Aufgabe 1: Kurvenanpassung (18 Punkte)

Sie beobachten mit einem Messgerät einen Golfball, der im Ursprung Ihres Koordinatensystems abgeschlagen wird. Die Flugbahn kann als ideal und ohne Reibungseinflüsse angenommen werden. Im Verlauf des Fluges erhalten Sie an drei Messpunkten einer festen Weite die gemessene Höhe des Balls (Tabelle 1):

Tabelle 1: Messwerte.

Weite / m	Höhe / m
2	8,9
5	17,4
15	7,7

a) Berechnen Sie eine mathematische Beschreibung für den Flugverlauf, wenn der Ball exakt durch alle Messpunkte, sowie den Abschlagspunkt fliegt. *(5 Punkte)*

b) In welcher Entfernung zum Abschlagspunkt trifft der Ball dementsprechend wieder auf den Boden? *(1 Punkt)*

c) Handelt es sich um fehlerfreie oder fehlerbehaftete Messwerte? Begründen Sie Ihre Antwort. *(1 Punkt)*

d) Wie könnten Sie nun mittels eines Least-Square-Ansatzes die Flugbahn schätzen? Berücksichtigen Sie, dass der Abschlagspunkt sicher bekannt ist. Geben Sie die gesuchten Parameter sowie ihre Berechnungsvorschriften für die Parameter mit den benötigten Matrizen an. Setzen Sie die benötigten Werte ein, ohne die Matrixmultiplikationen durchzuführen. *(4 Punkte)*

e) Ist eine errechnete Flugweite basierend auf dem Ansatz aus Aufgabe **a**) oder **d**) wahrscheinlicher? Begründen Sie Ihre Antwort. *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgabe ist unabhängig von den bisherigen.

Tabelle 2: Spline-Interpolation.

u_i	$y(u_i)$
−2,2	2
0	7
1	6

f) Berechnen Sie für die in der Tabelle 2 angegebenen Werte die Spline-Koeffizienten für alle nötigen kubischen Splines. Sie müssen die Koeffizienten nicht in den Polynomansatz einsetzen und ausmultiplizieren. *(5 Punkte)*

Lösung

a) Da alle Messpunkte, inklusive dem Abschlagspunkt, exakt durchlaufen werden, wird ein globales Interpolationspolynom gesucht. Dieses kann mittels des hier verwendeten Differenzenschemas des Newton-Verfahrens oder alternativ mit dem Lagrange-Verfahren berechnet werden:

x	$\Delta^0 y = y$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	0			
		4,45		
2	8,9		$\frac{-97}{300}$	
		$\frac{17}{6}$		$\frac{2}{975}$
5	17,4		$\frac{-1141}{3900}$	
		$-\frac{97}{100}$		
15	7,7			

Der Newton-Ansatz bei 4 Stützstellen lautet:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{\text{New}}(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\ &\quad + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &= \Delta^0 y + \Delta^1 y(x - x_0) + \Delta^2 y(x - x_0)(x - x_1) \\ &\quad + \Delta^3 y(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\,.\end{aligned}$$

Einsetzen der Werte aus dem Differenzenschema ergibt:

$$\tilde{y}_{\text{New}}(x) = 0{,}0021x^3 - 0{,}3377x^2 + 5{,}1172x\,.$$

b) Da eine Nullstelle des Polynoms bei Null bekannt ist, handelt es sich bei dem gesuchten Ergebnis um die nächste Nullstelle des Polynom 2. Grades bei $x = 16{,}8853$.

c) Die Messungen müssen fehlerbehaftet sein, da die ideale Flugbahn durch eine Parabel ohne Terme dritter Ordnung beschrieben werden würde.

d) Als Signalmodell wird für die Flugbahn ohne Reibung eine Parabel der Form $y = ax^2 + bx + c$ angenommen. Da zusätzlich sicher bekannt ist, dass die Flugbahn durch den Ursprung $(0; 0)$ verläuft, ist der Parameter c null. Somit müssen nur noch Parameter a und b aus den Messwerten geschätzt werden.

