Aufgabe 1: Kurvenapassung / Kennlinienanalyse (24 Punkte)

Zur Modellierung eines Leitungsdrucks sind folgende Messwerte $y(u_i)$ an den Stützstellen u_i bestimmt worden:

u_i	-4	-2	0	2
$y(u_i)$	-6	-5	2	6

Tabelle 1: Messauswertungen des Leitungsdrucks.

a) Wie lautet das Interpolationspolynom unter Verwendung des Polynomansatzes nach Lagrange? *(5 Punkte)*

b) Aufgrund einer ungenügenden Modellbildung wird ein zusätzlicher Messwert an der Stützstelle $u_4 = 1$ ermittelt: $y(1) = 4$. Berechnen Sie das neue Interpolationspolynom unter Berücksichtigung dieses Messwertes. Verwenden Sie das Ergebnis der Lagrange-Interpolation weiter und nutzen Sie den rekursiven Ansatz der Newton-Methode.

(4 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

c) Bei der Wahl eines geeigneten Messbereiches sind sowohl eine gute Linearität als auch eine hohe Empfindlichkeit der Kennlinie von Bedeutung. Geben Sie den Punkt der Kennlinie

$$f(t) = 1 + 3t - t^2 - \frac{1}{4}t^3 + \frac{1}{4}t^4$$

im Intervall $[-3, 2]$ an, um den herum der Messbereich gelegt werden muss, damit für das Messsignal die beiden Ziele erreicht werden. *(3 Punkte)*

d) Wiederum wird von dem Messsignal $f(t)$ im geänderten Intervall $I = [-4, 1]$ ausgegangen. Wählen Sie für einen auf das Intervall $[t_a, t_a + 1{,}5] \subset I$ beschränkten Messbereich den Messanfang t_a so, dass das Gütemaß Q des mittleren quadratischen Fehlers zwischen der realen Empfindlichkeit und der idealen Empfindlichkeit minimiert wird. *(3 Punkte)*

e) Die Empfindlichkeit des in Teilaufgabe c) ermittelten Arbeitspunktes soll erhöht werden. Dabei stehen Ihnen zwei identische Messwertaufnehmer zur Verfügung. Skizzieren Sie die Messanordnung zur Erhöhung der Empfindlichkeit. Wie nennt man dieses Prinzip? Wie stark ist die Krümmung der Messkennlinie im Arbeitspunkt? *(3 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Ihnen sind folgende Messwertpaare gegeben:

u_i	0	1	2	3
$y(u_i)$	3	2	1	5

f) Wieviele Kurvensegmente werden benötigt, um alle Stützstellen und ihre Zwischenwerte durch kubische Splines zu beschreiben?

(1 Punkt)

g) Nutzen Sie das kubische Spline-Interpolationsverfahren, um $y(u)$ für $u = \frac{1}{2}$ zu bestimmen. Hierfür nicht benötigte Segmente müssen nicht berechnet werden. *(5 Punkte)*

Lösung

a) Die Lagrange-Interpolation mit vier Stützstellen führt zu folgendem Polynom:

$$
\begin{aligned}
y_\mathrm{L}(u) &= y(u_0)\frac{(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)}{(u_0-u_1)(u_0-u_2)(u_0-u_3)} + y(u_1)\frac{(u-u_2)(u-u_3)(u-u_0)}{(u_1-u_2)(u_1-u_3)(u_1-u_0)} \\
&\quad + y(u_2)\frac{(u-u_3)(u-u_0)(u-u_1)}{(u_2-u_3)(u_2-u_0)(u_2-u_1)} + y(u_3)\frac{(u-u_0)(u-u_1)(u-u_2)}{(u_3-u_0)(u_3-u_1)(u_3-u_2)} \\
&= -6\frac{u^3-4u}{-48} - 5\frac{u^3+2u^2-8u}{16} + 2\frac{u^3+4u^2-4u-16}{-16} + 6\frac{u^3+6u^2+8u}{48} \\
&= -\frac{3}{16}u^3 - \frac{3}{8}u^2 + \frac{7}{2}u + 2.
\end{aligned}
$$

b) Der Ansatz für Newton-Polynome lautet:

$$
\begin{aligned}
y_\mathrm{N}(u) &= a_0 + a_1(u-u_0) + a_2(u-u_0)(u-u_1) \\
&\quad + \cdots + a_{n-1}(u-u_0)(u-u_1)\cdots(u-u_{n-2}).
\end{aligned}
$$

Somit lässt sich die um eine neue Stützstelle erweiterte Interpolationsfunktion darstellen als

$$
y_\mathrm{Erw}(u) = y_\mathrm{L}(u) + a_4(u-u_0)(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3).
$$

Ausgewertet am Punkt $u = u_4 = 1$ mit $y(u_4) = 4$ lässt sich der Koeffizient a_4 zu $\frac{1}{16}$ bestimmen, womit

$$
y_\mathrm{N}(u) = \frac{1}{16}u^4 + \frac{1}{16}u^3 - \frac{5}{8}u^2 + \frac{5}{2}u + 2.
$$

c) Prüfen auf Wendepunkte:

$$
f' = t^3 - \frac{3}{4}t^2 - 2t + 3; \quad f'' = 3t^2 - \frac{3}{2}t - 2; \quad f''' = 6t - \frac{3}{2}
$$

$$
f'' = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{105}{144}}
$$

Da die dritte Ableitung in beiden Fällen ungleich null ist, besitzt die Kennlinie 2 Wendepunkte, weswegen derjenige mit der größeren Empfindlichkeit gewählt wird:

$$
\begin{aligned}
&t_1 = 1{,}1039 \qquad f'(t_1) = 1{,}22 \\
&t_2 = -0{,}6039 \quad f'(t_2) = 3{,}71 \Rightarrow \text{Arbeitspunkt: } t_2
\end{aligned}
$$

d) Q wird minimal für $S(t_a) = S(t_a + 1,5)$

$$
t_a^3 - \frac{3}{4}t_a^2 - 2t_a + 3 = (t_a+1,5)^3 - \frac{3}{4}(t_a+1,5)^2 - 2(t_a+1,5) + 3
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= 9t_a^2 + 9t_a - \frac{21}{8} \Rightarrow t_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{13}{24}} \\
t_1 &= 0{,}236 \quad \text{Intervallende } t_1 + 1,5 \text{ außerhalb von Intervall.} \\
t_2 &= -1{,}236 = t_a
\end{aligned}
$$

e) Durch Parallelschaltung zweier identischer Meßwertaufnehmer wird eine Differenzkennlinie erzeugt (Abbildung 1), das Verfahren heisst entsprechend Differenzmethode. Alle geraden Terme der ursprünglichen Kennlinie werden bei der Differenzmethode eliminiert, entsprechend wird auch die Krümmung zu null.

