e) Stellen Sie die Nullhypothese für den χ^2-Anpassungstest auf. *(1 Punkt)*

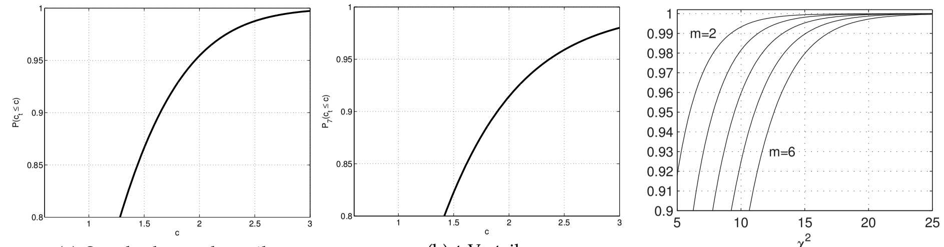
f) Testen Sie, ob Sie die Hypothese aus der vorherigen Teilaufgabe annehmen bei einer statistischen Sicherheit von 96 %. Geben Sie ebenfalls die Anzahl der Freiheitsgrade für den gegebenen Fall an. *(4 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen.

g) Nehmen Sie an, der Anpassungstest hätte Ihre Anfangsvermutung bestätigt. Durch weitere Stichproben stellen Sie jedoch fest, dass die Messgröße doch nicht der angenommenen Verteilung entspricht. Was für einen Fehler hätten Sie begangen und wie lässt sich dieser vermeiden? *(2 Punkte)*

h) Eine Zufallsvariable ist χ^2 verteilt, wenn sie sich aus einer Verknüpfung verschiedener anderer Zufallsgrößen zusammensetzt. Wie sind diese Zufallsgrößen miteinander verknüpft und wie sehen deren Wahrscheinlichkeitsdichten aus? *(1 Punkt)*

i) Wie verändert sich die Varianz $\sigma_{\bar{x}}^2$ eines Stichprobenmittelwertes von statistisch unabhängigen Messgrößen bei wachsendem Stichprobenumfang n? *(1 Punkt)*



(a) Standardnormalverteilung (b) t-Verteilung (c) χ^2-Verteilung

Abbildung 2: Verteilungsfunktionen für verschiedene Zufallsvariablen.

Aufgabe 4: Korrelation (20 Punkte)

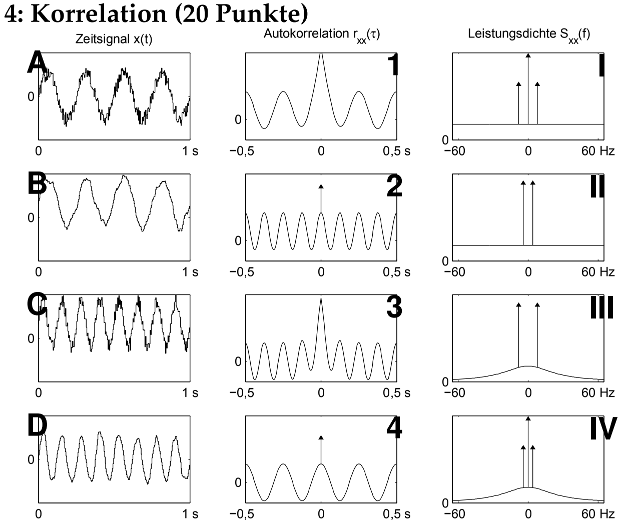


Abbildung 4: Zuordnungsaufgabe.

a) Ordnen Sie den Zeitsignalen $x(t)$ in Abb. 4 die entsprechenden Autokorrelationsfunktionen $r_{xx}(\tau)$ und Leistungsdichten $S_{xx}(f)$ zu und begründen Sie jede Zuordnung über die jeweils entscheidenden Eigenschaften der Funktionen. *(6 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von der vorherigen.

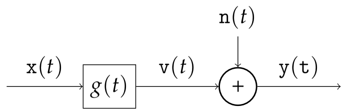


Abbildung 5: Modell eines Systems.

b) In Abb. 5 ist ein System mit unbekannter Impulsantwort $g(t)$ abgebildet. Welche Voraussetzung müssen $\mathtt{x}(t)$ und $\mathtt{n}(\mathtt{t})$ erfüllen, damit $g(t)$ eindeutig identifiziert werden kann, wenn die Kreuzkorrelationsfunktion $r_{\mathtt{yx}}(\tau)$ gemessen und $\mathtt{x}(t)$ als bekannt vorausgesetzt wird? Begründen Sie Ihre Antwort rechnerisch. *(3 Punkte)*

c) Die Autokorrelationsfunktion am Ausgang wurde zu $r_{\mathtt{yy}}(\tau) = \frac{b}{2} \cdot \exp(-b|\tau|)$ bestimmt. Als Eingangssignal diente weißes Rauschen mit der konstanten Leistungsdichte $S_{\mathtt{xx}}(f) = N^2$. Das farbige Rauschen $\mathtt{n}(t)$ hat die Leistungsdichte $S_{\mathtt{nn}}(f) = 1/(2 + 2 \cdot (2\pi f/b)^2)$. Berechnen Sie das Betragsquadrat der Übertragungsfunktion $|G(f)|^2$ unter der Annahme, dass die Voraussetzungen aus der vorherigen Teilaufgabe erfüllt sind. *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen.

In einem unterirdischen mit Wasser gefüllten Rohrnetz ist ein Leck aufgetreten, welches das Schallsignal $z(t)$ verursacht. Um die Rohre nicht komplett freilegen zu müssen, soll mit Hilfe der Korrelationsmesstechnik der Ort des Lecks gefunden werden. Dafür werden drei Sensoren in den Rohrenden platziert, die die Signale $u_1(t)$, $u_2(t)$ und $u_3(t)$ messen (Abb. 6). Dabei wird angenommen, dass der Schall des ausströmenden Wassers sich über die Rohrmitten mit der konstanten Geschwindigkeit c ausbreitet (vgl. gestrichelte Linie). Ebenso erfolgt die Ausbreitung ideal und ohne Streuung, so dass die Schallintensität als konstant angenommen werden kann. Die Längen der beiden geraden Rohrstücke l_1 und l_2 sowie der Durchmesser der Rohre d seien bekannt.

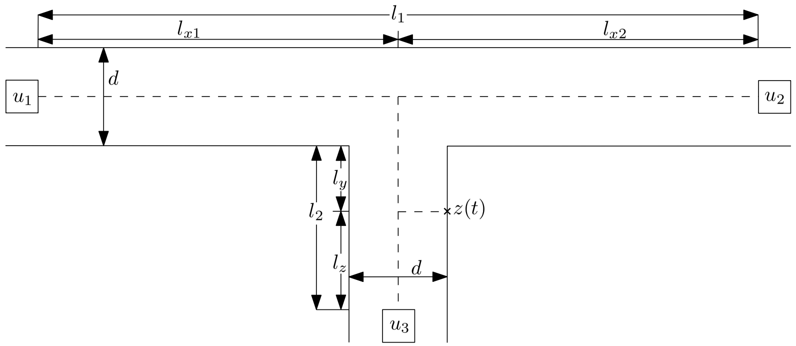


Abbildung 6: Das beschädigte Rohrnetz.

d) Geben Sie die an den drei Sensoren empfangenen Signale $u_1(t)$, $u_2(t)$ und $u_3(t)$ in Abhängigkeit vom Lecksignal $z(t)$ an. *(2 Punkte)*

e) Wie können Sie über die Kreuzkorrelationen $r_{u_1u_2}(\tau), r_{u_2u_3}(\tau)$ die beiden Entfernungen l_{x_2} und l_y bestimmen? Geben Sie die gesuchten Längen an. Verwenden Sie hierbei nur aus der Aufgabenstellung oder durch das Verfahren ermittelte Werte.
Hinweis: Die Kreuzkorrelationen müssen nicht explizit berechnet werden. *(5 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen.

f) Wie können Sie das Wiener-Filter in einer Echtzeitanwendung einsetzen? Welchen Nachteil bringt dies mit sich? *(2 Punkte)*

Aufgabe 5: Quantisierung und Abtastung (20 Punkte)

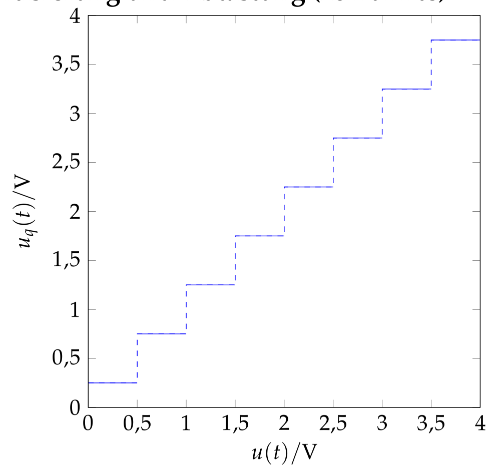


Abbildung 7: Kennlinie eines Quantisierers.

Sie haben einen A/D-Umsetzer mit einem Eingangsbereich von 0 V–4 V gegeben. Seine Kennlinie ist in Abb. 7 gegeben. Dieser wird mit dem konstanten Eingangssignal $U = 3{,}3\,\mathrm{V}$ beschaltet.

a) Skizzieren Sie die schrittweise Umsetzung mittels sukzessiver Approximation und geben Sie die jeweils gesetzten Bits an. *(3 Punkte)*

b) Vergleichen Sie für den Nachlaufumsetzer und die sukzessive Approximation den für das Signal $U = 3{,}3\,\mathrm{V}$ resultierenden mittleren Quantisierungsfehler für $t \to \infty$ und entscheiden Sie sich für das Verfahren mit der größeren Genauigkeit. *(2 Punkte)*

c) Geben Sie das mit diesem Umsetzer erreichbare SNR in dB unter Annahme eines linearen Quantisierungsmodells und eines sinusförmigen Eingangssignals an. *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen.

Sie möchten ein Musiksignal aufzeichnen und wählen hierzu eine Abtastfrequenz von $f_A = 44\,\mathrm{kHz}$.

d) Warum ist die gewählte Abtastfrequenz sinnvoll, wenn Sie davon ausgehen, dass Sie Frequenzen oberhalb von 20 kHz nicht hören können? *(1 Punkt)*

Das aufzunehmende Signal besitzt Frequenzspitzen von bis zu 24 kHz. Ihnen steht jedoch ein Vorverarbeitungsfilter $|G(f)|^2 \approx \begin{cases} 1 & \text{für } |f| \le f_g \\ \left(\frac{f_g}{f}\right)^{10} & \text{für } |f| > f_g \end{cases}$ mit einer Grenzfrequenz von $f_g = 18\,\mathrm{kHz}$ zur Verfügung. Die Leistungsdichte des Eingangssignals kann vereinfacht als konstant für $|f| < 24\,\mathrm{kHz}$ angenommen werden und sonst als null.

e) Berechnen Sie den durch Aliasing entstehenden Signal-Störabstand (SNR) in dB des Signals ohne und mit Verwendung des Vorfilters. *(5 Punkte)*

f) Sie sind mit dem Ergebnis noch nicht zufrieden. Nennen Sie 2 mögliche Verbesserungen. *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen.

Mit der nun verbesserten Vorfilterung erreichen Sie eine Bandbegrenzung bei 22 kHz und können Aliasingeffekte vernachlässigen. Sie fordern für die komplette D/A-Umsetzung nun ein SNR von 80 dB.

g) Welche Anforderungen müssen Sie an einen gleichverteilten Abtastzeitfehler τ und die Anzahl der Quantisierungsstufen N_q stellen, um das gewünschte SNR einzuhalten?
Hinweis: Nehmen Sie an, dass das Quantisierungstheorem erfüllt ist und berechnen Sie zuerst die für die Quantisierung benötigte Bitanzahl. *(3 Punkte)*

h) Für die Umsetzung verwenden Sie einen Delta-Sigma-Umsetzer 1. Ordnung. Bestimmen Sie den nötigen Überabtastfaktor M. *(1 Punkt)*

i) Beschreiben Sie kurz den Zweck des MA-Filters am Ausgang des Delta-Sigma-Umsetzers. *(2 Punkte)*

Lösung

Aufgabe 1:

a) Newton-Verfahren:

Differenzenschema:

x	$\Delta^0 y = y$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0,2	3,8				
		$\frac{0.8}{0,15} = \frac{16}{3}$			
			$\frac{\frac{-56}{3}}{0,3} = \frac{-560}{9}$		
0,35	4,6				
				$\frac{\frac{220}{9}}{0,45} = 54{,}32$	
		$\frac{-2}{0,15} = -\frac{40}{3}$			
0,5	2,6		$\frac{\frac{-34}{3}}{0,3} = -\frac{340}{9}$		235,24
		$\frac{-3{,}7}{0,15} = -\frac{74}{3}$		$\frac{21680}{99}$	
			$\frac{248}{3}$		
0,65	−1,1				
		$\frac{2{,}1}{0{,}25}$			
0,9	1				

Der Newton-Ansatz bei 4 Stützstellen lautet:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{\text{New}}(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1)\\ &\quad + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\\ &= \Delta^0 y + \Delta^1 y(x-x_0) + \Delta^2 y(x-x_0)(x-x_1)\\ &\quad + \Delta^3 y(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\end{aligned}$$

Einsetzen der Werte aus dem Differenzenschema ergibt:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{\text{New}}(x) &= 3{,}8 + \frac{16}{3}(x-0{,}2) - \frac{560}{9}(x-0{,}2)(x-0{,}35)\\ &\quad + 54{,}32(x-0{,}2)(x-0{,}35)(x-0{,}5)\\ &= 54{,}32x^3 - 119{,}26x^2 + 58{,}3x - 3{,}52\end{aligned}$$

b)

$$F_{\text{rel}} = \frac{\tilde{y}_{\text{New}}(x=0{,}35) - y(x=0{,}35)}{y(x=0{,}35)} = \frac{4{,}6046 - 4{,}6}{4{,}6} \mathrel{\widehat{=}} 0{,}1\%$$

c) Die Erweiterung des Polynoms führt zu folgendem Ansatz:

$$\tilde{y}_{\text{New2}}(x) = \tilde{y}_{\text{New}}(x) + a_4(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

Der Koeffizient a_4 lässt sich nun entweder über die Erweiterung des Differenzenschemas (in grün) berechnen oder alternativ auch über den rekursiven Ansatz der Newton-Interpolation. Hierzu wird der Ansatz von $\tilde{y}_{\text{New2}}(x)$ nach a_4 aufgelöst und für $x = x_4$ ausgewertet:

$$a_4 = \frac{\tilde{y}_{\text{New2}}(x_4) - \tilde{y}_{\text{New}}(x_4)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} = 235{,}24$$

Das erweiterte Polynom berechnet sich somit zu:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{\text{New2}}(x) &= \tilde{y}_{\text{New}}(x) + 235{,}24(x-0{,}2)(x-0{,}35)(x-0{,}5)(x-0{,}65)\\ &= 235{,}24x^4 - 345{,}59x^3 + 122{,}45x^2 - 2{,}69x + 1{,}83\end{aligned}$$

d) Die Basisfunktionen müssen linear unabhängig voneinander sein.

e) Das LS-Gleichungssystem lautet: $\mathbf{z} = \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{b}$

mit:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 3{,}803 \\ 3{,}647 \\ 0{,}676 \\ -1{,}052 \end{pmatrix} \quad \mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} \sin(2\pi\cdot 0{,}1) & \sin(4\pi\cdot 0{,}1) \\ \sin(2\pi\cdot 0{,}2) & \sin(4\pi\cdot 0{,}2) \\ \sin(2\pi\cdot 0{,}3) & \sin(4\pi\cdot 0{,}3) \\ \sin(2\pi\cdot 0{,}4) & \sin(4\pi\cdot 0{,}4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5878 & 0{,}9511 \\ 0{,}9511 & 0{,}5878 \\ 0{,}9511 & -0{,}5878 \\ 0{,}5878 & -0{,}9511 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

Mit der Pseudoinversen berechnet man A und B:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = (\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}$$

mit $(\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi})^{-1} = \begin{pmatrix} 2{,}5 & 0 \\ 0 & 2{,}5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

folgt $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}2914 \\ 2{,}5455 \end{pmatrix}$.

f) Die fehlenden Farbwerte werden interpoliert und anschließend gerundet, da durch die Quantisierung nur ganze Werte von 0 bis 255 zugelassen sind:

$$\begin{aligned}B_{11} &= \frac{B_{01} + B_{21}}{2} = 30\\ R_{11} &= \frac{R_{10} + R_{12}}{2} = 77{,}5 \mathrel{\widehat{=}} 78\\ G_{12} &= \frac{G_{11} + G_{02} + G_{22} + G_{13}}{4} = 93{,}25 \mathrel{\widehat{=}} 93\\ B_{12} &= \frac{\frac{B_{01}+B_{03}}{2} + \frac{B_{21}+B_{23}}{2}}{2} = 32{,}75 \mathrel{\widehat{=}} 33\end{aligned}$$

g) Das verwendete lineare Interpolationsverfahren hat die Ordnung 1. Ein Interpolationsverfahren niedrigerer Ordnung ist das Nächster-Nachbar-Verfahren. Bei mehreren gleichnahen Nachbarn müsste entschieden werden, welcher Nachbar verwendet wird.

Aufgabe 2:

a) Eine Gegenkopplung ist dann möglich, wenn ein Gegenkopplungsglied existiert, welches das Ausgangssignal y auf die physikalische Größe des Messsignals u abbilden kann.

b) Durch die Gegenkopplung wird dem System zusätzliche Dynamik hinzugeführt. Im schlimmsten Fall kann dies zu sehr langen Einschwingzeiten oder sogar zur Instabilität führen.

c) Für die Berechnung der Empfindlichkeit am Ausgang des Systems werden folgende Zusammenhänge benötigt:

$$y = Vf(v) \text{ und } v = u - K(y)$$

Durch Umformen der gewünschten Differentiation zu

$$S_g = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = V\frac{\mathrm{d}f(v)}{\mathrm{d}u} = V\frac{\mathrm{d}f(v)}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$$

und Einsetzen der oben aufgestellten Beziehungen erhält man:

$$S_g = VS(v)\left(1 - \frac{\mathrm{d}K(y)}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right) = VS(v)(1 - K'S_g).$$

Nach Zusammenfassen folgt als Ergebnis:

$$S_g = \frac{VS(v)}{1 + VS(v)K'}.$$

Die linearisierende Wirkung des Verfahrens wird deutlich bei der Betrachtung

$$\lim_{V\to\infty} S_g = \frac{1}{K'}.$$

Damit geht mit wachsender Verstärkung V die Kennlinie über in

$$y = \frac{1}{K'}u.$$

d) Der Kennlinienfehler im Arbeitspunkt bei der Differenzmethode ist identisch null.

e) Durch eine Kennfeld-Interpolation können die systematischen Störeinflüsse berücksichtigt und somit kompensiert werden.

f) Die Anordnung ist in Abb. 1 zu sehen.

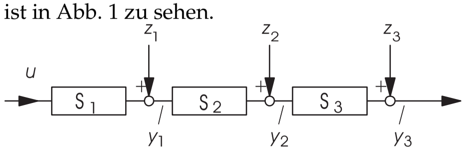


Abbildung 1: Messkette

g) Es handelt sich dabei um einen superponierenden Fehler.

h) Für eine dreigliedrige Messkette berechnet sich der absolute Fehler aus

$$F_{\text{abs}} = S_2 S_3 z_1 + S_3 z_2 + z_3.$$

Um also den kleinsten Fehler zu erhalten, muss S_3 und z_1 gering sein. Damit ergibt sich der absolute Fehler zu

$$F_{\text{abs}} = 130{,}5\,\text{mV}, \text{ mit } S_1 = S_\text{a},\ S_2 = S_\text{b},\ S_3 = S_\text{c}.$$

i) Der absolute Fehler berechnet sich als die Summe der von den jeweils nachfolgenden Bauteilen verstärkten Nullpunktdrifts. Somit wird die erste Nullpunktdrift von allen nachfolgenden Bauteilen verstärkt und sollte möglichst klein gewählt werden.

Um einen zur Gesamtverstärkung relativ kleinen Fehler zu erhalten, muss die Verstärkung des ersten Bauteiles möglichst groß sein, da dieses die Nullpunktdrift nicht verstärkt.

j) A-A-B

k) Für die Wahl des günstigsten Messbereiches wird überprüft, ob die Kennlinie einen Wendepunkt im betrachteten Intervall hat oder nicht.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y(u)}{\mathrm{d}u} &= \frac{2}{1+(u-2)^2}\\ \frac{\mathrm{d}^2y(u)}{\mathrm{d}u^2} &= \frac{-4\cdot(u-2)}{(1+(u-2)^2)^2}\\ \frac{\mathrm{d}^3y(u)}{\mathrm{d}u^3} &= \frac{-4}{(1+(u-2)^2)^2} + \frac{16\cdot(u-2)^2}{(1+(u-2)^2)^3}\end{aligned}$$

Aus

$$\frac{\mathrm{d}^2y(u)}{\mathrm{d}u^2} = 0$$

folgt $u_W = 2$.
Daher ist folgende Bedingung zu erfüllen:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y(u_\text{a})}{\mathrm{d}u} &\stackrel{!}{=} \frac{\mathrm{d}y(u_\text{a}+d)}{\mathrm{d}u}\\ u_\text{a}^2 - 4u_\text{a} + 4 &= u_\text{a}^2 + 2u_\text{a}d - 4u_\text{a} + d^2 - 4d + 4\\ 0 &= 2u_\text{a}d + d^2 - 4d.\end{aligned}$$

Der Messanfang ergibt sich aus

$$u_\text{a} = \frac{4-d}{2}$$

mit $d = 2$ zu $u_\text{a} = 1$.
Der Messbereich liegt im Intervall $1 \le u \le 3$.

l) Für die Berechnung der idealen Kennlinie $y_\text{i} = S_\text{i}\cdot(u-u_\text{a}) + y_\text{a}$ geht man wie folgt vor:

1. $S_\text{i} = \frac{y_\text{e}-y_\text{a}}{u_\text{e}-u_\text{a}} = \frac{1{,}5708-(-1{,}5708)}{3-1} = 1{,}5708$
2. $y_\text{i} = S_\text{i}\cdot(u-u_\text{a}) + y_\text{a} = 1{,}5708(u-1) - 1{,}5708 = 1{,}5708u - 3{,}1416$

m) Der absolute Fehler ergibt sich zu:

$$F_{\text{abs}}(u) = |y(u) - y_\text{i}(u)| = |2\arctan(u-2) - 1{,}5708u + 3{,}1416|\,.$$

Um eine Fallunterscheidung bei der Ableitung des Betrages im absoluten Kennlinienfehler zu umgehen, betrachtet man stattdessen die stetig differenzierbare Funktion $\tilde{F}_{\text{abs}}$ mit $F_{\text{abs}} = |\tilde{F}_{\text{abs}}|$. Im vorgegebenen Intervall werden die sich ergebenden Fehlerwerte

aller lokalen Extrema im Messbereich von $\tilde{F}_{\text{abs}}$ miteinander verglichen. Diejenigen Stellen mit dem betragsmäßig größten Fehlerwert sind gleichzeitig die Stellen, bei denen F_{abs} maximal wird:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\tilde{F}_{\text{abs}}(u)}{\mathrm{d}u} &= \frac{2}{1+(u-2)^2} - 1{,}5708\\ \frac{\mathrm{d}\tilde{F}_{\text{abs}}(u)}{\mathrm{d}u} &\stackrel{!}{=} 0\,.\end{aligned}$$

Man erhält aus der quadratischen Gleichung $u^2 - 4u + 5 - \frac{2}{1{,}5708} = 0$

$$u_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 5 + \frac{2}{1{,}5708}}$$

bzw. $u_1 = 2{,}5227$ und $u_2 = 1{,}4772$.
Es ergibt sich für den absoluten Fehler $F_{\text{abs}}(u_1) = F_{\text{abs}}(u_2) = 0{,}1422$.
Zur Untersuchung der Ränder des Messbereiches setzt man u_a, u_e in $F_{\text{abs}}(u)$ ein und erhält $F_{\text{abs}}(u) \approx 0$. Auch an der Stelle $u = 0$ ergibt sich $F_{\text{abs}}(u) = 2$, da hier durch den Betrag ein weiterer Extrempunkt des absoluten Fehlers liegt.
Die beiden Werte u_1, u_2 sind also die Stellen, an denen $F_{\text{abs}}(u)$ maximal wird.

Aufgabe 3:

a) Abb. 3 zeigt die gesuchten Klassen.

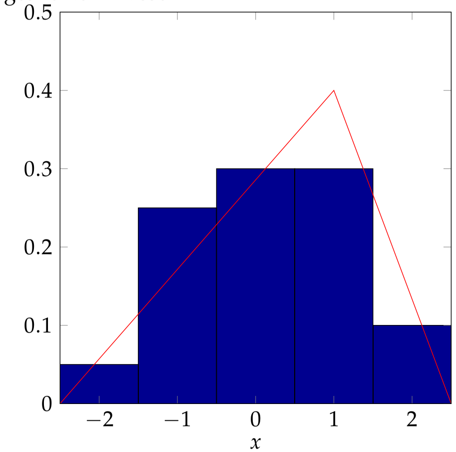


Abbildung 3: Histogramm

b) Die Fläche unter der Dreiecksdichte muss eins ergeben und somit lautet:

$$f_{\text{tri}}(x) = \begin{cases} \frac{2}{7} + x\cdot\frac{4}{35} & \text{für } -2{,}5 \le x < 1\\ \frac{2}{3} - x\cdot\frac{4}{15} & \text{für } 1 \le x \le 2{,}5\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

c) Siehe Abb. 3.

d)
- unabhängige Messwerte
- ausreichend große Stichprobe
- $n_i \ge 5$
- $n_{i\,\text{Rand}} \ge 1$

Alle Anforderungen sind erfüllt.

e) $H_0 : f_\text{x}(x) = f_{\text{tri}}(x)$

f) Berechnung der Klassenwahrscheinlichkeiten

$$p_i = P(a_i \leq x \leq b_i) = \int_{a_i}^{b_i} f_{\mathrm{tri}}(x)\mathrm{d}x, \text{ mit den Klassengrenzen } a_i \text{ und } b_i$$

i	p_i	$(\mathrm{n}_i - np_i)^2$	np_i	$\frac{(\mathrm{n}_i-np_i)^2}{np_i}$
1	$\frac{2}{35}$	0,0204	1,1429	0,0179
2	$\frac{6}{35}$	2,4695	3,4286	0,7202
3	$\frac{2}{7}$	0,0816	5,7143	0,0143
4	$\frac{37}{105}$	1,0975	7,0476	0,1557
5	$\frac{2}{15}$	0,4444	2,6667	0,1667

Berechnung der Prüfgröße χ^2

$$\chi^2 \approx \sum_{i=1}^{5} \frac{(\mathrm{n}_i - np_i)^2}{np_i} = 1{,}0748$$

Bestimmung der Freiheitsgrade
$m = k - 1 = 5 - 1 = 4$

Ermitteln von χ^2_α beispielsweise aus Abbildung 4.20 aus dem Messtechnik-Buch (8. Auflage) und mit $1 - \alpha = 0{,}96$ ergibt $\chi^2_\alpha \approx 10$. Daher wird die Hypothese angenommen, da $\chi^2_\alpha \geq \chi^2$.

g) Es würde sich um einen unterbliebenen Alarm (Schlupf), also einen Fehler 2. Art, handeln. Die Wahrscheinlichkeit eines solchen Fehlers steigt für kleine Werte von α, weswegen α nicht so klein wie möglich gewählt werden sollte, sondern größer.

h) Eine χ^2-verteilte Zufallsvariable setzt sich aus der Quadratsumme normalverteilter Zufallsvariablen zusammen.

i) Die Varianz des Stichprobenmittelwertes ist proportional zu $1/n$, nimmt also bei wachsender Stichprobe ab.