Das LS-Gleichungssystem lautet:

$$\mathbf{y} = \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{b}$$

mit:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 8{,}9 \\ 17{,}4 \\ 7{,}7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 2^2 & 2 \\ 5^2 & 5 \\ 15^2 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Mit der Pseudoinversen berechnet man die Koeffizienten a und b:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= (\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \\ &= \left(\begin{pmatrix} 4 & 25 & 225 \\ 2 & 5 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 25 & 5 \\ 225 & 15 \end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix} 4 & 25 & 225 \\ 2 & 5 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8{,}9 \\ 17{,}4 \\ 7{,}7 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

e) Die Flugweite aus Aufgabe **d**) ist wahrscheinlicher, da hier eine Mittelung über Messwerte durchgeführt wird.

f) Für die gegebenen Werte können das erste und zweite Segment s_0 und s_1 berechnet werden. Mit den Eigenschaften $y_0'' = y_2'' = 0$ vereinfacht sich das zu lösende Gleichungssystem somit zu:

$$\begin{pmatrix} 2(h_0 + h_1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{h_1}(y_2 - y_1) - \frac{6}{h_0}(y_1 - y_0) \end{pmatrix}.$$

Mit $h_0 = 2{,}2$ und $h_1 = 1$ lässt sich $y_1'' = -\frac{135}{44}$ bestimmen und sich die Koeffizienten des ersten Segments berechnen:

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{6 \cdot h_0}(y_1'' - y_0'') = \frac{1}{6 \cdot 2{,}2} \cdot -\frac{135}{44} = -\frac{225}{968} = -0{,}2324 \\ b_0 &= \frac{1}{2}y_0'' = 0 \\ c_0 &= \frac{1}{h_0}(y_1 - y_0) - \frac{h_0}{6}(y_1'' + 2y_0'') = \frac{5}{2{,}2} + \frac{2{,}2}{6} \cdot \frac{135}{44} = \frac{299}{88} = 3{,}3978 \\ d_0 &= y_0 = 2\,.\end{aligned}$$

Das zweite Segment s_1 besitzt die Koeffizienten:

$$\begin{aligned}a_1 &= 0{,}511 \\ b_1 &= -\frac{135}{88} \\ c_1 &= \frac{1}{44} \\ d_1 &= y_1 = 7.\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Messsysteme (16 Punkte)

Ihnen ist die Kennlinie eines Messgeräts $y(u) = \frac{2}{5}u^3 - \frac{1}{5}u^2 + u$ gegeben. Das Gerät darf mit Signalen mit Amplituden im Bereich $[-2; 2]$ beschaltet werden. Ihr Messproblem erfordert eine betragsmäßige maximale „Krümmung" (gemeint ist die 2. Ableitung) der Kennlinie von 1.

a) Geben Sie den maximal geeigneten Messbereich an, skizzieren Sie die Kennlinie im Eingangsbereich und zeichnen Sie den geeigneten Bereich ein.

(4 Punkte)

b) Entspricht dieser Bereich dem im Sinne der Vorlesung günstigsten Messbereich gleicher Breite?

(2 Punkte)

c) Worin unterscheiden sich beide Kriterien und unter welchen Bedingungen sind sie für den Fall einer Kennlinie dritten Grades gleich?

(3 Punkte)

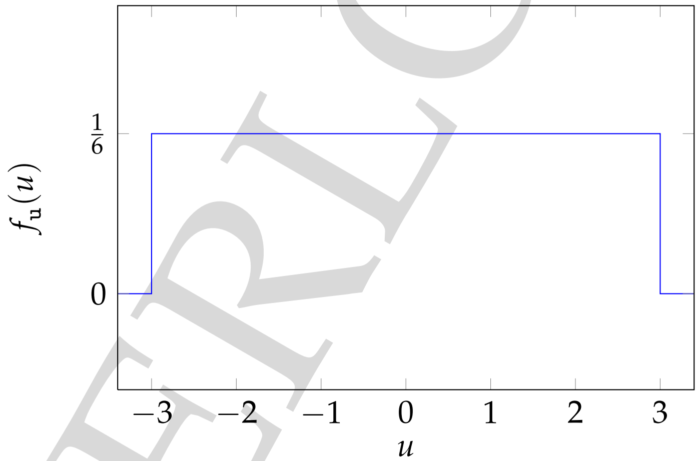

Abbildung 1: Amplitudendichte.

