Institut für
Industrielle Informationstechnik
Karlsruher Institut für Technologie
Prof. Dr.-Ing. F. Puente León

Hertzstr. 16 / Geb. 06.35
76187 Karlsruhe
Tel.: 0721 / 608 44521
Fax: 0721 / 608 44500

Klausur im Fach
Messtechnik
30. Juli 2018

Musterlösung

Aufgabe 1: 17
Aufgabe 2: 14
Aufgabe 3: 18
Aufgabe 4: 17

Gesamtpunkte: 66

Aufgabe 1: Kurvenanpassung (17 Punkte)

Für ein Messgerät wurden, abhängig von der Messgröße u, folgende Messwerte $y(u)$ fehlerfrei aufgezeichnet:

Tabelle 1: Aufgezeichnete Messwerte.

i	0	1	2	3
u_i	-2	0	2	4
$y(u_i)$	-5	-3	2	7

a) Interpolieren Sie eine Kennlinie aus den Wertepaaren in Tabelle 1 durch ein Lagrange-Polynom. Geben Sie das Ergebnis in ausmultiplizierter Form an. *(4 Punkte)*

b) Es wird ein zusätzlicher Messwert an der Stützstelle $u_4 = 1$ zu $y(u_4) = 1$ bestimmt. Berechnen Sie das neue Interpolationspolynom unter Berücksichtigung dieses Messwertes. Verwenden Sie das Ergebnis der Lagrange-Interpolation weiter und nutzen Sie den rekursiven Ansatz der Newton-Methode. Geben Sie das Ergebnis in ausmultiplizierter Form an. *(4 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

c) Sie wollen einen Datensatz mit 5 Stützstellen interpolieren. Aus wie vielen Polynomen besteht die Interpolierende bei Verwendung von globalen Polynomen bzw. von Splines? *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Sie haben einen Datensatz mit 5 fehlerbehafteten Messwerten gegeben.

d) Welches Verfahren eignet sich hier für eine Kurvenanpassung der Messwerte? *(1 Punkt)*

Die Aufgaben werden auf der Rückseite fortgesetzt.

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Farbbilder bestehen aus drei Farbkanälen: einem roten (R), grünen (G) und blauen (B) Kanal. Kamera-Sensoren (CMOS oder CCD) liefern jedoch ein Bild mit einem Kanal, da sie die Farbe der einfallenden Photonen nicht direkt messen können. Um dennoch Farbbilder messen zu können, wird in Farbkameras eine sog. Bayer-Maske verwendet: Diese Maske lässt pro Pixel jeweils nur rotes, grünes oder blaues Licht auf den Sensor. Um dennoch für jedes Pixel drei Farbwerte, und somit ein Farbbild, zu erhalten, errechnet man die jeweils fehlenden Farbwerte pro Pixel aus den direkt benachbarten Pixeln, die die entsprechende Farbkomponente aufweisen, per Interpolation.

Gegeben sei ein Sensor der Größe $4 \times 4\,\mathrm{Pixel}$ mit der zugehörigen Bayer-Maske aus Tabelle 2. Sie führen eine Aufnahme durch und erhalten die Messwerte laut Tabelle 3.

Tabelle 2: Verwendete Bayer-Maske M_{ij} .

i	j			
	0	**1**	**2**	**3**
0	G	R	G	R
1	B	G	B	G
2	G	R	G	R
3	B	G	B	G

Tabelle 3: Gemessenes Sensorbild S_{ij} .

i	j			
	0	**1**	**2**	**3**
0	128	55	23	13
1	10	43	13	23
2	80	20	41	200
3	80	0	101	230

e) Wie lauten die RGB-Farbkanalwerte für die Pixel $(i, j) = (2, 1)$ und $(2, 2)$? Berechnen Sie dazu die jeweils fehlenden Farbwerte mittels (bi)linearer Interpolation. *(5 Punkte)*

f) Welches weitere einfachere Interpolationsverfahren könnten Sie hier verwenden? Auf welches Problem würden Sie stoßen, wenn Sie dieses Verfahren anwenden würden? *(2 Punkte)*

Lösung

a) Die Lagrange-Interpolation mit den vier gegebenen Wertepaaren führt zu folgendem Polynom:

$$\begin{aligned}
y_\mathrm{L}(u) &= y(u_0)\frac{(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)}{(u_0-u_1)(u_0-u_2)(u_0-u_3)} + y(u_1)\frac{(u-u_0)(u-u_2)(u-u_3)}{(u_1-u_0)(u_1-u_2)(u_1-u_3)} \\
&\quad + y(u_2)\frac{(u-u_0)(u-u_1)(u-u_3)}{(u_2-u_0)(u_2-u_1)(u_2-u_3)} + y(u_3)\frac{(u-u_0)(u-u_1)(u-u_2)}{(u_3-u_0)(u_3-u_1)(u_3-u_2)} \\
&= \frac{5}{48}\left(u^3-6u^2+8u\right) - \frac{3}{16}\left(u^3-4u^2-4u+16\right) \\
&\quad - \frac{1}{8}\left(u^3-2u^2-8u\right) + \frac{7}{48}\left(u^3-4u\right) \\
&= -\frac{1}{16}u^3 + \frac{3}{8}u^2 + 2u - 3\,.
\end{aligned}$$