Aufgabe 4:

a)

- A – 4 – II

$x(t)$	Sinus $f_0 = 4\,\mathrm{Hz}$	kein Offset	weißes Rauschen
$r_{xx}(\tau)$	Cosinus $f_0 = 4\,\mathrm{Hz}$	kein Offset	$\delta(\tau) \cdot \sigma^2$
$S_{xx}(f)$	Impulse bei f_0	kein $\delta(f)$	Offset σ^2

- B – 1 – IV

$x(t)$	Sinus $f_0 = 4\,\mathrm{Hz}$	Offset A	farbiges Rauschen
$r_{xx}(\tau)$	Cosinus $f_0 = 4\,\mathrm{Hz}$	Offset A^2	Überhöhung um $\tau = 0$
$S_{xx}(f)$	Impulse bei f_0	$\delta(f) \cdot A^2$	Glocke um $f = 0$

- C – 2 – I

$x(t)$	Sinus $f_0 = 8\,\mathrm{Hz}$	Offset A	weißes Rauschen
$r_{xx}(\tau)$	Cosinus $f_0 = 8\,\mathrm{Hz}$	Offset A^2	$\delta(\tau)$
$S_{xx}(f)$	Impulse bei f_0	$\delta(f) \cdot A^2$	Offset σ^2

- D – 3 – III

$x(t)$	Sinus $f_0 = 8\,\mathrm{Hz}$	kein Offset	farbiges Rauschen
$r_{xx}(\tau)$	Cosinus $f_0 = 8\,\mathrm{Hz}$	kein Offset	Überhöhung um $\tau = 0$
$S_{xx}(f)$	Impulse bei f_0	kein $\delta(f)$	Glocke um $f = 0$

b) Eine eindeutige Identifikation lässt sich laut Vorlesung für den gegebenen Fall aus:

$$G(f) = \frac{S_{\mathrm{xv}}(f)}{S_{\mathrm{xx}}(f)}$$

berechnen. Da jedoch nur $r_{\mathrm{yx}}(\tau)$ gegeben ist, muss gezeigt werden, unter welchen Voraussetzungen auch mittels $r_{\mathrm{yx}}(\tau)$ die Übertragungsfunktion $G(f)$ angegeben werden kann. Dazu wird die gemessene Kreuzkorrelation genauer betrachtet:

Mess - F2012

$$\begin{aligned} r_{\mathrm{yx}}(\tau) &= \mathrm{E}\{\mathrm{y}(t+\tau)\mathrm{x}(t)\} \\ &= \mathrm{E}\{(\mathrm{v}(t+\tau) + \mathrm{n}(t+\tau))\mathrm{x}(t)\} \\ &= \underbrace{\mathrm{E}\{\mathrm{v}(t+\tau)\mathrm{x}(t)\}}_{r_{\mathrm{vx}}(\tau)} + \underbrace{\mathrm{E}\{\mathrm{n}(t+\tau)\mathrm{x}(t)\}}_{r_{\mathrm{nx}}(\tau)}. \end{aligned} \tag{1}$$

Wenn $\mathrm{x}(t)$ und $\mathrm{n}(t)$ unkorreliert sind, ist $r_{\mathrm{nx}} = \mathrm{E}\{\mathrm{n}(t)\} \cdot \mathrm{E}\{\mathrm{x}(t)\} = 0$, falls eines der beiden Signale mittelwertfrei ist. Somit fällt der Term r_{nx} in Gleichung 1 heraus und hat damit keinen Einfluss auf die Identifikation des Systems.
Also müssen $\mathrm{x}(t)$ und $\mathrm{n}(\mathrm{t})$ unkorreliert sein und $\mathrm{n}(\mathrm{t})$ oder $\mathrm{x}(t)$ muss ein mittelwertfreies Signal sein.

c) Die Leistungsdichte von $y(t)$ ist $S_{\mathrm{yy}}(f) = \frac{b^2}{b^2+(2\pi f)^2}$ und ergibt sich aus

$$S_{\mathrm{yy}}(f) = S_{\mathrm{xx}}(f)|G(f)|^2 + S_{\mathrm{nn}}(f), \text{ wenn } \mathrm{x}(t) \text{ und } \mathrm{n}(t) \text{ unkorreliert sind.}$$

Für $|G(f)|^2$ ergibt sich

$$\underbrace{G(f)G^*(f)}_{|G(f)|^2} = \frac{S_{\mathrm{yy}}(f) - S_{\mathrm{nn}}(f)}{S_{\mathrm{xx}}(f)} = \frac{\frac{b^2}{b^2+(2\pi f)^2} - \frac{b^2}{2(b^2+(2\pi f)^2)}}{N^2} = \frac{b^2}{2 \cdot N^2(b^2 + (2\pi f)^2)}.$$

d) Die drei empfangenen Signale ergeben sich zu

$$u_1(t) = z(t - \frac{l_y + d + l_{x1}}{c})$$
$$u_2(t) = z(t - \frac{l_y + d + l_{x2}}{c})$$
$$u_3(t) = z(t - \frac{\frac{d}{2} + l_z}{c}).$$

e) Die Kreuzkorrelation $r_{u_1u_2}(\tau)$ berechnet sich zu

$$r_{u_1u_2}(\tau) = \mathrm{E}\left\{z(t + \tau - \frac{l_y + d + l_{x1}}{c})z(t - \frac{l_y + d + l_{x2}}{c})\right\}.$$

Sie wird genau dann maximal, wenn die beiden Terme übereinstimmen. Dann gilt folgende Beziehung, wobei τ_1 den Wert für τ repräsentiert, der die Korrelation maximal werden lässt:

$$\tau_1 - \frac{l_y + d + l_{x1}}{c} = -\frac{l_y + d + l_{x2}}{c}$$
$$\Rightarrow \tau_1 = \frac{l_{x1} - l_{x2}}{c}.$$

Mit Hilfe der bekannten Länge l_1 ergibt sich für die gesuchte Länge

$$l_{x2} = \frac{l_1 - \tau_1 c}{2}.$$

Die zweite zu berechnende Kreuzkorrelation berechnet sich analog.

$$r_{u_2u_3} = \mathrm{E}\left\{z(t + \tau - \frac{l_y + d + l_{x2}}{c})z(t - \frac{\frac{d}{2} + l_z}{c})\right\}$$

Aus den gleichen Überlegungen resultiert das Maximum dieser Korrelation genau dann, wenn

$$\tau_2 = \frac{l_y + l_{x2} - l_z + \frac{d}{2}}{c} = \frac{2l_y + l_{x2} - l_2 + \frac{d}{2}}{c}$$

ist. Daraus ergibt sich die zweite gesuchte Länge zu

$$l_y = \frac{l_2 + c\tau_2 - l_{x2} - \frac{d}{2}}{2}.$$

f) Das Wiener-Filter ist im Allgemeinen akausal. Indem man die Impulsantwort des Filters für $t < 0$ zu null setzt, erhält man ein kausales Filter. Dieses Filter kann in Echtzeitanwendungen eingesetzt werden, führt jedoch nicht mehr zu optimaler Signalrekonstruktion.

Aufgabe 5:

a) Abb. 8 zeigt Approximation in i Schritten.

$i = 1$: Bitkonfiguration 100 wird gesetzt und wird bestätigt.

$i = 2$: Bitkonfiguration 110 wird gesetzt und wird bestätigt.

$i = 3$: Bitkonfiguration 111 wird gesetzt und auf 110 zurückgesetzt.

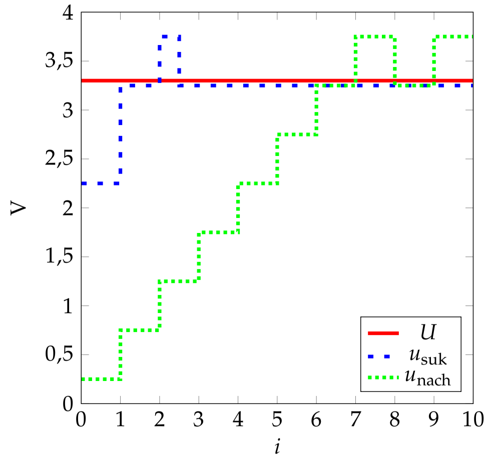


Abbildung 8: Kennlinie eines Quantisierers.

b) Siehe Abb. 8.
Nach unendlich langer Zeit ist der Fehler konstant für u_{suk} und alternierend für u_{nach}:

$$F_{u_{suk}} = U - u_{suk} = 3{,}3\,\mathrm{V} - 3{,}25\,\mathrm{V} = 0{,}05\,\mathrm{V}$$

$$F_{u_{nach}} = \frac{U - u_{nach+} + U - u_{nach-}}{2} = \frac{3{,}3\,\mathrm{V} - 3{,}75\,\mathrm{V} + 3{,}3\,\mathrm{V} - 3{,}25\,\mathrm{V}}{2} = -0{,}2\,\mathrm{V}.$$

Der sukzessive Umsetzer besitzt im Mittel eine höhere Genauigkeit.

c) Mit $N = 3$ Bit:

$$\mathrm{SNR} = 10\log(2^{2N}\cdot 1{,}5) = 10\log(2^{2\cdot 3}\cdot 1{,}5) = 19{,}82\,\mathrm{dB}.$$

d) Die Abtastfrequenz f_A muss doppelt so hoch wie die höchste Signalfrequenz sein, um Aliasing zu vermeiden. Durch die begrenzte Steilheit von realen Filtern wird ein gewisser Puffer zwischen Durchlassbereich und Sperrbereich benötigt.

e) Ohne Vorfilter:

$$P_{Nutz} = \int_{-f_A/2}^{f_A/2} S_{xx}\,\mathrm{d}f = 2\int_0^{22\,\mathrm{kHz}} A\,\mathrm{d}f = A\cdot 44\,\mathrm{kHz}$$

$$P_{Stoer} = \int_{-\infty}^{-f_A/2} S_{xx}\,\mathrm{d}f + \int_{f_A/2}^{\infty} S_{xx}\,\mathrm{d}f = 2\int_{22\,\mathrm{kHz}}^{24\,\mathrm{kHz}} A\,\mathrm{d}f = A\cdot 4\,\mathrm{kHz}$$

$$\mathrm{SNR} = \frac{P_{Nutz}}{P_{Stoer}} = \frac{A\cdot 44\,\mathrm{kHz}}{A\cdot 4\,\mathrm{kHz}} = 11 \mathrel{\hat{=}} 10{,}4139\,\mathrm{dB}.$$

Mit Vorfilter:

$$P_{Nutz} = 2\int_0^{18\,\mathrm{kHz}} A\,\mathrm{d}f + 2\int_{18\,\mathrm{kHz}}^{22\,\mathrm{kHz}} A\left(\frac{18\,\mathrm{kHz}}{f}\right)^{10}\mathrm{d}f$$
$$= A\cdot 36\,\mathrm{kHz} + 2A\frac{18\,\mathrm{kHz}^{10}}{-9}(22\,\mathrm{kHz}^{-9} - 18\,\mathrm{kHz}^{-9})$$
$$= 2A(19\,671{,}3918\,\mathrm{Hz})$$

Mess - F2012

$$P_{Stoer} = 2\int_{22\,\mathrm{kHz}}^{24\,\mathrm{kHz}} A\left(\frac{18\,\mathrm{kHz}}{f}\right)^{10}\mathrm{d}f = 2A\frac{18\,\mathrm{kHz}^{10}}{-9}(24\,\mathrm{kHz}^{-9} - 22\,\mathrm{kHz}^{-9}) = 2A(178{,}4388\,\mathrm{Hz})$$

$$\mathrm{SNR} = \frac{P_{Nutz}}{P_{Stoer}} = 110{,}2416 \mathrel{\hat{=}} 20{,}4234\,\mathrm{dB}.$$

f) Erhöhung der Abtastfrequenz und Senkung der Grenzfrequenz des verwendeten Filters.

g) Für den Quantisierungsfehler gilt laut Vorlesung:

$$\mathrm{SNR}_{Quant} = 6{,}02\cdot N + 1{,}76$$

und damit $\mathrm{SNR} = 80\,\mathrm{dB} \leq \mathrm{SNR}_{Quant}$

$$\Rightarrow N \geq 12{,}997 \mathrel{\hat{=}} 13\mathrm{Bit}$$

$N_q = 2^N = 8192$ Quantisierungsstufen,

analog gilt für den Jitterfehler:

$$\mathrm{SNR}_{Jitter} = 10\log\left(\frac{2}{(2\pi f_g\sigma_\tau)^2}\right)$$

$$\mathrm{SNR} = 80\,\mathrm{dB} \leq \mathrm{SNR}_{Jitter}$$

$$\Rightarrow \sigma_\tau^2 = \left(\frac{10^{\frac{80}{10}}}{2}\cdot(2\pi 22\,\mathrm{kHz})^2\right)^{-1} = 1{,}0467\cdot 10^{-18}\,\mathrm{s}^2.$$

Zur Berechnung von τ_{max} wird der durch die Gleichverteilung gegebene Zusammenhang zu σ_τ genutzt:

$$\sigma_\tau^2 \leq \frac{(2\tau_{max})^2}{12}$$

$$\Rightarrow \tau_{max} \leq 1{,}772\cdot 10^{-9}\mathrm{s} \approx 1{,}77\,\mathrm{ns}.$$

h) Für Delta-Sigma-Umsetzer 1. Ordnung gilt näherungsweise

$$\mathrm{SNR}_{\Delta\Sigma} \approx \frac{1}{4\sin^2(\pi\frac{1}{M})}$$

und daher

$$\mathrm{SNR}_{\Delta\Sigma} \geq \mathrm{SNR}$$
$$M \geq 1096{,}62.$$

i)
- Erhöhung der Genauigkeit und Senkung der Abtastrate
- Trennung von Signal- und Rauschanteilen durch Tiefpassfilterung

Aufgabe 1: Kurvenapassung / Kennlinienanalyse (24 Punkte)

Zur Modellierung eines Leitungsdrucks sind folgende Messwerte $y(u_i)$ an den Stützstellen u_i bestimmt worden:

u_i	-4	-2	0	2
$y(u_i)$	-6	-5	2	6

Tabelle 1: Messauswertungen des Leitungsdrucks.

a) Wie lautet das Interpolationspolynom unter Verwendung des Polynomansatzes nach Lagrange? *(5 Punkte)*

b) Aufgrund einer ungenügenden Modellbildung wird ein zusätzlicher Messwert an der Stützstelle $u_4 = 1$ ermittelt: $y(1) = 4$. Berechnen Sie das neue Interpolationspolynom unter Berücksichtigung dieses Messwertes. Verwenden Sie das Ergebnis der Lagrange-Interpolation weiter und nutzen Sie den rekursiven Ansatz der Newton-Methode. *(4 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

c) Bei der Wahl eines geeigneten Messbereiches sind sowohl eine gute Linearität als auch eine hohe Empfindlichkeit der Kennlinie von Bedeutung. Geben Sie den Punkt der Kennlinie

$$f(t) = 1 + 3t - t^2 - \frac{1}{4}t^3 + \frac{1}{4}t^4$$

im Intervall $[-3, 2]$ an, um den herum der Messbereich gelegt werden muss, damit für das Messsignal die beiden Ziele erreicht werden. *(3 Punkte)*

d) Wiederum wird von dem Messsignal $f(t)$ im geänderten Intervall $I = [-4, 1]$ ausgegangen. Wählen Sie für einen auf das Intervall $[t_a, t_a + 1{,}5] \subset I$ beschränkten Messbereich den Messanfang t_a so, dass das Gütemaß Q des mittleren quadratischen Fehlers zwischen der realen Empfindlichkeit und der idealen Empfindlichkeit minimiert wird. *(3 Punkte)*

e) Die Empfindlichkeit des in Teilaufgabe c) ermittelten Arbeitspunktes soll erhöht werden. Dabei stehen Ihnen zwei identische Messwertaufnehmer zur Verfügung. Skizzieren Sie die Messanordnung zur Erhöhung der Empfindlichkeit. Wie nennt man dieses Prinzip? Wie stark ist die Krümmung der Messkennlinie im Arbeitspunkt? *(3 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Ihnen sind folgende Messwertpaare gegeben:

u_i	0	1	2	3
$y(u_i)$	3	2	1	5

f) Wieviele Kurvensegmente werden benötigt, um alle Stützstellen und ihre Zwischenwerte durch kubische Splines zu beschreiben? *(1 Punkt)*

g) Nutzen Sie das kubische Spline-Interpolationsverfahren, um $y(u)$ für $u = \frac{1}{2}$ zu bestimmen. Hierfür nicht benötigte Segmente müssen nicht berechnet werden. *(5 Punkte)*

Mess - H2012

Aufgabe 2: Stationäres Verhalten von Messsystemen (20 Punkte)

Die von einer Lampe der Temperatur T_L ausgehende Strahlung fällt auf einen Temperatursensor der Fläche A (Abbildung 2), der die Leistung $P_\mathrm{a} = \epsilon\sigma A(T_\mathrm{L}^4 - T_\mathrm{Um}^4)$ bei vorhandener Umgebungstemperatur T_Um absorbiert und selbst die Temperatur T_1 annimmt (ϵ : Emissionskoeffizient, σ : Stefan-Boltzmann-Konstante). Aufgrund der Energiebilanz ist die absorbierte Leistung P_a gleich der an die Umgebung abgegebenen Leistung $P_\mathrm{Um} = \alpha A(T_1 - T_\mathrm{Um})$, wobei α den Wärmeübergangskoeffizienten darstellt. Die am Ausgang des Sensors anliegende Spannung $U = c \cdot (T_1 - T_\mathrm{Um})$ wird gemessen, $c > 0$.

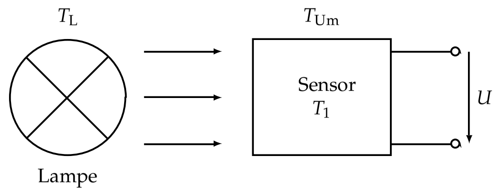


Abbildung 2: Messsystem des Temperatursensors.

a) Geben sie die Spannung U als Funktion der Temperatur T_L der Lampe an. *(2 Punkte)*

Unter Normalbedingungen sei die Umgebungstemperatur $T_\mathrm{Um} = T_0$ konstant, der Emissionskoeffizient besitze den Wert ϵ_0.

b) Berechnen Sie den relativen Fehler $F_{\mathrm{r},\epsilon}$ der Ausgangsspannung U, der durch Abweichungen $\Delta\epsilon = \epsilon - \epsilon_0$ des Emissionskoeffizienten von den Normalbedingungen entsteht. *(3 Punkte)*

c) Wie gehen Schwankungen ΔT der Umgebungstemperatur in das Ergebnis mit ein? Bestimmen Sie hierzu den relativen Fehler der Ausgangsspannung U mit dem Emissionskoeffizienten unter Normalbedingungen. *(3 Punkte)*

d) Approximieren Sie den relativen Fehler $F_{\mathrm{r},T}(\Delta T)$ mit Hilfe des Taylorpolynoms $P_1(\Delta T)$ ersten Grades um den Entwicklungspunkt $\Delta T = 0$. *(3 Punkte)*

Es wird mit dem approximierten relativen Fehler aus Teilaufgabe d) und den Werten $T_\mathrm{L} = 1100\,\mathrm{K}$, $T_0 = 300\,\mathrm{K}$ weitergerechnet.

e) Sie tolerieren in ihrem Messsystem einen durch Temperaturschwankungen ΔT hervorgerufenen approximierten Fehler $P_1(\Delta T)$, der betragsmäßig kleiner als 0,5 % ist. Wie könnten Sie sicherstellen, dass diese Grenze nicht überschritten wird? Ist dies im vorliegenden Fall für eine Verwendung des Messsystems im Außenbereich nötig? *(3 Punkte)*

Der Absorptionsgrad unter Normalbedingungen sei im Folgenden $\epsilon_0 = 0{,}8$.

f) Der Absorptionsgrad ϵ ist materialabhängig und unterliegt somit produktionsbedingten Schwankungen. Sie nehmen an, dass der Absorptionsgrad ihres Sensors normalverteilt ist mit Mittelwert $\mu_\epsilon = 0{,}8$ und Standardabweichung $\sigma_\epsilon = 0{,}02$. Wie groß ist die statistische Sicherheit, dass der relative Fehler $F_{\mathrm{r},\epsilon} \leq 5\,\%$ ist? *(4 Punkte)*

g) Ist der durch ΔT entstehende Fehler in der Messkennlinie $U = U(T_\mathrm{L})$ ein multiplikativer Fehler oder eine superponierender Fehler? (Begründung!) *(2 Punkte)*

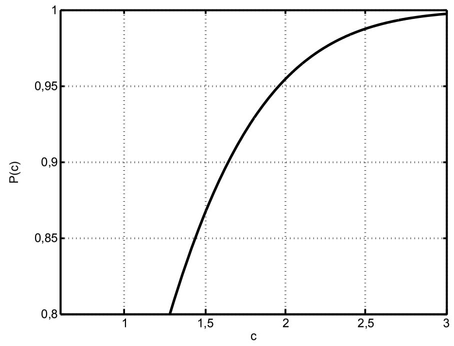


Abbildung 3: Standardnormalverteilung.

Aufgabe 3: Statistik (17 Punkte)

Im Rahmen einer Messauswertung sollen zwei Zufallsgrößen x, y näher analysiert werden. Die gemeinsame Dichte der beiden Größen ist bekannt:

$$f(x,y) = K \cdot 1_B(x,y), \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < y < 1, \;\; y-2 < x < y\}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Die Variable 1_B bezeichnet hierbei die Indikatorfunktion, also

$$1_B(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in B, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie den Bereich, in welchem die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen ungleich null ist. Berechnen Sie den Wert der Konstante K. *(3 Punkte)*

b) Berechnen Sie die Randdichten $f_x(x), f_y(y)$ der Zufallsvariablen x, y. Berechnen und skizzieren Sie zudem den Verlauf der dazugehörigen Verteilungsfunktionen. *(5 Punkte)*

c) Berechnen Sie die Erwartungswerte E{x}, E{y}, E{xy}. Sind die Variablen x, y voneinander unabhängig? (Begründung) *(4 Punkte)*

d) Besitzen die Variablen x, y einen positiven Korrelationskoeffizienten, einen negativen Korrelationskoeffizienten oder nimmt dieser den Wert null an? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe der Skizze aus Teil a). *(3 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den vorherigen.

e) Wie ist die Prüfgröße bei einem Signifikanztest für den Stichprobenmittelwert verteilt, falls Sie die Varianz vorab nicht kennen? Aus welchen Verteilungen resultiert diese Verteilung? *(2 Punkte)*

Aufgabe 4: Korrelation (18 Punkte)

Sie haben in Abbildung 6 das mit Rauschen überlagerte Signal $x(t)$ gegeben.

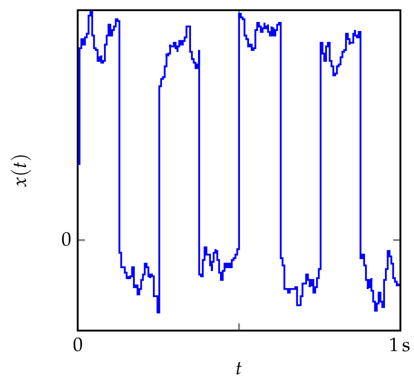


Abbildung 6: Zeitsignal $x(t)$.

a) Zeichnen Sie die Autokorrelationsfunktion $r_{xx}(\tau)$ und die Autoleistungsdichte $S_{xx}(f)$ des Zeitsignals $x(t)$. Begründen Sie Ihre Lösung. Beschriften und beziffern Sie die Koordinatenachsen. *(4 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

b) Sie verwenden einen Schieberegister mit der Wortlänge $N = 5$ zur Erzeugung einer PRBS (pseudo-random binary sequence). Die Taktfrequenz des Schieberegisters liegt bei 100 Hz. Nach wievielen Sekunden wiederholt sich die Sequenz? Für welche Frequenzen besitzt die Autoleistungsdichte dieser PRBS Werte ungleich null? *(2 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

Ein Sinussignal $u(t) = \sin(2\pi f_0 t) + C$ wird durch ein LTI-System mit der Übertragungsfunktion $G(f) = \frac{1}{1+j2\pi f L/R}$ verzerrt und anschließend mit einem zu $u(t)$ unkorrelierten, additiven Störsignal $n(t)$ überlagert. Sie wollen das ursprüngliche Signal so rekonstruiren, dass die Leistung des Differenzsignals zwischen ursprünglichem Signal und dessen Rekonstruktion minimal wird. Sie verwenden hierzu ein Filter mit der Übertragunsfunktion $H(f)$.

c) Wie heißt das zu verwendende Filter und müssen Sie hier die Mittelwertfreiheit des Störsignals zwingend voraussetzen? *(2 Punkte)*

d) Bestimmen Sie $H(f)$, wenn das Störsignal die AKF $r_{nn}(\tau) = A \cdot \delta(\tau)$ besitzt. Skizzieren Sie sowohl Real- als auch Imaginärteil von $H(f)$ für $A = \frac{1}{4(1+(2\pi f L/R)^2)}$ und $C = \frac{1}{2}$. *(5 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

e) Zwei stochastische, stationäre Signale $x(t)$ und $y(t)$ werden zu $z(t) = x(t) - y(t)$ subtrahiert. Geben Sie allgemein die resultierende Autokorrelationsfunktion $r_{zz}(\tau)$ des Signals $z(t)$ an. *(2 Punkte)*

f) Die beiden Signale $\mathtt{x}(t)$ und $\mathtt{y}(t)$ werden nun gemäß

$$\mathtt{x}(t) = A + \mathtt{e}(t) \quad , \quad r_{\mathtt{ee}}(\tau) = \sigma_{\mathtt{e}}^2 \cdot \mathrm{e}^{-|\tau|}$$

$$\mathtt{y}(t) = B + \mathtt{n}(t) \quad , \quad r_{\mathtt{nn}}(\tau) = \sigma_{\mathtt{n}}^2 \cdot \mathrm{e}^{-|2\tau|}$$

belegt, wobei die Signale je einen deterministischen Gleichanteil A und B besitzen. Die auftretenden Rauschanteile $\mathtt{e}(t)$ und $\mathtt{n}(t)$ seien mittelwertfrei und statistisch unabhängig vom jeweils anderen Signal. Wie groß ist die mittlere Leistung $\overline{P_z}$ des resultierenden (subtrahierten) Signals $\mathtt{z}(t)$? *(3 Punkte)*

Aufgabe 5: Quantisierung und Abtastung (21 Punkte)

Sie wollen das Signal $y(t)$ für $t \in [-1, 1]$ aus Abbildung 9 bestmöglich mit zwei Bit quantisieren.