Ihr Messproblem führt zu Werten entsprechend der Amplitudendichte in Abbildung 1, und Ihnen stehen nun zusätzlich zwei Verstärker für Ihre Messaufgabe zur Verfügung.

d) Mit welcher Methode kombinieren Sie nun die von Ihnen getroffene Wahl des Messbereichs? *(1 Punkt)*

e) Geben Sie die Verstärkungsfaktoren der beiden Verstärker an. **Hinweis:** Sie können Signaloffsets beliebig einstellen. *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Gegeben sei ein Messergebnis y, welches sich mit Hilfe der fehlerbehafteten Einzelmessgrößen x_1, x_2 und x_3 berechnen lässt:

$$y(\mathbf{x}) = y(x_1, x_2, x_3) = 4 + x_1^2 + \frac{1}{3} x_2^3 - x_3 \,.$$

Die Messfehler $\Delta x_i = x_i - x_{i0}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, seien rein zufällig und betragsmäßig klein. Außerdem seien die zugehörigen Varianzen σ_1^2, σ_2^2 und σ_3^2 bekannt.

f) Berechnen Sie die Varianz σ_y^2 des Messergebnisses y in Abhängigkeit der Korrelationskoeffizienten der Einzelmessgrößen. *(3 Punkte)*

g) Berechnen Sie die Varianz σ_y^2 des Messergebnisses y für den Fall, dass x_1 und x_2 starr gebunden sind. x_3 sei dabei unkorreliert zu den anderen Messgrößen. *(1 Punkt)*

Lösung

a) Um den geeigneten Messbereich zu finden, wird die Krümmung herangezogen und somit die zweite Ableitung benötigt:

$$y'(u) = \frac{6}{5}u^2 - \frac{2}{5}u + 1$$
$$y''(u) = \frac{12}{5}u - \frac{2}{5}\,.$$

Zur Erfüllung der Anforderung muss $|y''(u)| \leq 1$ gelten. Dies ist zwischen $u \geq -\frac{1}{4}$ und $u \leq \frac{7}{12}$ der Fall. Dieser Bereich stellt somit den maximalen Messbereich dar. Als Hilfe für die Skizze L1 lässt sich ein Punkt u_{WP} mit $y''(u_{\text{WP}}) = 0$ bei $y'''(u_{\text{WP}}) \neq 0$ und somit ein Wendepunkt bei $u_{\text{WP}} = \frac{1}{6}$ finden und somit die Kennlinie in blau einzeichnen.