*(Σ: **4 Punkte**)*

b) Der Ansatz für Newton-Polynome lautet:

$$\begin{aligned}
y_\mathrm{N}(u) &= a_0 + a_1(u-u_0) + a_2(u-u_0)(u-u_1) \\
&\quad + \ldots + a_{n-1}(u-u_0)(u-u_1)\ldots(u-u_{n-2}).
\end{aligned}$$

Somit lässt sich die um eine neue Stützstelle erweiterte Interpolationsfunktion darstellen als

$$y_\mathrm{E}(u) = y_\mathrm{L}(u) + a_4(u-u_0)(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)\,.$$

Den Koeffizienten a_4 bestimmen wir mithilfe des neuen Wertepaares $u_4 = 1$ und $y(u_4) = 1$ über

$$\begin{aligned}
1 &= y_\mathrm{E}(1) \\
&= -\frac{1}{16} + \frac{3}{8} + 2 - 3 + a_4(1+2)(1-0)(1-2)(1-4)
\end{aligned}$$

zu $a_0 = \frac{3}{16}$. Damit ergibt sich die erweiterte Interpolationsfunktion zu

$$\begin{aligned}
y_\mathrm{E}(u) &= -\frac{1}{16}u^3 + \frac{3}{8}u^2 + 2u - 3 + \frac{3}{16}u^4 - \frac{12}{16}u^3 - \frac{12}{16}u^2 + 3u \\
&= \frac{3}{16}u^4 - \frac{13}{16}u^3 - \frac{3}{8}u^2 + 5u - 3\,.
\end{aligned}$$

*(Σ: **4 Punkte**)*

c) Es sind 1 globales Interpolationspolynom bzw. 4 lokale Polynome, die einen Spline ergeben, notwendig. *(Σ: **1 Punkt**)*

d) Da die Messwerte fehlerbehaftet sind, muss hier eine Approximation (z. B. mit Hilfe eines Least-Squares-Schätzers) durchgeführt werden. *(Σ: **1 Punkt**)*

e) Für das Pixel $(2,1)$ ist der R-Kanal direkt gegeben und es fehlen die Werte des G- und B-Kanals. Diese berechnen wir aus den entsprechenden benachbarten Werten. Es ergibt sich:

$$R_{21} = S_{21} = 20\,,$$

$$G_{21} = \frac{1}{4}\big(S_{12} + S_{20} + S_{22} + S_{31}\big) = \frac{1}{4}(43 + 80 + 41 + 0) = 41 \qquad \text{und}$$

$$B_{21} = \frac{1}{4}\big(S_{10} + S_{12} + S_{30} + S_{32}\big) = \frac{1}{4}(10 + 13 + 80 + 101) = 51\,.$$

Für das Pixel $(2,2)$ ist der G-Kanal direkt gegeben und es fehlen die Werte des R- und B-Kanals. Diese berechnen wir aus den entsprechenden benachbarten Werten. Es ergibt sich:

$$R_{22} = \frac{1}{2}\big(S_{21} + S_{23}\big) = \frac{1}{2}(20 + 200) = 110\,,$$

$$G_{22} = S_{22} = 41 \qquad \text{und}$$

$$B_{22} = \frac{1}{2}\big(S_{12} + S_{32}\big) = \frac{1}{2}(13 + 101) = 57\,.$$

(Σ: 5 Punkte)

f) Das verwendete (bi)lineare Interpolationsverfahren hat die Ordnung 1. Ein Interpolationsverfahren niedrigerer Ordnung ist das Nächster-Nachbar-Verfahren. Da alle Nachbarn gleich weit entfernt sind, müsste entschieden werden, welcher Nachbar verwendet wird. ***(Σ: 2 Punkte)***

Aufgabe 2: Messsysteme (14 Punkte)

Sie haben zwei unterschiedliche Messsysteme mit den Kennlinien

$$y_1(u) = -\frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{2}u^2 + 5u + 4 \qquad \text{und} \qquad y_2(u) = -u^3 + 4u^2 + 3u + 2$$

für den Messbereich $u \in [0;2]$ gegeben. Die Kennlinien sind im gegebenen Messbereich monoton.

a) Bestimmen sie den Anzeigebereich beider Messsysteme. *(2 Punkte)*

b) Welches Messsystem wählen Sie, wenn Ihnen eine **möglichst hohe maximale Empfindlichkeit** wichtig ist? *(3 Punkte)*

c) Welches Messsystem wählen Sie, wenn Ihnen eine **möglichst konstante Empfindlichkeit** wichtig ist? **Hinweis:** Wählen Sie als Kriterium das Integral über das Quadrat der Krümmung $\kappa(u)$ und nähern Sie die Krümmung durch $\kappa(u) \approx y''(u)$. *(3 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