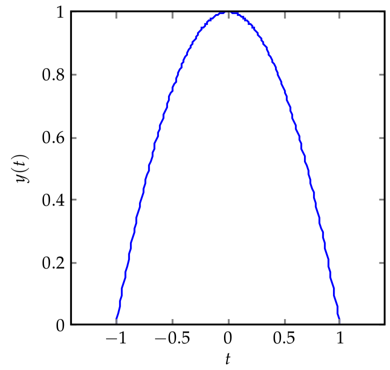


Abbildung 9: Zu quantisierendes Signal.

a) Geben Sie eine mathematische Beschreibung des gegebenen Signals $y(t)$ an. *(1 Punkt)*

b) Geben Sie die Amplitudendichte $f_y(y)$ des Signals an. Nehmen Sie an, dass die Zufallsvariable $\mathtt{t}$ im Intervall $[-1, 1]$ gleichverteilt sei. *(3 Punkte)*

c) Skizzieren Sie die Quantisierungskennlinie $y_q(y)$ für den Fall, dass Sie das Signal mit zwei Bit quantisieren und der Amplitudenbereich gleichmäßig unterteilt wird. *(2 Punkte)*

d) Geben Sie nun die Quantisierungskennlinie $y_{q2}(y)$ an für den Fall, dass Sie das Signal ebenfalls mit zwei Bit quantisieren, aber der Amplitudenbereich so quantisiert ist, dass jede Stufe die gleiche Auftrittswahrscheinlichkeit besitzt und das Quantisierungsniveau jeweils in der Mitte einer Stufe liegt. Fügen Sie die Kennlinie ihrer Skizze aus der vorherigen Teilaufgabe hinzu.

Hinweis: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a}$. *(5 Punkte)*

e) Welche der beiden Quantisierungskennlinien würden Sie bevorzugen und weshalb? *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von der vorherigen.

Sie möchten zwei weitere Signale $a(t)$ und $b(t)$ digitalisieren. Beide Signale besitzen Amplituden im Intervall $[-1, 1]$. Signal $a(t)$ ist dabei sinusförmig und bei Signal $b(t)$ kann die Amplitude im gegebenen Intervall als gleichverteilt angenommen werden.

f) Für welches Signal kann das Quantisierungstheorem ideal erfüllt werden? Begründen Sie Ihre Antwort. *(1 Punkt)*

g) Nehmen Sie an, dass das Quantisierungstheorem in beiden Fällen erfüllt sei und geben Sie jeweils die Anzahl der mindestens benötigten Bits für eine Quantisierung mit einem SNR von über 92 dB an.

Hinweis: Beachten Sie die Leistung der Signale. *(4 Punkte)*

h) Errechnen Sie für $a(t)$ den maximal zulässigen zeitlichen Abtastfehler $\tau_{\max}$, falls das Abtasttheorem bei einer Abtastfrequenz von $f_A = 50\,\mathrm{kHz}$ gerade erfüllt wird. *(3 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den vorherigen.

i) Wie ist der Quantisierungsfehler des diskreten Zählergebnisses bei der Periodendauermessung verteilt? *(1 Punkt)*

Lösung

Aufgabe 1:]

a) Die Lagrange-Interpolation mit vier Stützstellen führt zu folgendem Polynom:

$$\begin{aligned} y_L(u) &= y(u_0)\frac{(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)}{(u_0-u_1)(u_0-u_2)(u_0-u_3)} + y(u_1)\frac{(u-u_2)(u-u_3)(u-u_0)}{(u_1-u_2)(u_1-u_3)(u_1-u_0)} \\ &+ y(u_2)\frac{(u-u_3)(u-u_0)(u-u_1)}{(u_2-u_3)(u_2-u_0)(u_2-u_1)} + y(u_3)\frac{(u-u_0)(u-u_1)(u-u_2)}{(u_3-u_0)(u_3-u_1)(u_3-u_2)} \\ &= -6\frac{u^3-4u}{-48} - 5\frac{u^3+2u^2-8u}{16} + 2\frac{u^3+4u^2-4u-16}{-16} + 6\frac{u^3+6u^2+8u}{48} \\ &= -\frac{3}{16}u^3 - \frac{3}{8}u^2 + \frac{7}{2}u + 2. \end{aligned}$$

b) Der Ansatz für Newton-Polynome lautet:

$$\begin{aligned} y_N(u) &= a_0 + a_1(u-u_0) + a_2(u-u_0)(u-u_1) \\ &+ \cdots + a_{n-1}(u-u_0)(u-u_1)\cdots(u-u_{n-2}). \end{aligned}$$

Somit lässt sich die um eine neue Stützstelle erweiterte Interpolationsfunktion darstellen als

$$y_{\mathrm{Erw}}(u) = y_L(u) + a_4(u-u_0)(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3).$$

Ausgewertet am Punkt $u = u_4 = 1$ mit $y(u_4) = 4$ lässt sich der Koeffizient a_4 zu $\frac{1}{16}$ bestimmen, womit

$$y_N(u) = \frac{1}{16}u^4 + \frac{1}{16}u^3 - \frac{5}{8}u^2 + \frac{5}{2}u + 2.$$

c) Prüfen auf Wendepunkte:

$$f' = t^3 - \frac{3}{4}t^2 - 2t + 3; \quad f'' = 3t^2 - \frac{3}{2}t - 2; \quad f''' = 6t - \frac{3}{2}$$

$$f'' = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{105}{144}}$$

Da die dritte Ableitung in beiden Fällen ungleich null ist, besitzt die Kennlinie 2 Wendepunkte, weswegen derjenige mit der größeren Empfindlichkeit gewählt wird:

$$t_1 = 1{,}1039 \qquad f'(t_1) = 1{,}22$$
$$t_2 = -0{,}6039 \quad f'(t_2) = 3{,}71 \Rightarrow \text{Arbeitspunkt: } t_2$$

d) Q wird minimal für $S(t_a) = S(t_a + 1,5)$

$$t_a^3 - \frac{3}{4}t_a^2 - 2t_a + 3 = (t_a+1,5)^3 - \frac{3}{4}(t_a+1,5)^2 - 2(t_a+1,5) + 3$$

$$\begin{aligned} 0 &= 9t_a^2 + 9t_a - \frac{21}{8} \Rightarrow t_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{13}{24}} \\ t_1 &= 0{,}236 \quad \text{Intervallende } t_1 + 1,5 \text{ außerhalb von Intervall.} \\ t_2 &= -1{,}236 = t_a \end{aligned}$$

e) Durch Parallelschaltung zweier identischer Meßwertaufnehmer wird eine Differenzkennlinie erzeugt (Abbildung 1), das Verfahren heisst entsprechend Differenzmethode. Alle geraden Terme der ursprünglichen Kennlinie werden bei der Differenzmethode eliminiert, entsprechend wird auch die Krümmung zu null.

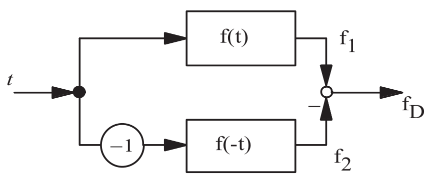


Abbildung 1: Parallelschaltung zweier Meßwertaufnehmer.

f) Es werden drei Segmente benötigt.

g) Für die gewünschte Interpolation ist nur das erste Segment s_0 zu berechnen, da $u = \frac{1}{2}$ zwischen u_0 und u_1 liegt. Mit den Eigenschaften $y_0'' = y_3'' = 0$ vereinfacht sich das zu lösende Gleichungssystem somit zu:

$$\begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1'' \\ y_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{h_1}(y_2-y_1) - \frac{6}{h_0}(y_1-y_0) \\ \frac{6}{h_2}(y_3-y_2) - \frac{6}{h_1}(y_2-y_1) \end{pmatrix}.$$

Mit $h_0 = h_1 = h_2 = 1$ lassen sich $y_1'' = -2$ und $y_2'' = 8$ bestimmen und sich die Koeffizienten des ersten Segments berechnen:

$$a_0 = \frac{1}{6}(y_1'' - y_0'') = \frac{1}{6} - 2 = -\frac{1}{3}$$
$$b_0 = \frac{1}{2}y_0'' = 0$$
$$c_0 = (y_1 - y_0) - \frac{1}{6}(y_1'' + 2y_0'') = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$
$$d_0 = y_0 = 3.$$

Das Segment $s_0(u)$ ergibt sich also zu

$$s_0(u) = a_0(u-u_0)^3 + b_0(u-u_0)^2 + c_0(u-u_0) + d_0 = -\frac{1}{3}u^3 - \frac{2}{3}u + 3$$

und führt zum gesuchten wert $s_0(\frac{1}{2}) = 2{,}625$.

Mess - H2012

Aufgabe 2:

a) Werden die gegebenen Gleichungen ineinander eingesetzt, so folgt

$$\epsilon\sigma A(T_\mathrm{L}^4 - T_\mathrm{Um}^4) = \alpha A(T_1 - T_\mathrm{Um}) = \alpha A\frac{U}{c}.$$

Damit lässt sich die Spannung berechnen zu

$$U = \frac{c\epsilon\sigma}{\alpha}(T_\mathrm{L}^4 - T_\mathrm{Um}^4).$$

b) Für den relativen Fehler ergibt sich

$$F_{\mathrm{r},\epsilon} = \frac{\frac{c(\epsilon_0+\Delta\epsilon)\sigma}{\alpha}(T_\mathrm{L}^4 - T_\mathrm{Um}^4) - \frac{c\epsilon_0\sigma}{\alpha}(T_\mathrm{L}^4 - T_\mathrm{Um}^4)}{\frac{c\epsilon_0\sigma}{\alpha}(T_\mathrm{L}^4 - T_\mathrm{Um}^4)} = \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_0}.$$

c) Der relative Fehler bei Temperaturschwankungen beträgt:

$$F_{\mathrm{r},T} = \frac{(T_\mathrm{L}^4 - (T_0+\Delta T)^4) - (T_\mathrm{L}^4 - T_0^4)}{T_\mathrm{L}^4 - T_0^4} = \frac{T_0^4 - (T_0+\Delta T)^4}{T_\mathrm{L}^4 - T_0^4}.$$

d) Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{r},T}}{\mathrm{d}(\Delta T)} = \frac{-4}{T_\mathrm{L}^4 - T_0^4}(T_0+\Delta T)^3, \text{ folglich ist } \left.\frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{r},T}}{\mathrm{d}(\Delta T)}\right|_{\Delta T=0} = \frac{-4}{T_\mathrm{L}^4 - T_0^4}T_0^3.$$

Für das Taylorpolynom 1. Grades gilt

$$F_{\mathrm{r},T} \approx P_1(\Delta T) = \frac{-4}{T_\mathrm{L}^4 - T_0^4}T_0^3\Delta T.$$

e) Durch eine geeignete Abschirmung, beispielsweise Thermostatisierung, lassen sich Schwankungen vermeiden. Mit dem Ansatz

$$\left|\frac{-4}{(T_\mathrm{L}^4 - T_0^4)}T_0^3\Delta T\right| \le 0{,}005 \quad \text{folgt für die Temperaturschwankung} \quad |\Delta T| \le 67{,}4\,\mathrm{K}.$$

Ausgehend von $T_0 \approx 27\,°\mathrm{C}$ könnte die Außentemperatur also zwischen etwa $-40\,°\mathrm{C}$ und 94 °C liegen, ohne dass die Fehlergrenze überschritten wird. Somit ist eine Thermostatisierung für gewöhnlich nicht notwendig.

f) Um einen relativen Fehler kleiner als 5 % zu erhalten, muss die Abweichung kleiner sein als:

$$\Delta\epsilon \le F_{\mathrm{r},\epsilon} \cdot \epsilon_0 = 0{,}04$$

Um für eine normalverteilte Größe die statistische Sicherheit zu berechnen, wird die gegebene Verteilung zu einer Standardnormalverteilung normiert, so dass sich mit der bekannten Standardabweichung die Wahrscheinlichkeit für das gegebene Konfidenzintervall c aus der gegebenen Abbildung 3 ablesen lässt:

$$P(c) = P\left\{\frac{|\Delta\epsilon|}{\sigma_\epsilon}\right\} = P(2) = 95{,}45\%$$

g) Die Messkennlinie ist

$$U(T_\mathrm{L}) = \frac{c\epsilon\sigma}{\alpha}T_\mathrm{L}^4 - \frac{c\epsilon\sigma}{\alpha}(T_0+\Delta T)^4.$$

Der durch den Fehler ΔT verursachte Offset ist von T_L unabhängig und damit für alle Eingangswerte identisch, der Fehler ist superponierend.

Aufgabe 3:

a) Die gemeinsame Dichte $f(x,y)$ nimmt im schraffierten Bereich den Wert 1 an, ansonsten den Wert 0.

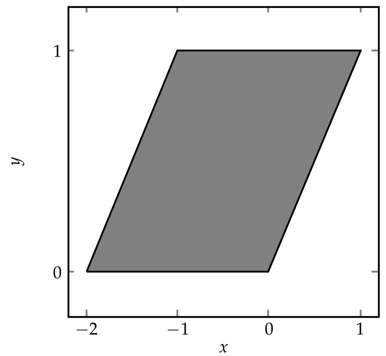


Abbildung 4: Wertebereich der gemeinsamen Dichte.

Damit $f(x,y)$ eine Dichte ist, muss $\int\int f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$ gelten. Die schraffierte Fläche aus Abbildung 4 besitzt die Fläche 2, folglich gilt $K = 1/2$.

b) Die Berechnung der Randdichten ergibt:

$$f_{\mathrm{x}}(x) = \int_{y=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} 1_B(x,y)\mathrm{d}y = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -2 \text{ und } x > 1 \\ (x+2)/2 & \text{für } -2 \le x < -1 \\ 1/2 & \text{für } -1 \le x < 0 \\ (1-x)/2 & \text{für } 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$f_{\mathrm{y}}(y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} 1_B(x,y)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{für } y < 0 \text{ und } y > 1 \\ 1 & \text{für } -1 \le y \le 0 \end{cases}$$

Mit

$$F_{\mathrm{x}}(x) = \int_{t=-\infty}^{x} f_{\mathrm{x}}(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -2 \\ x^2/4 + x + 1 & \text{für } -2 \le x \le -1 \\ x/2 + 3/4 & \text{für } -1 \le x \le 0 \\ 3/4 + x/2 - x^2/4 & \text{für } 0 \le x \le 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

$$F_{\mathrm{y}}(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y < 0 \\ y & \text{für } -1 \le y \le 0 \\ 1 & \text{für } y > 1 \end{cases}$$

ergeben sich folgende Skizzen für die Verteilungsfunktionen $F_{\mathrm{x}}(x), F_{\mathrm{y}}(y)$:

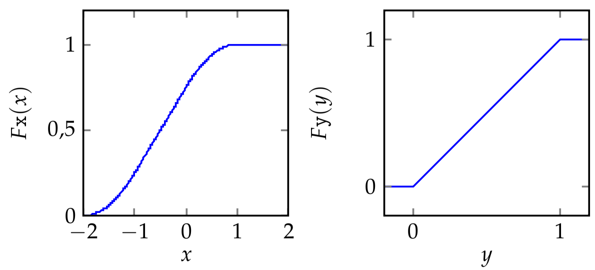


Abbildung 5: Verteilungsfunktionen von x und y.

c) Für die Erwartungswerte ergibt sich:

$$\mathrm{E}\{\mathrm{x}\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\mathrm{x}}(x)\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} \frac{(x^2+2x)}{2}\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} \frac{x}{2}\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{(x-x^2)}{2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{E}\{\mathrm{y}\} = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{\mathrm{y}}(y)\mathrm{d}y = \int_{0}^{1} y\mathrm{d}y = \frac{1}{2}$$

Mit der Beziehung

$$1_B(x,y) = 1_{\{0\le y\le 1\}} 1_{\{y-2<x<y\}}$$

folgt

$$\mathrm{E}\{\mathrm{xy}\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{\mathrm{xy}}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{y=0}^{1} \frac{y}{2} \int_{x=y-2}^{y} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{1}{6}$$

Da $\mathrm{E}\{\mathrm{x}\}\mathrm{E}\{\mathrm{y}\} \neq \mathrm{E}\{\mathrm{xy}\}$, liegt keine Unabhängigkeit vor!

d) Anhand der Skizze und auch aus der vorherigen Teilaufgabe erkennt man, dass beide Variablen x und y korreliert sind. Da sich für hohe Werte von x hohe Werte von y häufen und umgekehrt, handelt es sich um einen positiven Korrelationskoeffizienten.

e) Die gesuchte Prüfgröße ist t-verteilt, da sie sich aus dem normalverteilten Stichprobenmittelwert $\hat{\mathrm{x}}$ im Zähler und der geschätzten Stichprobenvarianz $\mathrm{s_x}$ im Nenner, die χ^2-verteilt ist, zusammensetzt.

Aufgabe 4:

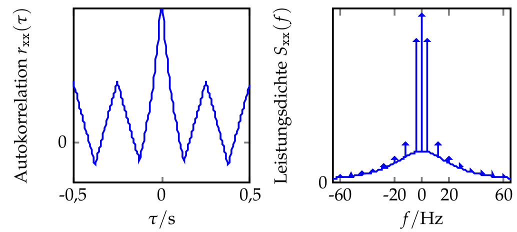


Abbildung 7: Autokorrelation und Autoleistungsdichte von $x(t)$.

a) Siehe Abbildung 7:

$x(t)$	Rechtecksignal $f_0 = 4\,\mathrm{Hz}$	Offset	farbiges Rauschen
$r_{\mathrm{xx}}(\tau)$	dreieckförmig $f_0 = 4\,\mathrm{Hz}$	Offset	Überhöhung um $\tau = 0$
$S_{\mathrm{xx}}(f)$	Impulse bei $(2\cdot k+1)f_0$	$\delta(f)$	„Glocke“ um $f = 0$.

b) Die Periodendauer einer PRBS beträgt $(2^N - 1)t_{\mathrm{A}}$. In dieser Aufgabe entspricht das:

$$T_{\mathrm{P}} = (2^5 - 1)\frac{1}{100\,\mathrm{Hz}} = 0{,}31\,\mathrm{s}$$

Somit besitzt die Autoleistungsdichte Werte bei

$$f = k \cdot \frac{1}{T_{\mathrm{P}}} = k \cdot 3{,}22\,\mathrm{Hz} \text{ für } k \in \mathbb{Z}.$$

c) Das Filter heißt Wiener-Filter. Da das Eingangssignal $u(t)$ nicht mittelwertfrei ist, muss das Störsignal mittelwertfrei sein.

d) Aus der Aufgabenstellung direkt ableitbar:

$$r_{uu}(\tau) = \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0\tau) + C^2 \text{ vgl. Beispiel 6.3 Messtechnik-Buch.}$$

$$\Rightarrow S_{uu}(f) = \frac{1}{4}\left(\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right) + C^2\delta(f) = \frac{1}{4}\left(\delta_{f_0} + \delta_{-f_0}\right) + C^2\delta_0$$

$$S_{nn} = A \qquad G(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f L/R} \qquad |G(f)|^2 = \frac{1}{1 + (2\pi f L/R)^2}$$

$$G^*(f) = \frac{1}{1 + (2\pi f L/R)^2} + j\frac{2\pi f L/R}{1 + (2\pi f L/R)^2}$$

Da $n(t)$ unkorreliert zu $u(t)$ ist, kann folgender Ansatz verwendet werden:

$$\begin{aligned}
H(f) &= \frac{S_{uu}(f)G^*(f)}{S_{uu}(f)|G(f)|^2 + S_{nn}(f)} \\
&= \frac{\frac{1}{4}\left(\delta_{f_0} + \delta_{-f_0}\right) + C^2\delta_0}{(1 + (2\pi f L/R)^2)\left(\frac{\frac{1}{4}(\delta_{f_0}+\delta_{-f_0})+C^2\delta_0}{1+(2\pi f L/R)^2} + A\right)} \\
&\quad + j2\pi f L/R \cdot \frac{\frac{1}{4}\left(\delta_{f_0} + \delta_{-f_0}\right) + C^2\delta_0}{(1 + (2\pi f L/R)^2)\left(\frac{\frac{1}{4}(\delta_{f_0}+\delta_{-f_0})+C^2\delta_0}{1+(2\pi f L/R)^2} + A\right)} \\
&= \frac{\left(\delta_{f_0} + \delta_{-f_0}\right) + 4C^2\delta_0}{\left(\delta_{f_0} + \delta_{-f_0} + 4C^2\delta_0\right) + 4\left[1 + (2\pi f L/R)^2\right] A} \\
&\quad + j2\pi f L/R \cdot \frac{\left(\delta_{f_0} + \delta_{-f_0} + 4C^2\delta_0\right)}{\left(\delta_{f_0} + \delta_{-f_0} + 4C^2\delta_0\right) + 4\left[1 + (2\pi f L/R)^2\right] A}
\end{aligned}$$

D. h. Real- als auch Imaginärteil von $H(f)$ sind nur bei $f = \pm f_0$ und der Realteil zusätzlich noch bei $f = 0$ ungleich null. Setzt man die gegebenen Werte für A und C ein, so werden an diesen Stellen die Werte $\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{\pi f_0 L}{R}$ angenommen.
Dies führt zu folgenden Skizzen:

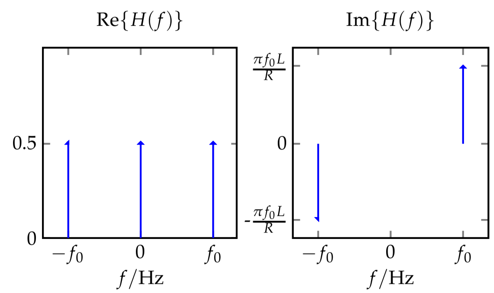


Abbildung 8: Real- und Imaginärteil von $H(f)$.

e) Die resultierende Autokorrelationsfunktion $r_{zz}(\tau)$ des Signals $z(t)$ beträgt:

$$\begin{aligned}
r_{zz}(\tau) &= E\left\{z(t)\cdot z(t+\tau)\right\} = E\left\{ [x(t) - y(t)]\cdot[x(t+\tau) - y(t+\tau)] \right\} \\
&= E\left\{x(t)\cdot x(t+\tau) - x(t)\cdot y(t+\tau) - y(t)\cdot x(t+\tau) + y(t)\cdot y(t+\tau)\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E\left\{x(t)\cdot x(t+\tau)\right\} - E\left\{x(t)\cdot y(t+\tau)\right\} - E\left\{y(t)\cdot x(t+\tau)\right\} + E\left\{y(t)\cdot y(t+\tau)\right\} \\
&= r_{xx}(\tau) - r_{xy}(\tau) - r_{yx}(\tau) + r_{yy}(\tau)
\end{aligned}$$

f) Da die auftretenden Rauschanteile $e(t)$ und $n(t)$ beide mittelwertfrei sind und statistisch voneinander unabhängig, muß gelten:

$$r_{en}(\tau) \equiv 0 \quad , \quad r_{ne}(\tau) \equiv 0$$

Für die mittlere Leistung $\overline{P}$ des resultierenden Signals $z(t)$ gilt wegen $\mu_e = \mu_n = 0$:

$$\begin{aligned}
\overline{P} &= E\left\{z(t)^2\right\} = r_{zz}(0) = r_{xx}(0) - r_{xy}(0) - r_{yx}(0) + r_{yy}(0) \\
r_{xx}(0) &= E\left\{ [A + e(t)]\cdot[A + e(t)] \right\} = A^2 + 2A\cdot\mu_e + r_{ee}(0) = A^2 + \sigma_e^2 \\
r_{yy}(0) &= E\left\{ [B + n(t)]\cdot[B + n(t)] \right\} = B^2 + 2B\cdot\mu_n + r_{nn}(0) = B^2 + \sigma_n^2 \\
r_{xy}(0) &= E\left\{ [A + e(t)]\cdot[B + n(t)] \right\} = AB + A\cdot\mu_n + B\cdot\mu_e + r_{en}(0) = AB = r_{yx}(0) \\
\Longrightarrow \quad \overline{P} &= r_{zz}(0) = A^2 - 2AB + B^2 + \sigma_e^2 + \sigma_n^2 = (A-B)^2 + \sigma_e^2 + \sigma_n^2
\end{aligned}$$

Aufgabe 5:

a) $y(t) = 1 - t^2$ für $-1 \le t \le 1$

b) Gesucht ist die Amplitudendichte $f_y(y)$, die sich über die Transformation $y = g(t) = 1 - t^2$ aus $f_t(t)$ bestimmen lässt. Unter der Annahme einer gleichverteilten Zufallsvariable t ergibt sich

$$f_t(t) = \frac{1}{2} \text{ für } t \in [-1, 1]$$

Bei der Inversion der Funktion $g^{-1}(y) = t_{1,2} = \pm\sqrt{y+1}$ erhält man zwei Lösungen. Die Ableitung $\frac{dg(t)}{dt} = -2t$ führt zur transformierten Dichte:

$$f_y(y) = \sum_{i=1}^{N} f_t(t_i)\left|\frac{dg(t)}{dt}\right|^{-1}_{t=t_i} = \sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2}\left|\frac{1}{-2t}\right|_{t=t_i} = \frac{1}{2\sqrt{1-y}}.$$

c) Siehe blaue Zeichnung in Abbildung 10.

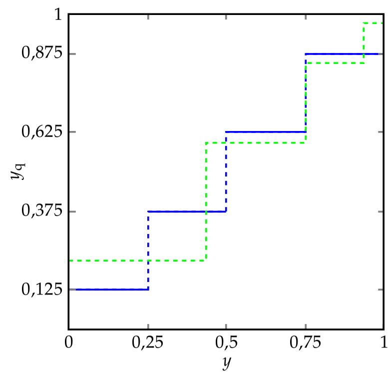


Abbildung 10: Quantisierersungskennlinien.

d) Da die Quantisierungsstufen alle die gleiche Auftrittswahrscheinlichkeit haben sollen, müssen alle vier Stufen die Wahrscheinlichkeit $p_q = \frac{1}{4}$ besitzen. Über die Verteilungsfunktion der Amplitudendichte lassen sich die hierfür nötigen Grenzen bestimmen. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ergibt sich mit gegebenem Hinweis aus der Amplitudendichte zu

$$F_{\mathrm{y}}(y) = \int_{-\infty}^{y} f_{\mathrm{y}}(u)\,\mathrm{d}u = \int_{0}^{y} \frac{1}{2\sqrt{1-u}}\,\mathrm{d}u = \left[-\sqrt{1-u}\right]_0^y = 1 - \sqrt{1-y}.$$

Nun kann man die Verteilungsfunktion der Amplitude gleich den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für die Stufen setzen und enthält die gleichwahrscheinlichen Intervalle der Amplituden:

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{y}}(y) = 1 - \sqrt{1-y} &= 0{,}25 \Rightarrow y_{0{,}25} = 0{,}4375 \\ F_{\mathrm{y}}(y) &= 0{,}5 \Rightarrow y_{0{,}5} = 0{,}75 \\ F_{\mathrm{y}}(y) &= 0{,}75 \Rightarrow y_{0{,}75} = 0{,}9375 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für die quantisierte Kennlinie $y_{\mathrm{q2}}(y)$

$$y_{\mathrm{q2}}(y) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{0+0{,}4375}{2} & \text{für } 0 \le y \le 0{,}4375 \\ 0{,}59375 & \text{für } 0{,}4375 \le y \le 0{,}75 \\ 0{,}84375 & \text{für } 0{,}75 \le y \le 0{,}9375 \\ 0{,}96875 & \text{für } 0{,}9375 \le y \le 1 \end{array} \right\}$$

Die Kennlinie ist in Abbildung 10 in grün gezeichnet.

e) Die Kennlinie des zweiten Quantisierers erzielt ein besseres Signal-Rausch-Verhältnis, da häufig vorkommende Signalamplituden dichter abgetastet werden als seltener vorkommende, und ist deshalb vorzuziehen.

f) Für keines der beiden Signale, da beide eine begrenzte Amplitude besitzen und somit eine nicht bandbegrenzte charakteristische Funktion.

g) Das SNR von Signal $a(t)$ lässt sich für N Bit mit Quantisierungsstufen q über folgende aus der Vorlesung gegebene Formel berechnen:

$$\mathrm{SNR_a} = \frac{P_{\mathrm{sig_a}}}{P_{\mathrm{stoer}}} = \frac{2^{2N-2}q^2/2}{\sigma_{e_\mathrm{q}}^2} = 2^{2N} \cdot 1{,}5.$$

Für beide Signale lässt sich die durch die Quantisierung entstehende Störleistung auf Grund des linearen Quantisierungsmodells über die Varianz des gleichverteilten Quantisierungsfehlers $\sigma_{e_\mathrm{q}^2} = \frac{q^2}{12}$ berechnen.