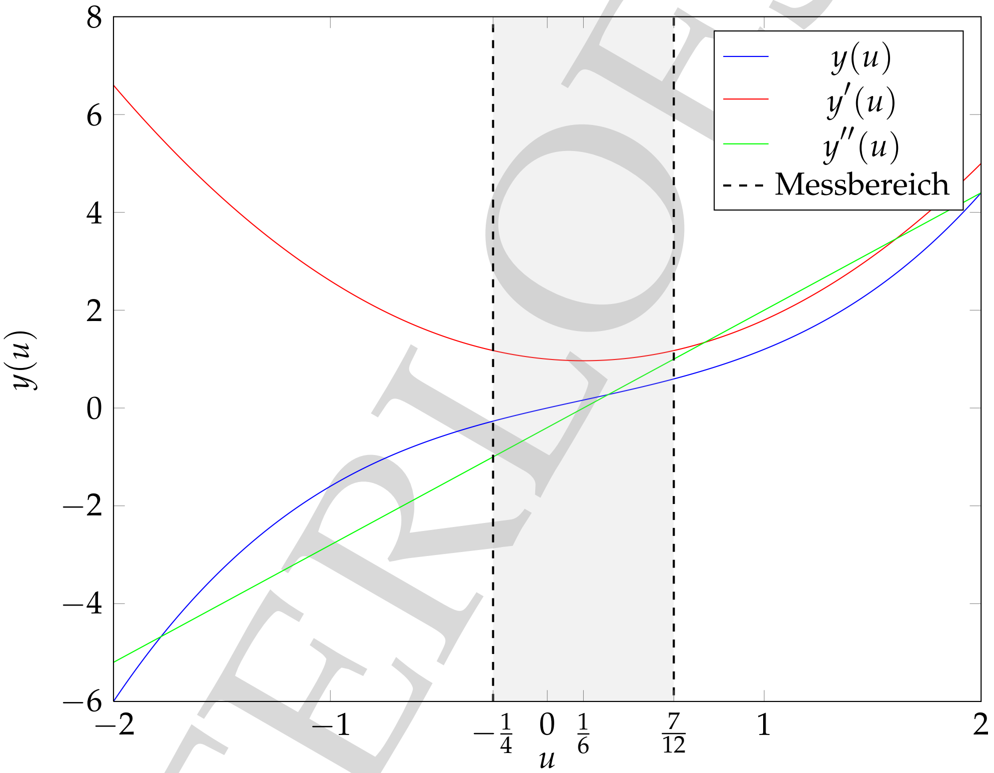

Abbildung L1: Kennlinie mit geeignetem Eingangsbereich. Zusätzlich sind noch die Steigung und die Krümmung eingezeichnet.

b) Aus der vorherigen Aufgabe ist ersichtlich, dass die Kennlinie einen Wendepunkt besitzt und somit das Kriterium 1 für den günstigsten Messbereich verwendet werden kann. Der vergleichbare Bereich mit der Größe d berechnet sich aus den Grenzen des vorherigen Bereichs zu $d = \frac{7}{12} - (-\frac{1}{4}) = \frac{5}{6}$. Somit ergibt sich für den Anfang des günstigsten Messbereichs u_a mit dem Kriterium $S(u_a) = S(u_a + d)$ mit $S(u) = y'(u)$ der Messbereich:

$$u_a = (-\frac{1}{4}) \leq u \leq \frac{7}{12} = u_a + d\,.$$

Dieser entspricht exakt dem Messbereich der vorherigen Teilaufgabe.

c) Während bei dem allgemeinen Kriterium 1 die quadratische Abweichung zwischen idealer/konstanter Steigung und tatsächlicher Steigung minimiert wird, werden in dem hier genannten Kriterium Bereiche mit möglichst kleiner Krümmung gesucht. Handelt es sich bei der Kennlinienfunktion um eine Funktion dritten Grades, sind sowohl Steigung als auch Krümmung im Wendepunkt null und um den Wendepunkt, wie in Abbildung L1 gezeigt, symmetrisch, so dass auch ein günstigster Messbereich symmetrisch um den Wendepunkt liegt. Somit liefern für diesen Fall beide Kriterien das gleiche Ergebnis, wenn gleich große Bereiche gefordert sind und der Wendepunkt im betrachteten Bereich liegt.

d) Mit der Methode „Herabsetzen des Messbereichs".

e) Unter der Nebenbedingung $V_1 \cdot V_2 = 1$ muss der Signalpegel auf den gewählten Messbereich angepasst werden. Aus Abbildung 1 kann abgelesen werden, dass sich mögliche Signale im Bereich von -3 bis 3 befinden. Somit ergeben sich die Verstärkungen zu:

$$V_1 = \frac{\text{Ausgangsbereich}}{\text{Eingangsbereich}} = \frac{\frac{5}{6}}{6} = \frac{5}{36}$$
$$V_2 = \frac{\text{Eingangsbereich}}{\text{Ausgangsbereich}} = \frac{6}{\frac{5}{6}} = \frac{36}{5}$$

f) Zunächst werden die partiellen Ableitungen gebildet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x}_1} &= 2\mathrm{x}_1 \\ \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x}_2} &= \mathrm{x}_2^2 \\ \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x}_3} &= -1\,. \end{aligned}$$

Nun kann die resultierende Varianz berechnet werden:

$$\sigma_{\mathrm{y}}^2 = 4x_{10}^2\sigma_1^2 + x_{20}^4\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 4x_{10}x_{20}^2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} - 4x_{10}\sigma_1\sigma_3\rho_{13} - 2x_{20}^2\sigma_2\sigma_3\rho_{23}\,.$$

g) Durch die Angabe kann auf die jeweiligen ρ_{ij} geschlossen werden: $\rho_{12} = 1$. Alle anderen Korrelationskoeffizienten sind null:

$$\sigma_{\mathrm{y}}^2 = 4x_{10}^2\sigma_1^2 + x_{20}^4\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 4x_{10}x_{20}^2\sigma_1\sigma_2\,.$$

