Aufgabe 1: Kurvenanpassung / Kennlinienanalyse (20 Punkte)

Ein mobiler Roboter fährt an einem Maßband geradeaus entlang und Sie wollen durch Wegmessungen Rückschlüsse über die vom Roboter gefahrene Geschwindigkeit bzw. das gewählte Beschleunigungsverhalten ziehen. Der Roboter besitzt zwei Fahrmodi: Im ersten Modus fährt der Roboter mit einer konstanten Geschwindigkeit und im zweiten Modus fährt er mit einer konstanten Beschleunigung. Sie lesen nach definierten Zeitpunkten die zurückgelegte Entfernung ab. Die Messwerte sind in nachfolgender Tabelle 1 aufgezeichnet.

Tabelle 1: Messwerte.

Ablesezeitpunkt t_i in Sekunden	1	2	3
Gefahrene Strecke $y_1(t_i)$ in Modus 1 in Metern	1,0371	1,9125	2,7165
Gefahrene Strecke $y_2(t_i)$ in Modus 2 in Metern	0,7924	1,4103	2,1647

Hinweise: Die nach der Zeit t zurückgelegte Strecke $s(t)$ kann allgemein über $s(t) = s_0 + \int_0^t v_0 \, \mathrm{d}t + \int_0^t a \cdot t \, \mathrm{d}t$ mit Startpunkt s_0, Startgeschwindigkeit v_0 und Beschleunigung a berechnet werden. Ebenso

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie eine Modellgleichung für Modus 1 an. *(1 Punkt)*

b) Geben Sie eine Modellgleichung für Modus 2 an. *(2 Punkte)*

c) Geben Sie unter Lösung eines Least-Squares-Ansatzes an, wie schnell sich der Roboter in Modus 1 bewegt und welche Strecke er zum Zeitpunkt $t = 0$ bereits zurückgelegt hat. *(3 Punkte)*

d) Geben Sie an, wie schnell sich der Roboter in Modus 2 zum Zeitpunkt $t = 0$ bewegt, welche Strecke er dann bereits zurückgelegt hat und wie stark er beschleunigt. *(3 Punkte)*

e) Warum unterscheiden sich die Ansätze in den Teilaufgaben **c)** und **d)**? *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Ihnen sind die Messwertpaare in der Tabelle 2 gegeben:

f) Rekonstruieren Sie die Messkennlinie $y(x)$ mittels des Newton-Interpolations-Verfahrens. Runden Sie die Koeffizienten dabei auf 2 Nachkommastellen. *(6 Punkte)*

MUSTERLÖSUNG

Tabelle 2: Messwertpaare.

x	0,2	0,35	0,5	0,65
y	3,8	4,6	2,6	$-2{,}1$

g) Wann ist das Lagrange-Verfahren leichter zu korrigieren, wenn Sie einen Fehler bei der Messung machen? *(1 Punkt)*

h) Beschreiben Sie kurz eine praktische Anwendung der bilinearen Interpolation? *(1 Punkt)*

i) Nennen Sie einen Vor- und einen Nachteil der Spline-Interpolation. *(2 Punkte)*

MUSTERLOESUNG

Lösung

a) Bei einem Modellansatz mit konstanter Geschwindigkeit ist die Beschleunigung $a = 0$. Somit lässt sich das Integral berechnen zu $s(t) = s_0 + vt$.

b) Bei einem Modellansatz mit konstanter Beschleunigung ist die Beschleunigung a ein beliebiger, konstanter Wert. Somit lässt sich das Integral berechnen zu $s(t) = s_0 + vt + \frac{1}{2}at^2$.

c) Das LS-Gleichungssystem lautet:

$$\mathbf{s} = \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{b}$$

mit:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ 1 & t_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} s_0 \\ v \end{pmatrix}.$$

Mit der Pseudoinversen berechnet man die Koeffizienten s_0 und v:

$$\begin{pmatrix} s_0 \\ v \end{pmatrix} = (\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{s} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1{,}0371 \\ 1{,}9125 \\ 2{,}7165 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2093\,\mathrm{m} \\ 0{,}8397\,\mathrm{m/s} \end{pmatrix}.$$

d) Das LS-Gleichungssystem lautet:

$$\mathbf{s} = \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{b}$$

mit:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & \frac{1}{2}t \\ 1 & t_2 & \frac{1}{2}t_2^2 \\ 1 & t_3 & \frac{1}{2}t_3^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} s_0 \\ v_0 \\ a \end{pmatrix}.$$

Mit der Inversen berechnet man die Koeffizienten s_0, v_0 und a:

$$\begin{pmatrix} s_0 \\ v_0 \\ a \end{pmatrix} = \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2{,}5 & 4 & -1{,}5 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}7924 \\ 1{,}4103 \\ 2{,}1647 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3110\,\mathrm{m} \\ 0{,}4131\,\mathrm{m/s} \\ 0{,}1365\,\mathrm{m/s^2} \end{pmatrix}.$$

MUSTERLOESUNG

e) Durch Lösen eines Gleichungssystems (Invertieren der Matrix) lässt sich nur das Problem der konstanten Beschleunigung lösen. Das Problem der konstanten Geschwindigkeit ist überbestimmt und erfordert eine Least-Squares-Lösung über die Pseudoinverse.

f) Newton-Verfahren:

Differenzenschema:

x	$\Delta^0 y = y$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0,2	3,8			
		$\frac{0.8}{0{,}15} = \frac{16}{3}$		
0,35	4,6		$\frac{\frac{-56}{3}}{0{,}3} = \frac{-560}{9}$	
		$\frac{-2}{0{,}15} = -\frac{40}{3}$		$\frac{\frac{20}{9}}{0{,}45} = 4{,}94$
0,5	2,6		$\frac{\frac{-54}{3}}{0{,}3} = -60$	
		$\frac{-4{,}7}{0{,}15} = -\frac{94}{3}$		
0,65	$-2{,}1$			

Der Newton-Ansatz bei 4 Stützstellen lautet:

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_{\text{New}}(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\
&\quad + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
&= \Delta^0 y + \Delta^1 y(x - x_0) + \Delta^2 y(x - x_0)(x - x_1) \\
&\quad + \Delta^3 y(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)
\end{aligned}$$

Einsetzen der Werte aus dem Differenzenschema ergibt:

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_{\text{New}}(x) &= 3{,}8 + \frac{16}{3}(x - 0{,}2) - \frac{560}{9}(x - 0{,}2)(x - 0{,}35) \\
&\quad + 4{,}94(x - 0{,}2)(x - 0{,}35)(x - 0{,}5) \\
&= 4{,}94x^3 - 67{,}41x^2 + 41{,}26x - 1{,}8
\end{aligned}$$

g) Das Lagrange-Verfahren ist leichter zu korrigieren, falls nur die Ausgangsgröße, aber nicht die Eingangsgröße fehlerbehaftet sind.

h) Bildskalierung, Motorkennfelder, Bayer-Maske.

i) Vorteil: Beschreibung komplexer Kurven durch einfache Polynome.

Nachteil: Anfällig für Rauschen.

MUSTERLOESUNG

Aufgabe 2: Stationäres Verhalten von Messsystemen (20 Punkte)

Ein Messgerät hat laut Datenblatt die Kennlinie $y(u) = 0{,}5 \sin(u) + 1$.

a) Bestimmen Sie den günstigsten Messbereich der Breite π im Intervall $[0; 2\pi]$. *(4 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von der bisherigen Teilaufgabe.

Ihnen sind folgende Bauteile gegeben:

- Ein Messgerät mit der Kennlinie $u_\mathrm{M}(i) = \arctan(i)$, welches einen Strom i als Eingangs- und eine Spannung u als Ausgangsgröße besitzt.
- Ein Verstärkerglied A_1 mit der Kennlinie $y_1(i_1, i_2) = (i_1 + i_2) \cdot V_1$, welches als Ein- und Ausgangssignale Ströme besitzt.
- Ein Verstärkerglied A_2 mit der Kennlinie $y_2(u_1, u_2) = u_1 \cdot V_2 + u_2$, welches als Ein- und Ausgangssignale Spannungen besitzt.
- Jeweils eine konstante Strom- bzw. Spannungsquelle mit einstellbaren Kenngrößen i_c und u_c.

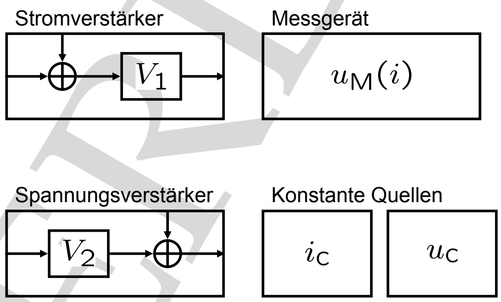


Abbildung 1: Zur Verfügung stehende Blöcke.

Verwenden Sie in der folgenden Aufgabe die Schaltsymbole entsprechend Abbildung 1. Die Verstärkungsfaktoren V_1 und V_2 können Sie im Bereich $[-50; 50]$ stufenlos einstellen. Sie wollen die Kennlinie $u_\mathrm{M}(i)$ um den Arbeitspunkt i_0 herum linearisieren.

b) Skizzieren Sie, wie Sie die gegebenen Bauteile für die Methode „Herabsetzen des Messbereiches“ verschalten müssen. Geben Sie in Abhängigkeit des Arbeitspunktes i_0 an, welche Werte Sie für V_1, V_2, i_c und u_c einstellen müssen, damit Sie eine maximale Linearisierung erreichen und die Gesamtkennlinie im Arbeitspunkt keinen Offset besitzt, d. h. $u_\mathrm{Ges,H}(i_0) = u_\mathrm{M}(i_0)$. Es soll weiterhin $V_1 \cdot V_2 = 1$ gelten. *(5 Punkte)*

c) Geben Sie die Empfindlichkeit des Messsystems in Abhängigkeit von der Eingangsgröße i an. Geben Sie zusätzlich den Punkt an, an dem die errechnete Empfindlichkeit der des Messgerätes entspricht und zeigen Sie dies. *(3 Punkte)*

MUSTERLOESUNG

d) Berechnen Sie die ideale Kennlinie bei Fixpunktjustierung für die Methode Herabsetzen des Messbereichs im Messbereich $[0{,}5; 1{,}5]$ um $i_0 = 1$. *(2 Punkte)*

e) An welcher Stelle in dem System hat eine superponierende Störgröße den größten Einfluss? *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von der bisherigen Teilaufgabe.

f) Nennen Sie einen Vor- und einen Nachteil der Differenzmethode in dieser Anwendung. *(2 Punkte)*

Die folgende Teilaufgaben sind unabhängig von der bisherigen Teilaufgabe.

g) Wie können Sie von mehreren fehlerbehafteten Einflussgrößen abhängende Messfehler berechnen? Welche Anforderung stellen Sie dabei an die Fehler und warum? *(3 Punkte)*

MUSTERLOESUNG

Lösung

a) Überprüfen, ob Wendepunkt im Messbereich:

$$y'(u) = \frac{1}{2}\cos(u)$$
$$y''(u) = -\frac{1}{2}\sin(u) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow u = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Innerhalb des Messbereiches liegen also die Wendepunkte $0, \pi, 2\pi$. Kriterium 1 aus dem Messtechnik-Buch ist also anwendbar:

$$\begin{aligned} S(u_\mathrm{a} + d) - S(u_\mathrm{a}) &= y'(u_\mathrm{a} + \pi) - y'(u) \\ &= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\cos(u_\mathrm{a} + \pi)}_{=-\cos(u_\mathrm{a})} - \cos(u_\mathrm{a})\right) = -\cos(u_\mathrm{a}) \stackrel{!}{=} 0 \\ &\Rightarrow u_\mathrm{a} = \frac{\pi}{2} + m\pi,\ m \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Es wären $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ im Messbereich, da aber das gesamte Intervall $[u_\mathrm{a}, u_\mathrm{a} + \pi]$ im Messbereich liegen soll, entfällt $\frac{3\pi}{2}$. Somit ist der optimale Messbereich $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

b) Für die Methode „Herabsetzen des Messbereiches“ muss ein Verstärker jeweils vor und einer hinter das Messgerät gesetzt werden. Auch wenn man die zweiten Eingänge der Verstärker zunächst frei lässt, wird spätestens durch die weiteren Anforderugen an die Schaltung ersichtlich, dass auch diese mit den konstanten Quellen beschaltet werden müssen. Dem resultierenden Schaltbild in Bild L1 entnimmt man die Gesamtübertragungsfunktion

$$u_\mathrm{Ges,H}(i) = u_\mathrm{c} + V_2 \cdot u_\mathrm{M}(V_1 \cdot [i + i_\mathrm{c}])\ .$$