---

d) Wie können Sie den Fehler eines Messergebnisses, welches sich aus mehreren fehlerbehafteten Messwerten zusammensetzt, berechnen? Welche Anforderung stellen Sie dabei an die Fehler der Messwerte und warum? *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

---

e) Nennen Sie eine Methode, mit der sich **superponierende** Störgrößen einer Kennlinie unterdrücken lassen. *(1 Punkt)*

f) Nennen Sie eine Methode, mit der sich **deformierende** Störgrößen einer Kennlinie unterdrücken lassen. *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

---

g) Skizzieren Sie eine Funktion $y(u)$, die nicht als Kennlinie eines Messsystems geeignet ist und begründen Sie Ihre Wahl. *(2 Punkte)*

Lösung

a) Des Messbereich ist gegeben mit $[u_\text{a}; u_\text{e}] = [0; 2]$ und wir berechnen den Anzeigebereich zu

$$\begin{aligned}
y_{1,\text{a}} &= y_1(u_\text{a}) = 4 \\
y_{2,\text{a}} &= y_2(u_\text{a}) = 2 \\
y_{1,\text{e}} &= y_1(u_\text{e}) = -\frac{1}{6} \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 4 = 14\frac{2}{3} \\
y_{2,\text{e}} &= y_2(u_\text{e}) = -8 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 2 = 16\,.
\end{aligned}$$

*(Σ: **2 Punkte**)*

b) Die Empfindlichkeit ergibt sich jeweils als erste Ableitung aus den Kennlinien. Wir finden

$$\begin{aligned}
S_1 &= y_1'(u) = -\frac{1}{2}u^2 + u + 5 \\
S_2 &= y_2'(u) = -3u^2 + 8u + 3\,.
\end{aligned}$$

Um das jeweilige Maximum der Empfindlichkeit im Messbereich $[0; 2]$ zu finden, setzen wir die erste Ableitung der Empfindlichkeit zu null und überprüfen, ob die zweite Ableitung der Empfindlichkeit im gefundenen Extremum negativ ist:

$$\begin{aligned}
0 = S_1'(u) &= -u + 1 && \implies u_1 = 1 \\
S_1''(u) &= -1 && \implies S(u) \text{ nimmt ein Maximum für } u_1 = 1 \text{ an.}
\end{aligned}$$

Analog berechnen wir für das zweite Messsystem

$$\begin{aligned}
0 = S_2'(u) &= -6u + 8 && \implies u_2 = \frac{4}{3} \\
S_2''(u) &= -6 && \implies S(u) \text{ nimmt ein Maximum für } u_2 = \frac{4}{3} \text{ an.}
\end{aligned}$$

Nun vergleichen wir die jeweiligen maximalen Werte der Empfindlichkeit:

$$\begin{aligned}
S_{1,\text{max}} &= S(u_1) = -\frac{1}{2} + 1 + 5 = 5{,}5 \\
S_{2,\text{max}} &= S(u_2) = -3 \cdot \frac{16}{9} + 8 \cdot \frac{4}{3} + 3 = \frac{25}{3} \approx 8{,}3
\end{aligned}$$

Es ist also $S_{2,\text{max}} > S_{1,\text{max}}$ und das Messsystem 2 daher zu bevorzugen, sofern wir Wert auf eine möglichst hohe maximale Empfindlichkeit legen. *(Σ: **3 Punkte**)*

c) Dem gegebenen Hinweis folgend nähern wir die Krümmung der Kennlinien und berechnen

$$\begin{aligned}
I_1 = \int_0^2 \kappa_1^2(u)\ \mathrm{d}u \approx \int_0^2 \left(y_1''(u)\right)^2\ \mathrm{d}u \\
&= \int_0^2 (-u+1)^2\ \mathrm{d}u \\
&= \int_0^2 u^2 - 2u + 1\ \mathrm{d}u \\
&= \left[\frac{1}{3}u^3 - u^2 + u\right]_0^2 \\
&= \frac{8}{3} - 4 + 2 = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

sowie analog

$$
\begin{aligned}
I_2 = \int_0^2 \kappa_2^2(u)\ \mathrm{d}u \approx \int_0^2 \left(y_2''(u)\right)^2\ \mathrm{d}u \\
&= \int_0^2 (-6u+8)^2\ \mathrm{d}u \\
&= \int_0^2 36u^2 - 96u + 64\ \mathrm{d}u \\
&= \left[12u^3 - 48u^2 + 64u\right]_0^2 \\
&= 32\,.
\end{aligned}
$$