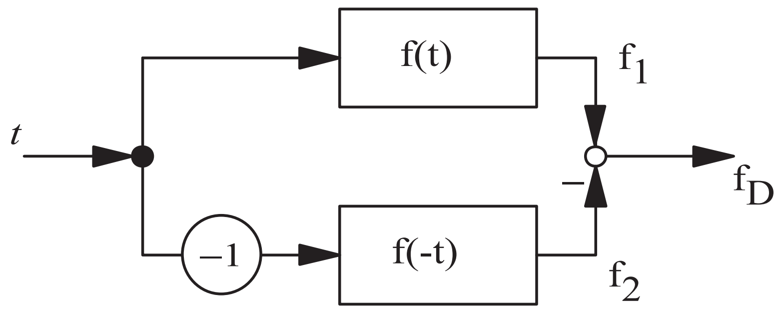

Abbildung 1: Parallelschaltung zweier Meßwertaufnehmer.

f) Es werden drei Segmente benötigt.

g) Für die gewünschte Interpolation ist nur das erste Segment s_0 zu berechnen, da $u = \frac{1}{2}$ zwischen u_0 und u_1 liegt. Mit den Eigenschaften $y_0'' = y_3'' = 0$ vereinfacht sich das zu lösende Gleichungssystem somit zu:

$$\begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1'' \\ y_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{h_1}(y_2-y_1) - \frac{6}{h_0}(y_1-y_0) \\ \frac{6}{h_2}(y_3-y_2) - \frac{6}{h_1}(y_2-y_1) \end{pmatrix}.$$

Mit $h_0 = h_1 = h_2 = 1$ lassen sich $y_1'' = -2$ und $y_2'' = 8$ bestimmen und sich die Koeffizienten des ersten Segments berechnen:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{6}(y_1''-y_0'') = \frac{1}{6} - 2 = -\frac{1}{3} \\ b_0 &= \frac{1}{2}y_0'' = 0 \\ c_0 &= (y_1-y_0) - \frac{1}{6}(y_1''+2y_0'') = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \\ d_0 &= y_0 = 3. \end{aligned}$$

Das Segment $s_0(u)$ ergibt sich also zu

$$s_0(u) = a_0(u-u_0)^3 + b_0(u-u_0)^2 + c_0(u-u_0) + d_0 = -\frac{1}{3}u^3 - \frac{2}{3}u + 3$$

und führt zum gesuchten wert $s_0(\frac{1}{2}) = 2{,}625$.

Aufgabe 2: Stationäres Verhalten von Messsystemen (20 Punkte)

Die von einer Lampe der Temperatur T_L ausgehende Strahlung fällt auf einen Temperatursensor der Fläche A (Abbildung 2), der die Leistung $P_a = \epsilon\sigma A(T_L^4 - T_{Um}^4)$ bei vorhandener Umgebungstemperatur T_{Um} absorbiert und selbst die Temperatur T_1 annimmt (ϵ : Emissionskoeffizient, σ : Stefan-Boltzmann-Konstante). Aufgrund der Energiebilanz ist die absorbierte Leistung P_a gleich der an die Umgebung abgegebenen Leistung $P_{Um} = \alpha A(T_1 - T_{Um})$, wobei α den Wärmeübergangskoeffizienten darstellt. Die am Ausgang des Sensors anliegende Spannung $U = c \cdot (T_1 - T_{Um})$ wird gemessen, $c > 0$.

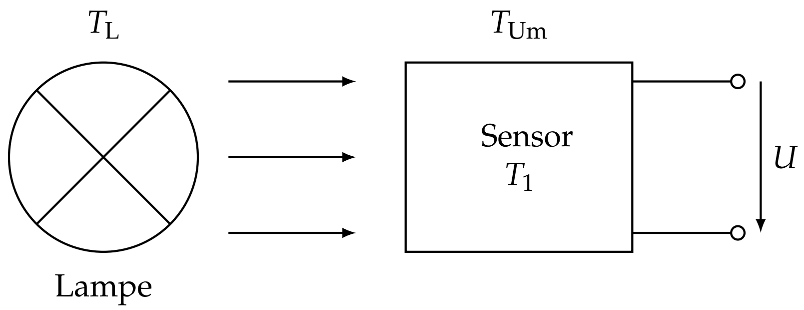

Abbildung 2: Messsystem des Temperatursensors.

a) Geben sie die Spannung U als Funktion der Temperatur T_L der Lampe an. *(2 Punkte)*

Unter Normalbedingungen sei die Umgebungstemperatur $T_{Um} = T_0$ konstant, der Emissionskoeffizient besitze den Wert ϵ_0.

b) Berechnen Sie den relativen Fehler $F_{r,\epsilon}$ der Ausgangsspannung U, der durch Abweichungen $\Delta\epsilon = \epsilon - \epsilon_0$ des Emissionskoeffizienten von den Normalbedingungen entsteht. *(3 Punkte)*

c) Wie gehen Schwankungen ΔT der Umgebungstemperatur in das Ergebnis mit ein? Bestimmen Sie hierzu den relativen Fehler der Ausgangsspannung U mit dem Emissionskoeffizienten unter Normalbedingungen. *(3 Punkte)*

d) Approximieren Sie den relativen Fehler $F_{r,T}(\Delta T)$ mit Hilfe des Taylorpolynoms $P_1(\Delta T)$ ersten Grades um den Entwicklungspunkt $\Delta T = 0$. *(3 Punkte)*

Es wird mit dem approximierten relativen Fehler aus Teilaufgabe d) und den Werten $T_L = 1100\,\mathrm{K}$, $T_0 = 300\,\mathrm{K}$ weitergerechnet.

e) Sie tolerieren in ihrem Messsystem einen durch Temperaturschwankungen ΔT hervorgerufenen approximierten Fehler $P_1(\Delta T)$, der betragsmäßig kleiner als 0,5 % ist. Wie könnten Sie sicherstellen, dass diese Grenze nicht überschritten wird? Ist dies im vorliegenden Fall für eine Verwendung des Messsystems im Außenbereich nötig? *(3 Punkte)*

Der Absorptionsgrad unter Normalbedingungen sei im Folgenden $\epsilon_0 = 0{,}8$.

f) Der Absorptionsgrad ϵ ist materialabhängig und unterliegt somit produktionsbedingten Schwankungen. Sie nehmen an, dass der Absorptionsgrad ihres Sensors normalverteilt ist mit Mittelwert $\mu_\epsilon = 0{,}8$ und Standardabweichung $\sigma_\epsilon = 0{,}02$. Wie groß ist die statistische Sicherheit, dass der relative Fehler $F_{r,\epsilon} \leq 5\,\%$ ist? *(4 Punkte)*

g) Ist der durch ΔT entstehende Fehler in der Messkennlinie $U = U(T_L)$ ein multiplikativer Fehler oder eine superponierender Fehler? (Begründung!) *(2 Punkte)*