Um eine möglichst gute Linearisierung zu erhalten, sollte das Signal nach dem ersten Verstärker möglichst wenig aus dem Arbeitspunkt ausgelenkt werden, d. h. V_1 sollte möglichst klein sein und somit, wegen $V_1 \cdot V_2 = 1$, V_2 möglichst groß. Durch die Wertebegrenzung aus der Aufgabenstellung ist also $V_2 = 50 = V_1^{-1}$ die optimale Wahl der Verstärkungen.

Damit das Verhalten im Arbeitspunkt gleich bleibt, müssen noch die Werte der konstanten Quellen gewählt werden:

$$\begin{aligned} &V_1 \cdot (i_0 + i_\mathrm{c}) \stackrel{!}{=} i_0 \\ &\Rightarrow i_\mathrm{c} = i_0 \cdot \frac{1 - V_1}{V_1} = 49 \cdot i_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &u_\mathrm{c} + V_2 \cdot u_\mathrm{M}(i_0) \stackrel{!}{=} u_\mathrm{M}(i_0) \\ &\Rightarrow u_\mathrm{c} = u_\mathrm{M}(i_0) \cdot (1 - V_2) = -49 \cdot u_\mathrm{M}(i_0) \end{aligned}$$

Somit müssen folgende Werte eingestellt werden:

$$V_1 = \frac{1}{50} \qquad V_2 = 50$$
$$i_\mathrm{c} = 49 i_0 \qquad u_\mathrm{c} = -49 u_\mathrm{M}(i_0)\ .$$

MUSTERLOESUNG

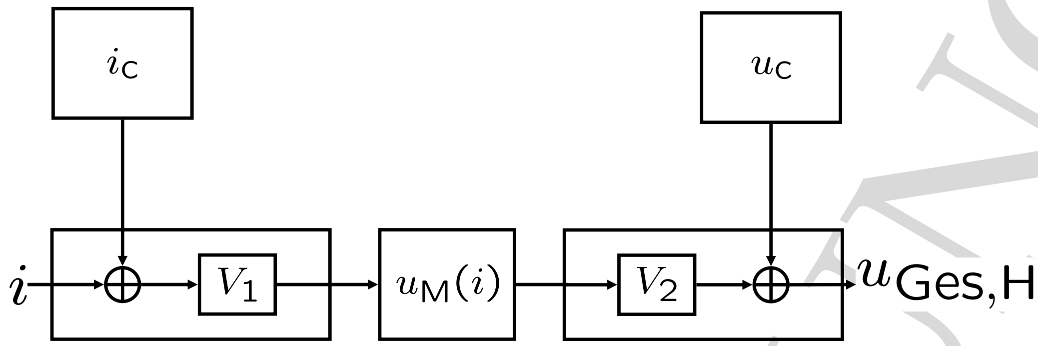


Abbildung L1: Herabsetzen des Messbereiches.

Eine Wahl von $i_\mathrm{c} = i_0$ und $u_\mathrm{c} = u_\mathrm{M}(i_0)$ erfüllt zwar ebenfalls die Bedingung, dass das Verhalten im Arbeitspunkt unverändert bleibt, linearisiert das System aber um den Punkt $i = 0$, was nicht der Aufgabenstellung entspricht.

c)

$$\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{Ges,H}(i)}{\mathrm{d}i} = V_2 \cdot \frac{\mathrm{d}u_\mathrm{M}(V_1 \cdot (i + i_\mathrm{c}))}{\mathrm{d}i} = V_2 \cdot \frac{1}{1 + V_1^2 (i + i_\mathrm{c})^2} \cdot V_1.$$

Die Empfindlichkeit dieser Methode entspricht der ursprünglichen Empfindlichkeit im Arbeitspunkt; somit ist zu zeigen, dass:

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{Ges,H}(i)}{\mathrm{d}i}\right|_{i_0} = \left.\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{M}(i)}{\mathrm{d}i}\right|_{i_0}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{50^2} \cdot (i_0^2 + 2 \cdot 49 i_0^2 + 49^2 i_0^2)} = \frac{1}{1 + i_0^2}$$

d) Die ideale Kennlinie bei Fixpunktjustierung hat allgemein die Form:

$$u_\mathrm{fix}(i) = \frac{u_\mathrm{e} - u_\mathrm{a}}{i_\mathrm{e} - i_\mathrm{a}} \cdot (i - i_\mathrm{a}) + u_\mathrm{a}$$

Mit den vorherigen Ergebnissen erhält man:

$$i_\mathrm{a} = 0{,}5 \qquad\qquad i_\mathrm{e} = 1{,}5$$

$$u_\mathrm{Ges,H,a} = u_\mathrm{Ges,H}(i_\mathrm{a}) = 0{,}5341 \qquad\qquad u_\mathrm{Ges,H,e} = u_\mathrm{Ges,H}(i_\mathrm{e}) = 1{,}0342\,.$$

Und somit ist die gesuchte Kennlinie:

$$u_\mathrm{fix,H}(i) = 0{,}5 \cdot (i - 0{,}5) + 0{,}5341$$

e) Den größten Einfluss hätte ein superponierender Fehler vor der größeren Verstärkung V_2.

f) Ein Vorteil wäre die doppelte Empfindlichkeit im Arbeitspunkt. Ein Nachteil ist das zusätzlich benötigte zweite Messgerät.

g) Die Auswirkungen können durch das Gauß'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz ermittelt werden. Dabei wird von hinreichend kleinen Eingangsfehlern ausgegangen, damit die Näherung über die erste Ordnung der Taylorreihe zulässig bleibt.