Aufgabe 3: Statistik, Stochastische Signale (18 Punkte)

Sie benutzen einen Laserscanner zur Objektdetektion. Dieser liefert Ihnen Objektpositionen in polaren Koordinaten, also mit Winkel ϕ und Abstand r. Die Messungen sind mit mittelwertfreien stochastischen Fehlern behaftet. Der Winkelfehler ist hierbei gleichverteilt und die Abstandsmessfehler normalverteilt. Zusätzlich ist Ihnen die Kovarianzmatrix $\mathbf{M}_{\phi\mathtt{r}}$ mit den Werten für die Varianzen auf der Diagonalen und den Werten für die Kovarianz auf der Gegendiagonalen gegeben:

$$\mathbf{M}_{\phi\mathtt{r}} = \begin{pmatrix} 0{,}0076\,\mathrm{rad}^2 & 0 \\ 0 & 0{,}01\,\mathrm{m}^2 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für Winkel- und Abstandsfehler an. *(3 Punkte)*

Tabelle 3: Häufigkeiten der Abstandsmessungen.

Messwert / m	Häufigkeit
29,7	2
29,8	8
29,9	20
30,0	30
30,1	27
30,2	10
30,3	3

b) Sie sind nun nur an der Abstandsmessung interessiert. In 100 unabhängigen Messungen erhalten Sie die Häufigkeiten der Messergebnisse in Tabelle 3. Bis zu welcher statistischen Sicherheit kann es sich nach dem Signifikanztest um die Messungen eines unbewegten Objekts in 30 m Entfernung entsprechend den oben angenommenen Messunsicherheiten handeln? *(5 Punkte)*

c) Für welche Objektbewegungen während der Messung wären die Aussagen aus der vorherigen Teilaufgabe weiterhin gültig? *(1 Punkt)*

d) Durch welches aus der Vorlesung bekannte Vorgehen könnten Sie die Abschätzungen für die Kovarianzmatrix in karthesischen Koordinaten erhalten? *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

e) Ihnen ist die Verbunddichte nach Abbildung 2 gegeben mit einem von null verschiedenen, konstanten Wert im grauen Bereich. Geben Sie eine mathematische Beschreibung sowohl für die Verbunddichte $f_{\mathtt{xy}}(x, y)$ als auch für die Marginaldichte $f_{\mathtt{x}}(x)$ an. *(4 Punkte)*

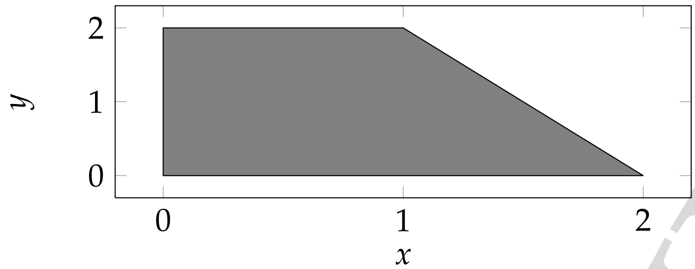

Abbildung 2: Verbunddichte $f_{\mathrm{xy}}(x, y)$.

f) Besitzen die in Abbildung 2 dargestellten Zufallsgrößen x und y einen positiven oder einen negativen Korrelationskoeffizienten? Begründen Sie Ihre Antwort.

(1 Punkt)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den bisherigen.

g) Ordnen Sie folgenden Zusammenhängen $A - D$ die entsprechenden Korrelationskoeffizienten $\{\rho_1 = -0{,}9\}$, $\{\rho_2 = 0{,}01\}$, $\{\rho_3 = -1\}$, $\{\rho_4 = 0{,}7\}$ zu.

A :{Gewicht, Größe}
B :{Pünktlichkeit, Ankunftszeit}
C :{zurückgelegte Strecke, Treibstoff im Tank}
D :{vergangene Bearbeitungszeit, verbleibende Bearbeitungszeit} .