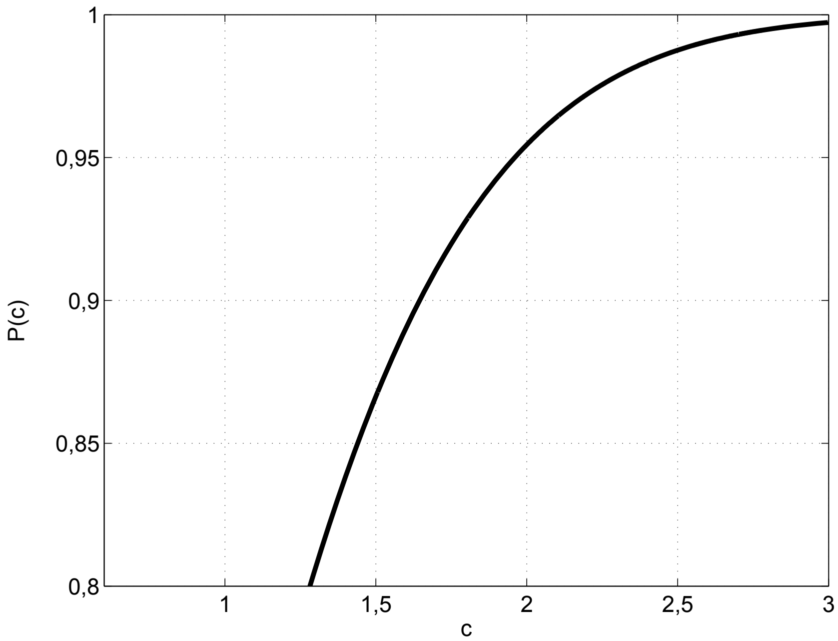

Abbildung 3: Standardnormalverteilung.

Lösung

a) Werden die gegebenen Gleichungen ineinander eingesetzt, so folgt

$$\epsilon\sigma A(T_\mathrm{L}^4 - T_\mathrm{Um}^4) = \alpha A(T_1 - T_\mathrm{Um}) = \alpha A\frac{U}{c}.$$

Damit lässt sich die Spannung berechnen zu

$$U = \frac{c\epsilon\sigma}{\alpha}(T_\mathrm{L}^4 - T_\mathrm{Um}^4).$$

b) Für den relativen Fehler ergibt sich

$$F_{\mathrm{r},\epsilon} = \frac{\frac{c(\epsilon_0+\Delta\epsilon)\sigma}{\alpha}(T_\mathrm{L}^4 - T_\mathrm{Um}^4) - \frac{c\epsilon_0\sigma}{\alpha}(T_\mathrm{L}^4 - T_\mathrm{Um}^4)}{\frac{c\epsilon_0\sigma}{\alpha}(T_\mathrm{L}^4 - T_\mathrm{Um}^4)} = \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_0}.$$

c) Der relative Fehler bei Temperaturschwankungen beträgt:

$$F_{\mathrm{r},T} = \frac{(T_\mathrm{L}^4 - (T_0 + \Delta T)^4) - (T_\mathrm{L}^4 - T_0^4)}{T_\mathrm{L}^4 - T_0^4} = \frac{T_0^4 - (T_0 + \Delta T)^4}{T_\mathrm{L}^4 - T_0^4}.$$

d) Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{r},T}}{\mathrm{d}(\Delta T)} = \frac{-4}{T_\mathrm{L}^4 - T_0^4}(T_0 + \Delta T)^3,$$

folglich ist

$$\left.\frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{r},T}}{\mathrm{d}(\Delta T)}\right|_{\Delta T=0} = \frac{-4}{T_\mathrm{L}^4 - T_0^4}T_0^3.$$

Für das Taylorpolynom 1. Grades gilt

$$F_{\mathrm{r},T} \approx P_1(\Delta T) = \frac{-4}{T_\mathrm{L}^4 - T_0^4}T_0^3\Delta T.$$

e) Durch eine geeignete Abschirmung, beispielsweise Thermostatisierung, lassen sich Schwankungen vermeiden. Mit dem Ansatz

$$\left|\frac{-4}{(T_\mathrm{L}^4 - T_0^4)}T_0^3\Delta T\right| \leq 0{,}005$$

folgt für die Temperaturschwankung

$$|\Delta T| \leq 67{,}4\,\mathrm{K}.$$

Ausgehend von $T_0 \approx 27\,°\mathrm{C}$ könnte die Außentemperatur also zwischen etwa $-40\,°\mathrm{C}$ und $94\,°\mathrm{C}$ liegen, ohne dass die Fehlergrenze überschritten wird. Somit ist eine Thermostatisierung für gewöhnlich nicht notwendig.

f) Um einen relativen Fehler kleiner als 5 % zu erhalten, muss die Abweichung kleiner sein als:

$$\Delta\epsilon \leq F_{\mathrm{r},\epsilon} \cdot \epsilon_0 = 0{,}04$$

Um für eine normalverteilte Größe die statistische Sicherheit zu berechnen, wird die gegebene Verteilung zu einer Standardnormalverteilung normiert, so dass sich mit der bekannten Standardabweichung die Wahrscheinlichkeit für das gegebene Konfidenzintervall c aus der gegebenen Abbildung 3 ablesen lässt:

$$P(c) = P\left\{\frac{|\Delta\epsilon|}{\sigma_\epsilon}\right\} = P(2) = 95{,}45\%$$

g) Die Messkennlinie ist

$$U(T_\mathrm{L}) = \frac{c\epsilon\sigma}{\alpha}T_\mathrm{L}^4 - \frac{c\epsilon\sigma}{\alpha}(T_0 + \Delta T)^4.$$

Der durch den Fehler ΔT verursachte Offset ist von T_L unabhängig und damit für alle Eingangswerte identisch, der Fehler ist superponierend.

Aufgabe 3: Statistik (17 Punkte)

Im Rahmen einer Messauswertung sollen zwei Zufallsgrößen $\mathtt{x}, \mathtt{y}$ näher analysiert werden. Die gemeinsame Dichte der beiden Größen ist bekannt:

$$f(x,y) = K \cdot 1_B(x,y), \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < y < 1, \;\; y-2 < x < y\}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Die Variable 1_B bezeichnet hierbei die Indikatorfunktion, also

$$1_B(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in B, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie den Bereich, in welchem die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen ungleich null ist. Berechnen Sie den Wert der Konstante K.

(3 Punkte)

b) Berechnen Sie die Randdichten $f_{\mathtt{x}}(x), f_{\mathtt{y}}(y)$ der Zufallsvariablen $\mathtt{x}, \mathtt{y}$. Berechnen und skizzieren Sie zudem den Verlauf der dazugehörigen Verteilungsfunktionen.

(5 Punkte)

c) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\mathrm{E}\{\mathtt{x}\}, \mathrm{E}\{\mathtt{y}\}, \mathrm{E}\{\mathtt{xy}\}$. Sind die Variablen $\mathtt{x}, \mathtt{y}$ voneinander unabhängig? (Begründung)

(4 Punkte)

d) Besitzen die Variablen $\mathtt{x}, \mathtt{y}$ einen positiven Korrelationskoeffizienten, einen negativen Korrelationskoeffizienten oder nimmt dieser den Wert null an? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe der Skizze aus Teil a).