MUSTERLÖSUNG

Aufgabe 3: Statistik (21 Punkte)

Bei einer Telefonzentrale wurden die Anrufstatistiken erhoben. Dabei wurde in Fünf-Minuten-Intervallen gezählt, wie viele Anrufe es in dem jeweiligen Interval gegeben hat. Die resultierende Statistik unabhängiger Werte ist in folgender Tabelle gegeben:

Tabelle 1: Anrufzahlen der Telefonzentrale.

Anz. Anrufe	0	1	2	3	4	5
Anz. der Intervalle mit dieser Anruferzahl	2	8	12	5	3	0

a) Geben Sie an, wie viele Anrufe im Mittel innerhalb von 5 Minuten bei der Zentrale eingehen. *(2 Punkte)*

Sie wollen nun überprüfen, ob die Verteilung der Anruferzahlen einer Poisson-Verteilung entspricht. Die Poisson-Verteilung wird durch ihren Mittelwert λ vollständig charakterisiert und besitzt folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung für $k = 0, 1, 2, 3 \ldots$

$$P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{(-\lambda)}$$

b) Geben Sie die entsprechend der Poisson-Verteilung resultierende Wahrscheinlichkeit an, dass in einem Intervall maximal ein Anruf eingeht. Verwenden Sie dabei den zuvor berechneten Mittelwert. *(2 Punkte)*

c) Nutzen Sie nun den χ^2-Anpassungstest um zu überprüfen, ob die Anrufstatistik einer Poisson-Verteilung entspricht. Das Signifikanzniveau soll bei 2 % liegen. Beachten Sie die Einhaltung aller Voraussetzungen. *(6 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

d) Geben Sie die Standardabweichung der Poisson-Verteilung in Abhängigkeit des Mittelwertes an. Hinweis: $\mathrm{E}\{\mathrm{k}^2\} = \lambda^2 + \lambda$. *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Eine Verbunddichte $f_{\mathrm{xy}}(x,y)$ wird durch die Fläche zwischen den Schnittpunkten zweier Kurven $y_1(x) = x^2$ und $y_2(x) = x + \frac{3}{4}$ begrenzt und besitzt auf dieser Fläche einen konstanten Wert k ungleich null.

e) Skizzieren Sie die Verbunddichte $f_{\mathrm{xy}}(x,y)$ und geben Sie eine mathematische Beschreibung an. Berechnen Sie hierfür k. *(5 Punkte)*

f) Bestimmen Sie den Erwartungswert des Produktes $\mathrm{x} \cdot \mathrm{y}$. *(3 Punkte)*

g) Bestimmen Sie die Randdichte $f_{\mathrm{x}}(x)$. *(2 Punkte)*

MUSTERLOESUNG

Lösung

a) Im Mittel gehen $\mu = (0 \cdot 2 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 12 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 0)/30 = 1{,}9667$ Anrufe pro Intervall ein.

b) Maximal 1 Anruf bedeutet, dass entweder genau ein Anruf oder kein Anruf eingeht. Somit ergibt sich mit dem zuvor berechneten Mittelwert $\lambda = \mu = 1{,}9667$:

$$P(\text{maximal ein Anruf}) = P_\lambda(0) + P_\lambda(1) = \frac{\lambda^0}{0!}\mathrm{e}^{(-\lambda)} + \frac{\lambda^1}{1!}\mathrm{e}^{(-\lambda)} = 0{,}1399 + 0{,}2752 = 0{,}4151.$$

c)
- unabhängige Messwerte
- ausreichend große Stichprobe
- $n_i \geq 5$
- $n_{i\,\text{Rand}} \geq 1$ ist am rechten Rand nicht erfüllt und führt zur Zusammenlegung der Klasse mit 4 und 5 Anrufen.

Die Nullhypothese lautet:

H_0 : Die Anzahl der Anrufer pro Intervall ist poissonverteilt mit $\lambda = 1{,}9667$.

Berechnung der Klassenwahrscheinlichkeiten mit $n = 30$:

$$p_i = P(x = i) = \frac{\lambda^i}{i!}\mathrm{e}^{(-\lambda)}$$

i	p_i	np_i	$(\mathrm{n}_i - np_i)^2$	$\frac{(\mathrm{n}_i - np_i)^2}{np_i}$
0	0,1399	4,1977	4,8298	1,1506
1	0,2752	8,2554	0,0652	0,0079
2	0,2706	8,1178	15,0712	1,8566
3	0,1774	5,3217	0,1035	0,0194
4(+5)	0,1215	3,6457	0,4169	0,1143

Berechnung der Prüfgröße χ^2

$$\chi^2 \approx \sum_{i=0}^{4} \frac{(\mathrm{n}_i - np_i)^2}{np_i} = 3{,}1488$$

Bei der Bestimmung der Freiheitsgrade muss berücksichtigt werden, dass nur noch 5 Klassen verwendet werden und ein Parameter der Vergleichsverteilung aus den Messwerten geschätzt wurde. Somit verringert sich die Anzahl der Freiheitsgrade auf 3.

$$m = k - 1 - 1 = 5 - 1 - 1 = 3$$

Ermitteln von χ^2_α beispielsweise aus Abbildung 4.20 aus dem Messtechnik-Buch (9. Auflage) und mit $1 - \alpha = 0{,}98$ ergibt $\chi^2_\alpha \approx 10$. Die Hypothese wird also angenommen, da $\chi^2_\alpha \geq \chi^2$.