(2 Punkte)

Lösung

a) Aus der Aufgabenstellung sind Art der Verteilung, Mittelwertfreiheit und Varianz gegeben. Sowohl Gleichverteilung als auch Normalverteilung sind somit vollständig beschrieben. Aus der Varianz der Gleichverteilung kann auf ihre Breite geschlossen werden und somit folgt:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{1}{12}(b-a)^2 \\
\Rightarrow b &= \frac{1}{2}\sqrt{12\sigma^2} = \frac{1}{2}\sqrt{12\cdot 0{,}0076\,\mathrm{rad}^2} = 0{,}1510\,\mathrm{rad} \\
f_\phi(\phi) = \mathcal{U}(-b,b) &= \left\{\frac{1}{2b} \text{ für } |\phi| \le b\right\} = \{3{,}3113 \text{ für } |\phi| \le 0{,}1510\,\mathrm{rad}\}
\end{aligned}$$

Die Parameter der Normalverteilung können direkt abgelesen werden:

$$f_{\mathtt{r}}(r) = \mathcal{N}(0;0{,}01\,\mathrm{m}^2) = \frac{1}{\sqrt{0{,}01\,\mathrm{m}^2 2\pi}}\exp\left(-\frac{r^2}{2\cdot 0{,}01\,\mathrm{m}^2}\right)$$

b) Um den Signifikanztest durchzuführen, müssen zuerst alle Voraussetzungen geprüft werden. Hier sind die Voraussetzungen der Unabhängigkeit der Messwerte und der Normalverteilung der Grundgesamtheit mit Mittelwert 30 m gegeben.

Der Stichprobenmittelwert $\hat{\mathtt{r}}$ lässt sich berechnen zu:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathtt{r}} &= \frac{29{,}7\,\mathrm{m}\cdot 2 + 29{,}8\,\mathrm{m}\cdot 8 + 29{,}9\,\mathrm{m}\cdot 20}{100} \\
&+ \frac{30\,\mathrm{m}\cdot 30 + 30{,}1\,\mathrm{m}\cdot 27 + 30{,}2\,\mathrm{m}\cdot 10 + 30{,}3\,\mathrm{m}\cdot 3}{100} \\
&= 30{,}014\,\mathrm{m}\,.
\end{aligned}$$

Die Nullhypothese lautet:

$$H_0 : \hat{\mathtt{r}} = \mu_0 = 30\,\mathrm{m}\,.$$

Die Prüfgröße wird in diesem Fall mit bekannter Standardabweichung berechnet:

$$\mathtt{z} = \frac{|\hat{\mathtt{r}} - \mu_0|}{\sqrt{\sigma_{\mathtt{r}}^2}}\sqrt{n} = \frac{|30{,}014\,\mathrm{m} - 30\,\mathrm{m}|}{\sqrt{0{,}01\,\mathrm{m}^2}}\sqrt{100} = 1{,}4 = c\,.$$

Die gesuchte statistische Sicherheit ergibt sich somit zu:

$$P(c) = P(1{,}4) = 83{,}8487\,\%\,.$$

c) Für beliebige Kreisbewegungen mit konstantem Radius um den Sensor behalten die Aussagen ihre Gültigkeit.

d) Für eine Abschätzung kann das Gauß'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz herangezogen werden.

e) Da die Verbunddichte eine gültige Wahrscheinlichkeitsdichte sein muss und somit nach Integration eins ergeben muss, ist ihr Funktionswert innerhalb des Definitionsbereichs der inverse Flächeninhalt und somit ein Drittel:

$$f_{\mathrm{xy}}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3}\,,\ \text{für} \begin{cases} 0 \le x \le 1 \text{ und } 0 \le y \le 2 \\ 1 < x \le 2 \text{ und } 0 \le y \le -2x+4 \end{cases} \\ 0\,,\ \text{sonst} \end{cases}$$

Die Dichte $f_{\mathrm{x}}(x)$ errechnet sich über Marginalisierung:

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{x}}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathrm{xy}}(x,y)\,\mathrm{d}y \\ &= \begin{cases} \int_0^2 \frac{1}{3}\mathrm{d}y = \frac{2}{3} \text{ für } 0 \le x \le 1 \\ \int_0^{-2x+4} \frac{1}{3}\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\cdot(-2x+4) = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \text{ für } 1 < x \le 2 \end{cases} \end{aligned}$$

f) Abbildung 2 besitzt einen negativen Korrelationskoeffizienten, da für hohe x-Werte die Wahrscheinlichkeit hoher y-Werte abnimmt.