(3 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den vorherigen.

e) Wie ist die Prüfgröße bei einem Signifikanztest für den Stichprobenmittelwert verteilt, falls Sie die Varianz vorab nicht kennen? Aus welchen Verteilungen resultiert diese Verteilung?

(2 Punkte)

Lösung

a) Die gemeinsame Dichte $f(x,y)$ nimmt im schraffierten Bereich den Wert 1 an, ansonsten den Wert 0.

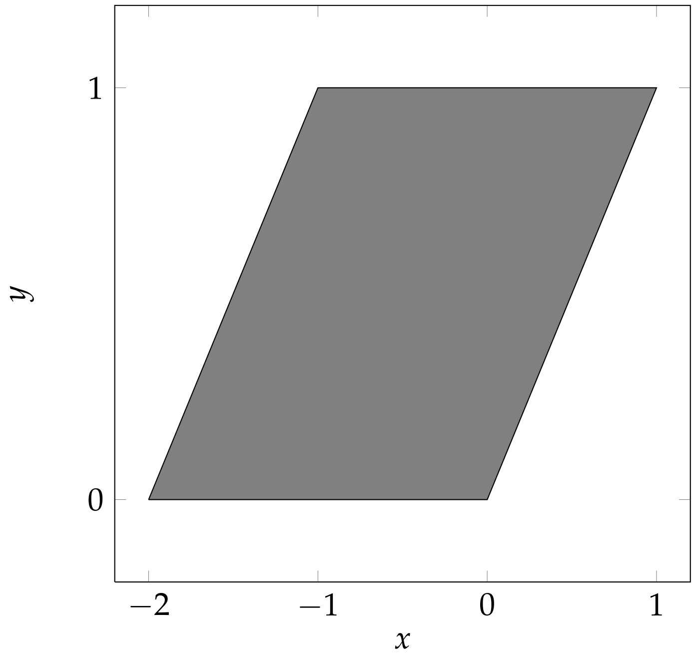

Abbildung 4: Wertebereich der gemeinsamen Dichte.

Damit $f(x,y)$ eine Dichte ist, muss $\int\int f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$ gelten. Die schraffierte Fläche aus Abbildung 4 besitzt die Fläche 2, folglich gilt $K = 1/2$.

b) Die Berechnung der Randdichten ergibt:

$$f_{\mathrm{x}}(x) = \int_{y=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} 1_B(x,y)\mathrm{d}y = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -2 \text{ und } x > 1 \\ (x+2)/2 & \text{für } -2 \leq x < -1 \\ 1/2 & \text{für } -1 \leq x < 0 \\ (1-x)/2 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$f_{\mathrm{y}}(y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} 1_B(x,y)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{für } y < 0 \text{ und } y > 1 \\ 1 & \text{für } 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Mit

$$F_{\mathrm{x}}(x) = \int_{t=-\infty}^{x} f_{\mathrm{x}}(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -2 \\ x^2/4 + x + 1 & \text{für } -2 \leq x \leq -1 \\ x/2 + 3/4 & \text{für } -1 \leq x \leq 0 \\ 3/4 + x/2 - x^2/4 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$F_{\mathrm{y}}(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y < 0 \\ y & \text{für } -1 \leq y \leq 0 \\ 1 & \text{für } y > 1 \end{cases}$$

ergeben sich folgende Skizzen für die Verteilungsfunktionen $F_{\mathrm{x}}(x), F_{\mathrm{y}}(y)$:

c) Für die Erwartungswerte ergibt sich:

$$\mathrm{E}\{\mathrm{x}\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\mathrm{x}}(x)\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} \frac{(x^2+2x)}{2}\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} \frac{x}{2}\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{(x-x^2)}{2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}$$

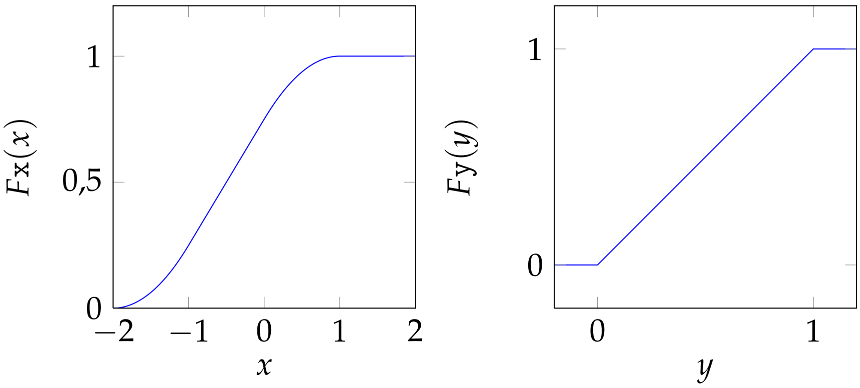

Abbildung 5: Verteilungsfunktionen von x und y.

$$\mathrm{E}\{\mathrm{y}\} = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{\mathrm{y}}(y) \mathrm{d}y = \int_{0}^{1} y \mathrm{d}y = \frac{1}{2}$$

Mit der Beziehung

$$1_B(x,y) = 1_{\{0 \leq y \leq 1\}} 1_{\{y-2<x<y\}}$$

folgt

$$\mathrm{E}\{\mathrm{xy}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{\mathrm{xy}}(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_{y=0}^{1} \frac{y}{2} \int_{x=y-2}^{y} x \mathrm{d}x \mathrm{d}y = -\frac{1}{6}$$

Da $\mathrm{E}\{\mathrm{x}\}\mathrm{E}\{\mathrm{y}\} \neq \mathrm{E}\{\mathrm{xy}\}$, liegt keine Unabhängigkeit vor!

d) Anhand der Skizze und auch aus der vorherigen Teilaufgabe erkennt man, dass beide Variablen x und y korreliert sind. Da sich für hohe Werte von x hohe Werte von y häufen und umgekehrt, handelt es sich um einen positiven Korrelationskoeffizienten.

e) Die gesuchte Prüfgröße ist t-verteilt, da sie sich aus dem normalverteilten Stichprobenmittelwert $\hat{\mathrm{x}}$ im Zähler und der geschätzten Stichprobenvarianz $\mathrm{s_x}$ im Nenner, die χ^2-verteilt ist, zusammensetzt.

Aufgabe 4: Korrelation (18 Punkte)

Sie haben in Abbildung 6 das mit Rauschen überlagerte Signal $x(t)$ gegeben.