Es ist somit $I_1 < I_2$ und daher Messsystem 1 zu bevorzugen, sofern wir Wert auf eine möglichst konstante Empfindlichkeit legen. ***(Σ: 3 Punkte)***

d) Der Fehler kann durch das Gauß'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz ermittelt werden. Dabei wird von hinreichend kleinen Eingangsfehlern ausgegangen, damit die Näherung in der ersten Ordnung der Taylor-Reihe zulässig bleibt. ***(Σ: 2 Punkte)***

e) Superponierende Störgrößen lassen sich mit der Differenzmethode unterdrücken. ***(Σ: 1 Punkt)***

f) Deformierende Störgrößen lassen sich durch Gegenkopplung unterdrücken. ***(Σ: 1 Punkt)***

g) Eine Beispielfunktion, die nicht als Kennlinie geeignet ist, ist in Abbildung L1 gezeigt. Die Funktion ist nicht monoton (bzw. nicht injektiv). Bei einer Kennlinie würden daher Mehrdeutigkeiten entstehen. ***(Σ: 2 Punkte)***

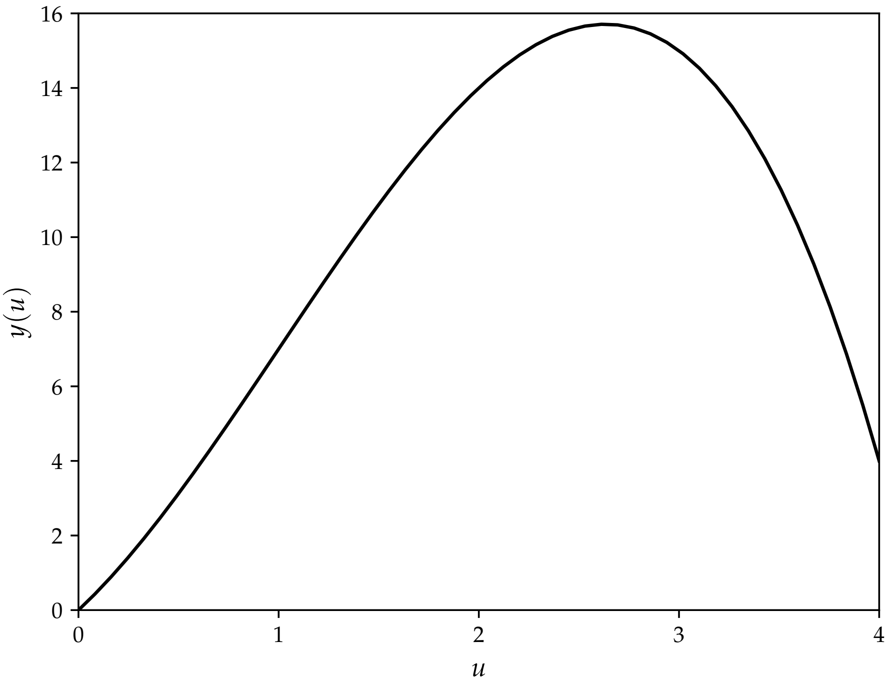

Abbildung L1: Beispielfunktion.

Aufgabe 3: Statistik, Stochastische Signale (18 Punkte)

a) Gegeben seien die Zufallsvariablen $\mathtt{x}, \mathtt{y}$. Es wird $\mathtt{z} = a\mathtt{x} - b\mathtt{y}$ für $a, b \in \mathbb{R}$ definiert. Zeigen Sie, dass

$$\sigma_{\mathtt{z}}^2 = a^2\sigma_{\mathtt{x}}^2 + b^2\sigma_{\mathtt{y}}^2 - 2ab\, C_{\mathtt{xy}}$$

gilt. *(3 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Sie haben bei einem Online-Versandhandel ein Buch bestellt. Der Händler gibt eine Lieferzeit von mindestens 1 bis maximal 6 Tagen an und behauptet, die Lieferzeit $\mathtt{t}$ sei verteilt nach der Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{\mathtt{t}}(t)$ gegeben in Abbildung 1.

b) Berechnen Sie den fehlenden Parameter y_0 der Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{\mathtt{t}}(t)$. *(2 Punkte)*

c) Wie sind der Erwartungswert $\mu_{\mathtt{t}}$ und die Standardabweichung $\sigma_{\mathtt{t}}$ der Lieferzeit $\mathtt{t}$ mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{\mathtt{t}}(t)$ definiert? *(1 Punkt)*

d) Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mu_{\mathtt{t}}$. *(1 Punkt)*

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie auf das bestellte Buch weniger als 2 Tage warten müssen? *(1 Punkt)*

f) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie auf das bestellte Buch zwischen 2 und 3 Tagen warten müssen? *(1 Punkt)*