MUSTERLOESUNG

d) Da die Varianz bei der Poisson-Verteilung gleich dem Mittelwert ist, ergibt sich die Standardabweichung σ zu $\sqrt{\lambda}$.

e) Abbildung L1 zeigt die gesuchte Skizze mit grauer Fläche für Werte verschieden von null.

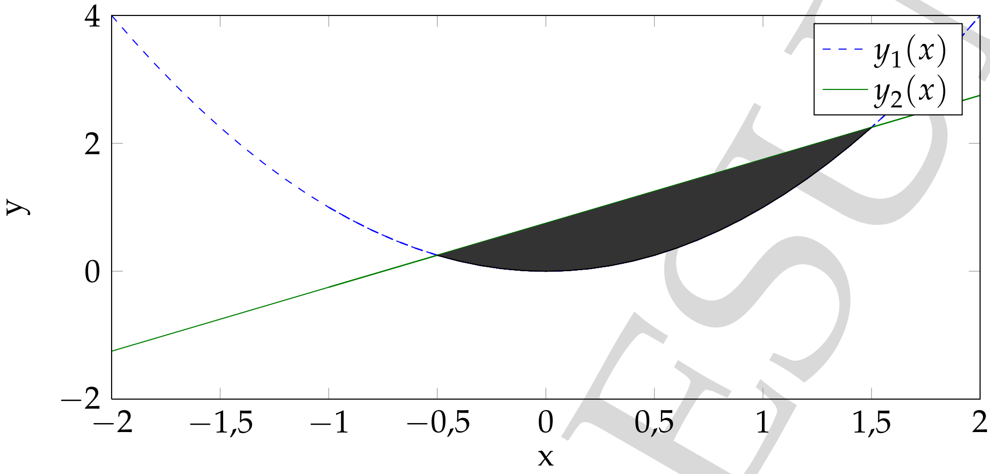


Abbildung L1: Verbunddichte.

Für die Normierung ist die Fläche zwischen den Graphen entscheidend. Deswegen wird diese vom linken bis zum rechten Schnittpunkt der Kurven y_1 und y_2 aufintegriert, also im Intervall $[-0{,}5; 1{,}5]$, und k so gewählt, dass das Flächenintegral 1 ergibt:

$$1 = k \cdot \int_{-0,5}^{1,5} y_2\left(x\right) - y_1\left(x\right) \mathrm{d}x = k \cdot \frac{4}{3} \Rightarrow k = \frac{3}{4}.$$

Somit ergibt sich:

$$f_{\mathrm{xy}}(x,y) = \begin{cases} k = \frac{3}{4} & \text{für } -0{,}5 \leq x < 1{,}5 \text{ mit } x^2 \leq y < x + \frac{3}{4} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

f) Der Erwartungswert lässt sich über Auswertung des Integrals

$$\mathrm{E}\{\mathrm{x} \cdot \mathrm{y}\} = \int_{-0,5}^{1,5} \int_{x^2}^{x+\frac{3}{4}} xyk \, \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \frac{5}{6} \cdot k = \frac{5}{8}.$$

berechnen.

g) Die Randdichte $f_{\mathrm{x}}(x)$ lässt sich über Auswertung des Integrals der Verbunddichte berechnen:

$$f_{\mathrm{x}}(x) = \begin{cases} \int_{x^2}^{x+\frac{3}{4}} k \, \mathrm{d}y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{16} - \frac{3}{4}x^2 & \text{für } -0{,}5 \leq x < 1{,}5 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

MUSTERLOESUNG

Aufgabe 4: Stochastische Signale (18 Punkte)

Gegeben sei ein mittelwertfreies, amplitudenbegrenztes, periodisches Signal $\mathtt{x}(t)$ mit der Periodendauer T.

a) Zeigen Sie, dass auch die AKF $r_{\mathtt{xx}}(\tau)$ mit T periodisch ist. *(2 Punkte)*

b) Berechnen Sie die AKF des Signals $\tilde{\mathtt{x}}(t)$ in Abhängigkeit von $r_{\mathtt{xx}}(\tau)$, wenn:

- $\tilde{\mathtt{x}}(t)$ das mit dem Faktor A multiplizierte Signal $\mathtt{x}(t)$ ist;
- $\tilde{\mathtt{x}}(t)$ das Signal $\mathtt{x}(t)$ ist, dem ein Offset B hinzugefügt wird.

(4 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

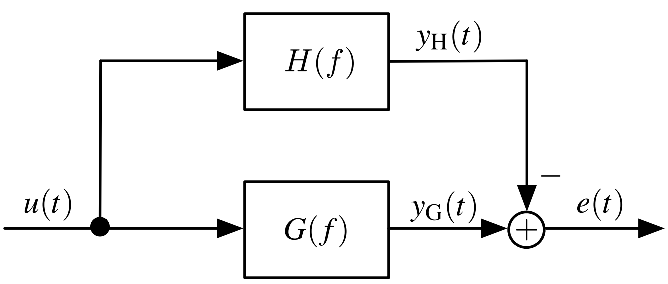
c) Wie sieht ein mögliches Zeitsignal mit der Autokorrelationsfunktion $\sin(2\pi\tau + \pi)$ qualitativ aus? *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

d) Zeigen Sie, dass für stationäre stochastische Prozesse der Zusammenhang $P_{\mathtt{x}} = r_{\mathtt{xx}}(0)$ gilt. *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

Zur Analyse eines unbekannten Systems $G(f)$ werde dem System das bekannte System $H(f)$ parallel geschaltet:



Dabei gelte:

$$r_{\mathrm{uu}}(\tau) = \exp\left(-\frac{1}{T}|\tau|\right), \quad r_{\mathrm{ee}}(\tau) = \sigma_{\mathrm{e}}^2\,\delta(\tau) \quad \text{und} \quad H(f) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}2\pi f T}.$$