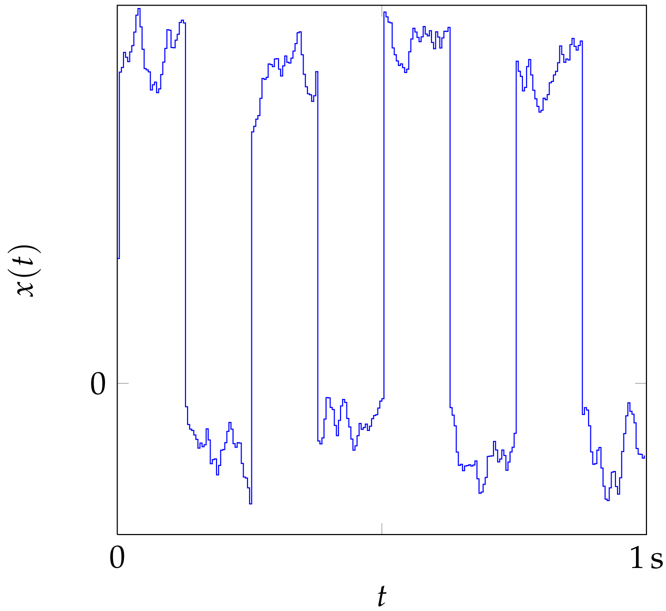

Abbildung 6: Zeitsignal $x(t)$.

a) Zeichnen Sie die Autokorrelationsfunktion $r_{\mathrm{xx}}(\tau)$ und die Autoleistungsdichte $S_{\mathrm{xx}}(f)$ des Zeitsignals $x(t)$. Begründen Sie Ihre Lösung. Beschriften und beziffern Sie die Koordinatenachsen. *(4 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

b) Sie verwenden einen Schieberegister mit der Wortlänge $N = 5$ zur Erzeugung einer PRBS (pseudo-random binary sequence). Die Taktfrequenz des Schieberegisters liegt bei 100 Hz. Nach wievielen Sekunden wiederholt sich die Sequenz? Für welche Frequenzen besitzt die Autoleistungsdichte dieser PRBS Werte ungleich null?

(2 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

Ein Sinussignal $u(t) = \sin(2\pi f_0 t) + C$ wird durch ein LTI-System mit der Übertragungsfunktion $G(f) = \frac{1}{1+\mathrm{j}2\pi f L/R}$ verzerrt und anschließend mit einem zu $u(t)$ unkorrelierten, additiven Störsignal $n(t)$ überlagert. Sie wollen das ursprüngliche Signal so rekonstruieren, dass die Leistung des Differenzsignals zwischen ursprünglichem Signal und dessen Rekonstruktion minimal wird. Sie verwenden hierzu ein Filter mit der Übertragunsfunktion $H(f)$.

c) Wie heißt das zu verwendende Filter und müssen Sie hier die Mittelwertfreiheit des Störsignals zwingend voraussetzen? *(2 Punkte)*

d) Bestimmen Sie $H(f)$, wenn das Störsignal die AKF $r_{\mathrm{nn}}(\tau) = A \cdot \delta(\tau)$ besitzt. Skizzieren Sie sowohl Real- als auch Imaginärteil von $H(f)$ für $A = \frac{1}{4(1+(2\pi f L/R)^2)}$ und $C = \frac{1}{2}$. *(5 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

e) Zwei stochastische, stationäre Signale $\mathtt{x}(t)$ und $\mathtt{y}(t)$ werden zu $\mathtt{z}(t) = \mathtt{x}(t) - \mathtt{y}(t)$ subtrahiert. Geben Sie allgemein die resultierende Autokorrelationsfunktion $r_{\mathtt{zz}}(\tau)$ des Signals $\mathtt{z}(t)$ an. *(2 Punkte)*

f) Die beiden Signale $\mathtt{x}(t)$ und $\mathtt{y}(t)$ werden nun gemäß

$$\mathtt{x}(t) = A + \mathtt{e}(t) \quad , \quad r_{\mathtt{ee}}(\tau) = \sigma_{\mathtt{e}}^2 \cdot \mathrm{e}^{-|\tau|}$$

$$\mathtt{y}(t) = B + \mathtt{n}(t) \quad , \quad r_{\mathtt{nn}}(\tau) = \sigma_{\mathtt{n}}^2 \cdot \mathrm{e}^{-|2\tau|}$$

belegt, wobei die Signale je einen deterministischen Gleichanteil A und B besitzen. Die auftretenden Rauschanteile $\mathtt{e}(t)$ und $\mathtt{n}(t)$ seien mittelwertfrei und statistisch unabhängig vom jeweils anderen Signal. Wie groß ist die mittlere Leistung $\overline{P_z}$ des resultierenden (subtrahierten) Signals $\mathtt{z}(t)$? *(3 Punkte)*

Lösung

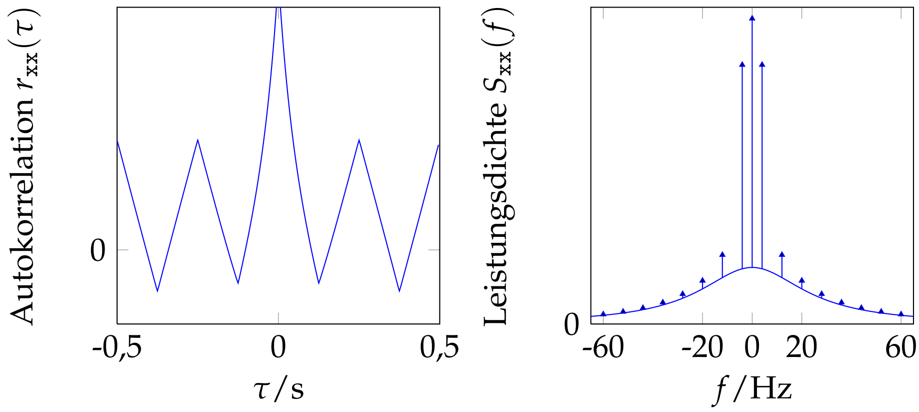

Abbildung 7: Autokorrelation und Autoleistungsdichte von $x(t)$.

a) Siehe Abbildung 7:

$x(t)$	Rechtecksignal $f_0 = 4\,\text{Hz}$	Offset	farbiges Rauschen
$r_{xx}(\tau)$	dreieckförmig $f_0 = 4\,\text{Hz}$	Offset	Überhöhung um $\tau = 0$
$S_{xx}(f)$	Impulse bei $(2 \cdot k + 1) f_0$	$\delta(f)$	„Glocke" um $f = 0$.

b) Die Periodendauer einer PRBS beträgt $(2^N - 1)t_A$. In dieser Aufgabe entspricht das:

$$T_P = (2^5 - 1)\frac{1}{100\,\text{Hz}} = 0{,}31\,\text{s}$$

Somit besitzt die Autoleistungsdichte Werte bei

$$f = k \cdot \frac{1}{T_p} = k \cdot 3{,}22\,\text{Hz für } k \in \mathbb{Z}.$$

c) Das Filter heißt Wiener-Filter. Da das Eingangssignal $u(t)$ nicht mittelwertfrei ist, muss das Störsignal mittelwertfrei sein.