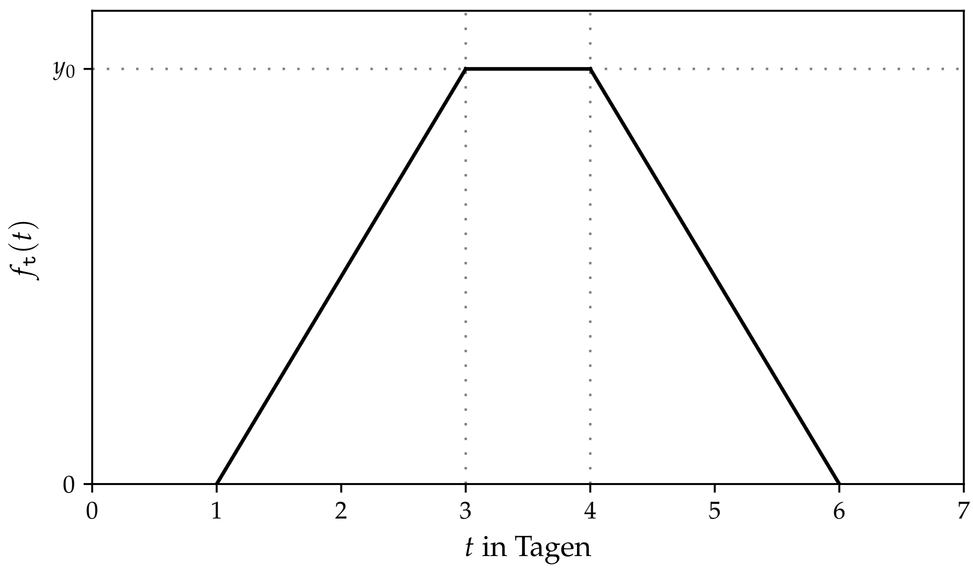

Abbildung 1: Vom Händler angegebene Wahrscheinlichkeitsdichte der Lieferzeit $\mathtt{t}$.

Die Aufgaben werden auf der nächsten Seite fortgesetzt.

Anhand von Erfahrungswerten hat der Händler eine Tabelle mit Lieferzeiten erstellt. Die Anzahl der Lieferungen im jeweiligen Zeitintervall ist in Tabelle 4 dargestellt.

g) Überprüfen Sie mit einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\,\%$, ob die Statistik der vom Händler behaupteten Wahrscheinlichkeitsverteilung $f_{\mathtt{t}}(t)$ entspricht. Welche Voraussetzungen müssen hierfür erfüllt sein? *(6 Punkte)*

h) Führen Sie die Überprüfung erneut mit einem Signifikanzniveau von $\alpha = 1\,\%$ durch. *(1 Punkt)*

i) Interpretieren Sie die Ergebnisse aus Aufgabenteil **g)** und **h)** unter Berücksichtigung der statistischen Sicherheit und des Fehlers 2. Art. *(2 Punkte)*

Hinweis: Die Quantile der χ^2-Verteilung für verschiedene Freiheitsgrade und Signifikanzniveaus sind in Tabelle 5 gegeben.

Tabelle 4: Anzahl und Lieferzeiten der ausgelieferten Bestellungen.

Lieferzeit t in Tagen	$1 \leq t < 2$	$2 \leq t < 3$	$3 \leq t < 4$	$4 \leq t < 5$	$5 \leq t \leq 6$
Anzahl der Lieferungen	18	24	42	33	3

Tabelle 5: Quantile der χ^2-Verteilung für verschiedene Freiheitsgrade m mit jeweiligem Signifikanzniveau α.

$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{1-\alpha}$			
	0,950	**0,990**	**0,995**	**0,999**
1	3,84	6,63	7,88	10,83
2	5,99	9,21	10,60	13,82
3	7,82	11,34	12,84	16,27
4	9,45	13,28	14,86	18,47
5	11,10	15,09	16,75	20,25

Lösung

a) Es ist $\mathtt{z} = a\mathtt{x} - b\mathtt{y}$ und somit $\mathtt{z}^2 = a^2\mathtt{x}^2 - 2ab\mathtt{xy} + b^2\mathtt{y}^2$. Wir benutzen die Linearität des Erwartungswertoperators und berechnen

$$\mu_{\mathtt{z}} = a\mu_{\mathtt{x}} - b\mu_{\mathtt{y}}$$
$$\mu_{\mathtt{z}}^2 = a^2\mu_{\mathtt{x}}^2 - 2ab\mu_{\mathtt{x}}\mu_{\mathtt{y}} + b^2\mu_{\mathtt{y}}^2 .$$

Damit ergibt sich, mit Verwendung der Definitionen der (Ko-)Varianz,

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathtt{z}}^2 &= \mathrm{E}\{\mathtt{z}^2\} - \mu_{\mathtt{z}}^2 \\
&= \mathrm{E}\{a^2\mathtt{x}^2 - 2ab\mathtt{xy} + b^2\mathtt{y}^2\} - \left(a^2\mu_{\mathtt{x}}^2 - 2ab\mu_{\mathtt{x}}\mu_{\mathtt{y}} + b^2\mu_{\mathtt{y}}^2\right) \\
&= a^2\left(\mathrm{E}\{\mathtt{x}^2\} - \mu_{\mathtt{x}}^2\right) + b^2\left(\mathrm{E}\{\mathtt{y}^2\} - \mu_{\mathtt{y}}^2\right) - 2ab\mathrm{E}\{\mathtt{xy}\} + 2ab\mu_{\mathtt{x}}\mu_{\mathtt{y}} \\
&= a^2\sigma_{\mathtt{x}}^2 + b^2\sigma_{\mathtt{y}}^2 - 2abC_{\mathtt{xy}} .
\end{aligned}$$