MUSTERLOESUNG

e) Bestimmen Sie die Leistungsdichten von $\mathtt{u}(t)$ und $\mathtt{e}(t)$. Charakterisieren Sie jeweils die Art des Rauschens. *(2 Punkte)*

f) Welchen Filtertyp charakterisiert die Übertragungsfunktion $H(f)$? *(1 Punkt)*

g) Berechnen Sie das Betragsquadrat der Gesamtübertragungsfunktion $G_{\text{ges}}(f)$. *(1 Punkt)*

h) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(f)$. Dabei dürfen Sie

$$G_{\text{ges}}(f) = \sigma_{\mathsf{e}} \frac{\mathrm{j}2\pi f T + 1}{\sqrt{2T}}$$

als gegeben annehmen. *(2 Punkte)*

i) Geben Sie die Leistungsdichte $S_{y_G y_G}(f)$ des Signals $y_G(t)$ an. *(1 Punkt)*

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

j) Warum ist das Wiener-Filter adaptiv? Was passiert in den beiden Extremfällen? *(2 Punkte)*

MUSTERLOESUNG

Lösung

a) Amplitudenbegrenzte periodische Signale sind Leistungssignale, also wird die AKF wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} r_{\mathrm{xx}}(\tau+T) &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\mathrm{x}(t)\mathrm{x}(t+\tau+T)\mathrm{d}t \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\mathrm{x}(t)\mathrm{x}(t+\tau)\mathrm{d}t = r_{\mathrm{xx}}(\tau) \end{aligned}$$

b) Multiplikation mit A:

$$r_{\tilde{\mathrm{x}}\tilde{\mathrm{x}}}(\tau) = \mathrm{E}\{A\cdot\mathrm{x}(t)\cdot A\cdot\mathrm{x}(t+\tau)\} = A^2\cdot r_{\mathrm{xx}}(\tau)$$

Addition von B:

$$\begin{aligned} r_{\tilde{\mathrm{x}}\tilde{\mathrm{x}}}(\tau) &= \mathrm{E}\{(B+\mathrm{x}(t))\cdot(B+\mathrm{x}(t+\tau))\} \\ &= \mathrm{E}\left\{B^2\right\} + B\cdot\mathrm{E}\{\mathrm{x}(t)\} + B\cdot\mathrm{E}\{\mathrm{x}(t+\tau)\} + \mathrm{E}\{\mathrm{x}(t)\mathrm{x}(t+\tau)\} \\ &= B^2 + r_{\mathrm{xx}}(\tau) \end{aligned}$$

c) Die gegebene Funktion kann keine AKF sein, da ihr Maximum nicht bei $\tau = 0$ liegt.

d)

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{x}} &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathrm{xx}}(f)\mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} r_{\mathrm{xx}}(\tau)\exp(-\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}f \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} r_{\mathrm{xx}}(\tau)\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}f\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} r_{\mathrm{xx}}(\tau)\delta(\tau)\mathrm{d}\tau = r_{\mathrm{xx}}(0) \end{aligned}$$

e) Zunächst werden die beiden Autokorrelationsfunktionen Fourier-transformiert:

$$\begin{aligned} F\{r_{\mathrm{uu}}\}(\tau) &= S_{\mathrm{uu}}(f) = \frac{2T}{(2\pi fT)^2+1}, \\ F\{r_{\mathrm{ee}}\}(\tau) &= S_{\mathrm{ee}}(f) = \sigma_{\mathrm{e}}^2. \end{aligned}$$

- Bei $S_{\mathrm{uu}}(f)$ handelt es sich um farbiges Rauschen: bei großen Frequenzen nimmt die Rauschleistung ab.
- Bei $S_{\mathrm{ee}}(f)$ handelt es sich um weißes Rauschen. Hier bleibt die Rauschleistung über allen Frequenzen konstant.

f) Es handelt sich um einen Tiefpass (PT1-Glied).

MUSTERLOESUNG

g) Das Betragsquadrat der Gesamtübertragungsfunktion G_{ges} berechnet sich zu:

$$|G_{\text{ges}}(f)|^2 = \frac{S_{\text{ee}}(f)}{S_{\text{uu}}(f)} = \sigma_{\mathsf{e}}^2 \frac{(2\pi f T)^2 + 1}{2T}.$$

h) Die Übertragungsfunktion $G(f)$ kann berechnet werden zu:

$$\begin{aligned}
G(f) = H(f) + G_{\text{ges}}(f) &= \frac{1}{1 + \mathrm{j}2\pi f T} + \sigma_{\mathsf{e}} \frac{(\mathrm{j}2\pi f T) + 1}{\sqrt{2T}} \\
&= \frac{\sqrt{2T} + \sigma_{\mathsf{e}} \left[(1 + \mathrm{j}2\pi f T)(1 + \mathrm{j}2\pi f T)\right]}{\sqrt{2T}(1 + \mathrm{j}2\pi f T)} \\
&= \frac{\sqrt{2T} + \sigma_{\mathsf{e}}(1 + \mathrm{j}2\pi f T)^2}{\sqrt{2T}(1 + \mathrm{j}2\pi f T)}.
\end{aligned}$$

i) Für die Leistungsdichte am Ausgang des Blocks $G(f)$ gilt:

$$S_{y_G y_G}(f) = |G(f)|^2 \cdot S_{\text{uu}}(f) = \left| \frac{\sqrt{2T} + \sigma_{\mathsf{e}}\,(1 + \mathrm{j}2\pi f T)^2}{\sqrt{2T}\,(1 + \mathrm{j}2\pi f T)} \right|^2 \cdot \frac{2T}{1 + (2\pi f T)^2}.$$

j) Das Filter passt sich an frequenzabhängige Störungen an. Im störungsfreien Fall wird es zum dem inversen Filter $G^{-1}(f)$, bei starken Störungen schließt es bei entsprechenden Frequenzen gestörte Signale ganz aus.

MUSTERLÖSUNG

Aufgabe 5: Quantisierung und Abtastung (21 Punkte)

In folgender Abbildung haben Sie die Amplitudendichte eines Signals gegeben. Sie möchten dieses so mit 1 Bit quantisieren, dass Sie gleichwahrscheinliche Quantisierungsstufen erhalten.