Die Signalleistung des gleichverteilten und mittelwertfreien Signals $b(t)$ lässt sich auch über seine Varianz bestimmen

$$P_{\mathrm{sig_b}} = \int_{-\frac{2^N q}{2}}^{\frac{2^N q}{2}} t^2 \frac{1}{2^N q}\mathrm{d}t = \frac{1}{3}q^2 2^{2N-2}$$

Somit ergibt sich das SNR von Signal $b(t)$ zu

$$\mathrm{SNR_b} = \frac{P_{\mathrm{sig_b}}}{\sigma_{e_\mathrm{q}^2}} = 2^{2N}$$

In Dezibel ergibt sich also für die beiden Signale

$$\begin{aligned} \mathrm{SNR_a}\big|_{\mathrm{dB}} &= 6{,}02 \cdot N + 1{,}76 \\ \mathrm{SNR_b}\big|_{\mathrm{dB}} &= 6{,}02 \cdot N. \end{aligned}$$

Mit der Vorgabe von 92 dB ergibt sich

$$N_\mathrm{a} = \frac{\mathrm{SNR_a}|_{\mathrm{dB}} - 1{,}76}{6{,}02} \Rightarrow 15\,\text{Bit}$$

$$N_\mathrm{b} = \frac{\mathrm{SNR_b}|_{\mathrm{dB}}}{6{,}02} \Rightarrow 16\,\text{Bit}$$

h) Die gesuchte Größe $\tau_{\max}$ ergibt sich aus seiner Varianz mit der Grenzfrequenz $f_\mathrm{g} = f_\mathrm{A}/2$

$$\mathrm{SNR_{dB}} = 10\log\left(\frac{2}{(2\pi f_\mathrm{g}\sigma_\tau)^2}\right)$$

$$\Rightarrow \sigma_\tau^2 = \left(\frac{10^{\frac{92}{10}}}{2} \cdot (2\pi 25\,\mathrm{kHz})^2\right)^{-1} = 5{,}1143 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{s}^2.$$

Zur Berechnung von $\tau_{\max}$ wird der durch die Gleichverteilung gegebene Zusammenhang zu σ_τ genutzt:

$$\sigma_\tau^2 \le \frac{(2\tau_{\max})^2}{12}$$

$$\Rightarrow \tau_{\max} \le 3{,}917 \cdot 10^{-10}\mathrm{s} \approx 0{,}39\,\mathrm{ns}.$$

i) Der Quantisierungsfehler folgt einer Dreiecksverteilung.

Aufgabe 1: Kurvenapassung / Kennlinienanalyse (19 Punkte)

Aus einer Messung sind Ihnen folgende Messwerte $y(x_i)$ an den Stützstellen x_i bekannt:

x_i	$-3{,}1$	$-2{,}2$	0	1
$y(x_i)$	3	2	7	6

Tabelle 1: Messwerte.

Zusätzlich wissen Sie, dass Sie das gegebene System nur in einem Eingangsbereich von $-3{,}1 \leq x \leq 1$ vermessen können.

a) Zunächst haben Sie keine weiteren Informationen über eine mögliche Kennlinie. Nutzen Sie ein Ihnen aus der Vorlesung bekanntes Verfahren und alle bekannten Messwerte, um den Messwert an der Stelle $x_4 = 1{,}1$ zu berechnen. *(6 Punkte)*

b) Sie stellen nun fest, dass Sie den ersten Ihrer Messwerte falsch von dem Messgerät abgeschrieben haben. Welches Berechnungsverfahren hätten Sie mit diesem Wissen in der vorherigen Aufgabe besser nicht verwendet, wenn Sie Ihre Berechnungen nun korrigieren möchten? Begründen Sie Ihre Antwort kurz. *(1 Punkt)*

c) Sie können durch weitere Überlegungen das Verhalten ihrer Messgröße auf ein Polynom 3. Ordnung eingrenzen und führen weitere Messungen durch. Mit welchem Ansatz lassen sich diese neuen Messwerte bei der Berechnung des Polynoms berücksichtigen? Geben Sie die Gleichungen für den Lösungsansatz an, ohne die Lösung explizit zu berechnen und begründen Sie Ihre Antwort. Geben Sie die Dimensionen der verwendeten Ausdrücke für eine Anzahl von N Messungen an. *(3 Punkte)*

d) Sie möchten durch weitere Messungen Ihr Modell weiter verbessern. Welche Eigenschaft benötigt Ihr Schätzer, damit dies funktioniert? *(1 Punkt)*

u_i	$-2{,}2$	0	1
$y_2(u_i)$	2	7	6

Tabelle 2: Spline-Interpolation.

e) Berechnen Sie für die angegebenen Werte die Spline-Koeffizienten für alle nötigen kubischen Splines. Sie müssen die Koeffizienten nicht in den Polynomansatz einsetzen und ausmultiplizieren. *(5 Punkte)*

f) Nennen Sie einen Vor- und einen Nachteil der Spline-Interpolation. *(2 Punkte)*

g) Eignet sich die Spline-Interpolation besser oder schlechter für eine Extrapolation im Vergleich zu einer Interpolation nach Newton oder Lagrange? Begründen Sie Ihre Antwort. *(1 Punkt)*

Aufgabe 2: Stationäres Verhalten von Messsystemen (20 Punkte)

Ihnen stehen für eine Messung zwei verschiedene Messgeräte zur Verfügung. Aus den Datenblättern erfahren Sie die beiden angegebenen Kennlinien:

$$y_1(u) = 2 \cdot \sin(u)$$
$$y_2(u) = 2 \cdot \sin(2u)\,.$$

a) Sie möchten ohne das Eingangssignal zu ändern Messungen im Bereich $2 < u < 3$ durchführen. Welches Messgerät wählen Sie? Begründen Sie Ihre Entscheidung. *(2 Punkte)*

Die folgende Messkennlinie sei gegeben: $y(x) = ax^3 + bx - cx^4\,.$

Dabei seien die Parameter folgendermaßen belegt: $a = 20c$, $b = 1$, $c = 1$.

b) Bestimmen Sie die maximale Empfindlichkeit für $x \geq -4$. *(4 Punkte)*

c) Der gewünschte Messbereich soll möglichst linear sein und eine hohe Empfindlickeit aufweisen. Nach welchem Kriterium ist der Messbereich zu wählen? Um welchen Punkt sollte er gelegt werden? *(2 Punkte)*

d) Bestimmen Sie den günstigsten Messbereich $[x_a, x_a + d]$ für $x \geq -4$ mit $d = 2$. *(4 Punkte)*

Gegeben sei ein Messergebnis y, welches sich mit Hilfe der fehlerbehafteten Einzelmessgrößen x_1, x_2 und x_3 berechnen lässt:

$$y(\mathbf{x}) = y(x_1, x_2, x_3) = 4 + x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^3 - x_3\,.$$

Die Messfehler $\Delta x_i = x_i - x_{i0}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, seien rein zufällig und betragsmäßig klein. Außerdem seien die zugehörigen Varianzen σ_1^2, σ_2^2 und σ_3^2 bekannt.

e) Berechnen Sie allgemein die Varianz σ_y^2 des Messergebnisses y in Abhängigkeit der Korrelationskoeffizienten der Einzelmessgrößen. *(3 Punkte)*

f) Berechnen Sie die Varianz σ_y^2 des Messergebnisses y für den Fall, dass x_1 und x_2 starr gebunden sind. x_3 sei dabei unkorreliert zu den anderen Messgrößen. *(1 Punkt)*

g) Beschreiben Sie was eine superponierende Störgröße kennzeichnet und durch welche Maßnahme sie unterdrückt werden kann. *(2 Punkte)*

h) Wann kann Gegenkopplung nicht zur Linearisierung eingesetzt werden? *(1 Punkt)*

i) Nennen Sie ein Beispiel zur Verschaltung von Widerstandsaufnehmern nach der Differenzmethode. *(1 Punkt)*

Aufgabe 3: Statistik (21 Punkte)

Sie wollen die Pünktlichkeit von Bussen an der Haltestelle Hertzstraße untersuchen. Hierfür haben Sie bei 11 unabhängigen Busfahrten Abweichungen vom exakten, planmäßigen Abfahrtszeitpunkt notiert, die in folgender Tabelle in Minuten angegeben sind.

0,74	0,75	0,71	0,17
0,02	-0,16	0,47	1
1 ,96	1,52	2,9	

Tabelle 3: Abweichungen von der planmäßigen Abfahrt in Minuten.

Sie wollen nun untersuchen, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Bus die Haltestelle vor seiner planmäßigen Abfahrtszeit verlässt. Dabei nehmen Sie an, dass die Abweichungen von der planmäßigen Abfahrt normalverteilt sind.

a) Berechnen Sie Stichprobenmittelwert und Stichprobenvarianz der Verteilung. *(2 Punkte)*

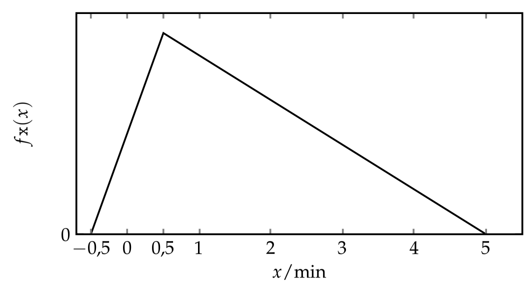
b) Skizzieren Sie die zu untersuchende Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und markieren Sie den Bereich, über den Sie integrieren müssten. *(2 Punkte)*

c) Berechnen Sie näherungsweise die gesuchte Wahrscheinlichkeit. *(3 Punkte)*

d) Nun wissen Sie zusätzlich, dass alle Busse in Karlsruhe normalverteilt im Mittel 30 Sekunden zu spät losfahren. Für welche Werte des Signifikanzniveaus α nehmen Sie die Nullhypothese an? Prüfen Sie zudem die Voraussetzungen für den Signifikanztest. *(5 Punkte)*

e) Welche Wahrscheinlichkeit wird steigen, wenn Sie α aus der vorherigen Teilaufgabe verkleinern? *(1 Punkt)*

Ein Kommilitone hat eine ähnliche Untersuchung durchgeführt und kam zu der in Abbildung 1 gegebenen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Abfahrtszeiten.



f) Berechnen Sie hier die Wahrscheinlichkeit, dass Sie den Bus verpassen, obwohl Sie rechtzeitig an der Haltestelle sind. *(2 Punkte)*

g) Berechnen Sie den Erwartungswert der Dichtefunktion in Abbildung 1. *(4 Punkte)*

h) Wie können Sie überprüfen, ob Ihre Stichprobe der in Abbildung 1 angegebenen Dichte entspricht? *(1 Punkt)*

i) Warum kann es sich bei der Dichte in Abbildung 1 nicht um eine realistische Wahrscheinlichkeitsdichte der Abfahrtszeiten handeln? *(1 Punkt)*

Aufgabe 4: Stochastische Signale (20 Punkte)

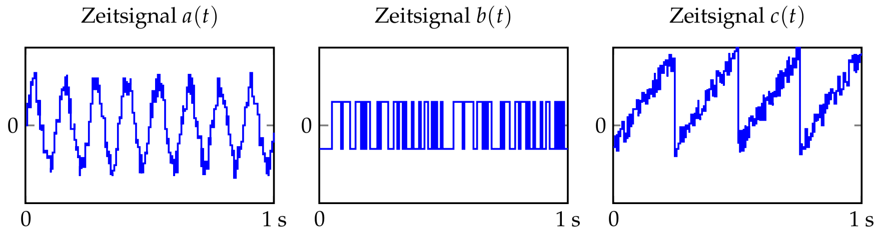


Abbildung 3: Zeitsignale.

a) Sie haben in Abbildung 3 drei teils mit weißem Rauschen überlagerte Zeitsignale gegeben. Skizzieren Sie zu jedem der drei Signale Autokorrelationfunktion und Leistungsdichte. Beschriften Sie die Achsen. Bei der Ordinate reicht es anzugeben, wo sich die Nulllinie befindet. *(9 Punkte)*

Ihnen ist die Amplitudendichte einer Musterfunktion eines stochastischen Rauschprozesses $\mathrm{y}(t)$ mit den Konstanten a, b und c gegeben:

$$\mathcal{N}(\mu = a + b \cdot t; \sigma^2 = c)\,.$$

b) Für welche Werte von a, b und c kann es sich um weißes Rauschen handeln? *(1 Punkt)*

c) Für welche Werte von a, b und c kann die Musterfunktion Teil eines schwach stationären Zufallsprozesses sein? Begründen Sie Ihre Antwort. *(2 Punkte)*

d) Für welche Werte von a, b und c kann die Musterfunktion Teil eines streng stationären Zufallsprozesses sein? Begründen Sie Ihre Antwort. *(1 Punkt)*

e) Berechnen Sie für den Fall eines weißen Gauß'schen Rauschprozesses $\mathrm{y}(t)$ den Erwartungswert $\mathrm{E}\{\mathrm{y}(t_1) \cdot \mathrm{y}(t_2)\}$. *(2 Punkte)*

f) Kann der stochastische Prozess ergodisch sein, falls er unter anderem drei Musterfunktionen mit den Parametern $c = 1$, $b = 0$ und $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 0$ besitzt? Begründen Sie Ihre Antwort. *(1 Punkt)*

Sie haben folgende Kreuzkorrelationsfunktion gegeben:

$$r_{\mathrm{xy}}(\tau) = \frac{3\tau^3 + 2\tau - 5}{2\tau - \tau^3}\,.$$

Die Signale $\mathrm{x}(t)$ und $\mathrm{y}(t)$ sind reell und stationär. Ebenso ist der Mittelwert $\mu_{\mathrm{y}} = 3$ bekannt.

g) Berechnen Sie die Kreuzkovarianzfunktion $C_{\mathrm{yx}}(\tau)$. *(4 Punkte)*

Aufgabe 5: Quantisierung und Abtastung (20 Punkte)

Sie wollen eine Signalquelle digitalisieren. Zur Beschreibung des Signals wollen Sie 3 Bit nutzen. Ihr Signal besitzt Frequenzen bis maximal 10 kHz.

a) Entwerfen Sie eine optimale Quantisierungskennlinie für einen Eingangsbereich von $-A$ bis A unter der Annahme, dass alle Amplitudenwerte gleichwahrscheinlich sind. Geben Sie sowohl die Stufenbreite q als auch die Intervallmitte der untersten Stufe an. *(2 Punkte)*

b) Wie können Sie sicherstellen, dass das Quantisierungstheorem für beliebige Eingangssignale näherungsweise erfüllt ist? *(1 Punkt)*

Sie können nun annehmen, dass das Quantisierungstheorem erfüllt ist.

c) Warum erreichen Sie mit dem gleichen Quantisierer ein besseres Signal-Rausch-Verhältnis bei sinusförmigen Signalen als bei sägezahnförmigen Signalen? *(1 Punkt)*

Sie betrachten nun ein harmonisches Signal mit oben genannten Kennwerten und Ihnen stehen drei 3-Bit Analog-Digital-Umsetzer (ADU) zur Verfügung. Ihre Signalquelle generiert Amplituden im Bereich zwischen -2 V und 2 V. Die Umsetzer unterscheiden sich jedoch in Abtastfrequenz, Abtastzeitfehler und dem nutzbaren Eingangsbereich. Alle Umsetzer haben eine „lineare“ Kennlinie. Der Abtastzeitfehler kann als gleichverteilt angenommen werden. Sie wollen nun den für das gegebene Signal besten ADU finden.

ADU	Abtastfrequenz	max. Abtastfehler	Eingangsbereich
ADU1	15 kHz	±500 ns	±2 V
ADU2	32 kHz	±5 µs	±4 V
ADU3	45 kHz	±10 µs	±2 V

Tabelle 4: ADU-Kennwerte.

d) Berechnen Sie alle für den Vergleich benötigte Signal-Rausch-Verhältnisse (SNR) aufgrund der Quantisierung. *(2 Punkte)*

e) Berechnen Sie nun die SNR aufgrund des Jitter-Fehlers. *(2 Punkte)*

f) Wählen Sie den für das gegebene Signal besten ADU und begründen Sie Ihre Antwort über das Signal-Rausch-Verhältnis. *(1 Punkt)*

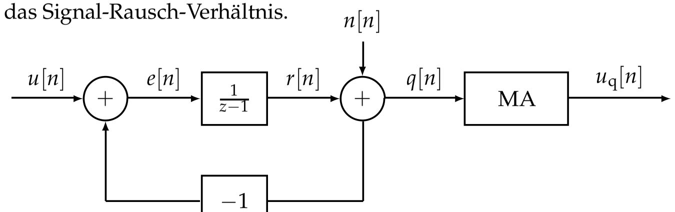


Abbildung 5: Strukturbild des Delta-Sigma-Modulators.

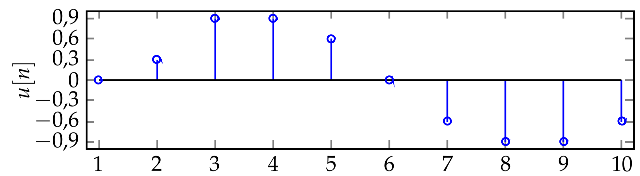


Abbildung 6: Überabgetastetes Eingangssignal des Delta-Sigma-Modulators.

Ihnen ist das bereits mit dem Überabtastfaktor $M = 5$ abgetastete Eingangssignal eines Delta-Sigma-Umsetzers in Abbildung 6 gegeben. Zusätzlich ist Ihnen das vereinfachte Schaltbild des Delta-Sigma-Umsetzers in Abbildung 5 gegeben. Der verwendete 1-Bit-Quantisierer besitzt als Ausgangswerte nur $+1$ oder -1. Dies entspricht auch der maximalen/minimalen Amplitude des Eingangssignals.

g) Geben Sie für alle 10 Zeitschritte die zeitdiskreten Verläufe der Signale $e[n]$, $q[n]$, $r[n]$ und $u_{\mathrm{q}}[n]$ an. Für den ersten Zeitschritt kann angenommen werden, dass $r[1] = 0$ und $q[1] = 1$. Bei dem Signal $u_{\mathrm{q}}[n]$ ist es ausreichend, das unterabgetastete Signal anzugeben, also das Signal zu den Zeitpunkten $n = 5$ und $n = 10$. *(6 Punkte)*

h) Welche Werte kann $u_{\mathrm{q}}[n]$ annehmen?

i) Erklären Sie, warum in realen Anwendungen der Überabtastungsfaktor oft höher gewählt wird. *(2 Punkte)*

j) Was bestimmt die Ordnung eines Delta-Sigma-Umsetzers? *(1 Punkt)*

k) Welches Verfahren bevorzugen Sie bei der digitalen Drehzahlmessung bei sehr hohen Winkelgeschwindigkeiten und warum? *(1 Punkt)*

Lösung

Aufgabe 1:

a) Da kein Wissen über die zugrundeliegende Kennlinie vorliegt, bieten sich die Interpolationsverfahren nach Newton oder nach Lagrange an. Für die Interpolation des Punktes y_4 muss zuerst das Interpolationspolynom berechnet werden.

Differenzenschema des Newton-Verfahrens:

x	$\Delta^0 y = y$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
$-3{,}1$	3			
		$\frac{-1}{0{,}9} = -\frac{10}{9}$		
$-2{,}2$	2		$\frac{\frac{335}{99}}{3{,}1} = \frac{3350}{3069}$	
		$\frac{5}{2{,}2} = \frac{25}{11}$		$\frac{-\frac{45}{44}-\frac{3350}{3069}}{4{,}1} = -0{,}5157$
0	7		$\frac{-\frac{36}{11}}{3{,}2} = -\frac{45}{44}$	
		$\frac{-1}{1} = -1$		
1	6			

Der Newton-Ansatz bei 4 Stützstellen lautet:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{\text{New}}(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) \\ &\quad + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ &= \Delta^0 y + \Delta^1 y(x-x_0) + \Delta^2 y(x-x_0)(x-x_1) \\ &\quad + \Delta^3 y(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\,.\end{aligned}$$

Einsetzen der Werte aus dem Differenzenschema ergibt:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{\text{New}}(x) &= 3 - \frac{10}{9}(x+3{,}1) + \frac{3350}{3096}(x+3{,}1)(x+2{,}2) \\ &\quad - 0{,}5157(x+3{,}1)(x+2{,}2)(x+0) \\ &= -0{,}5157x^3 - 1{,}6415x^2 + 1{,}1572x + 7\,.\end{aligned}$$

Berechnen der Stützstelle $y_4(1{,}1)$ ergibt:

$$y_4(1{,}1) = \tilde{y}_{\text{New}}(x = 1{,}1) = 5{,}6\,.$$

b) Falsche Eingangsgrößen (x-Werte) bedeuten für das Lagrange-Verfahren, dass alle Terme neu berechnet werden müssen, während beim Differenzschema des Newton-Verfahrens nur ein Ast korrigiert werden muss. In diesem Fall ist der Fehler allerdings auf den Anzeigewert y beschränkt, so dass es ausreicht nur den entsprechenden y-Wert zu ersetzen ohne die Lagrange-Polynome neu zu berechnen. Somit wäre es hier aufwändiger ein angewandtes Newton-Verfahren zu korrigieren.

c) Da nun mehr Messwerte zu Verfügung stehen als für die Berechnung der Koeffizienten des Polynoms nötig sind, kann ein Least-Squares-Ansatz gewählt werden, um eventuelle Messfehler zu unterdrücken.
Das LS-Gleichungssystem lautet: $\mathbf{y} = \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{b}$ mit:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \text{ mit Dimension } N \times 1 \qquad \mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & x_N^3 \end{pmatrix} \text{ mit Dimension } N \times 4$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \text{ mit Dimension } N \times 1\,.$$

Mit der Pseudoinversen berechnet man die Koeffizienten a, b, c und d:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = (\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}\,.$$

Anschließend kann man die fehlenden Werte über die berechneten Koeffizienten berechnen:

$$y_{\text{neu}}(x_{\text{neu}}) = a + b \cdot x_{\text{neu}} + c \cdot x_{\text{neu}}^2 + d \cdot x_{\text{neu}}^3\,.$$

d) Damit die Unsicherheit des Schätzergebnisses bei wachsendem Stichprobenumfang sinkt, muss der Schätzer konsistent sein.

e) Für die gegebenen Werte können das erste und zweite Segment s_0 und s_1 berechnet werden. Mit den Eigenschaften $y_0'' = y_2'' = 0$ vereinfacht sich das zu lösende Gleichungssystem somit zu:

$$\left(\, 2(h_0 + h_1) \,\right)\left(\, y_1'' \,\right) = \left(\, \tfrac{6}{h_1}(y_2 - y_1) - \tfrac{6}{h_0}(y_1 - y_0) \,\right)\,.$$

Mit $h_0 = 2{,}2$ und $h_1 = 1$ lässt sich $y_1'' = -\frac{135}{44}$ bestimmen und sich die Koeffizienten des ersten Segments berechnen:

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{6 \cdot h_0}(y_1'' - y_0'') = \frac{1}{6 \cdot 2{,}2} \cdot -\frac{135}{44} = -\frac{225}{968} = -0{,}2324 \\ b_0 &= \frac{1}{2}y_0'' = 0 \\ c_0 &= \frac{1}{h_0}(y_1 - y_0) - \frac{h_0}{6}(y_1'' + 2y_0'') = \frac{5}{2{,}2} + \frac{2{,}2}{6} \cdot \frac{135}{44} = \frac{299}{88} = 3{,}3978 \\ d_0 &= y_0 = 2\,.\end{aligned}$$

Das zweite Segment s_1 besitzt die Koeffizienten:

$$a_1 = 0{,}511 \qquad b_1 = -\frac{135}{88} \qquad c_1 = \frac{1}{44} \qquad d_1 = y_0 = 7.$$

f) Vorteil: Beschreibung komplexer Kurven durch einfache Polynome
Nachteil: Anfällig für Rauschen

g) Da die Spline-Interpolation zu lokalen Polynomen führt, ist deren Aussagekraft über Punkte außerhalb dieses Bereichs geringer als bei der Verwendung von globalen Polynomen wie beispielsweise bei der Newton-/Lagrange-Interpolation.

Aufgabe 2:

a) Sie wählen das Messgerät 1, da Sie ansonsten Ihren Messwerten nicht eindeutig einen Eingangswert zuordnen können.

b) Die Empfindlichkeit berechnet sich zu $S = \dfrac{\partial f}{\partial x} = 60x^2 + 1 - 4x^3\,.$

Ein Extremwert ist erreicht für: $S' = 12x(10 - x) \stackrel{!}{=} 0\,.$

Diese Gleichung ist für $x_1 = 0$ und $x_2 = 10$ erfüllt. Das Maximum errechnet sich durch

$$\begin{aligned}S'' &= 120 - 24x \\ S''(x_1) &= 120 \Rightarrow \text{Minimum} \\ S''(x_2) &= -120 \Rightarrow \text{Maximum}\end{aligned}$$

zu $S_{\max} = S(x_2) = 2001\,.$

c) Um das gewünschte Ziel zu erreichen, muss idealerweise als Arbeitspunkt ein Wendepunkt gewählt werden. Ein Wendepunkt liegt genau dann vor, wenn $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$ ist. Damit kommen nach Aufgabenteil **b)** als Arbeitspunkte $x_1 = 0$ und $x_2 = 10$ in Frage. Da eine möglichst hohe Empfindlichkeit gefordert wird, muss also der Arbeitspunkt zu $x_2 = 10$ gewählt werden.

d) Zur Bestimmung des günstigsten Messbereiches wird folgende Gleichung angesetzt:

$$S(x_a + 2) - S(x_a) \stackrel{!}{=} 0$$

Das Lösen dieser Gleichung $S(x_a+2) - S(x_a) = -24x_a^2 + 192x_a + 208 \overset{!}{=} 0$ führt zu $x_{a1} = 8{,}9666$ oder $x_{a2} = -0{,}9666$. Aufgrund der Wahl des Arbeitspunktes ergibt sich der Messbereich mit $x_a = 8{,}9666$ zu $8{,}9666 \leq x \leq 10{,}9666$.

e) Zunächst werden die partiellen Ableitungen gebildet:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 2x_1 \qquad \frac{\partial y}{\partial x_2} = x_2^2 \qquad \frac{\partial y}{\partial x_3} = -1\,.$$

Nun kann die resultierende Varianz berechnet werden:

$$\sigma_y^2 = 4x_{10}^2\sigma_1^2 + x_{20}^4\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 4x_{10}x_{20}^2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} - 4x_{10}\sigma_1\sigma_3\rho_{13} - 2x_{20}^2\sigma_2\sigma_3\rho_{23}\,.$$

f) Durch die Angabe kann auf die jeweiligen ρ_{ij} geschlossen werden: $\rho_{12} = 1$. Alle anderen Korrelationskoeffizienten sind null:

$$\sigma_y^2 = 4x_{10}^2\sigma_1^2 + x_{20}^4\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 4x_{10}x_{20}^2\sigma_1\sigma_2\,.$$

g) Eine superponierende Störgröße wirkt additiv auf die Messgröße ein und ist unabhängig von der Eingangsgröße ($e(u,z) = e(z)$). Sie ist leicht durch die Differenzmethode zu entfernen.

h) Gegenkopplung kann nicht eingesetzt werden, wenn kein Übertragungsglied existiert, das ein Signal in der gleichen physikalischen Größe wie das Messsignal liefert.

i) Messbrücke.