(Σ: 3 Punkte)

b) Den fehlenden Parameter berechnen wir aus der Normierungsbedingung der Wahrscheinlichkeitsdichte. Die Teilintegrale ergeben sich direkt aus den Flächeninhalten der jeweiligen rechtwinkligen Dreiecke bzw. Rechtecke:

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathtt{t}}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(3-1)y_0}{2} + (4-3)y_0 + \frac{(6-4)y_0}{2} = 3y_0 \\
\iff y_0 &= \frac{1}{3} .
\end{aligned}$$

(Σ: 2 Punkte)

c) Der Erwartungswert $\mu_{\mathtt{t}}$ und die Standardabweichung $\sigma_{\mathtt{t}}$ sind definiert als

$$\mu_{\mathtt{t}} = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_{\mathtt{t}}(t)\,\mathrm{d}t , \qquad \sigma_{\mathtt{t}} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (t-\mu_{\mathtt{t}})^2 \cdot f_{\mathtt{t}}(t)\,\mathrm{d}t} .$$

(Σ: 1 Punkt)

d) Wir erkennen, dass die gegebene Wahrscheinlichkeitsdichte symmetrisch um $t = 3{,}5$ ist. Der Mittelwert ergibt sich damit direkt zu $\mu_{\mathtt{t}} = 3{,}5$.

Detaillierte Rechnung (nicht notwendig für volle Punktzahl):

$$\begin{aligned}
\mu_{\mathtt{t}} &= \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_{\mathtt{t}}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{1}^{6} t \cdot f_{\mathtt{t}}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-2{,}5}^{2{,}5} (t+3{,}5) \cdot f_{\mathtt{t}}(t+3{,}5)\,\mathrm{d}t \\
&= \underbrace{\int_{-2{,}5}^{2{,}5} \underbrace{t \cdot \underbrace{f_{\mathtt{t}}(t+3{,}5)}_{\text{gerade}}}_{\text{ungerade}}\,\mathrm{d}t}_{=0} + 3{,}5 \underbrace{\int_{-2{,}5}^{2{,}5} \cdot f_{\mathtt{t}}(t+3{,}5)\,\mathrm{d}t}_{=1\,\text{(Norm.)}} = 3{,}5
\end{aligned}$$

(Σ: 1 Punkt)

e) Die Wahrscheinlichkeit, die Lieferung vor dem zweiten Tag zu erhalten, ergibt sich aus dem Flächeninhalt des entsprechenden rechtwinkligen Dreiecks zu

$$P(1 \leq \mathtt{t} < 2) = \int_1^2 f_{\mathtt{t}}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{y_0/2}{2} = \frac{1}{12}\,.$$

(Σ: 1 Punkt)

f) Die Wahrscheinlichkeit, die Lieferung zwischen dem zweiten und dritten Tag zu erhalten ist

$$P(2 < \mathtt{t} < 3) = P(1 \leq \mathtt{t} < 3) - P(1 \leq \mathtt{t} < 2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}\,.$$

(Σ: 1 Punkt)

g) Voraussetzungen:

- unabhängige Messwerte
- ausreichend große Stichprobe

Das Histogramm wurde in der Aufgabe in Form von Tabelle 4 vorgegeben. Folgende Bedingungen müssen erfüllt sein:

- $n_i \geq 5$
- $n_{i,\mathrm{Rand}} \geq 1$

Beide Bedingungen sind im vorgegebenen Fall erfüllt.

Die Nullhypothese H_0 lautet: Die Lieferzeit des Versandhändlers ist verteilt nach $f_{\mathtt{t}}(t)$ entsprechend Abbildung 1.

Die Größe der Stichprobe ist $N = 120$. Gegeben sind 5 Klassen mit identischer Breite $b = 1$. Die Klassenwahrscheinlichkeiten p_i ergeben sich mit der gegebenen Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{\mathtt{t}}(t)$, unter Verwendung der Ergebnisse aus Aufgabenteil **e)** und **f)**, zu

$$p_0 = p_4 = \frac{1}{12}\,, \quad p_1 = p_3 = \frac{1}{4}\,, \quad p_2 = \frac{1}{3}\,.$$