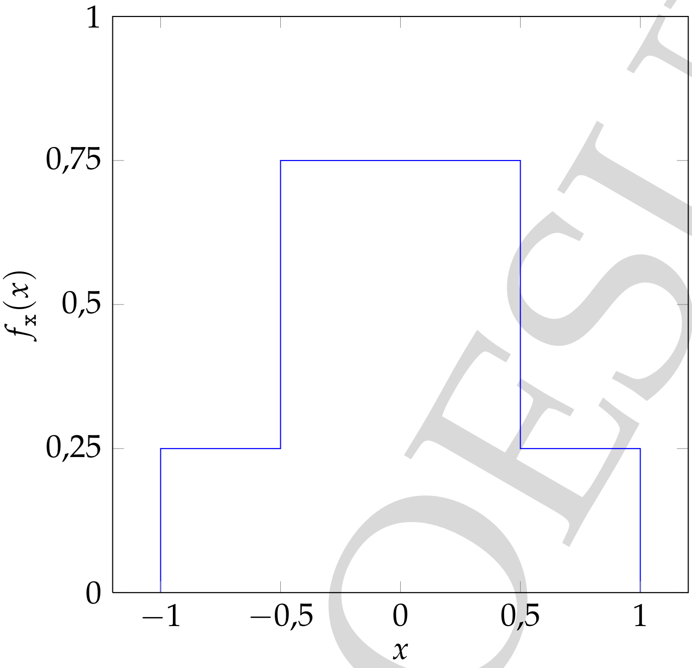


Abbildung 1: Amplitudendichte eines Signals.

a) Zeichnen Sie die gesuchte Quantisierungskennlinie mit minimalem quadratischen Quantisierungsfehler. *(5 Punkte)*

b) Zeichnen Sie das Signal $x(t) = \sin(2\pi \cdot t)$ für $0 \leq t \leq 2$ und zeichnen Sie ebenfalls das quantisierte Signal $x_q(t)$ ein. *(2 Punkte)*

c) Zeichnen Sie ein periodisches Signal mit der oben gegebenen Amplitudendichte. *(3 Punkte)*

d) Warum erreichen Sie mit dem entworfenen Quantisierer ein schlechteres Signal-Rausch-Verhältnis bei sinusförmigen Signalen als bei sägezahnförmigen Signalen? *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

e) Was bedeutet Flächenabtastung? Was kann bei Einhaltung des Quantisierungstheorems fehlerfrei rekonstruiert werden? *(2 Punkte)*

f) Was muss für Signale gelten, die als Dithersignal geeignet sind? Nennen Sie ein Beispiel. *(2 Punkte)*

MUSTERLOESUNG

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

g) Bestimmen Sie, ab welcher Drehzahl die Erfassung der Drehzahl durch das Frequenzmessverfahren vorteilhafter als die Erfassung durch Periodendauermessung ist, wenn pro Umdrehung 150 Winkelinkremente überschritten werden. Nehmen Sie an, dass T_{ref} bei der Frequenzzählung 1 ms beträgt und bei der Periodendauermessung $f_0 = 1000\,\text{Hz}$. Geben Sie die Drehzahl in Umdrehungen pro Minute an. *(4 Punkte)*

h) Welches Drehzahlmessverfahren würden Sie wählen, wenn Sie harte Echtzeitanforderungen haben? Begründen Sie kurz. *(1 Punkt)*

i) Welche Parameter würden Sie wie anpassen, um das Frequenzmessverfahren auch für sehr niedrige Drehzahlen nutzen zu können? *(1 Punkt)*

MUSTERLOESUNG

Lösung

a) Um die gesuchte Quantisierungskennlinie zeichnen zu können, müssen zuerst die gleichwahrscheinlichen Bereiche gefunden werden. Das heißt die Fläche unter der Dichte muss in 2 gleichgroße Teilflächen geteilt werden. Dies ist an der Stelle $x = 0$ der Fall.

Anschließend muss für jeden Bereich $[a_\mathrm{i}; b_\mathrm{i}]$ die Quantisierungsstufe $x_{\mathrm{q},i}$ gefunden werden, die den mittleren quadratischen Quantisierungsfehler der i-ten Stufe $\overline{e_{\mathrm{q},i}^2} = \int_{a_\mathrm{i}}^{b_\mathrm{i}} (x - x_{\mathrm{q},i})^2 f_\mathrm{x}(x)\,\mathrm{d}x$ minimiert. Mit

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mathrm{q},i}} \overline{e_{\mathrm{q},i}^2} = 0$$

ergibt sich für die rechte Stufe (links ist dazu symmetrisch):

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mathrm{q},r}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3}{4} \left(x_{\mathrm{q},r} - x \right)^2 \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{4} \left(x_{\mathrm{q},r} - x \right)^2 \mathrm{d}x \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mathrm{q},r}} \left(\frac{5}{48} - \frac{3}{8} x_{\mathrm{q},r} + \frac{1}{2} x_{\mathrm{q},r}^2 \right) = 0 \Rightarrow x_{\mathrm{q},r} = \frac{3}{8}$$

und als Lösung:

$$x_\mathrm{q} = \begin{cases} -\frac{3}{8} & \text{für } -1 \leq x < 0 \\ \frac{3}{8} & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Abbildung L2 zeigt zwei Perioden des quantisierten Sinussignals.

c) Abbildung L3 zeigt eine Periode eines beispielhaften Signals mit der Dichte aus Abbildung 1.

d) Die Amplitudendichte des Signals ähnelt eher der Gleichverteilung des Sägezahns als der zwischen -1 und 1 einer Parabel ähnelnden Amplitudendichte der Sinusfunktionen.

e) Bei der Flächenabtastung wird das Gewicht eines Abtastwerts im Gegensatz zur herkömmlichen Abtastung nicht durch nur einen Wert bestimmt, sondern durch die Fläche der Amplitudendichte innerhalb des Quantisierungsintervalls. Durch Einhaltung des Quantisierungstheorems kann die Amplitudendichte aus dem quantisierten Signal rekonstruiert werden.