Aufgabe 3:

a) Der Stichprobenmittelwert berechnet sich zu: $\hat{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0{,}9164\,.$

Die Stichprobenvarianz berechnet sich zu: $s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{x})^2 = 0{,}8216\,.$

b) Abbildung 2 zeigt die gesuchte Skizze mit blauer Fläche für Werte kleiner null.

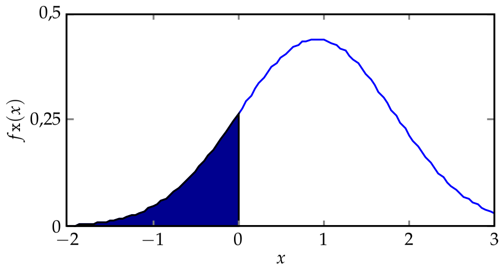


Abbildung 2: Dichte.

c) Um die gesuchte Wahrscheinlichkeit in Tabellen nachschlagen zu können, muss die Verteilung zuerst auf Standardnormalform gebracht werden. Somit berechnet sich die Größe c zu:

$$c = \frac{|0 - \hat{x}|}{\sqrt{s_x^2}} = \frac{0{,}9164}{\sqrt{0{,}8216}} = 1{,}011\,.$$

Die Variable c beschreibt allerdings das zweiseitige Konfidenzintervall. Da aber nur die Wahrscheinlichkeit von Interesse ist, dass ein Bus vor der planmäßigen Zeit abfährt, ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu:

$$P_{\text{frueh}} = \frac{1 - P(c)}{2} \approx \frac{1 - P(1)}{2} = \frac{1 - 0{,}6827}{2} = 15{,}9\,\%\,.$$

d) Bevor der Signifikanztest durchgeführt werden kann, müssen die Voraussetzungen geprüft werden: Die Messwerte werden als unabhängig angenommen und die Grundgesamtheit ist in der Aufgabenstellung als normalverteilt angegeben.
Die Nullhypothese lautet in diesem Fall: $H_0 : \hat{x} = \mu_0 = 0{,}5\,.$

Da die Varianz durch die Stichprobenvarianz geschätzt wurde, erhalten wir eine t-verteilte Prüfgröße mit $n = 10$ Freiheitsgraden:

$$t = \frac{|\hat{x} - \mu_0|}{s_x}\sqrt{n} = 1{,}6027 \qquad \text{Damit ergibt sich:} \qquad P_{10}(t) = 85{,}9318\%$$

Für die Annahme der Hypothese muss $P_{10}(t) \leq 1 - \alpha$ sein. Somit wird die Hypothese angenommen, falls:

$$\alpha \leq 1 - 0{,}859318 = 0{,}1407\,.$$

e) Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art (Bestätigung der Nullhypothese trotz signifikanter Abweichung) wird steigen.

f) Zuerst muss sichergestellt werden, dass es sich bei der Dichte um eine gültige Wahrscheinlichkeitsdichte handelt. Die Fläche muss also in der Summe eins ergeben. Somit kann die Höhe A bestimmt werden:

$$1 = \frac{1}{2}(A \cdot 1 + A \cdot 4{,}5)$$

$$A = \frac{2}{5{,}5} = \frac{4}{11} = 0{,}3636\,.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit lässt sich berechnen, indem wir $P(x < 0)$ berechnen, was der Dreiecksfläche von $-0{,}5$ bis 0 entspricht.

$$P(x < 0) = \frac{0{,}5 \cdot \frac{A}{2}}{2} = 4{,}545\%$$

g) Der Mittelwert lässt sich über Auswertung der Integrale oder über den allgemeinen Zusammenhang für den Erwartungswert für Dreiecksverteilungen berechnen:

$$\mathrm{E}\{x\} = \frac{a+b+c}{3} = \frac{-0{,}5+0{,}5+5}{3} = \frac{5}{3}$$

oder

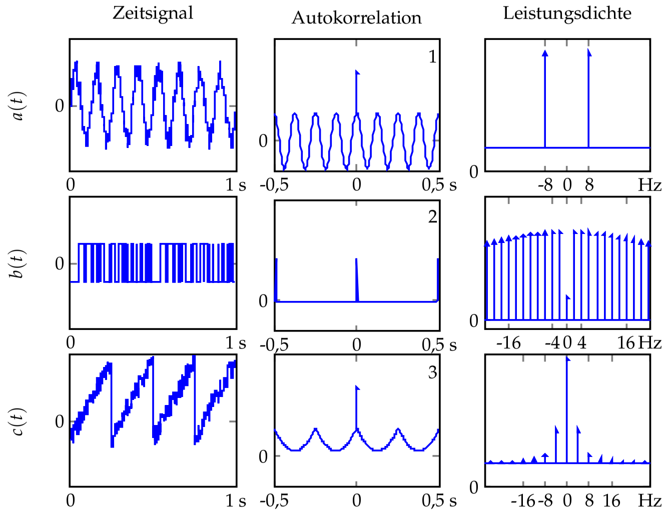
$$\mathrm{E}\{x\} = A \cdot \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(x + \frac{1}{2}\right) x\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{5} \left(-\frac{2}{9}x + \frac{10}{9}\right) x\,\mathrm{d}x\right) = A\left(\frac{1}{12} + \frac{9}{2}\right) = \frac{5}{3}\,.$$

h) Die Anpassung einer Stichprobe an eine beliebige Wahrscheinlichkeitsdichte lässt sich mit dem χ^2-Test überprüfen.

i) Da die Wahrscheinlichkeiten für Verspätungen über 5 Minuten oder Fahrten, die mehr als 30 Sekunden vor planmäßiger Abfahrt starten, gleich null sind, kann es sich nicht um eine realistische Dichte handeln.

Aufgabe 4:

a) Abbildung 4 zeigt die vollständige Zuordnung der Signale.



b) Weißes Rauschen setzt Mittelwertfreiheit voraus, so dass $a = b = 0$ erfüllt sein muss. c kann beliebig größer null gewählt werden.

c) Bei beliebigem $c \geq 0$ darf der Mittelwert nicht von der Zeit abhängen, so dass a beliebig ist, aber $b = 0$ gewählt werden muss.

d) Bei Normalverteilungen ist schwache Stationarität gleichbedeutend mit strenger Stationarität.

e) Da $\mathrm{y}(t)$ ein weißer Gauß'scher Rauschprozess ist, sind unterschiedliche Zeitpunkte unkorreliert. Somit ergibt sich: $\mathrm{E}\{\mathrm{y}(t_1) \cdot \mathrm{y}(t_2))\} = c \cdot \delta(t_1 - t_2)$.

f) Der Prozess kann nicht ergodisch sein, da hierfür alle Scharmittelwerte gleich allen Zeitmittelwerten sein müssten.

g) Wegen fehlender Periodizität nehmen wir an, dass $\mathrm{x}(t)$ und $\mathrm{y}(t)$ für große Verschiebungen von τ unkorreliert sind, $\lim\limits_{\tau\to\infty} r_{\mathrm{xy}}(\tau) = \mu_{\mathrm{x}} \cdot \mu_{\mathrm{y}}$. Somit ergibt sich nach Grenzwertbildung μ_{x}=-1. Mit der Symmetrieeigenschaft und dem Zusammenhang zwischen Kovarianz und Korrelation lässt sich $C_{\mathrm{yx}}(\tau) = r_{\mathrm{xy}}(-\tau) - \mu_{\mathrm{x}}\mu_{\mathrm{y}}$ berechnen und ergibt sich zu:

$$C_{\mathrm{yx}}(\tau) = \frac{-3\tau^3 - 2\tau - 5}{-2\tau + \tau^3} + 3 = \frac{-8\tau - 5}{-2\tau + \tau^3}.$$

Aufgabe 5:

a) Die für alle Stufen gleiche Stufenbreite berechnet sich zu: $q = \frac{2A}{2^N} = \frac{A}{4}$

Die Intervallmitte der untersten Stufe ist somit: $u_{\mathrm{q}}(u < -A + q) = -A + \frac{q}{2} = -\frac{7}{8}A$

b) Addition eines Signals, dessen charakteristische Funktion bandbegrenzt ist (entspricht Multiplikation mit bandbegrenzter charakteristischer Funktion) und später wieder entfernt werden kann (Dithering).

c) Bei sinusförmigen Signalen ist die Signalleistung bei gleicher Maximalamplitude höher als bei Signalen mit gleichverteilter Amplitude. Die Leistung des Rauschens ist durch das Quantisierungsmodell jedoch in beiden Fällen gleich groß.

d) ADU1 fällt raus, da er das Abtasttheorem nicht einhalten kann. Bei ADU2 ist der Eingangsbereich doppelt so groß wie bei ADU3, so dass effektiv mit der vorher entworfenen Kennlinie nur noch 2 der 3 Bits genutzt werden können. Somit erhält man für das SNR durch die Quantisierung:

$$SNR_{\mathrm{q_{ADU2}}} = 6{,}02 \cdot N + 1{,}76 = 6{,}02 \cdot 2 + 1{,}76 = 13{,}8\,\mathrm{dB}$$
$$SNR_{\mathrm{q_{ADU3}}} = 6{,}02 \cdot 3 + 1{,}76 = 19{,}82\,\mathrm{dB}.$$

e) Das Jitter-SNR berechnet sich mit $\sigma_\tau^2 = \frac{\tau_{\max}^2}{3}$ zu:

$$SNR_{\mathrm{Jitter_{ADU2}}} = \frac{2}{(2\pi f_{\mathrm{g}}\sigma_\tau)^2} = \frac{2}{(2\pi f_{\mathrm{g}}\frac{\tau_{\max}}{\sqrt{3}})^2} = \frac{2}{(2\pi 10\,\mathrm{kHz}\frac{5\,\mu\mathrm{s}}{\sqrt{3}})^2} \widehat{=} 17{,}84\,\mathrm{dB}$$

$$SNR_{\mathrm{Jitter_{ADU3}}} = \frac{2}{(2\pi f_{\mathrm{g}}\sigma_\tau)^2} = \frac{2}{(2\pi f_{\mathrm{g}}\frac{\tau_{\max}}{\sqrt{3}})^2} = \frac{2}{(2\pi 10\,\mathrm{kHz}\frac{10\,\mu\mathrm{s}}{\sqrt{3}})^2} \widehat{=} 11{,}82\,\mathrm{dB}$$

f) Somit erzielt ADU2 mit minimal 13,8 dB das bessere SNR und sollte somit ausgewählt werden.

g) Die gesuchten Signale sind in Abbildung 7 und Tabelle 5 gezeigt.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$u[n]$	0	0,3	0,9	0,9	0,6	0	-0,6	-0,9	-0,9	-0,6
$e[n]$	-1,0	1,3	-0,1	-0,1	-0,4	1,0	-1,6	0,1	0,1	0,4
$q[n]$	1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1
$r[n]$	0,0	-1,0	0,3	0,2	0,1	-0,3	0,7	-0,9	-0,8	-0,7
$u_{\mathrm{q}}[n]$					0,6					-0,6

Tabelle 5: Delta-Sigma-Signale.

h) In dieser Konfiguration kann u_{q} 6 Werte annehmen: $1, -1, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{5}$ und $-\frac{3}{5}$.

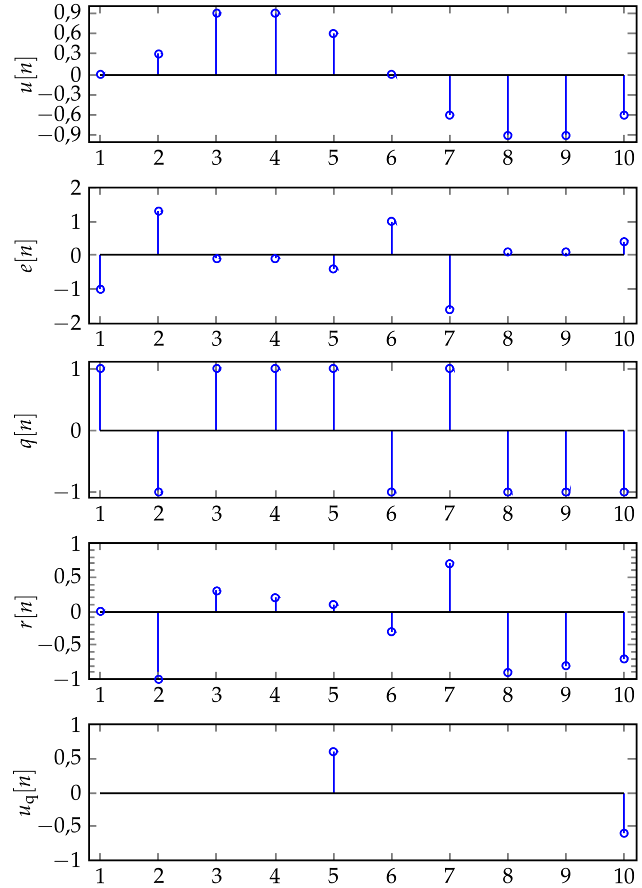


Abbildung 7: Signalverläufe des Delta-Sigma-Umsetzers.

i) Die Delta-Sigma-Modulation verlagert die Rauschleistung zu hohen Frequenzen hin (Rauschformung oder noise shaping). Für ein großes SNR ist es daher von Vorteil, wenn die Grenzfrequenz des Nutzsignals wesentlich kleiner ist als die Abtastfrequenz. So kann bei hoher Überabtastung das Quantisierungsrauschen durch Tiefpassfilterung besser unterdrückt werden.

j) Die Anzahl der Integratoren bzw. die Anzahl der Gegenkopplungsschleifen ist ausschlaggebend für die Ordnung des Umsetzers.

k) Das Frequenzzählverfahren, da der relative Fehler bei höheren Drehzahlen sinkt.

Aufgabe 1: Kurvenanpassung / Kennlinienanalyse (20 Punkte)

Ein mobiler Roboter fährt an einem Maßband geradeaus entlang und Sie wollen durch Wegmessungen Rückschlüsse über die vom Roboter gefahrene Geschwindigkeit bzw. das gewählte Beschleunigungsverhalten ziehen. Der Roboter besitzt zwei Fahrmodi: Im ersten Modus fährt der Roboter mit einer konstanten Geschwindigkeit und im zweiten Modus fährt er mit einer konstanten Beschleunigung. Sie lesen nach definierten Zeitpunkten die zurückgelegte Entfernung ab. Die Messwerte sind in nachfolgender Tabelle 1 aufgezeichnet.

Tabelle 1: Messwerte.

Ablesezeitpunkt t_i in Sekunden	1	2	3
Gefahrene Strecke $y_1(t_i)$ in Modus 1 in Metern	1,0371	1,9125	2,7165
Gefahrene Strecke $y_2(t_i)$ in Modus 2 in Metern	0,7924	1,4103	2,1647

Hinweise: Die nach der Zeit t zurückgelegte Strecke $s(t)$ kann allgemein über $s(t) = s_0 + \int_0^t v_0\,\mathrm{d}t + \int_0^t a \cdot t\,\mathrm{d}t$ mit Startpunkt s_0, Startgeschwindigkeit v_0 und Beschleunigung a berechnet werden. Ebenso

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} ei-fh & ch-bi & bf-ce \\ fg-di & ai-cg & cd-af \\ dh-eg & bg-ah & ae-bd \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie eine Modellgleichung für Modus 1 an. *(1 Punkt)*

b) Geben Sie eine Modellgleichung für Modus 2 an. *(2 Punkte)*

c) Geben Sie unter Lösung eines Least-Squares-Ansatzes an, wie schnell sich der Roboter in Modus 1 bewegt und welche Strecke er zum Zeitpunkt $t = 0$ bereits zurückgelegt hat. *(3 Punkte)*

d) Geben Sie an, wie schnell sich der Roboter in Modus 2 zum Zeitpunkt $t = 0$ bewegt, welche Strecke er dann bereits zurückgelegt hat und wie stark er beschleunigt. *(3 Punkte)*

e) Warum unterscheiden sich die Ansätze in den Teilaufgaben **c)** und **d)**? *(1 Punkt)*

Ihnen sind die Messwertpaare in der Tabelle 2 gegeben:

f) Rekonstruieren Sie die Messkennlinie $y(x)$ mittels des Newton-Interpolations-Verfahrens. Runden Sie die Koeffizienten dabei auf 2 Nachkommastellen. *(6 Punkte)*

Tabelle 2: Messwertpaare.

x	0,2	0,35	0,5	0,65
y	3,8	4,6	2,6	−2,1

g) Wann ist das Lagrange-Verfahren leichter zu korrigieren, wenn Sie einen Fehler bei der Messung machen? *(1 Punkt)*

h) Beschreiben Sie kurz eine praktische Anwendung der bilinearen Interpolation? *(1 Punkt)*

i) Nennen Sie einen Vor- und einen Nachteil der Spline-Interpolation. *(2 Punkte)*

Aufgabe 2: Stationäres Verhalten von Messsystemen (20 Punkte)

Ein Messgerät hat laut Datenblatt die Kennlinie $y(u) = 0{,}5 \sin(u) + 1$.

a) Bestimmen Sie den günstigsten Messbereich der Breite π im Intervall $[0; 2\pi]$. *(4 Punkte)*

Ihnen sind folgende Bauteile gegeben:

- Ein Messgerät mit der Kennlinie $u_\mathrm{M}(i) = \arctan(i)$, welches einen Strom i als Eingangs- und eine Spannung u als Ausgangsgröße besitzt.
- Ein Verstärkerglied A_1 mit der Kennlinie $y_1(i_1, i_2) = (i_1 + i_2) \cdot V_1$, welches als Ein- und Ausgangssignale Ströme besitzt.

- Ein Verstärkerglied A_2 mit der Kennlinie $y_2(u_1, u_2) = u_1 \cdot V_2 + u_2$, welches als Ein- und Ausgangssignale Spannungen besitzt.
- Jeweils eine konstante Strom- bzw. Spannungsquelle mit einstellbaren Kenngrößen i_c und u_c.

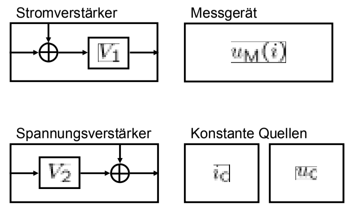


Abbildung 1: Zur Verfügung stehende Blöcke.

Verwenden Sie in der folgenden Aufgabe die Schaltsymbole entsprechend Abbildung 1. Die Verstärkungsfaktoren V_1 und V_2 können Sie im Bereich $[-50; 50]$ stufenlos einstellen. Sie wollen die Kennlinie $u_\mathrm{M}(i)$ um den Arbeitspunkt i_0 herum linearisieren.

b) Skizzieren Sie, wie Sie die gegebenen Bauteile für die Methode „Herabsetzen des Messbereiches" verschalten müssen. Geben Sie in Abhängigkeit des Arbeitspunktes i_0 an, welche Werte Sie für V_1, V_2, i_c und u_c einstellen müssen, damit Sie eine maximale Linearisierung erreichen und die Gesamtkennlinie im Arbeitspunkt keinen Offset besitzt, d. h. $u_{\mathrm{Ges,H}}(i_0) = u_\mathrm{M}(i_0)$. Es soll weiterhin $V_1 \cdot V_2 = 1$ gelten. *(5 Punkte)*

c) Geben Sie die Empfindlichkeit des Messsystems in Abhängigkeit von der Eingangsgröße i an. Geben Sie zusätzlich den Punkt an, an dem die errechnete Empfindlichkeit der des Messgerätes entspricht und zeigen Sie dies. *(3 Punkte)*

d) Berechnen Sie die ideale Kennlinie bei Fixpunktjustierung für die Methode Herabsetzen des Messbereichs im Messbereich $[0{,}5; 1{,}5]$ um $i_0 = 1$. *(2 Punkte)*

e) An welcher Stelle in dem System hat eine superponierende Störgröße den größten Einfluss? *(1 Punkt)*

f) Nennen Sie einen Vor- und einen Nachteil der Differenzmethode in dieser Anwendung. *(2 Punkte)*

g) Wie können Sie von mehreren fehlerbehafteten Einflussgrößen abhängende Messfehler berechnen? Welche Anforderung stellen Sie dabei an die Fehler und warum? *(3 Punkte)*

Aufgabe 3: Statistik (21 Punkte)

Bei einer Telefonzentrale wurden die Anrufstatistiken erhoben. Dabei wurde in Fünf-Minuten-Intervallen gezählt, wie viele Anrufe es in dem jeweiligen Interval gegeben hat. Die resultierende Statistik unabhängiger Werte ist in folgender Tabelle gegeben:

Tabelle 1: Anrufzahlen der Telefonzentrale.

Anz. Anrufe	0	1	2	3	4	5
Anz. der Intervalle mit dieser Anruferzahl	2	8	12	5	3	0

a) Geben Sie an, wie viele Anrufe im Mittel innerhalb von 5 Minuten bei der Zentrale eingehen. *(2 Punkte)*

Sie wollen nun überprüfen, ob die Verteilung der Anruferzahlen einer Poisson-Verteilung entspricht. Die Poisson-Verteilung wird durch ihren Mittelwert λ vollständig charakterisiert und besitzt folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung für $k = 0, 1, 2, 3 \ldots$

$$P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{(-\lambda)}$$

b) Geben Sie die entsprechend der Poisson-Verteilung resultierende Wahrscheinlichkeit an, dass in einem Intervall maximal ein Anruf eingeht. Verwenden Sie dabei den zuvor berechneten Mittelwert. *(2 Punkte)*

c) Nutzen Sie nun den χ^2-Anpassungstest um zu überprüfen, ob die Anrufstatistik einer Poisson-Verteilung entspricht. Das Signifikanzniveau soll bei 2 % liegen. Beachten Sie die Einhaltung aller Voraussetzungen. *(6 Punkte)*

d) Geben Sie die Standardabweichung der Poisson-Verteilung in Abhängigkeit des Mittelwertes an. Hinweis: $\mathrm{E}\{\mathtt{k}^2\} = \lambda^2 + \lambda$. *(1 Punkt)*

Eine Verbunddichte $f_{xy}(x,y)$ wird durch die Fläche zwischen den Schnittpunkten zweier Kurven $y_1(x) = x^2$ und $y_2(x) = x + \frac{3}{4}$ begrenzt und besitzt auf dieser Fläche einen konstanten Wert k ungleich null.

e) Skizzieren Sie die Verbunddichte $f_{xy}(x,y)$ und geben Sie eine mathematische Beschreibung an. Berechnen Sie hierfür k. *(5 Punkte)*

f) Bestimmen Sie den Erwartungswert des Produktes $\mathtt{x} \cdot \mathtt{y}$. *(3 Punkte)*

g) Bestimmen Sie die Randdichte $f_x(x)$.

Aufgabe 4: Stochastische Signale (18 Punkte)

Gegeben sei ein mittelwertfreies, amplitudenbegrenztes, periodisches Signal $\mathtt{x}(t)$ mit der Periodendauer T.

a) Zeigen Sie, dass auch die AKF $r_{xx}(\tau)$ mit T periodisch ist. *(2 Punkte)*

b) Berechnen Sie die AKF des Signals $\tilde{\mathtt{x}}(t)$ in Abhängigkeit von $r_{xx}(\tau)$, wenn:

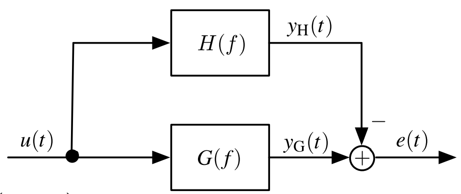
- $\tilde{\mathtt{x}}(t)$ das mit dem Faktor A multiplizierte Signal $\mathtt{x}(t)$ ist;
- $\tilde{\mathtt{x}}(t)$ das Signal $\mathtt{x}(t)$ ist, dem ein Offset B hinzugefügt wird. *(4 Punkte)*

c) Wie sieht ein mögliches Zeitsignal mit der Autokorrelationsfunktion $\sin(2\pi\tau + \pi)$ qualitativ aus? *(1 Punkt)*

d) Zeigen Sie, dass für stationäre stochastische Prozesse der Zusammenhang $P_x = r_{xx}(0)$ gilt. *(2 Punkte)*

Zur Analyse eines unbekannten Systems $G(f)$ werde dem System das bekannte System $H(f)$ parallel geschaltet:

Dabei gelte:



$$r_{uu}(\tau) = \exp\left(-\frac{1}{T}|\tau|\right), \quad r_{ee}(\tau) = \sigma_e^2\,\delta(\tau) \quad \text{und} \quad H(f) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}2\pi f T}.$$

e) Bestimmen Sie die Leistungsdichten von $\mathtt{u}(t)$ und $\mathtt{e}(t)$. Charakterisieren Sie jeweils die Art des Rauschens. *(2 Punkte)*

f) Welchen Filtertyp charakterisiert die Übertragungsfunktion $H(f)$? *(1 Punkt)*

g) Berechnen Sie das Betragsquadrat der Gesamtübertragungsfunktion $G_{ges}(f)$.

h) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(f)$. Dabei dürfen Sie *(1 Punkt)*

$$G_{ges}(f) = \sigma_e \frac{\mathrm{j}2\pi f T + 1}{\sqrt{2T}}$$ als gegeben annehmen. *(2 Punkte)*

i) Geben Sie die Leistungsdichte $S_{y_G y_G}(f)$ des Signals $y_G(t)$ an. *(1 Punkt)*

j) Warum ist das Wiener-Filter adaptiv? Was passiert in den beiden Extremfällen? *(2 Punkte)*

Aufgabe 5: Quantisierung und Abtastung (21 Punkte)

In folgender Abbildung haben Sie die Amplitudendichte eines Signals gegeben. Sie möchten dieses so mit 1 Bit quantisieren, dass Sie gleichwahrscheinliche Quantisierungsstufen erhalten.