Entsprechend ergeben sich folgende Summanden für die Prüfgröße χ^2:

i	n_i	p_i	Np_i	$(n_i - Np_i)^2$	$\frac{(n_i-Np_i)^2}{Np_i}$
0	18	1/12	10	$(18-10)^2 = 64$	6,4
1	24	1/4	30	$(24-30)^2 = 36$	1,2
2	42	1/3	40	$(42-40)^2 = 4$	0,1
3	33	1/4	30	$(33-30)^2 = 9$	0,3
4	3	1/12	10	$(3-20)^2 = 49$	4,9

Die Prüfgröße χ^2 ergibt sich demnach zu:

$$\chi^2 \approx \sum_{i=0}^{4} \frac{(n_i - Np_i)^2}{Np_i} = 6{,}4 + 1{,}2 + 0{,}1 + 0{,}3 + 4{,}9 = 12{,}9\,.$$

Bei der Bestimmung der Freiheitsgrade muss berücksichtigt werden, dass $k = 5$ Klassen verwendet werden. Somit verringert sich die Anzahl der Freiheitsgrade m auf

$$m = k - 1 = 5 - 1 = 4\ .$$

Der Wert χ^2_α für vier Freiheitsgrade kann von der Tabelle 5 abgelesen werden und ergibt sich mit $1 - \alpha = 0{,}95$ zu $\chi^2_\alpha \approx 9{,}45$.

Die Hypothese H_0 wird also abgelehnt, da $\chi^2_\alpha < \chi^2$. *(Σ: **6 Punkte**)*

h) Bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}01$ ergibt sich $\chi^2_\alpha \approx 13{,}28$. Hier gilt nun $\chi^2_\alpha \geq \chi^2$ und die Hypothese H_0 wird angenommen. *(Σ: **1 Punkt**)*

i) Bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\,\%$ wurde die Hypothese H_0 abgelehnt, bei $\alpha = 1\,\%$ jedoch angenommen. Die statistische Sicherheit $P = 1 - \alpha$ (die Wahrscheinlichkeit, dass die Hypothese H_0 zutrifft und sie angenommen wird) ist im zweiten Fall also größer. Der Fehler 2. Art (die Wahrscheinlichkeit die Hypothese zu akzeptieren, wenn sie *nicht* zutrifft) nimmt jedoch auch zu. Es ist also, wie in jedem statistischen Testverfahren, zwischen diesen beiden Wahrscheinlichkeiten abzuwägen.

*(Σ: **2 Punkte**)*

Aufgabe 4: Digitalisierung (17 Punkte)

Sie haben einen Quantisierer, welcher Werte im Bereich $(-1; 1]$ äquidistant mit der Quantisierungskennlinie aus Abbildung 2 diskretisiert, gegeben.

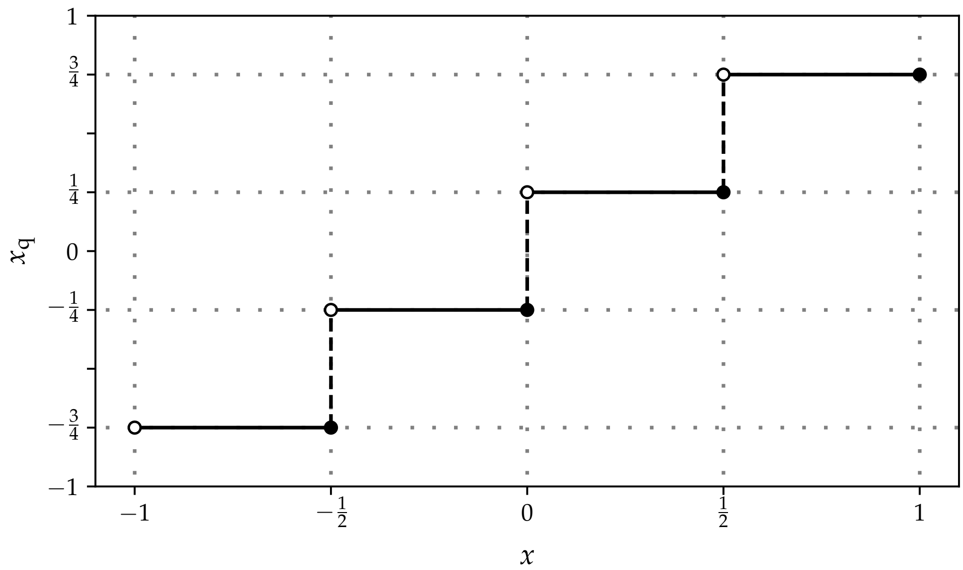

Abbildung 2: Kennlinie des verwendeten Quantisierers.

a) Bestimmen Sie die Auflösung des Quantisierers in Bit. *(1 Punkt)*

b) Bestimmen Sie das SNR in dB infolge der Quantisierung für ein Signal mit gleichverteilter Amplitudendichte. *(1 Punkt)*

Sie diskretisieren ein amplitudenkontinuierliches Signal mit dem gegebenen Quantisierer.