d) Aus der Aufgabenstellung direkt ableitbar:

$$r_{uu}(\tau) = \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 \tau) + C^2 \text{ vgl. Beispiel 6.3 Messtechnik-Buch.}$$

$$\Rightarrow S_{uu}(f) = \frac{1}{4}\left(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right) + C^2\delta(f) = \frac{1}{4}\left(\delta_{f_0} + \delta_{-f_0}\right) + C^2\delta_0$$

$$S_{nn} = A$$

$$G(f) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}2\pi f L/R}$$

$$|G(f)|^2 = \frac{1}{1 + (2\pi f L/R)^2}$$

$$G^*(f) = \frac{1}{1 + (2\pi f L/R)^2} + \mathrm{j}\frac{2\pi f L/R}{1 + (2\pi f L/R)^2}$$

Da $\mathtt{n}(t)$ unkorreliert zu $\mathtt{u}(t)$ ist, kann folgender Ansatz verwendet werden:

$$
\begin{aligned}
H(f) &= \frac{S_{\mathtt{uu}}(f)G^*(f)}{S_{\mathtt{uu}}(f)|G(f)|^2 + S_{\mathtt{nn}}(f)} \\
&= \frac{\frac{1}{4}\left(\delta_{f_0} + \delta_{-f_0}\right) + C^2\delta_0}{(1+(2\pi f L/R)^2)\left(\frac{\frac{1}{4}\left(\delta_{f_0}+\delta_{-f_0}\right)+C^2\delta_0}{1+(2\pi f L/R)^2} + A\right)} \\
&+ \mathrm{j}2\pi f L/R \cdot \frac{\frac{1}{4}\left(\delta_{f_0} + \delta_{-f_0}\right) + C^2\delta_0}{(1+(2\pi f L/R)^2)\left(\frac{\frac{1}{4}\left(\delta_{f_0}+\delta_{-f_0}\right)+C^2\delta_0}{1+(2\pi f L/R)^2} + A\right)} \\
&= \frac{\left(\delta_{f_0} + \delta_{-f_0}\right) + 4C^2\delta_0}{\left(\delta_{f_0} + \delta_{-f_0} + 4C^2\delta_0\right) + 4\left[1+(2\pi f L/R)^2\right]A} \\
&+ \mathrm{j}2\pi f L/R \cdot \frac{\left(\delta_{f_0} + \delta_{-f_0} + 4C^2\delta_0\right)}{\left(\delta_{f_0} + \delta_{-f_0} + 4C^2\delta_0\right) + 4\left[1+(2\pi f L/R)^2\right]A}
\end{aligned}
$$

D. h. Real- als auch Imaginärteil von $H(f)$ sind nur bei $f = \pm f_0$ und der Realteil zusätzlich noch bei $f = 0$ ungleich null. Setzt man die gegebenen Werte für A und C ein, so werden an diesen Stellen die Werte $\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{\pi f_0 L}{R}$ angenommen.

Dies führt zu folgenden Skizzen:

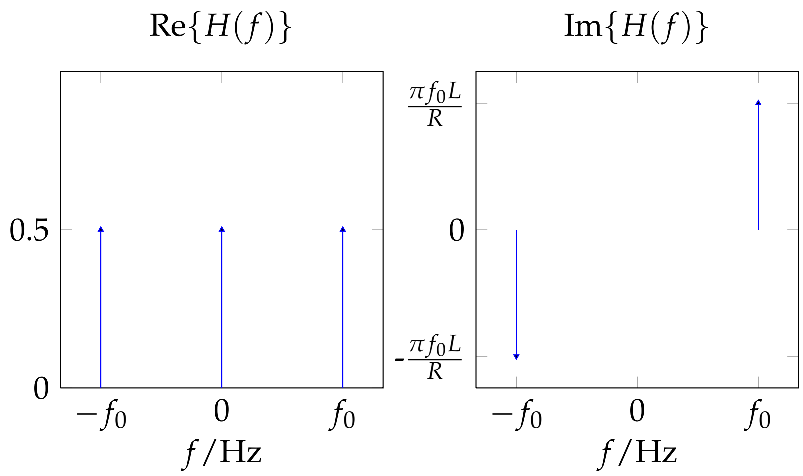

Abbildung 8: Real- und Imaginärteil von $H(f)$.

e) Die resultierende Autokorrelationsfunktion $r_{\mathtt{zz}}(\tau)$ des Signals $\mathtt{z}(t)$ beträgt:

$$
\begin{aligned}
r_{\mathtt{zz}}(\tau) &= \mathrm{E}\Big\{\mathtt{z}(t)\cdot\mathtt{z}(t+\tau)\Big\} = \mathrm{E}\Big\{\left[\mathtt{x}(t)-\mathtt{y}(t)\right]\cdot\left[\mathtt{x}(t+\tau)-\mathtt{y}(t+\tau)\right]\Big\} \\
&= \mathrm{E}\Big\{\mathtt{x}(t)\cdot\mathtt{x}(t+\tau) - \mathtt{x}(t)\cdot\mathtt{y}(t+\tau) - \mathtt{y}(t)\cdot\mathtt{x}(t+\tau) + \mathtt{y}(t)\cdot\mathtt{y}(t+\tau)\Big\} \\
&= \mathrm{E}\Big\{\mathtt{x}(t)\cdot\mathtt{x}(t+\tau)\Big\} - \mathrm{E}\Big\{\mathtt{x}(t)\cdot\mathtt{y}(t+\tau)\Big\} - \mathrm{E}\Big\{\mathtt{y}(t)\cdot\mathtt{x}(t+\tau)\Big\} + \mathrm{E}\Big\{\mathtt{y}(t)\cdot\mathtt{y}(t+\tau)\Big\} \\
&= r_{\mathtt{xx}}(\tau) - r_{\mathtt{xy}}(\tau) - r_{\mathtt{yx}}(\tau) + r_{\mathtt{yy}}(\tau)
\end{aligned}
$$

f) Da die auftretenden Rauschanteile $\mathtt{e}(t)$ und $\mathtt{n}(t)$ beide mittelwertfrei sind und statistisch voneinander unabhängig, muß gelten:

$$r_{\mathtt{en}}(\tau) \equiv 0 \qquad , \quad r_{\mathtt{ne}}(\tau) \equiv 0$$

Für die mittlere Leistung $\overline{P}$ des resultierenden Signals $\mathtt{z}(t)$ gilt wegen $\mu_{\mathtt{e}} = \mu_{\mathtt{n}} = 0$:

$$\overline{P} = \mathrm{E}\Big\{\mathtt{z}(t)^2\Big\} = r_{\mathtt{zz}}(0) = r_{\mathtt{xx}}(0) - r_{\mathtt{xy}}(0) - r_{\mathtt{yx}}(0) + r_{\mathtt{yy}}(0)$$