MESS - H -2013

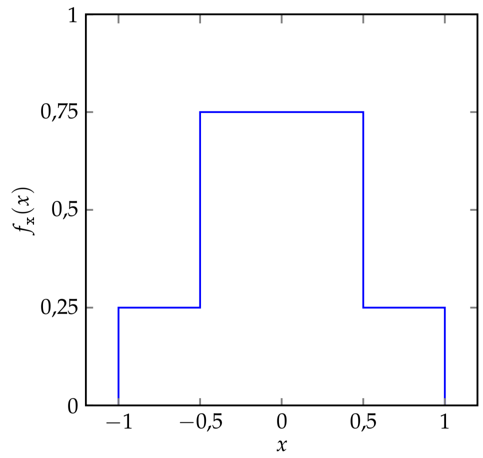


Abbildung 1: Amplitudendichte eines Signals.

a) Zeichnen Sie die gesuchte Quantisierungskennlinie mit minimalem quadratischen Quantisierungsfehler. *(5 Punkte)*

b) Zeichnen Sie das Signal $x(t) = \sin(2\pi \cdot t)$ für $0 \leq t \leq 2$ und zeichnen Sie ebenfalls das quantisierte Signal $x_q(t)$ ein. *(2 Punkte)*

c) Zeichnen Sie ein periodisches Signal mit der oben gegebenen Amplitudendichte. *(3 Punkte)*

d) Warum erreichen Sie mit dem entworfenen Quantisierer ein schlechteres Signal-Rausch-Verhältnis bei sinusförmigen Signalen als bei sägezahnförmigen Signalen? *(1 Punkt)*

e) Was bedeutet Flächenabtastung? Was kann bei Einhaltung des Quantisierungstheorems fehlerfrei rekonstruiert werden? *(2 Punkte)*

f) Was muss für Signale gelten, die als Dithersignal geeignet sind? Nennen Sie ein Beispiel. *(2 Punkte)*

g) Bestimmen Sie, ab welcher Drehzahl die Erfassung der Drehzahl durch das Frequenzmessverfahren vorteilhafter als die Erfassung durch Periodendauermessung ist, wenn pro Umdrehung 150 Winkelinkremente überschritten werden. Nehmen Sie an, dass T_{ref} bei der Frequenzzählung 1 ms beträgt und bei der Periodendauermessung $f_0 = 1000$ Hz. Geben Sie die Drehzahl in Umdrehungen pro Minute an. *(4 Punkte)*

h) Welches Drehzahlmessverfahren würden Sie wählen, wenn Sie harte Echtzeitanforderungen haben? Begründen Sie kurz. *(1 Punkt)*

i) Welche Parameter würden Sie wie anpassen, um das Frequenzmessverfahren auch für sehr niedrige Drehzahlen nutzen zu können? *(1 Punkt)*

Lösung

Aufgabe 1:

a) Bei einem Modellansatz mit konstanter Geschwindigkeit ist die Beschleunigung $a = 0$. Somit lässt sich das Integral berechnen zu $s(t) = s_0 + vt$.

b) Bei einem Modellansatz mit konstanter Beschleunigung ist die Beschleunigung a ein beliebiger, konstanter Wert. Somit lässt sich das Integral berechnen zu $s(t) = s_0 + vt + \frac{1}{2}at^2$.

c) Das LS-Gleichungssystem lautet:

$\mathbf{s} = \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{b}$ mit:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ 1 & t_3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} s_0 \\ v \end{pmatrix}.$$

Mit der Pseudoinversen berechnet man die Koeffizienten s_0 und v:

$$\begin{pmatrix} s_0 \\ v \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi})^{-1}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{s} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1{,}0371 \\ 1{,}9125 \\ 2{,}7165 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2093\,\mathrm{m} \\ 0{,}8397\,\mathrm{m/s} \end{pmatrix} .$$

d) Das LS-Gleichungssystem lautet:

$\mathbf{s} = \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{b}$ mit:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & \frac{1}{2}t \\ 1 & t_2 & \frac{1}{2}t_2^2 \\ 1 & t_3 & \frac{1}{2}t_3^2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} s_0 \\ v_0 \\ a \end{pmatrix}$$

Mit der Inversen berechnet man die Koeffizienten s_0, v_0 und a:

$$\begin{pmatrix} s_0 \\ v_0 \\ a \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Phi}^{-1}\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2{,}5 & 4 & -1{,}5 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}7924 \\ 1{,}4103 \\ 2{,}1647 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3110\,\mathrm{m} \\ 0{,}4131\,\mathrm{m/s} \\ 0{,}1365\,\mathrm{m/s^2} \end{pmatrix} .$$

e) Durch Lösen eines Gleichungssystems (Invertieren der Matrix) lässt sich nur das Problem der konstanten Beschleunigung lösen. Das Problem der konstanten Geschwindigkeit ist überbestimmt und erfordert eine Least-Squares-Lösung über die Pseudoinverse.

f) Newton-Verfahren:

Differenzenschema:

x	$\Delta^0 y = y$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0,2	3,8			
		$\frac{0.8}{0{,}15} = \frac{16}{3}$		
			$\frac{\frac{-56}{3}}{0{,}3} = \frac{-560}{9}$	
0,35	4,6			
		$\frac{-2}{0{,}15} = -\frac{40}{3}$		$\frac{\frac{20}{9}}{0{,}45} = 4{,}94$
			$\frac{\frac{-54}{3}}{0{,}3} = -60$	
0,5	2,6			
		$\frac{-4{,}7}{0{,}15} = -\frac{94}{3}$		
0,65	−2,1			

Der Newton-Ansatz bei 4 Stützstellen lautet:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{\mathrm{New}}(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\ &\quad + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &= \Delta^0 y + \Delta^1 y(x - x_0) + \Delta^2 y(x - x_0)(x - x_1) \\ &\quad + \Delta^3 y(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \end{aligned}$$

Einsetzen der Werte aus dem Differenzenschema ergibt:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{\mathrm{New}}(x) &= 3{,}8 + \frac{16}{3}(x - 0{,}2) - \frac{560}{9}(x - 0{,}2)(x - 0{,}35) \\ &\quad + 4{,}94(x - 0{,}2)(x - 0{,}35)(x - 0{,}5) \\ &= 4{,}94x^3 - 67{,}41x^2 + 41{,}26x - 1{,}8 \end{aligned}$$

g) Das Lagrange-Verfahren ist leichter zu korrigieren, falls nur die Ausgangsgröße, aber nicht die Eingangsgröße fehlerbehaftet sind.

h) Bildskalierung, Motorkennfelder, Bayer-Maske.

i) Vorteil: Beschreibung komplexer Kurven durch einfache Polynome.

Nachteil: Anfällig für Rauschen.

MESS - H -2013

Aufgabe 2: **a)** Überprüfen, ob Wendepunkt im Messbereich:

$$y'(u) = \frac{1}{2}\cos(u) \qquad y''(u) = -\frac{1}{2}\sin(u) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow u = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Innerhalb des Messbereiches liegen also die Wendepunkte $0, \pi, 2\pi$. Kriterium 1 aus dem Messtechnik-Buch ist also anwendbar:

$$S(u_\mathrm{a} + d) - S(u_\mathrm{a}) = y'(u_\mathrm{a} + \pi) - y'(u)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\cos(u_\mathrm{a} + \pi)}_{= -\cos(u_\mathrm{a})} - \cos(u_\mathrm{a})\right) = -\cos(u_\mathrm{a}) \overset{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow u_\mathrm{a} = \frac{\pi}{2} + m\pi,\ m \in \mathbb{Z}$$

Es wären $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ im Messbereich, da aber das gesamte Intervall $[u_\mathrm{a}, u_\mathrm{a} + \pi]$ im Messbereich liegen soll, entfällt $\frac{3\pi}{2}$. Somit ist der optimale Messbereich $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

b) Für die Methode „Herabsetzen des Messbereiches“ muss ein Verstärker jeweils vor und einer hinter das Messgerät gesetzt werden. Auch wenn man die zweiten Eingänge der Verstärker zunächst frei lässt, wird spätestens durch die weiteren Anforderugen an die Schaltung ersichtlich, dass auch diese mit den konstanten Quellen beschaltet werden müssen. Dem resultierenden Schaltbild in Bild L1 entnimmt man die Gesamtübertragungsfunktion

$$u_{\mathrm{Ges,H}}(i) = u_\mathrm{c} + V_2 \cdot u_\mathrm{M}(V_1 \cdot [i + i_\mathrm{c}]) \ .$$

Um eine möglichst gute Linearisierung zu erhalten, sollte das Signal nach dem ersten Verstärker möglichst wenig aus dem Arbeitspunkt ausgelenkt werden, d. h. V_1 sollte möglichst klein sein und somit, wegen $V_1 \cdot V_2 = 1$, V_2 möglichst groß. Durch die Wertebegrenzung aus der Aufgabenstellung ist also $V_2 = 50 = V_1^{-1}$ die optimale Wahl der Verstärkungen.

Damit das Verhalten im Arbeitspunkt gleich bleibt, müssen noch die Werte der konstanten Quellen gewählt werden:

$$\begin{aligned} &V_1 \cdot (i_0 + i_\mathrm{c}) \overset{!}{=} i_0 \\ &\Rightarrow i_\mathrm{c} = i_0 \cdot \frac{1 - V_1}{V_1} = 49 \cdot i_0 \\ &u_\mathrm{c} + V_2 \cdot u_\mathrm{M}(i_0) \overset{!}{=} u_\mathrm{M}(i_0) \\ &\Rightarrow u_\mathrm{c} = u_\mathrm{M}(i_0) \cdot (1 - V_2) = -49 \cdot u_\mathrm{M}(i_0) \end{aligned}$$

Somit müssen folgende Werte eingestellt werden:

$$V_1 = \frac{1}{50} \qquad V_2 = 50$$

$$i_\mathrm{c} = 49 i_0 \qquad u_\mathrm{c} = -49 u_\mathrm{M}(i_0) \ .$$

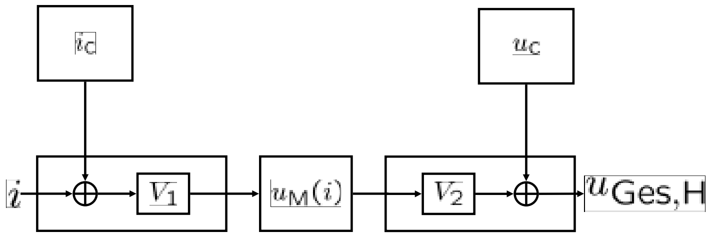


Abbildung L1: Herabsetzen des Messbereiches.

Eine Wahl von $i_\mathrm{c} = i_0$ und $u_\mathrm{c} = u_\mathrm{M}(i_0)$ erfüllt zwar ebenfalls die Bedingung, dass das Verhalten im Arbeitspunkt unverändert bleibt, linearisiert das System aber um den Punkt $i = 0$, was nicht der Aufgabenstellung entspricht.

c) $$\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{Ges,H}}(i)}{\mathrm{d}i} = V_2 \cdot \frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{M}}(V_1 \cdot (i+i_{\mathrm{c}}))}{\mathrm{d}i} = V_2 \cdot \frac{1}{1+V_1^2(i+i_{\mathrm{c}})^2} \cdot V_1.$$

Die Empfindlichkeit dieser Methode entspricht der ursprünglichen Empfindlichkeit im Arbeitspunkt; somit ist zu zeigen, dass:

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{Ges,H}}(i)}{\mathrm{d}i}\right|_{i_0} = \left.\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{M}}(i)}{\mathrm{d}i}\right|_{i_0}$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{50^2}\cdot(i_0^2+2\cdot 49 i_0^2+49^2 i_0^2)} = \frac{1}{1+i_0^2}$$

d) Die ideale Kennlinie bei Fixpunktjustierung hat allgemein die Form:

$$u_{\mathrm{fix}}(i) = \frac{u_{\mathrm{e}}-u_{\mathrm{a}}}{i_{\mathrm{e}}-i_{\mathrm{a}}}\cdot(i-i_{\mathrm{a}})+u_{\mathrm{a}}$$

Mit den vorherigen Ergebnissen erhält man:

$$i_{\mathrm{a}} = 0{,}5 \qquad i_{\mathrm{e}} = 1{,}5$$

$$u_{\mathrm{Ges,H,a}} = u_{\mathrm{Ges,H}}(i_{\mathrm{a}}) = 0{,}5341 \; u_{\mathrm{Ges,H,e}} = u_{\mathrm{Ges,H}}(i_{\mathrm{e}}) = 1{,}0342\,.$$

Und somit ist die gesuchte Kennlinie:

$$u_{\mathrm{fix,H}}(i) = 0{,}5\cdot(i-0{,}5)+0{,}5341$$

e) Den größten Einfluss hätte ein superponierender Fehler vor der größeren Verstärkung V_2.

f) Ein Vorteil wäre die doppelte Empfindlichkeit im Arbeitspunkt. Ein Nachteil ist das zusätzlich benötigte zweite Messgerät.

g) Die Auswirkungen können durch das Gauß'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz ermittelt werden. Dabei wird von hinreichend kleinen Eingangsfehlern ausgegangen, damit die Näherung über die erste Ordnung der Taylorreihe zulässig bleibt.

Lösung

Aufgabe 3:

a) Im Mittel gehen $\mu = (0\cdot 2+1\cdot 8+2\cdot 12+3\cdot 5+4\cdot 3+5\cdot 0)/30 = 1{,}9667$ Anrufe pro Intervall ein.

b) Maximal 1 Anruf bedeutet, dass entweder genau ein Anruf oder kein Anruf eingeht. Somit ergibt sich mit dem zuvor berechneten Mittelwert $\lambda = \mu = 1{,}9667$:

$$P(\text{maximal ein Anruf}) = P_\lambda(0)+P_\lambda(1) = \frac{\lambda^0}{0!}\mathrm{e}^{(-\lambda)}+\frac{\lambda^1}{1!}\mathrm{e}^{(-\lambda)} = 0{,}1399+0{,}2752 = 0{,}4151.$$

c)
- unabhängige Messwerte
- ausreichend große Stichprobe
- $n_i \geq 5$
- $n_{i\,\mathrm{Rand}} \geq 1$ ist am rechten Rand nicht erfüllt und führt zur Zusammenlegung der Klasse mit 4 und 5 Anrufen.

Die Nullhypothese lautet:

H_0 : Die Anzahl der Anrufer pro Intervall ist poissonverteilt mit $\lambda = 1{,}9667$.

Berechnung der Klassenwahrscheinlichkeiten mit $n = 30$:

$$p_i = P(x=i) = \frac{\lambda^i}{i!}\mathrm{e}^{(-\lambda)}$$

i	p_i	np_i	$(\mathrm{n}_i-np_i)^2$	$\frac{(\mathrm{n}_i-np_i)^2}{np_i}$
0	0,1399	4,1977	4,8298	1,1506
1	0,2752	8,2554	0,0652	0,0079
2	0,2706	8,1178	15,0712	1,8566
3	0,1774	5,3217	0,1035	0,0194
4(+5)	0,1215	3,6457	0,4169	0,1143

Berechnung der Prüfgröße χ^2

$$\chi^2 \approx \sum_{i=0}^{4}\frac{(\mathrm{n}_i-np_i)^2}{np_i} = 3{,}1488$$

Bei der Bestimmung der Freiheitsgrade muss berücksichtigt werden, dass nur noch 5 Klassen verwendet werden und ein Parameter der Vergleichsverteilung aus den Messwerten geschätzt wurde. Somit verringert sich die Anzahl der Freiheitsgrade auf 3.

$$m = k-1-1 = 5-1-1 = 3$$

Ermitteln von χ^2_α beispielsweise aus Abbildung 4.20 aus dem Messtechnik-Buch (9. Auflage) und mit $1-\alpha = 0{,}98$ ergibt $\chi^2_\alpha \approx 10$. Die Hypothese wird also angenommen, da $\chi^2_\alpha \geq \chi^2$.

d) Da die Varianz bei der Poisson-Verteilung gleich dem Mittelwert ist, ergibt sich die Standardabweichung σ zu $\sqrt{\lambda}$.

e) Abbildung L1 zeigt die gesuchte Skizze mit grauer Fläche für Werte verschieden von null.

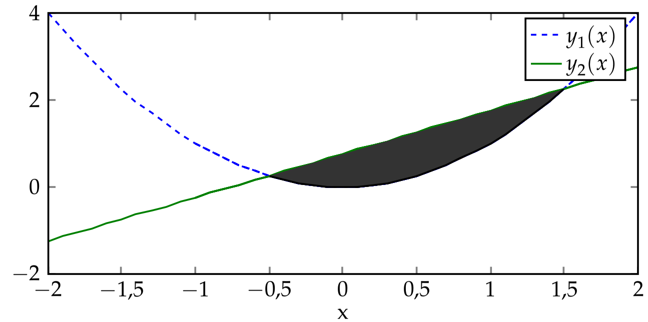


Abbildung L1: Verbunddichte.

Für die Normierung ist die Fläche zwischen den Graphen entscheidend. Deswegen wird diese vom linken bis zum rechten Schnittpunkt der Kurven y_1 und y_2 aufintegriert, also im Intervall $[-0{,}5;1{,}5]$, und k so gewählt, dass das Flächenintegral 1 ergibt:

$$1 = k\cdot\int_{-0{,}5}^{1{,}5} y_2(x)-y_1(x)\,\mathrm{d}x = k\cdot\frac{4}{3} \Rightarrow k = \frac{3}{4}.$$

Somit ergibt sich:

$$f_{\mathrm{xy}}(x,y) = \begin{cases} k = \frac{3}{4} & \text{für } -0{,}5 \leq x < 1{,}5 \text{ mit } x^2 \leq y < x+\frac{3}{4} \\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

f) Der Erwartungswert lässt sich über Auswertung des Integrals

$$\mathrm{E}\{\mathrm{x}\cdot\mathrm{y}\} = \int_{-0{,}5}^{1{,}5}\int_{x^2}^{x+\frac{3}{4}} xyk\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{5}{6}\cdot k = \frac{5}{8}. \quad \text{berechnen.}$$

g) Die Randdichte $f_{\mathrm{x}}(x)$ lässt sich über Auswertung des Integrals der Verbunddichte berechnen:

$$f_{\mathrm{x}}(x) = \begin{cases} \int_{x^2}^{x+\frac{3}{4}} k\,\mathrm{d}y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{16} - \frac{3}{4}x^2 & \text{für } -0{,}5 \le x < 1{,}5 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 4: :

a) Amplitudenbegrenzte periodische Signale sind Leistungssignale, also wird die AKF wie folgt berechnet:

$$r_{\mathrm{xx}}(\tau + T) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \mathrm{x}(t)\mathrm{x}(t+\tau+T)\mathrm{d}t$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \mathrm{x}(t)\mathrm{x}(t+\tau)\mathrm{d}t = r_{\mathrm{xx}}(\tau)$$

b) Multiplikation mit A:

$$r_{\tilde{\mathrm{x}}\tilde{\mathrm{x}}}(\tau) = \mathrm{E}\{A \cdot \mathrm{x}(t) \cdot A \cdot \mathrm{x}(t+\tau)\} = A^2 \cdot r_{\mathrm{xx}}(\tau)$$

Addition von B: $r_{\tilde{\mathrm{x}}\tilde{\mathrm{x}}}(\tau) = \mathrm{E}\{(B + \mathrm{x}(t)) \cdot (B + \mathrm{x}(t+\tau))\}$

$$= \mathrm{E}\left\{B^2\right\} + B \cdot \mathrm{E}\{\mathrm{x}(t)\} + B \cdot \mathrm{E}\{\mathrm{x}(t+\tau)\} + \mathrm{E}\{\mathrm{x}(t)\mathrm{x}(t+\tau)\}$$
$$= B^2 + r_{\mathrm{xx}}(\tau)$$

c) Die gegebene Funktion kann keine AKF sein, da ihr Maximum nicht bei $\tau = 0$ liegt.

d)

$$P_{\mathrm{x}} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathrm{xx}}(f)\mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} r_{\mathrm{xx}}(\tau)\exp(-\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}f$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} r_{\mathrm{xx}}(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}f\mathrm{d}\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} r_{\mathrm{xx}}(\tau)\delta(\tau)\mathrm{d}\tau = r_{\mathrm{xx}}(0)$$

e) Zunächst werden die beiden Autokorrelationsfunktionen Fourier-transformiert:

$$F\{r_{\mathrm{uu}}\}(\tau) = S_{\mathrm{uu}}(f) = \frac{2T}{(2\pi fT)^2 + 1},$$
$$F\{r_{\mathrm{ee}}\}(\tau) = S_{\mathrm{ee}}(f) = \sigma_{\mathrm{e}}^2.$$

- Bei $S_{\mathrm{uu}}(f)$ handelt es sich um farbiges Rauschen: bei großen Frequenzen nimmt die Rauschleistung ab.
- Bei $S_{\mathrm{ee}}(f)$ handelt es sich um weißes Rauschen. Hier bleibt die Rauschleistung über allen Frequenzen konstant.

f) Es handelt sich um einen Tiefpass (PT1-Glied).

g) Das Betragsquadrat der Gesamtübertragungsfunktion G_{ges} berechnet sich zu:

$$|G_{\mathrm{ges}}(f)|^2 = \frac{S_{\mathrm{ee}}(f)}{S_{\mathrm{uu}}(f)} = \sigma_{\mathrm{e}}^2 \frac{(2\pi fT)^2 + 1}{2T}.$$

h) Die Übertragungsfunktion $G(f)$ kann berechnet werden zu:

$$G(f) = H(f) + G_{\mathrm{ges}}(f) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}2\pi fT} + \sigma_{\mathrm{e}} \frac{(\mathrm{j}2\pi fT) + 1}{\sqrt{2T}}$$
$$= \frac{\sqrt{2T} + \sigma_{\mathrm{e}}\left[(1 + \mathrm{j}2\pi fT)(1 + \mathrm{j}2\pi fT)\right]}{\sqrt{2T}(1 + \mathrm{j}2\pi fT)}$$
$$= \frac{\sqrt{2T} + \sigma_{\mathrm{e}}(1 + \mathrm{j}2\pi fT)^2}{\sqrt{2T}(1 + \mathrm{j}2\pi fT)}.$$

i) Für die Leistungsdichte am Ausgang des Blocks $G(f)$ gilt:

$$S_{y_{\mathrm{G}}y_{\mathrm{G}}}(f) = |G(f)|^2 \cdot S_{\mathrm{uu}}(f) = \left|\frac{\sqrt{2T} + \sigma_{\mathrm{e}}(1 + \mathrm{j}2\pi fT)^2}{\sqrt{2T}(1 + \mathrm{j}2\pi fT)}\right|^2 \cdot \frac{2T}{1 + (2\pi fT)^2}.$$

j) Das Filter passt sich an frequenzabhängige Störungen an. Im störungsfreien Fall wird es zum dem inversen Filter $G^{-1}(f)$, bei starken Störungen schließt es bei entsprechenden Frequenzen gestörte Signale ganz aus.

Aufgabe 5:

a) Um die gesuchte Quantisierungskennlinie zeichnen zu können, müssen zuerst die gleichwahrscheinlichen Bereiche gefunden werden. Das heißt die Fläche unter der Dichte muss in 2 gleichgroße Teilflächen geteilt werden. Dies ist an der Stelle $x = 0$ der Fall.
Anschließend muss für jeden Bereich $[a_{\mathrm{i}}; b_{\mathrm{i}}]$ die Quantisierungsstufe $x_{\mathrm{q},i}$ gefunden werden, die den mittleren quadratischen Quantisierungsfehler der i-ten Stufe $\overline{e_{\mathrm{q},i}^2} = \int_{a_{\mathrm{i}}}^{b_{\mathrm{i}}} (x - x_{\mathrm{q},i})^2 f_{\mathrm{x}}(x)\,\mathrm{d}x$ minimiert. Mit

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mathrm{q},i}} \overline{e_{\mathrm{q},i}^2} = 0$$

ergibt sich für die rechte Stufe (links ist dazu symmetrisch):

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mathrm{q},r}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3}{4} \left(x_{\mathrm{q},r} - x\right)^2 \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{4} \left(x_{\mathrm{q},r} - x\right)^2 \mathrm{d}x \right) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial x_{\mathrm{q},r}} \left(\frac{5}{48} - \frac{3}{8}x_{\mathrm{q},r} + \frac{1}{2}x_{\mathrm{q},r}^2 \right) = 0 \Rightarrow x_{\mathrm{q},r} = \frac{3}{8}$$

und als Lösung:

$$x_{\mathrm{q}} = \begin{cases} -\frac{3}{8} & \text{für } -1 \le x < 0 \\ \frac{3}{8} & \text{für } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Abbildung L2 zeigt zwei Perioden des quantisierten Sinussignals.

c) Abbildung L3 zeigt eine Periode eines beispielhaften Signals mit der Dichte aus Abbildung 1.

d) Die Amplitudendichte des Signals ähnelt eher der Gleichverteilung des Sägezahns als der zwischen -1 und 1 einer Parabel ähnelnden Amplitudendichte der Sinusfunktionen.

e) Bei der Flächenabtastung wird das Gewicht eines Abtastwerts im Gegensatz zur herkömmlichen Abtastung nicht durch nur einen Wert bestimmt, sondern durch die Fläche der Amplitudendichte innerhalb des Quantisierungsintervalls. Durch Einhaltung des Quantisierungstheorems kann die Amplitudendichte aus dem quantisierten Signal rekonstruiert werden.

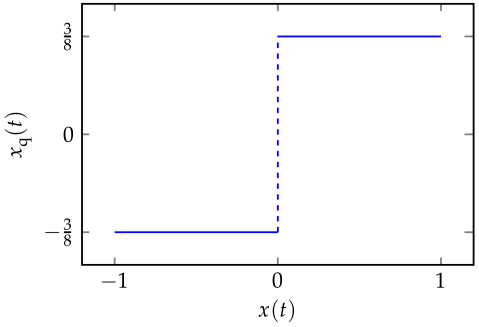


Abbildung L1: Quantisierungskennlinie.

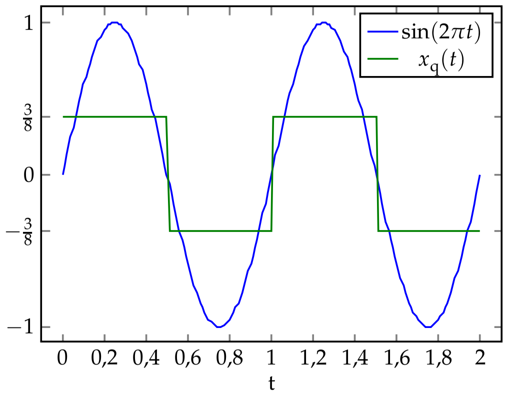


Abbildung L2: Quantisierter Sinus.

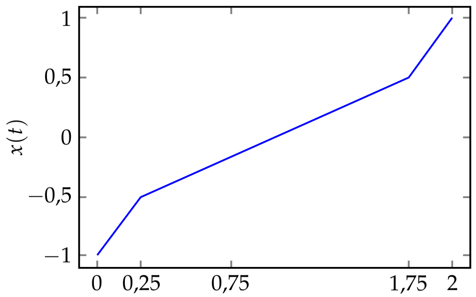


Abbildung L3: Signalperiode mit entsprechender Amplitudendichte.

f) Geeignet sind Signale, deren charakteristische Funktion für große Frequenzen gegen null geht. Ein Beispiel ist ein Sägezahn.

g) Das Winkelinkrement pro Zahnrad beträgt $\varphi_0 = \frac{2\pi}{150}$. Die relativen Fehler der Verfahren entnimmt man dem Messtechnik-Buch zu:

$$F_{\mathrm{r,FMV}} = \frac{\varphi_0}{\omega_a T_{\mathrm{ref}}} \qquad F_{\mathrm{r,PDM}} = \frac{\omega_q}{\varphi_0 f_0}$$

Gesucht ist ω_a, so dass:

$$F_{\mathrm{r,FMV}} \leq F_{\mathrm{r,PDM}} \qquad \frac{\varphi_0}{\omega_{\mathrm{q}} T_{\mathrm{ref}}} \leq \frac{\omega_{\mathrm{q}}}{\varphi_0 f_0}$$

$$\omega_{\mathrm{q}}^2 \geq \varphi_0^2 \frac{f_0}{T_{\mathrm{ref}}} = \frac{(2\pi)^2 \cdot 10^3}{150^2 \cdot 10^{-3}} = \frac{1600}{9}\pi^2$$

Da $w_q = 2\pi f$ gilt, berechnet sich die Frequenz zu $f \geq 6{,}67\,\mathrm{Hz}$. Daraus ist abzulesen, dass ab einer Drehzahl von über $400{,}2\,\frac{1}{\mathrm{min}}$ die Frequenzzählung vorteilhafter ist.

h) Da die Frequenzzählung unabhängig von der Drehzahl deterministisch alle T_{ref} einen Wert liefert, ist unter diesen Bedingungen dieses Verfahren vorteilhafter.

i) Um $F_{\mathrm{r,FMV}} = \frac{\varphi_0}{\omega_{\mathrm{q}} T_{\mathrm{ref}}}$ bei konstantem ω_{q} zu senken, kann man T_{ref} erhöhen oder φ_0 senken bzw. die Anzahl der Winkelinkremente Z erhöhen.