g)

$$\begin{aligned} A &: \rho_4 \\ B &: \rho_2 \\ C &: \rho_1 \\ D &: \rho_3\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 4: Quantisierung, Abtastung, LTI-Systeme (15 Punkte)

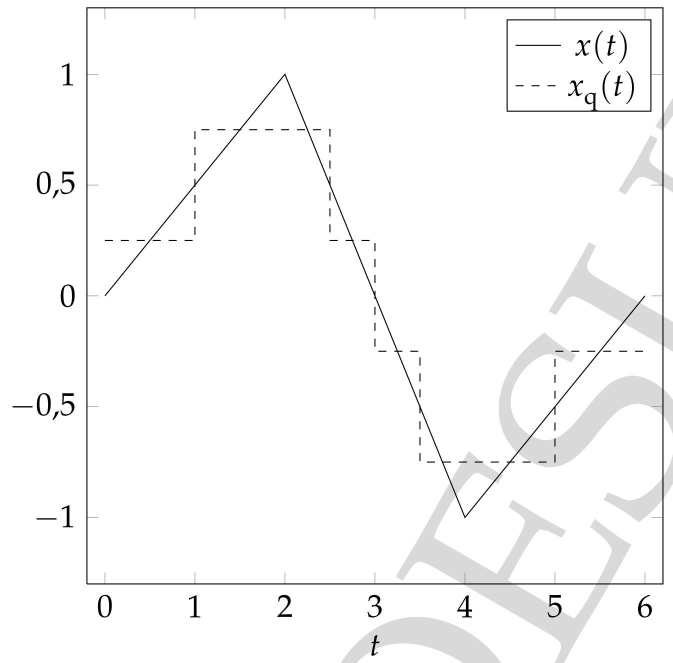

Abbildung 3: Kontinuierliches und quantisiertes Signal.

Ihnen ist das Signal $x(t)$ aus Abbildung 3 gegeben zusammen mit dem quantisierten Signal $x_q(t)$, das mit einem Quantisierer mit einem Eingangsbereich von -1 bis 1 erzielt wurde.

a) Wie lautet die nötige Bitanzahl für diesen Quantisierer? *(1 Punkt)*

b) Skizzieren Sie die entsprechende Quantisierungskennlinie. Achten Sie dabei auf eine korrekte Achsenbeschriftung. *(2 Punkte)*

c) Skizzieren Sie die Amplitudendichte des kontinuierlichen Signals. Gehen Sie davon aus, dass das Signal periodisch fortgesetzt wird. *(2 Punkte)*

d) Erweitern Sie die Skizze aus der vorherigen Teilaufgabe um die Amplitudendichte des quantisierten Signals. Gehen Sie wieder davon aus, dass das Signal periodisch fortgesetzt wird. Zeichnen Sie zusätzlich den Bereich der Flächenabtastung für einen Abtastwert ein. *(3 Punkte)*

e) Erklären Sie anhand der charakteristischen Funktion des gegebenen Signals, warum das Quantisierungstheorem hier nicht exakt erfüllt werden kann. *(1 Punkt)*

f) Welches der gegebenen bzw. skizzierten Signale kann nach einer vorgenommenen Quantisierung unter approximativer Einhaltung des Quantisierungstheorems rekonstruiert werden? *(1 Punkt)*

g) Geben Sie das durch die Quantisierung bestimmte SNR in dB an. *(1 Punkt)*

h) Sind die Quantisierungsstufen optimal verteilt? Begründen Sie Ihre Antwort. *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

i) Wodurch entstehen Jitter-Fehler? *(1 Punkt)*

j) Worin unterscheiden sich Frequenzmessung und Periodendauermessung und wann sollte welches Verfahren bevorzugt werden? *(2 Punkte)*

Lösung

a) Die vier Stufen des quantisierten Signals werden durch einen 2-Bit-Quantisierer erzeugt.

b) Die Kennlinie des Quantisierers ist in Abbildung L2 zu sehen.