$$r_{\mathtt{xx}}(0) = \mathrm{E}\Big\{\, [A + \mathtt{e}(t)] \cdot [A + \mathtt{e}(t)] \,\Big\} = A^2 + 2A \cdot \mu_{\mathtt{e}} + r_{\mathtt{ee}}(0) = A^2 + \sigma_{\mathtt{e}}^2$$

$$r_{\mathtt{yy}}(0) = \mathrm{E}\Big\{\, [B + \mathtt{n}(t)] \cdot [B + \mathtt{n}(t)] \,\Big\} = B^2 + 2B \cdot \mu_{\mathtt{n}} + r_{\mathtt{nn}}(0) = B^2 + \sigma_{\mathtt{n}}^2$$

$$r_{\mathtt{xy}}(0) = \mathrm{E}\Big\{\, [A + \mathtt{e}(t)] \cdot [B + \mathtt{n}(t)] \,\Big\} = AB + A \cdot \mu_{\mathtt{n}} + B \cdot \mu_{\mathtt{e}} + r_{\mathtt{en}}(0) = AB = r_{\mathtt{yx}}(0)$$

$$\Longrightarrow \quad \overline{P} = r_{\mathtt{zz}}(0) = A^2 - 2AB + B^2 + \sigma_{\mathtt{e}}^2 + \sigma_{\mathtt{n}}^2 = (A - B)^2 + \sigma_{\mathtt{e}}^2 + \sigma_n^2$$

Aufgabe 5: Quantisierung und Abtastung (21 Punkte)

Sie wollen das Signal $y(t)$ für $t \in [-1, 1]$ aus Abbildung 9 bestmöglich mit zwei Bit quantisieren.

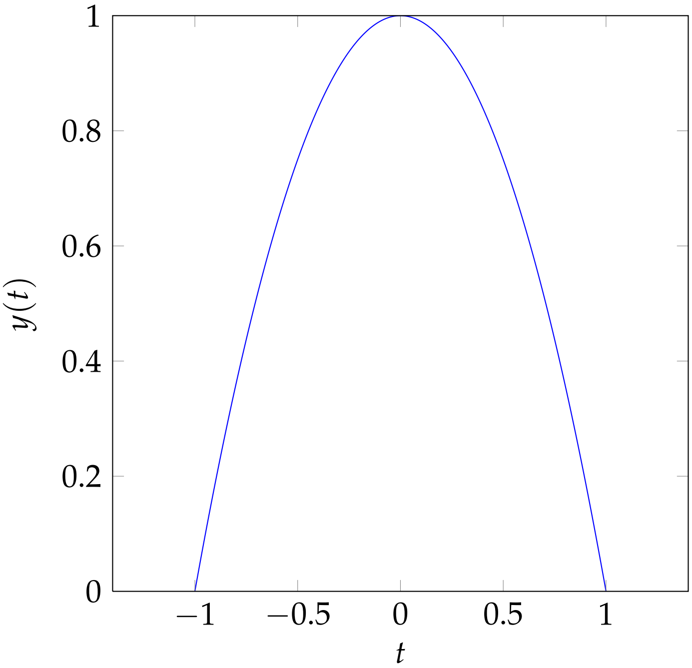

Abbildung 9: Zu quantisierendes Signal.

a) Geben Sie eine mathematische Beschreibung des gegebenen Signals $y(t)$ an. *(1 Punkt)*

b) Geben Sie die Amplitudendichte $f_{\mathrm{y}}(y)$ des Signals an. Nehmen Sie an, dass die Zufallsvariable t im Intervall $[-1, 1]$ gleichverteilt sei. *(3 Punkte)*

c) Skizzieren Sie die Quantisierungskennlinie $y_{\mathrm{q}}(y)$ für den Fall, dass Sie das Signal mit zwei Bit quantisieren und der Amplitudenbereich gleichmäßig unterteilt wird. *(2 Punkte)*

d) Geben Sie nun die Quantisierungskennlinie $y_{\mathrm{q2}}(y)$ an für den Fall, dass Sie das Signal ebenfalls mit zwei Bit quantisieren, aber der Amplitudenbereich so quantisiert ist, dass jede Stufe die gleiche Auftrittswahrscheinlichkeit besitzt und das Quantisierungsniveau jeweils in der Mitte einer Stufe liegt. Fügen Sie die Kennlinie ihrer Skizze aus der vorherigen Teilaufgabe hinzu.

Hinweis: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a}$. *(5 Punkte)*

e) Welche der beiden Quantisierungskennlinien würden Sie bevorzugen und weshalb? *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von der vorherigen.

Sie möchten zwei weitere Signale $a(t)$ und $b(t)$ digitalisieren. Beide Signale besitzen Amplituden im Intervall $[-1, 1]$. Signal $a(t)$ ist dabei sinusförmig und bei Signal $b(t)$ kann die Amplitude im gegebenen Intervall als gleichverteilt angenommen werden.

f) Für welches Signal kann das Quantisierungstheorem ideal erfüllt werden? Begründen Sie Ihre Antwort. *(1 Punkt)*

g) Nehmen Sie an, dass das Quantisierungstheorem in beiden Fällen erfüllt sei und geben Sie jeweils die Anzahl der mindestens benötigten Bits für eine Quantisierung mit einem SNR von über 92 dB an.

Hinweis: Beachten Sie die Leistung der Signale. *(4 Punkte)*

h) Errechnen Sie für $a(t)$ den maximal zulässigen zeitlichen Abtastfehler τ_{max}, falls das Abtasttheorem bei einer Abtastfrequenz von $f_{\text{A}} = 50\,\text{kHz}$ gerade erfüllt wird. *(3 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den vorherigen.

i) Wie ist der Quantisierungsfehler des diskreten Zählergebnisses bei der Periodendauermessung verteilt? *(1 Punkt)*

Lösung

a)

$$y(t) = 1 - t^2 \text{ für } -1 \leq t \leq 1$$

b) Gesucht ist die Amplitudendichte $f_{\mathtt{y}}(y)$, die sich über die Transformation $y = g(t) = 1 - t^2$ aus $f_{\mathtt{t}}(t)$ bestimmen lässt. Unter der Annahme einer gleichverteilten Zufallsvariable $\mathtt{t}$ ergibt sich

$$f_{\mathtt{t}}(t) = \frac{1}{2} \text{ für } t \in [-1, 1]$$

Bei der Inversion der Funktion $g^{-1}(y) = t_{1,2} = \pm\sqrt{y+1}$ erhält man zwei Lösungen. Die Ableitung $\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} = -2t$ führt zur transformierten Dichte:

$$f_{\mathtt{y}}(y) = \sum_{i=1}^{N} f_{\mathtt{t}}(t_i) \left|\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}\right|^{-1}_{t=t_i} = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2} \left|\frac{1}{-2t}\right|_{t=t_i} = \frac{1}{2\sqrt{1-y}}.$$

c) Siehe blaue Zeichnung in Abbildung 10.