Aufgabe 1: Kurvenanpassung / Kennfeldinterpolation (15 Punkte)

Sie untersuchen die Gewichtsveränderung eines Körpers über die Zeit. Hierzu kennen Sie vier Wertepaare aus Zeit und Gewicht:

Tabelle 1: Messwerte.

Zeit / h	Gewicht / kg
1	15
2	2
4	3
4,5	9

a) Wie lautet allgemein die niedrigste Ordnung eines Interpolationspolynoms, das exakt durch N Stützstellen verläuft? *(1 Punkt)*

b) Interpolieren Sie aus den Messwerten in Tab. 1 eine Kennlinie, die durch alle Stützstellen verläuft. *(4 Punkte)*

c) Zeigen Sie, dass die von Ihnen errechnete Kennlinie keine gültige Interpolationskennlinie sein kann. **Hinweis:** Nehmen Sie an, dass ein Extremum näherungsweise bei 3 liegt. *(2 Punkte)*

d) Woran kann dies liegen, wenn keine Messfehler aufgetreten sind? *(1 Punkt)*

Ihnen ist folgende Grafik aus 5×5 Pixeln gegeben:

Tabelle 2: Pixelgrafik.

0	0	0	0	0
0	0	50	0	0
0	10	100	30	0
0	0	20	0	0
0	0	0	0	0

Durch Interpolation wollen Sie diese Grafik auf das Format 4×4 Pixel skalieren. Die gesuchten Interpolationsstellen liegen dabei immer zentral zwischen vier benachbarten Pixeln.

e) Erzeugen Sie die Pixelgrafik mit dem Format 4×4 Pixel mit Hilfe der Nächster-Nachbar-Interpolation. **Hinweis:** Das nächste Pixel soll als das rechte, untere Pixel angenommen werden. *(2 Punkte)*

f) Erzeugen Sie die Pixelgrafik mit dem Format 4×4 Pixel nun mit Hilfe der bilinearen Interpolation. *(3 Punkte)*

g) Sie haben nun zur Repräsentation des skalierten Bildsignals weniger Werte als in der Ausgangsgrafik verwendet. Welches Problem kann daraus folgen und wie lässt es sich unterbinden? *(2 Punkte)*

Aufgabe 2: Stationäres Verhalten von Messsystemen (15 Punkte)

Ihnen sind zwei unterschiedliche Messgeräte mit den Kennlinien $y_1(u) = -\frac{1}{2}u^3 + \frac{3}{2}u^2$ sowie $y_2(u) = \frac{3}{2}u^3 - 4u^2 + \frac{3}{2}u + 3$ gegeben.

a) Geben Sie für beide Geräte den günstigsten Messbereich $u_a \le u \le u_a + d$ für $d = 1$ an. *(4 Punkte)*

b) Welches Gerät wählen Sie, falls Ihnen eine möglichst hohe ideale Empfindlichkeit S_i wichtig ist? *(2 Punkte)*

c) Welches Gerät wählen Sie, wenn Ihnen nun eine möglichst konstante Empfindlichkeit wichtig ist? **Hinweis:** Wählen Sie als Optimierungskriterium das Integral über das Quadrat der Krümmung $\kappa(u)$ und nähern Sie die Krümmung durch $\kappa(u) \approx y''(u)$ an. *(4 Punkte)*

d) Sie möchten eine kleine Spannung mit sehr niedriger Frequenz verstärken. Hierfür verwenden Sie einen Operationsverstärker mit einem unbekannten und nicht zu vernachlässigenden Offset. Nennen Sie eine Vorrichtung zur Unterdrückung des entstehenden Fehlers und beschreiben Sie kurz die Funktionsweise. *(3 Punkte)*

Eine Kennlinie eines Messgerätes setzt sich abhängig von Eingangsgröße u und Störung z zu $y(u,z) = 3u^2 + 2u + 5z$ zusammen.

e) Geben Sie ein Gegenkopplungsglied an, mit dem Sie den Störeinfluss unterdrücken können, wenn das Gerät einen Eingangsstrom in eine Ausgangsspannung wandelt. Begründen Sie Ihre Antwort. *(2 Punkte)*

Aufgabe 3: Statistik, Stochastische Signale (18 Punkte)

Sie kontrollieren die Produktion von Werkstücken und haben mit einem Kunden vereinbart, dass Sie mit einer statistischen Sicherheit von 96 % Werkstücke mit einer Länge gemäß der Wahrscheinlichkeitsdichte in Abb. 1 liefern. Bei der Qualitätskontrolle einer auszuliefernden Bestellung mittels einer unabhängigen Stichprobe werden 100 Werkstücke auf ihre Länge untersucht und in 5 Klassen nach Tab. 3 eingeteilt.

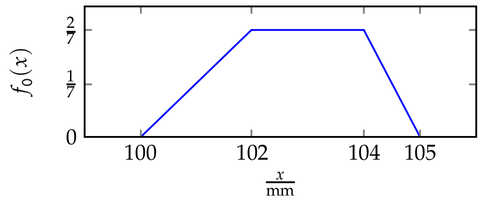


Abbildung 1: Vereinbarte Dichte.

Tabelle 3: Klasseneinteilung der Stichprobenelemente.

Klasse i	Länge x / mm	Elemente
0	$x \le 101$	12
1	$101 < x \le 102$	13
2	$102 < x \le 103$	30
3	$103 < x \le 104$	26
4	$x > 104$	19

a) Testen Sie, ob die Bestellung gemäß der Vereinbarung ausgeliefert werden sollte. Geben Sie alle für den Test nötigen Schritte an. *(6 Punkte)*

b) Sind bei diesen Anforderungen ausgelieferte Werkstücke kleiner als 100 mm prinzipiell zulässig? Begründen Sie Ihre Antwort. *(1 Punkt)*

c) Welche Vor-/Nachteile hat eine vergrößerte statistische Sicherheit aus Sicht des Produzenten/Kunden, falls der Test entscheidet, ob die Ware ausgeliefert werden kann oder ersetzt werden muss? *(2 Punkte)*

d) Gegeben sei die Zufallsvariable $\mathrm{z} = 3\mathrm{x} - \frac{1}{2}\mathrm{y}$. Geben Sie den Erwartungswert $\mathrm{E}\{\mathrm{zx}\}$ in Abhängigkeit von den Mittelwerten und Varianzen der Zufallsvariablen x und y sowie der Kovarianz C_{yx} an. *(2 Punkte)*

e) Sie haben eine Musterfunktion $y_i(t) = t\sin(\omega t + \phi_i)$ eines Zufallsprozesses gegeben. Begründen Sie, ob es sich um eine Musterfunktion eines ergodischen Prozesses handeln kann. Die Phase ϕ weiterer Musterfunktionen sei hierbei gleichverteilt zwischen 0 und 2π. *(2 Punkte)*

Sie möchten Korrelationsverfahren zur Ortung eines Fahrzeuges mittels dreier stationärer Sender nutzen. Als Sendesignale stehen Ihnen vier verschiedene zeitsynchrone Signalgeneratoren zur Verfügung:

$$x_1(t) = A_1 \sin(2\pi f_1 t)$$
$$x_2(t) = A_2 \sin(2\pi f_2 t)$$
$$x_3(t) = A_3 \sin(2\pi f_3 t)$$
$$x_4(t) = A_4 \sin(2\pi f_4 t)\,.$$

Dabei gilt $A_1 = A_2$ und $A_3 = A_4$ sowie $f_1 = \frac{3}{2} \cdot f_2$ und $f_3 = f_4 = 2 \cdot f_2$.

Die Signale breiten sich mit der Geschwindigkeit v_S aus. Die Sendesignale werden verlustlos und ungedämpft übertragen und sind beim synchronisierten Empfänger bekannt. Dem Empfangssignal ist ein weißes Gauß'sches Rauschen überlagert.

f) Welche Signale setzen Sie für das System ein? Begründen Sie Ihre Antwort, falls nötig mit einer Rechnung. *(3 Punkte)*

g) Wodurch wird der Lokalisierungsbereich des Systems beschränkt? Geben Sie diese Schranke in Abhängigkeit der gegebenen Größen an und begründen Sie Ihre Antwort. *(2 Punkte)*

Aufgabe 4: Quantisierung, Abtastung, LTI-Systeme (18 Punkte)

Sie wollen ein Musiksignal digitalisieren. Mit Hilfe einer Vorfilterung erreichen Sie eine Bandbegrenzung des Signals auf 20 kHz und können Aliasingeffekte vernachlässigen. Sie fordern für die komplette A/D-Umsetzung nun ein SNR von 90 dB.

a) Welche Anforderungen müssen Sie an einen gleichverteilten Abtastzeitfehler τ und die Anzahl der Quantisierungsstufen N stellen, um das gewünschte SNR einzuhalten? **Hinweis:** Nehmen Sie an, dass das Quantisierungstheorem erfüllt ist und das Signal vereinfacht als eine harmonische Schwingung beschrieben werden kann. Berechnen Sie zuerst die für die Quantisierung benötigte Bitanzahl. *(3 Punkte)*

b) Wie verändert sich die benötigte Bitanzahl qualitativ, falls Sie das Musiksignal nicht durch die Annahme einer harmonischen Schwingung vereinfachen? Begründen Sie Ihre Antwort über die Amplitudendichte. *(2 Punkte)*

c) Für die Umsetzung verwenden Sie einen Delta-Sigma-Umsetzer 1. Ordnung. Bestimmen Sie den nötigen Überabtastfaktor M. *(1 Punkt)*

d) Wie wirkt sich qualitativ eine Erhöhung der Abtastrate auf den Jitterfehler aus? *(1 Punkt)*

e) Sie stellen bei einem rauschbehafteten Messsystem (LTI-System) fest, dass gewisse Frequenzen gedämpft werden. Schlagen Sie in einem beschrifteten Schaltbild eine optimale Gegenmaßnahme vor und geben Sie die benötigten Zusammenhänge und Größen an. Wie können diese Größen in der Realität robust bestimmt werden? *(4 Punkte)*

f) Können Sie die vorgeschlagene Methode ohne Weiteres beispielsweise für zeitkritische Systeme wie Kommunikationstechnik einsetzen? Begründen Sie Ihre Antwort. *(1 Punkt)*

Sie haben folgendes mit Periodendauer T_0 periodische Signal aus Abb. 2 gegeben:

g) Zeichnen Sie die Amplitudendichte des gezeigten Signals. Beschriften Sie die Achsen. *(3 Punkte)*

h) Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen der Varianz des unquantisierten Signals und der Varianz des quantisierten Signals bei Einhaltung des Quantisierungstheorems. *(2 Punkte)*

i) Welche Frequenz misst das Frequenzzählverfahren? *(1 Punkt)*

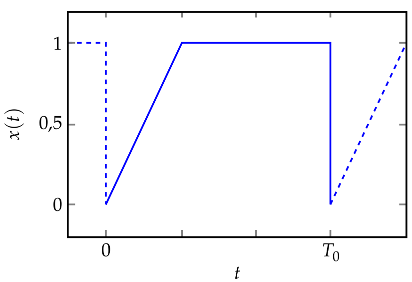


Abbildung 2: Signalperiode.

Lösung

Aufgabe 1:

a) Die niedrigste mögliche Ordnung ist $N-1$.

b) Differenzenschema des Newton-Verfahrens (Lagrange-Verfahren auch möglich):

x	$\Delta^0 y = y$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^2 y$
1	15			
		-13		
2	2		$\frac{9}{2}$	
		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{35}$
4	3		$\frac{23}{5}$	
		12		
$\frac{9}{2}$	9			

Der Newton-Ansatz bei 4 Stützstellen lautet:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{\text{New}}(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) \\ &\quad + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ &= \Delta^0 y + \Delta^1 y(x-x_0) + \Delta^2 y(x-x_0)(x-x_1) \\ &\quad + \Delta^3 y(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\,.\end{aligned}$$

Einsetzen der Werte aus dem Differenzenschema ergibt:

$$\tilde{y}_{\text{New}}(x) = 0{,}0286x^3 + 4{,}3x^2 - 26{,}1x + 36{,}7714\,.$$

c) Mögliche Problemstellen sind in diesem Fall beispielsweise negative Gewichte. Daher wird nach Nulldurchgängen bzw. Extremstellen gesucht. So führt die Kennlinie beispielsweise an der Stelle $x = 3$ auf negative Werte. Da negative Gewichte unmöglich sind, ist die Kennlinie ungültig.

d) Mögliche Ursachen wären eine zu niedrige Modellordnung oder ein nicht durch eine Polynomfunktion darstellbarer Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgangsgröße.

e) Das Interpolationsergebnis ist in Tabelle L1 gezeigt.

Tabelle L1: Pixelgrafik nach Nächster-Nachbar-Interpolation.

0	50	0	0
10	100	30	0
0	20	0	0
0	0	0	0

Tabelle L2: Pixelgrafik nach bilinearer Interpolation.

0	12,5	12,5	0
2,5	40	45	7,5
2,5	32,5	37,5	7,5
0	5	5	0

f) Das Interpolationsergebnis ist in Tabelle L2 gezeigt.

g) Es kann zur Unterabtastung und somit zu Aliasing kommen. Als Gegenmaßnahme könnte vorab ein Tiefpassfilter als Anti-Aliasing-Filter angewandt werden.

Aufgabe 2:

a) Um den günstigsten Messbereich zu finden, wird zuerst überprüft, ob die Kennlinien Wendepunkte enthalten:

$$y_1'(u) = -\frac{3}{2}u^2 + 3u \qquad y_2'(u) = \frac{9}{2}u^2 - 8u + \frac{3}{2}$$

$$y_1''(u) = -3u + 3 \qquad y_2''(u) = 9u - 8 \qquad y_1'''(u) = -3 \qquad y_2'''(u) = 9\,.$$

Für beide Funktionen lässt sich ein Punkt $u_{\text{WP}i}$ mit $y''(u_{\text{WP}i}) = 0$ bei $y'''(u_{\text{WP}i}) \neq 0$ und somit ein Wendepunkt finden. Für Gerät 1 ist dies für $u_{\text{WP1}} = 1$ und für Gerät 2 für $u_{\text{WP2}} = \frac{8}{9}$ der Fall.

Somit ergeben sich jeweils für den Anfang des günstigsten Messbereichs u_{a} mit dem Kriterium $S(u_{\text{a}}) = S(u_{\text{a}} + d)$ mit $S(u) = y'(u)$ für Messgerät 1 der Messbereich

$$u_{\text{a1}} = \frac{1}{2} \leq u \leq \frac{3}{2} = u_{\text{a1}} + d$$

und für Messgerät 2 der Messbereich

$$u_{\text{a2}} = \frac{7}{18} \leq u \leq \frac{25}{18} = u_{\text{a2}} + d\,.$$

b) Die ideale Empfindlichkeit S_i berechnet sich aus End- und Anfangspunkt des Messbereiches. Somit ergibt sich für die jeweilige ideale Empfindlichkeit:

$$S_{\text{i}1} = \frac{y_1(u_{\text{a}1}+d) - y_1(u_{\text{a}1})}{d} = \frac{27}{16} - \frac{5}{16} = 1{,}375$$

$$S_{\text{i}2} = \frac{y_2(u_{\text{a}2}+d) - y_2(u_{\text{a}2})}{d} = 1{,}3861 - 3{,}0666 = -1{,}6806\,.$$

Kennlinie 2 besitzt betragsmäßig die höhere Empfindlichkeit und ist somit vorzuziehen.

c) Um die Abweichung A_i von einem linearen Verlauf zu untersuchen, soll hier die quadratische Krümmung über den Messbereich angenähert werden. Somit wird die genäherte quadrierte Krümmung über den Messbereich aufintegriert:

$$A_i = \int_{u_{\text{a}i}}^{u_{\text{a}i}+d} (y_i''(u))^2 \mathrm{d}u.$$

Somit ergibt sich:

$$A_1 = \int_{0,5}^{1,5} (-3u+3)^2 \mathrm{d}u = \frac{3}{4}$$

$$A_2 = \int_{\frac{7}{18}}^{\frac{25}{18}} (9u-8)^2 \mathrm{d}u = \frac{27}{4}$$

Somit weist Kennlinie 1 die kleinere quadratische Krümmung auf und besitzt somit eine konstantere Empfindlichkeit.

d) Durch einen Zerhackerverstärker lässt sich eine driftfreie Verstärkung realisieren. Hierzu wird das zu verstärkende, niederfrequente Signal mit einem höherfrequenten, mittelwertfreien Signal, beispielsweise einem Rechtecksignal, moduliert. Die durch die Verstärkung auftretende Drift wird durch nochmalige Modulierung und anschließende Tiefpassfilterung unterdrückt.

e) Da es sich um eine superponierende Störgröße handelt und diese durch Gegenkopplung nicht kompensiert werden kann, existiert kein derartiges Glied.

Aufgabe 3:

a) Entsprechend der gestellten Aufgabe muss hier der χ^2-Test verwendet werden, wozu erst einmal die Voraussetzungen geprüft werden müssen, die in diesem Fall erfüllt sind:

- unabhängige Messwerte
- ausreichend große Stichprobe
- $n_i \geq 5$
- $n_{i\,\text{Rand}} \geq 1$.

Die Nullhypothese lautet:

$$H_0 : f_\text{x}(x) = f_0(x)$$

Bei der Berechnung der Klassenwahrscheinlichkeiten mit $n = 100$ lassen sich alle Wahrscheinlichkeiten über Dreiecks-/Rechteckflächen unter der Trapezdichte beschreiben:

i	p_i	np_i	$(\text{n}_i - np_i)^2$	$\frac{(\text{n}_i - np_i)^2}{np_i}$
0	$\frac{1}{14}$	7,14	23,59	3,3
1	$\frac{3}{14}$	21,42	71,04	3,32
2	$\frac{2}{7}$	28,57	2,04	0,07
3	$\frac{2}{7}$	28,57	6,61	0,23
4	$\frac{1}{7}$	14,28	22,22	1,56

Berechnung der Prüfgröße χ^2:

$$\chi^2 \approx \sum_{i=0}^{4} \frac{(\text{n}_i - np_i)^2}{np_i} = 8{,}48.$$

Bei der Bestimmung der Freiheitsgrade muss berücksichtigt werden, dass 5 Klassen verwendet werden und alle Parameter der Vergleichsverteilung bekannt sind. Somit verringert sich die Anzahl der Freiheitsgrade auf 4.

$$m = k - 1 = 5 - 1 = 4$$

Ermitteln von χ^2_α beispielsweise aus Abbildung 4.20 aus dem Messtechnik-Buch (9. Auflage) und mit $1-\alpha = 0{,}96$ ergibt $\chi^2_\alpha \approx 10$. Die Hypothese wird also angenommen, da $\chi^2_\alpha \geq \chi^2$.

b) Ja, da ein Fehler 2. Art durch diese Anforderungen nicht ausgeschlossen wird.

c) Der Kunde hat keinen eindeutigen Vorteil einer Erhöhung, da das Risiko einer nicht den Spezifikationen entsprechenden Auslieferung steigt. Der Produzent hat einen Vorteil, da es zu mehr Schlupf kommt und somit weniger Ausschussware produziert wird.

d)

$$\text{E}\{\text{zx}\} = \text{E}\{(3\text{x} - \frac{1}{2}\text{y})\text{x}\} = \text{E}\{(3\text{x}^2 - \frac{1}{2}\text{yx})\} = 3\text{E}\{\text{x}^2\} - \frac{1}{2}\text{E}\{\text{yx}\}$$

$$= 3\sigma_\text{x}^2 + 3\mu_\text{x}^2 - \frac{1}{2}C_\text{yx} - \frac{1}{2}\mu_\text{y}\mu_\text{x}$$

e) Da die Signalamplitude sich mit der Zeit ändert, ändern sich auch die statistischen Eigenschaften, so dass keine Stationarität und somit auch kein ergodischer Prozess vorliegen können.

f) Um das System nutzen zu können, werden am Empfänger unkorrelierte Sendesignale benötigt. Nur Sinusschwingungen unterschiedlicher Frequenz sind unkorreliert, sodass neben $x_1(t)$ und $x_2(t)$ nur $x_3(t)$ oder $x_4(t)$ genutzt werden kann. Um das zu zeigen, muss bei Mittelwertfreiheit eines Sinussignals nachgewiesen werden, dass:

$$\text{E}\{x_i(t+\tau)x_j(t)\} = \text{E}\{x_i(t+\tau)\}\text{E}\{x_j(t)\} = 0 \ \ \forall i \neq j\,.$$

Mit $\sin(a)\cdot\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$ ergibt sich (die nachfolgenden Schritte sind bei korrekter Begründung nicht notwendig):

$$\text{E}\{x_i(t+\tau)x_j(t)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} A_i A_j \int_{-T}^{T} \sin(2\pi f_i(t+\tau))\sin(2\pi f_j(t))\,\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} A_i A_j \int_{-T}^{T} \cos(2\pi((f_i - f_j)t + \tau f_i)) - \cos(2\pi((f_i + f_j)t + \tau f_i))\,\mathrm{d}t\,.$$

Wie in der Übung gezeigt, wird nur für $f_i \neq f_j$ dieser Ausdruck zu null, da jeweils über einen Sinus der zeitliche Mittelwert berechnet wird, der null ergibt.

g) Da das Ortungssystem auf Korrelation basiert, wird das erste Maximum der Autokorrelation gesucht. Da es sich bei der Autokorrelation um eine periodische Funktion handelt, muss somit der Suchbereich eingeschränkt werden. Um sicherzustellen, dass dieses Maximum die Signallaufzeit beschreibt, muss die maximale Entfernung d zwischen Sender und Empfänger kleiner als die kürzeste Wellenlänge λ_min sein:

$$d < \lambda_\text{min} = \frac{1}{f_3}v_\text{S} = \frac{1}{f_4}v_\text{S}\,.$$

Aufgabe 4:

a) Für den Quantisierungsfehler gilt laut Vorlesung für sinusförmige Signale:

$$\text{SNR}_\text{Quant} = 6{,}02\cdot N + 1{,}76$$ und damit

$$\text{SNR} = 90\,\text{dB} \leq \text{SNR}_\text{Quant}$$

$$\Rightarrow N \geq 14{,}66 \mathrel{\hat{=}} 15\text{Bit}$$

$$N_q = 2^N = 32768 \text{ Quantisierungsstufen.}$$

Analog gilt für den Jitterfehler:

$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{Jitter}} = 10\lg\left(\frac{2}{(2\pi f_{\mathrm{g}}\sigma_\tau)^2}\right)$$

$$\mathrm{SNR} = 90\,\mathrm{dB} \leq \mathrm{SNR}_{\mathrm{Jitter}}$$

$$\Rightarrow \sigma_\tau^2 = \left(\frac{10^{\frac{90}{10}}}{2}\cdot(2\pi\,20\,\mathrm{kHz})^2\right)^{-1} = 1{,}2665\cdot 10^{-19}\,\mathrm{s}^2.$$

Zur Berechnung von $\tau_{\max}$ wird der durch die Gleichverteilung gegebene Zusammenhang zu σ_τ genutzt:

$$\sigma_\tau^2 \leq \frac{(2\tau_{\max})^2}{12}$$

$$\Rightarrow \tau_{\max} \leq 6{,}1640\cdot 10^{-10}\mathrm{s} \approx 0{,}616\,\mathrm{ns}.$$

b) Ein Musiksignal besteht aus der Überlagerung vieler harmonischer Schwingungen mit unterschiedlichen Frequenzen und Amplituden. Die Amplitudendichte von überlagerten harmonischen Schwingungen ähnelt eher einer mittelwertfreien Normalverteilung als der Dichte einer einzelnen harmonischen Schwingung. Durch die Konzentration der Amplituden um null herum sinkt der Effektivwert und somit das Signal-Rausch-Verhältnis infolge der Quantisierung. Somit werden in der Realität mehr Bits benötigt.

c) Für Delta-Sigma-Umsetzer 1. Ordnung gilt näherungsweise

$$\mathrm{SNR}_{\Delta\Sigma} \approx \frac{1}{4\sin^2(\pi\frac{1}{M})} \quad \text{und daher} \quad \begin{aligned}\mathrm{SNR}_{\Delta\Sigma} &\geq \mathrm{SNR}\\ M &\geq 198691{,}8.\end{aligned}$$

d) Der Einfluss verkleinert sich.

e) Gesucht ist das Wiener-Filter $H(f)$ als Optimalfilter nach dem Schaltbild aus Abb. L1 mit der Übertragungsfunktion $G(f)$ des Messsystems.
Das Wiener-Filter lässt sich über

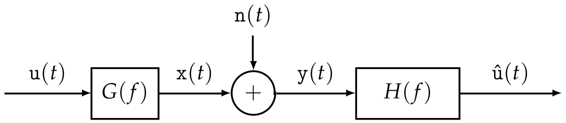


Abbildung L1: Wiener-Filter.

$$H(f) = \frac{S_{\mathrm{uy}}(f)}{S_{\mathrm{yy}}(f)} = \frac{S_{\mathrm{uu}}(f)G^*(f)}{S_{\mathrm{uu}}(f)|G(f)|^2 + S_{\mathrm{nn}}(f)}$$

bestimmen. $G(f)$ lässt sich dabei durch Systemidentifikation mit breitbandigem, bekannten Eingangssignal über

$$G(f) = \frac{S_{\mathrm{yx}}(f)}{S_{\mathrm{xx}}(f)} \qquad \text{bestimmen.}$$

Da die Leistungsdichten, wie beispielsweise $S_{\mathrm{uy}}(f)$, nicht bekannt sind, müssen diese über Periodogramme aus der Fourier-Transformation zeitbegrenzt aufgezeichneter Signale abgeschätzt werden:

$$\hat{S}_{\mathrm{uy}}(f) = U(f)Y^*(f).$$

Zusätzliche Mittelung über mehrere Aufzeichnungen verbessert das Schätzergebnis.

f) Nein, da das optimale Wiener-Filter nicht echtzeitfähig ist. Eine Möglichkeit wäre das kausale Wiener-Filter.

g) Die gesuchte Amplitudendichte ist in Abb. L2 gezeigt:

h) Durch den additiven und gleichverteilten Quantisierungsfehler $\mathrm{e_q}$ erhöht sich die

Varianz gegenüber dem unquantisierten Signal um $\frac{q^2}{12}$.

i) Das Frequenzzählverfahren misst die Anzahl der Nulldurchgänge und somit die Effektivfrequenz.

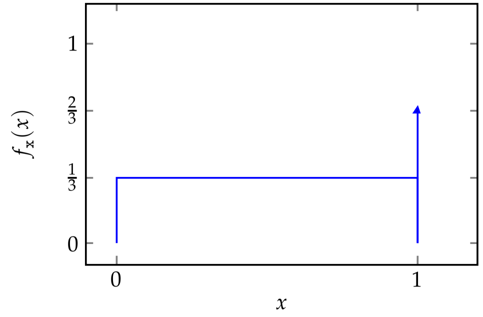


Abbildung L2: Amplitudendichte.

Aufgabe 1: Kurvenanpassung (18 Punkte)

Sie beobachten mit einem Messgerät einen Golfball, der im Ursprung Ihres Koordinatensystems abgeschlagen wird. Die Flugbahn kann als ideal und ohne Reibungseinflüsse angenommen werden. Im Verlauf des Fluges erhalten Sie an drei Messpunkten einer festen Weite die gemessene Höhe des Balls (Tabelle 1):

Tabelle 1: Messwerte.