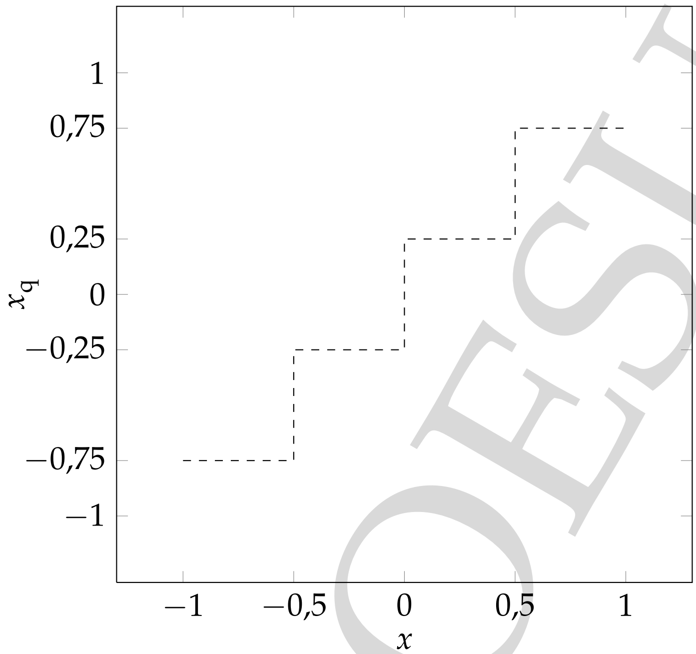

Abbildung L2: Kennlinie des Quantisierers.

c) Die Amplitudendichte des kontinuierlichen Signals ist in Abbildung L3 als durchgezogene Linie zu sehen.

d) Die Amplitudendichte des quantisierten Signals ist in Abbildung L3 als gestrichelte Linie zu sehen. Die Bereiche der Flächenabtastung sind gepunktet gekennzeichnet und exemplarisch ist ein Bereich grau hinterlegt.

e) Da die charakteristische Funktion in diesem Fall eine Sinc-Funktion ist, ist bei Flächenabtastung eine überlappungsfreie spektrale Darstellung nicht möglich.

f) Die Amplitudendichte aus Aufgabenteil **c)** ist unter Einhaltung des Quantisierungstheorems rekonstruierbar.

g) Das SNR für gleichverteilte Amplituden bei einem 2-Bit-Quantisierer berechnet sich zu:

$$\mathrm{SNR} = 2^{2N} = 16 \mathrel{\hat{=}} 12{,}04\,\mathrm{dB}\,.$$

h) Da alle Stufen gleichwahrscheinlich sind, handelt es sich um eine optimale Quantisierung.

i) Jitterfehler entstehen durch zeitliche Abweichungen vom idealen Abtastzeitpunkt.

j) Während die Frequenzmessung zeitsynchron erfolgt, verläuft die Periodendauermessung winkelsynchron. Bei hohen Drehzahlen ist daher die Frequenzmessung zu bevorzugen, während die Periodendauermessungen für niedrigere Drehzahlen geeigneter ist.

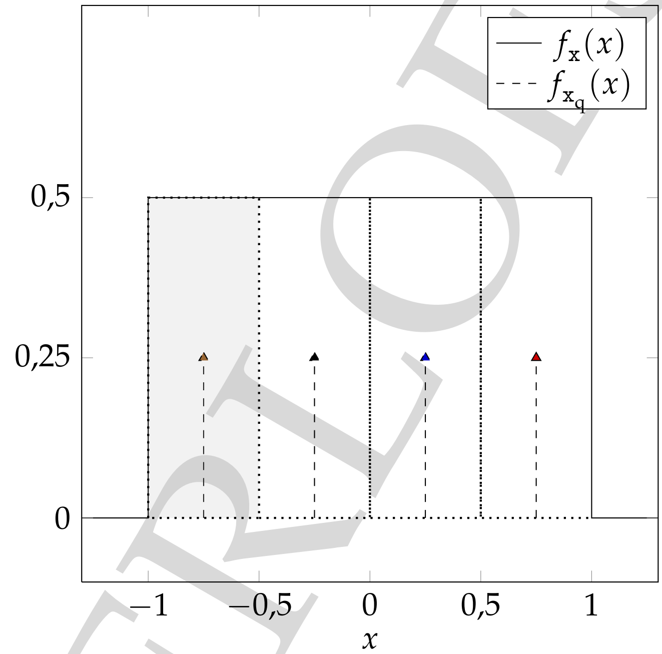

Abbildung L3: Amplitudendichten.