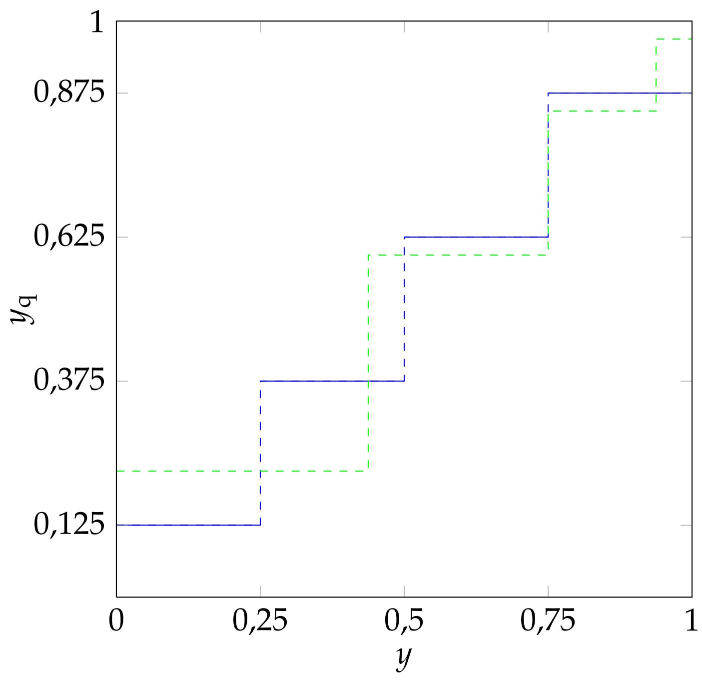

Abbildung 10: Quantisierersungskennlinien.

d) Da die Quantisierungsstufen alle die gleiche Auftrittswahrscheinlichkeit haben sollen, müssen alle vier Stufen die Wahrscheinlichkeit $p_q = \frac{1}{4}$ besitzen. Über die Verteilungsfunktion der Amplitudendichte lassen sich die hierfür nötigen Grenzen bestimmen. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ergibt sich mit gegebenem Hinweis aus der Amplitudendichte zu

$$F_{\mathtt{y}}(y) = \int_{-\infty}^{y} f_{\mathtt{y}}(u)\,\mathrm{d}u = \int_{0}^{y} \frac{1}{2\sqrt{1-u}}\,\mathrm{d}u = \left[-\sqrt{1-u}\right]_0^y = 1 - \sqrt{1-y}.$$

Nun kann man die Verteilungsfunktion der Amplitude gleich den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für die Stufen setzen und enthält die gleichwahrscheinlichen Intervalle der Amplituden:

$$F_{\mathrm{y}}(y) = 1 - \sqrt{1-y} = 0{,}25 \Rightarrow y_{0{,}25} = 0{,}4375$$
$$F_{\mathrm{y}}(y) = 0{,}5 \Rightarrow y_{0{,}5} = 0{,}75$$
$$F_{\mathrm{y}}(y) = 0{,}75 \Rightarrow y_{0{,}75} = 0{,}9375$$

Somit ergibt sich für die quantisierte Kennlinie $y_{\mathrm{q2}}(y)$

$$y_{\mathrm{q2}}(y) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{0+0{,}4375}{2} & \text{für } 0 \leq y \leq 0{,}4375 \\ 0{,}59375 & \text{für } 0{,}4375 \leq y \leq 0{,}75 \\ 0{,}84375 & \text{für } 0{,}75 \leq y \leq 0{,}9375 \\ 0{,}96875 & \text{für } 0{,}9375 \leq y \leq 1 \end{array} \right\}$$

Die Kennlinie ist in Abbildung 10 in grün gezeichnet.

e) Die Kennlinie des zweiten Quantisierers erzielt ein besseres Signal-Rausch-Verhältnis, da häufig vorkommende Signalamplituden dichter abgetastet werden als seltener vorkommende, und ist deshalb vorzuziehen.

f) Für keines der beiden Signale, da beide eine begrenzte Amplitude besitzen und somit eine nicht bandbegrenzte charakteristische Funktion.

g) Das SNR von Signal $a(t)$ lässt sich für N Bit mit Quantisierungsstufen q über folgende aus der Vorlesung gegebene Formel berechnen:

$$\mathrm{SNR_a} = \frac{P_{\mathrm{sig_a}}}{P_{\mathrm{stoer}}} = \frac{2^{2N-2}q^2/2}{\sigma^2_{e_{\mathrm{q}}}} = 2^{2N} \cdot 1{,}5.$$

Für beide Signale lässt sich die durch die Quantisierung entstehende Störleistung auf Grund des linearen Quantisierungsmodells über die Varianz des gleichverteilten Quantisierungsfehlers $\sigma_{e^2_{\mathrm{q}}} = \frac{q^2}{12}$ berechnen.

Die Signalleistung des gleichverteilten und mittelwertfreien Signals $b(t)$ lässt sich auch über seine Varianz bestimmen

$$P_{\mathrm{sig_b}} = \int_{-\frac{2^N q}{2}}^{\frac{2^N q}{2}} t^2 \frac{1}{2^N q} \mathrm{d}t = \frac{1}{3} q^2 2^{2N-2}$$

Somit ergibt sich das SNR von Signal $b(t)$ zu

$$\mathrm{SNR_b} = \frac{P_{\mathrm{sig_b}}}{\sigma_{e^2_{\mathrm{q}}}} = 2^{2N}$$

In Dezibel ergibt sich also für die beiden Signale

$$\mathrm{SNR_a}|_{\mathrm{dB}} = 6{,}02 \cdot N + 1{,}76$$
$$\mathrm{SNR_b}|_{\mathrm{dB}} = 6{,}02 \cdot N.$$

Mit der Vorgabe von 92 dB ergibt sich

$$N_{\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{SNR_a}|_{\mathrm{dB}} - 1{,}76}{6{,}02} \Rightarrow 15 \text{ Bit}$$
$$N_{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{SNR_b}|_{\mathrm{dB}}}{6{,}02} \Rightarrow 16 \text{ Bit}$$

h) Die gesuchte Größe $\tau_{\max}$ ergibt sich aus seiner Varianz mit der Grenzfrequenz $f_g = f_A/2$

$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{dB}} = 10\log\left(\frac{2}{(2\pi f_g \sigma_\tau)^2}\right)$$
$$\Rightarrow \sigma_\tau^2 = \left(\frac{10^{\frac{92}{10}}}{2} \cdot (2\pi 25\,\mathrm{kHz})^2\right)^{-1} = 5{,}1143 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{s}^2.$$

Zur Berechnung von $\tau_{\max}$ wird der durch die Gleichverteilung gegebene Zusammenhang zu σ_τ genutzt:

$$\sigma_\tau^2 \leq \frac{(2\tau_{\max})^2}{12}$$
$$\Rightarrow \tau_{\max} \leq 3{,}917 \cdot 10^{-10}\mathrm{s} \approx 0{,}39\,\mathrm{ns}.$$

i) Der Quantisierungsfehler folgt einer Dreiecksverteilung.