MUSTERLOESUNG

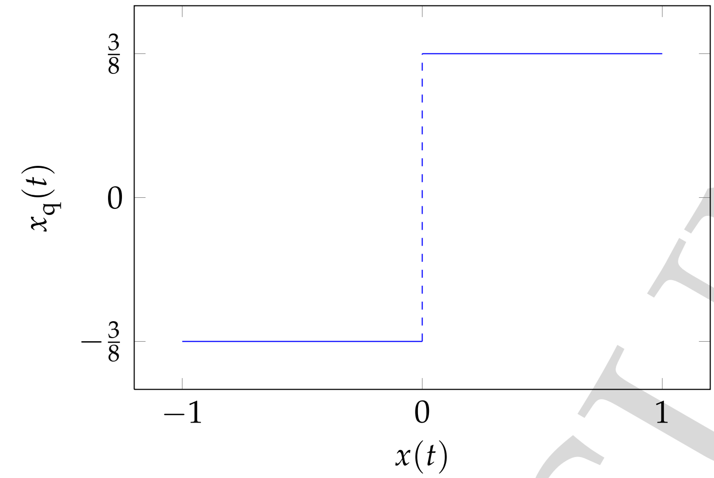


Abbildung L1: Quantisierungskennlinie.

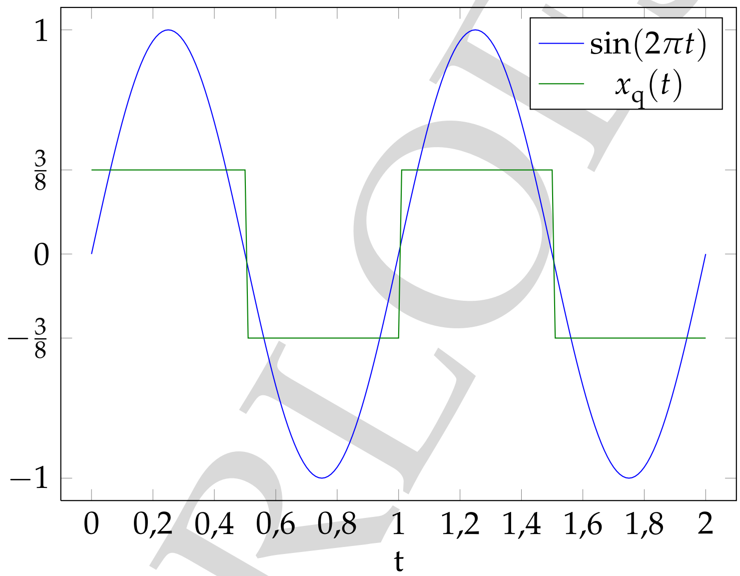


Abbildung L2: Quantisierter Sinus.

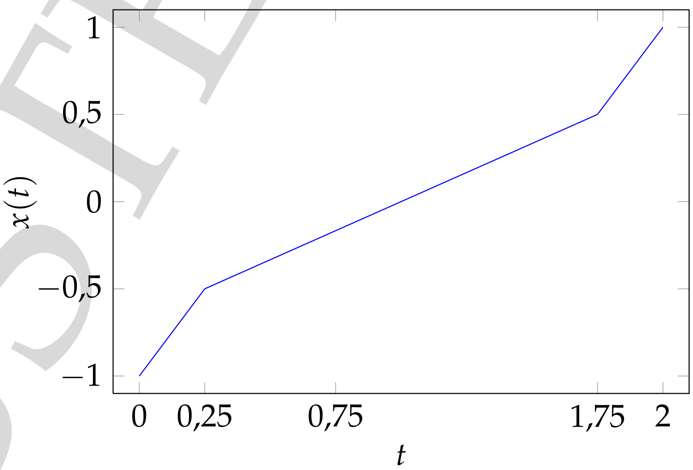


Abbildung L3: Signalperiode mit entsprechender Amplitudendichte.

MUSTERLÖSUNG

f) Geeignet sind Signale, deren charakteristische Funktion für große Frequenzen gegen null geht. Ein Beispiel ist ein Sägezahn.

g) Das Winkelinkrement pro Zahnrad beträgt $\varphi_0 = \frac{2\pi}{150}$. Die relativen Fehler der Verfahren entnimmt man dem Messtechnik-Buch zu:

$$F_{\mathrm{r,FMV}} = \frac{\varphi_0}{\omega_q T_{\mathrm{ref}}}$$
$$F_{\mathrm{r,PDM}} = \frac{\omega_q}{\varphi_0 f_0}$$

Gesucht ist ω_q, so dass:

$$F_{\mathrm{r,FMV}} \leq F_{\mathrm{r,PDM}}$$
$$\frac{\varphi_0}{\omega_{\mathrm{q}} T_{\mathrm{ref}}} \leq \frac{\omega_{\mathrm{q}}}{\varphi_0 f_0}$$
$$\omega_{\mathrm{q}}^2 \geq \varphi_0^2 \frac{f_0}{T_{\mathrm{ref}}} = \frac{(2\pi)^2 \cdot 10^3}{150^2 \cdot 10^{-3}} = \frac{1600}{9}\pi^2$$

Da $w_q = 2\pi f$ gilt, berechnet sich die Frequenz zu $f \geq 6{,}67\,\mathrm{Hz}$. Daraus ist abzulesen, dass ab einer Drehzahl von über $400{,}2\,\frac{1}{\mathrm{min}}$ die Frequenzzählung vorteilhafter ist.

h) Da die Frequenzzählung unabhängig von der Drehzahl deterministisch alle T_{ref} einen Wert liefert, ist unter diesen Bedingungen dieses Verfahren vorteilhafter.

i) Um $F_{\mathrm{r,FMV}} = \frac{\varphi_0}{\omega_{\mathrm{q}} T_{\mathrm{ref}}}$ bei konstantem ω_{q} zu senken, kann man T_{ref} erhöhen oder φ_0 senken bzw. die Anzahl der Winkelinkremente Z erhöhen.

MUSTERLOESUNG