Weite / m	Höhe / m
2	8,9
5	17,4
15	7,7

a) Berechnen Sie eine mathematische Beschreibung für den Flugverlauf, wenn der Ball exakt durch alle Messpunkte, sowie den Abschlagspunkt fliegt. *(5 Punkte)*

b) In welcher Entfernung zum Abschlagspunkt trifft der Ball dementsprechend wieder auf den Boden? *(1 Punkt)*

c) Handelt es sich um fehlerfreie oder fehlerbehaftete Messwerte? Begründen Sie Ihre Antwort. *(1 Punkt)*

d) Wie könnten Sie nun mittels eines Least-Square-Ansatzes die Flugbahn schätzen? Berücksichtigen Sie, dass der Abschlagspunkt sicher bekannt ist. Geben Sie die gesuchten Parameter sowie ihre Berechnungsvorschriften für die Parameter mit den benötigten Matrizen an. Setzen Sie die benötigten Werte ein, ohne die Matrixmultiplikationen durchzuführen. *(4 Punkte)*

e) Ist eine errechnete Flugweite basierend auf dem Ansatz aus Aufgabe **a**) oder **d**) wahrscheinlicher? Begründen Sie Ihre Antwort. *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgabe ist unabhängig von den bisherigen.

Tabelle 2: Spline-Interpolation.

u_i	$y(u_i)$
−2,2	2
0	7
1	6

f) Berechnen Sie für die in der Tabelle 2 angegebenen Werte die Spline-Koeffizienten für alle nötigen kubischen Splines. Sie müssen die Koeffizienten nicht in den Polynomansatz einsetzen und ausmultiplizieren. *(5 Punkte)*

Aufgabe 2: Messsysteme (16 Punkte)

Ihnen ist die Kennlinie eines Messgeräts $y(u) = \frac{2}{5}u^3 - \frac{1}{5}u^2 + u$ gegeben. Das Gerät darf mit Signalen mit Amplituden im Bereich $[-2;2]$ beschaltet werden. Ihr Messproblem erfordert eine betragsmäßige maximale „Krümmung" (gemeint ist die 2. Ableitung) der Kennlinie von 1.

a) Geben Sie den maximal geeigneten Messbereich an, skizzieren Sie die Kennlinie im Eingangsbereich und zeichnen Sie den geeigneten Bereich ein. *(4 Punkte)*

b) Entspricht dieser Bereich dem im Sinne der Vorlesung günstigsten Messbereich gleicher Breite? *(2 Punkte)*

Mess - H14

c) Worin unterscheiden sich beide Kriterien und unter welchen Bedingungen sind sie für den Fall einer Kennlinie dritten Grades gleich?

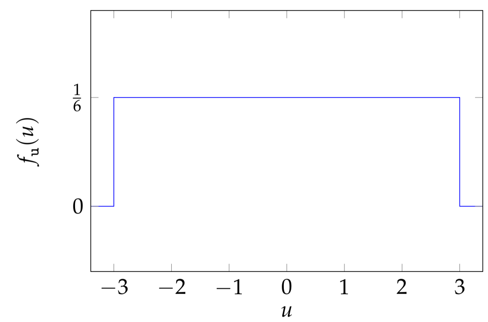


Abbildung 1: Amplitudendichte.

Ihr Messproblem führt zu Werten entsprechend der Amplitudendichte in Abbildung 1, und Ihnen stehen nun zusätzlich zwei Verstärker für Ihre Messaufgabe zur Verfügung.

d) Mit welcher Methode kombinieren Sie nun die von Ihnen getroffene Wahl des Messbereichs? *(1 Punkt)*

e) Geben Sie die Verstärkungsfaktoren der beiden Verstärker an. **Hinweis:** Sie können Signaloffsets beliebig einstellen. *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Gegeben sei ein Messergebnis y, welches sich mit Hilfe der fehlerbehafteten Einzelmessgrößen x_1, x_2 und x_3 berechnen lässt:

$$y(\mathbf{x}) = y(x_1, x_2, x_3) = 4 + x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^3 - x_3 \,.$$

Die Messfehler $\Delta x_i = x_i - x_{i0}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, seien rein zufällig und betragsmäßig klein. Außerdem seien die zugehörigen Varianzen σ_1^2, σ_2^2 und σ_3^2 bekannt.

f) Berechnen Sie die Varianz σ_y^2 des Messergebnisses y in Abhängigkeit der Korrelationskoeffizienten der Einzelmessgrößen. *(3 Punkte)*

g) Berechnen Sie die Varianz σ_y^2 des Messergebnisses y für den Fall, dass x_1 und x_2 starr gebunden sind. x_3 sei dabei unkorreliert zu den anderen Messgrößen. *(1 Punkt)*

Aufgabe 3: Statistik, Stochastische Signale (18 Punkte)

Sie benutzen einen Laserscanner zur Objektdetektion. Dieser liefert Ihnen Objektpositionen in polaren Koordinaten, also mit Winkel ϕ und Abstand r. Die Messungen sind mit mittelwertfreien stochastischen Fehlern behaftet. Der Winkelfehler ist hierbei gleichverteilt und die Abstandsmessfehler normalverteilt. Zusätzlich ist Ihnen die Kovarianzmatrix $\mathbf{M}_{\phi r}$ mit den Werten für die Varianzen auf der Diagonalen und den Werten für die Kovarianz auf der Gegendiagonalen gegeben:

$$\mathbf{M}_{\phi r} = \begin{pmatrix} 0{,}0076\,\mathrm{rad}^2 & 0 \\ 0 & 0{,}01\,\mathrm{m}^2 \end{pmatrix} .$$

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für Winkel- und Abstandsfehler an. *(3 Punkte)*

Tabelle 3: Häufigkeiten der Abstandsmessungen.

Messwert / m	Häufigkeit
29,7	2
29,8	8
29,9	20
30,0	30
30,1	27
30,2	10
30,3	3

b) Sie sind nun nur an der Abstandsmessung interessiert. In 100 unabhängigen Messungen erhalten Sie die Häufigkeiten der Messergebnisse in Tabelle 3. Bis zu welcher statistischen Sicherheit kann es sich nach dem Signifikanztest um die Messungen eines unbewegten Objekts in 30 m Entfernung entsprechend den oben angenommenen Messunsicherheiten handeln? *(5 Punkte)*

c) Für welche Objektbewegungen während der Messung wären die Aussagen aus der vorherigen Teilaufgabe weiterhin gültig? *(1 Punkt)*

d) Durch welches aus der Vorlesung bekannte Vorgehen könnten Sie die Abschätzungen für die Kovarianzmatrix in karthesischen Koordinaten erhalten? *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

e) Ihnen ist die Verbunddichte nach Abbildung 2 gegeben mit einem von null verschiedenen, konstanten Wert im grauen Bereich. Geben Sie eine mathematische Beschreibung sowohl für die Verbunddichte $f_{xy}(x, y)$ als auch für die Marginaldichte $f_x(x)$ an. *(4 Punkte)*

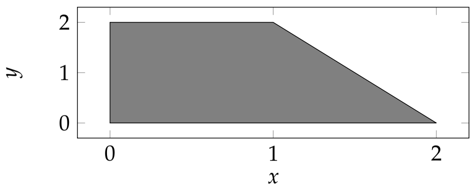


Abbildung 2: Verbunddichte $f_{xy}(x, y)$.

f) Besitzen die in Abbildung 2 dargestellten Zufallsgrößen x und y einen positiven oder einen negativen Korrelationskoeffizienten? Begründen Sie Ihre Antwort. *(1 Punkt)*

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den bisherigen.

g) Ordnen Sie folgenden Zusammenhängen $A - D$ die entsprechenden Korrelationskoeffizienten $\{\rho_1 = -0{,}9\}$, $\{\rho_2 = 0{,}01\}$, $\{\rho_3 = -1\}$, $\{\rho_4 = 0{,}7\}$ zu.

A :{Gewicht, Größe}

B :{Pünktlichkeit, Ankunftszeit}

C :{zurückgelegte Strecke, Treibstoff im Tank}

D :{vergangene Bearbeitungszeit, verbleibende Bearbeitungszeit} . *(2 Punkte)*

Aufgabe 4: Quantisierung, Abtastung, LTI-Systeme (15 Punkte)

Mess - H14

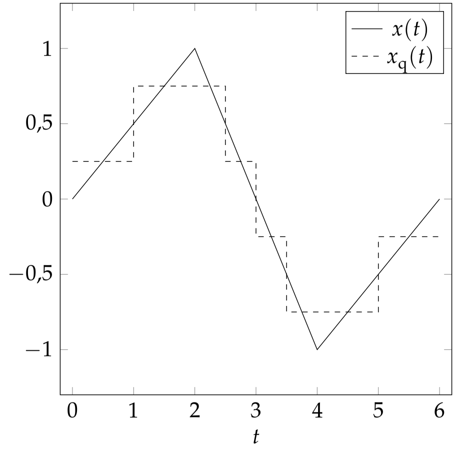


Abbildung 3: Kontinuierliches und quantisiertes Signal.

Ihnen ist das Signal $x(t)$ aus Abbildung 3 gegeben zusammen mit dem quantisierten Signal $x_q(t)$, das mit einem Quantisierer mit einem Eingangsbereich von -1 bis 1 erzielt wurde.

a) Wie lautet die nötige Bitanzahl für diesen Quantisierer? *(1 Punkt)*

b) Skizzieren Sie die entsprechende Quantisierungskennlinie. Achten Sie dabei auf eine korrekte Achsenbeschriftung. *(2 Punkte)*

c) Skizzieren Sie die Amplitudendichte des kontinuierlichen Signals. Gehen Sie davon aus, dass das Signal periodisch fortgesetzt wird. *(2 Punkte)*

d) Erweitern Sie die Skizze aus der vorherigen Teilaufgabe um die Amplitudendichte des quantisierten Signals. Gehen Sie wieder davon aus, dass das Signal periodisch fortgesetzt wird. Zeichnen Sie zusätzlich den Bereich der Flächenabtastung für einen Abtastwert ein. *(3 Punkte)*

e) Erklären Sie anhand der charakteristischen Funktion des gegebenen Signals, warum das Quantisierungstheorem hier nicht exakt erfüllt werden kann. *(1 Punkt)*

f) Welches der gegebenen bzw. skizzierten Signale kann nach einer vorgenommenen Quantisierung unter approximativer Einhaltung des Quantisierungstheorems rekonstruiert werden? *(1 Punkt)*

g) Geben Sie das durch die Quantisierung bestimmte SNR in dB an. *(1 Punkt)*

h) Sind die Quantisierungsstufen optimal verteilt? Begründen Sie Ihre Antwort. *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

i) Wodurch entstehen Jitter-Fehler? *(1 Punkt)*

j) Worin unterscheiden sich Frequenzmessung und Periodendauermessung und wann sollte welches Verfahren bevorzugt werden? *(2 Punkte)*

Lösung Aufgabe 1:

a) Da alle Messpunkte, inklusive dem Abschlagspunkt, exakt durchlaufen werden, wird ein globales Interpolationspolynom gesucht. Dieses kann mittels des hier verwendeten Differenzenschemas des Newton-Verfahrens oder alternativ mit dem Lagrange-Verfahren berechnet werden:

x	$\Delta^0 y = y$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	0			
		4,45		
2	8,9		$\frac{-97}{300}$	
		$\frac{17}{6}$		$\frac{2}{975}$
5	17,4		$\frac{-1141}{3900}$	
		$-\frac{97}{100}$		
15	7,7			

Der Newton-Ansatz bei 4 Stützstellen lautet:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{\text{New}}(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1)\\ &\quad + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\\ &= \Delta^0 y + \Delta^1 y(x-x_0) + \Delta^2 y(x-x_0)(x-x_1)\\ &\quad + \Delta^3 y(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\,.\end{aligned}$$

Einsetzen der Werte aus dem Differenzenschema ergibt:

$$\tilde{y}_{\text{New}}(x) = 0{,}0021x^3 - 0{,}3377x^2 + 5{,}1172x\,.$$

b) Da eine Nullstelle des Polynoms bei Null bekannt ist, handelt es sich bei dem gesuchten Ergebnis um die nächste Nullstelle des Polynom 2. Grades bei $x = 16{,}8853$.

c) Die Messungen müssen fehlerbehaftet sein, da die ideale Flugbahn durch eine Parabel ohne Terme dritter Ordnung beschrieben werden würde.

d) Als Signalmodell wird für die Flugbahn ohne Reibung eine Parabel der Form $y = ax^2 + bx + c$ angenommen. Da zusätzlich sicher bekannt ist, dass die Flugbahn durch den Ursprung $(0;0)$ verläuft, ist der Parameter c null. Somit müssen nur noch Parameter a und b aus den Messwerten geschätzt werden.
Das LS-Gleichungssystem lautet:

$$\mathbf{y} = \mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{b}$$

mit:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 8{,}9\\ 17{,}4\\ 7{,}7\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 2^2 & 2\\ 5^2 & 5\\ 15^2 & 15\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}.$$

Mit der Pseudoinversen berechnet man die Koeffizienten a und b:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix} &= (\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}\\ &= \left(\begin{pmatrix} 4 & 25 & 225\\ 2 & 5 & 15\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2\\ 25 & 5\\ 225 & 15\end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix} 4 & 25 & 225\\ 2 & 5 & 15\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8{,}9\\ 17{,}4\\ 7{,}7\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

e) Die Flugweite aus Aufgabe **d)** ist wahrscheinlicher, da hier eine Mittelung über Messwerte durchgeführt wird.

f) Für die gegebenen Werte können das erste und zweite Segment s_0 und s_1 berechnet werden. Mit den Eigenschaften $y_0'' = y_2'' = 0$ vereinfacht sich das zu lösende Gleichungssystem somit zu:

$$\Big(\, 2(h_0+h_1)\,\Big)\Big(\, y_1''\,\Big) = \Big(\, \tfrac{6}{h_1}(y_2-y_1) - \tfrac{6}{h_0}(y_1-y_0)\,\Big)\,.$$

Mit $h_0 = 2{,}2$ und $h_1 = 1$ lässt sich $y_1'' = -\frac{135}{44}$ bestimmen und sich die Koeffizienten des ersten Segments berechnen:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{6\cdot h_0}(y_1''-y_0'') = \frac{1}{6\cdot 2{,}2}\cdot -\frac{135}{44} = -\frac{225}{968} = -0{,}2324\\ b_0 &= \frac{1}{2}y_0'' = 0\\ c_0 &= \frac{1}{h_0}(y_1-y_0) - \frac{h_0}{6}(y_1''+2y_0'') = \frac{5}{2{,}2} + \frac{2{,}2}{6}\cdot\frac{135}{44} = \frac{299}{88} = 3{,}3978\\ d_0 &= y_0 = 2\,.\end{aligned}$$

Das zweite Segment s_1 besitzt die Koeffizienten:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0{,}511\\ b_1 &= -\frac{135}{88}\\ c_1 &= \frac{1}{44}\\ d_1 &= y_1 = 7.\end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 2:

a) Um den geeigneten Messbereich zu finden, wird die Krümmung herangezogen und somit die zweite Ableitung benötigt:

$$\begin{aligned} y'(u) &= \frac{6}{5}u^2 - \frac{2}{5}u + 1\\ y''(u) &= \frac{12}{5}u - \frac{2}{5}\,.\end{aligned}$$

Zur Erfüllung der Anforderung muss $|y''(u)| \leq 1$ gelten. Dies ist zwischen $u \geq -\frac{1}{4}$ und $u \leq \frac{7}{12}$ der Fall. Dieser Bereich stellt somit den maximalen Messbereich dar. Als Hilfe für die Skizze L1 lässt sich ein Punkt u_{WP} mit $y''(u_{\text{WP}}) = 0$ bei $y'''(u_{\text{WP}}) \neq 0$ und somit ein Wendepunkt bei $u_{\text{WP}} = \frac{1}{6}$ finden und somit die Kennlinie in blau einzeichnen.

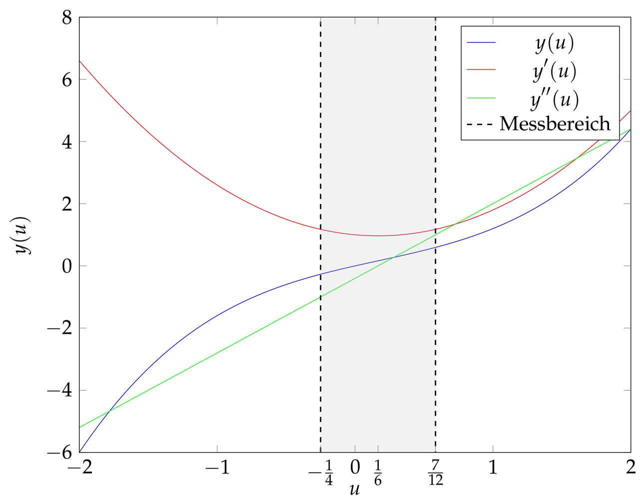


Abbildung L1: Kennlinie mit geeignetem Eingangsbereich. Zusätzlich sind noch die Steigung und die Krümmung eingezeichnet.

b) Aus der vorherigen Aufgabe ist ersichtlich, dass die Kennlinie einen Wendepunkt besitzt und somit das Kriterium 1 für den günstigsten Messbereich verwendet werden kann. Der vergleichbare Bereich mit der Größe d berechnet sich aus den Grenzen des vorherigen Bereichs zu $d = \frac{7}{12} - (-\frac{1}{4}) = \frac{5}{6}$. Somit ergibt sich für den Anfang des günstigsten Messbereichs u_a mit dem Kriterium $S(u_a) = S(u_a + d)$ mit $S(u) = y'(u)$ der Messbereich:

$$u_a = (-\frac{1}{4}) \leq u \leq \frac{7}{12} = u_a + d\,.$$

Dieser entspricht exakt dem Messbereich der vorherigen Teilaufgabe.

c) Während bei dem allgemeinen Kriterium 1 die quadratische Abweichung zwischen idealer/konstanter Steigung und tatsächlicher Steigung minimiert wird, werden in dem hier genannten Kriterium Bereiche mit möglichst kleiner Krümmung gesucht. Handelt es sich bei der Kennlinienfunktion um eine Funktion dritten Grades, sind sowohl Steigung als auch Krümmung im Wendepunkt null und um den Wendepunkt, wie in Abbildung L1 gezeigt, symmetrisch, so dass auch ein günstigster Messbereich symmetrisch um den Wendepunkt liegt. Somit liefern für diesen Fall beide Kriterien das gleiche Ergebnis, wenn gleich große Bereiche gefordert sind und der Wendepunkt im betrachteten Bereich liegt.

d) Mit der Methode „Herabsetzen des Messbereichs".

e) Unter der Nebenbedingung $V_1 \cdot V_2 = 1$ muss der Signalpegel auf den gewählten Messbereich angepasst werden. Aus Abbildung 1 kann abgelesen werden, dass sich mögliche Signale im Bereich von -3 bis 3 befinden. Somit ergeben sich die Verstärkungen zu:

$$V_1 = \frac{\text{Ausgangsbereich}}{\text{Eingangsbereich}} = \frac{\frac{5}{6}}{6} = \frac{5}{36}$$
$$V_2 = \frac{\text{Eingangsbereich}}{\text{Ausgangsbereich}} = \frac{6}{\frac{5}{6}} = \frac{36}{5}$$

f) Zunächst werden die partiellen Ableitungen gebildet:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 2x_1$$
$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = x_2^2$$
$$\frac{\partial y}{\partial x_3} = -1\,.$$

Nun kann die resultierende Varianz berechnet werden:

$$\sigma_y^2 = 4x_{10}^2\sigma_1^2 + x_{20}^4\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 4x_{10}x_{20}^2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} - 4x_{10}\sigma_1\sigma_3\rho_{13} - 2x_{20}^2\sigma_2\sigma_3\rho_{23}\,.$$

g) Durch die Angabe kann auf die jeweiligen ρ_{ij} geschlossen werden: $\rho_{12} = 1$. Alle anderen Korrelationskoeffizienten sind null:

$$\sigma_y^2 = 4x_{10}^2\sigma_1^2 + x_{20}^4\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 4x_{10}x_{20}^2\sigma_1\sigma_2\,.$$

Lösung Aufgabe 3:

a) Aus der Aufgabenstellung sind Art der Verteilung, Mittelwertfreiheit und Varianz gegeben. Sowohl Gleichverteilung als auch Normalverteilung sind somit vollständig beschrieben. Aus der Varianz der Gleichverteilung kann auf ihre Breite geschlossen werden und somit folgt:

$$\sigma^2 = \frac{1}{12}(b-a)^2$$
$$\Rightarrow b = \frac{1}{2}\sqrt{12\sigma^2} = \frac{1}{2}\sqrt{12 \cdot 0{,}0076\,\text{rad}^2} = 0{,}1510\,\text{rad}$$
$$f_\phi(\phi) = \mathcal{U}(-b,b) = \left\{\frac{1}{2b} \text{ für } |\phi| \leq b\right\} = \{3{,}3113 \text{ für } |\phi| \leq 0{,}1510\,\text{rad}\}$$

Die Parameter der Normalverteilung können direkt abgelesen werden:

$$f_r(r) = \mathcal{N}(0;0{,}01\,\text{m}^2) = \frac{1}{\sqrt{0{,}01\,\text{m}^2 2\pi}} \exp\left(-\frac{r^2}{2 \cdot 0{,}01\,\text{m}^2}\right)$$

b) Um den Signifikanztest durchzuführen, müssen zuerst alle Voraussetzungen geprüft werden. Hier sind die Voraussetzungen der Unabhängigkeit der Messwerte und der Normalverteilung der Grundgesamtheit mit Mittelwert 30 m gegeben.

Der Stichprobenmittelwert $\hat{r}$ lässt sich berechnen zu:

$$\hat{r} = \frac{29{,}7\,\text{m} \cdot 2 + 29{,}8\,\text{m} \cdot 8 + 29{,}9\,\text{m} \cdot 20}{100} + \frac{30\,\text{m} \cdot 30 + 30{,}1\,\text{m} \cdot 27 + 30{,}2\,\text{m} \cdot 10 + 30{,}3\,\text{m} \cdot 3}{100} = 30{,}014\,\text{m}\,.$$

Die Nullhypothese lautet:

$$H_0 : \hat{r} = \mu_0 = 30\,\text{m}\,.$$

Die Prüfgröße wird in diesem Fall mit bekannter Standardabweichung berechnet:

$$z = \frac{|\hat{r} - \mu_0|}{\sqrt{\sigma_r^2}}\sqrt{n} = \frac{|30{,}014\,\text{m} - 30\,\text{m}|}{\sqrt{0{,}01\,\text{m}^2}}\sqrt{100} = 1{,}4 = c\,.$$

Die gesuchte statistische Sicherheit ergibt sich somit zu:

$$P(c) = P(1{,}4) = 83{,}8487\,\%\,.$$

c) Für beliebige Kreisbewegungen mit konstantem Radius um den Sensor behalten die Aussagen ihre Gültigkeit.

d) Für eine Abschätzung kann das Gauß'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz herangezogen werden.

e) Da die Verbunddichte eine gültige Wahrscheinlichkeitsdichte sein muss und somit nach Integration eins ergeben muss, ist ihr Funktionswert innerhalb des Definitionsbereichs der inverse Flächeninhalt und somit ein Drittel:

$$f_{xy}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3}\,, \text{ für } \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq y \leq 2 \\ 1 < x \leq 2 \text{ und } 0 \leq y \leq -2x+4 \end{cases} \\ 0\,, \text{ sonst} \end{cases}$$

Die Dichte $f_x(x)$ errechnet sich über Marginalisierung:

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)\,\text{d}y = \begin{cases} \int_0^2 \frac{1}{3}\text{d}y = \frac{2}{3} \text{ für } 0 \leq x \leq 1 \\ \int_0^{-2x+4} \frac{1}{3}\text{d}y = \frac{1}{3} \cdot (-2x+4) = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \text{ für } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

f) Abbildung 2 besitzt einen negativen Korrelationskoeffizienten, da für hohe x-Werte die Wahrscheinlichkeit hoher y-Werte abnimmt.

g)

$$A : \rho_4 \quad C : \rho_1$$
$$B : \rho_2 \quad D : \rho_3\,.$$

Lösung Aufgabe 4:

a) Die vier Stufen des quantisierten Signals werden durch einen 2-Bit-Quantisierer erzeugt.

b) Die Kennlinie des Quantisierers ist in Abbildung L2 zu sehen.

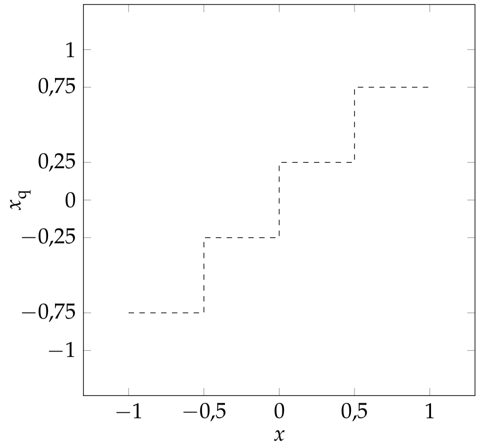


Abbildung L2: Kennlinie des Quantisierers.

c) Die Amplitudendichte des kontinuierlichen Signals ist in Abbildung L3 als durchgezogene Linie zu sehen.

d) Die Amplitudendichte des quantisierten Signals ist in Abbildung L3 als gestrichelte Linie zu sehen. Die Bereiche der Flächenabtastung sind gepunktet gekennzeichnet und exemplarisch ist ein Bereich grau hinterlegt.

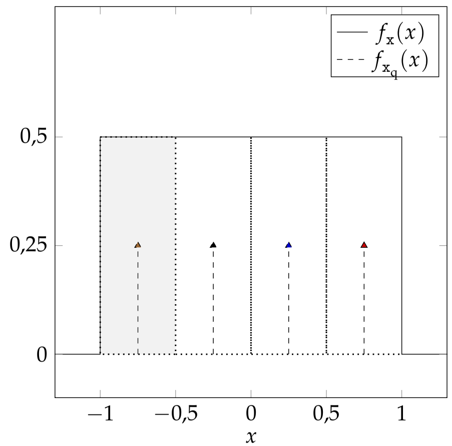


Abbildung L3: Amplitudendichten.

e) Da die charakteristische Funktion in diesem Fall eine Sinc-Funktion ist, ist bei Flächenabtastung eine überlappungsfreie spektrale Darstellung nicht möglich.

f) Die Amplitudendichte aus Aufgabenteil **c)** ist unter Einhaltung des Quantisierungstheorems rekonstruierbar.

g) Das SNR für gleichverteilte Amplituden bei einem 2-Bit-Quantisierer berechnet sich zu:

$$\mathrm{SNR} = 2^{2N} = 16 \mathrel{\hat{=}} 12{,}04\,\mathrm{dB}\,.$$

h) Da alle Stufen gleichwahrscheinlich sind, handelt es sich um eine optimale Quantisierung.

i) Jitterfehler entstehen durch zeitliche Abweichungen vom idealen Abtastzeitpunkt.

j) Während die Frequenzmessung zeitsynchron erfolgt, verläuft die Periodendauermessung winkelsynchron. Bei hohen Drehzahlen ist daher die Frequenzmessung zu bevorzugen, während die Periodendauermessungen für niedrigere Drehzahlen geeigneter ist.