c) Welche Bedingung muss das Signal erfüllen, um die **Momente der Amplitudendichte** des Signals aus der Amplitudendichte des quantisierten Signals fehlerfrei rekonstruieren zu können? *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Sie haben nun das periodische Signal $x(t)$ mit Periodendauer T_0 aus Abbildung 3 (siehe nächste Seite) gegeben.

d) Zeichnen Sie die Amplitudendichte $f_x(x)$ des Signals $x(t)$. *(2 Punkte)*

Das Signal $x(t)$ durchläuft nun den Quantisierer aus Abbildung 2.

e) Zeichnen sie das quantisierte Signal $x_q(t)$. *(2 Punkte)*

f) Zeichnen Sie die Amplitudendichte des quantisierten Signals $x_q(t)$. *(2 Punkte)*

g) Überprüfen Sie, ob das Quantisierungstheorem hier erfüllt ist. *(2 Punkte)*

Hinweis: Verwenden Sie für alle Zeichnungen nur die gestellten Lösungsblätter und achten Sie auf eine korrekte Achsenbeschriftung.

Die Aufgaben werden auf der nächsten Seite fortgesetzt.

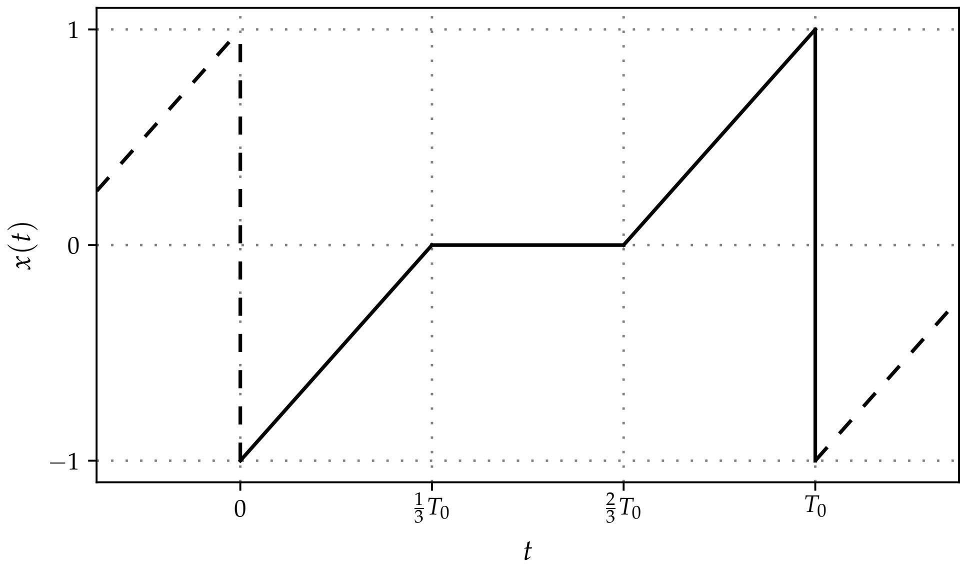

Abbildung 3: Periodisches Signal $x(t)$ mit Periodendauer T_0.

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

h) Mit welcher Methode können Sie, unabhängig vom amplitudenkontinuierlichen Eingangssignal, sicherstellen, dass das Quantisierungstheorem näherungsweise erfüllt ist? Beschreiben Sie die Methode und erklären Sie sie mathematisch. Beschreiben Sie insbesondere, wie Sie die freien Parameter, die in dieser Methode auftreten, wählen müssen. *(5 Punkte)*

Lösung

a) Der Quantisierer besitzt $2^N = 4$ Quantisierungsstufen. Die Auflösung betrğt demnach $N = 2\,\mathrm{bit}$. ***(Σ: 1 Punkt)***

b) Das SNR infolge der Quantisierung bei gleichverteilter Amplitudendichte ist gegeben durch

$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{dB}} = 6{,}02 \cdot N = 12{,}04\,\mathrm{dB}\,.$$

(Σ: 1 Punkt)

c) Die charakteristische Funktion $\Phi_{\mathrm{x}}(f)$ des Signals muss bandbegrenzt sein mit $f_{\mathrm{max}} = 1/q$. Es folgt für den gegebenen Quantisierer ($q = 1/2$):

$$\Phi_{\mathrm{x}}(f) = 0 \qquad \text{für} \qquad |f| \geq \frac{1}{q} = 2\,.$$

Die Bedingung folgt aus der abgeschwächten Form des Quantisierungstheorems. ***(Σ: 2 Punkte)***

d) Die Amplitudendichte des Signals $x(t)$ ist in Abbildung L2 gezeigt. ***(Σ: 2 Punkte)***

e) Das quantisierte Signal $x_{\mathrm{q}}(t)$ ist in L3 gezeigt. ***(Σ: 2 Punkte)***

f) Die Amplitudendichte des quantisierten Signals $x_{\mathrm{q}}(t)$ ist in Abbildung L4 gezeigt. ***(Σ: 2 Punkte)***

g) Die Amplitudendichte des Signals $x(t)$ enthält aufgrund des konstanten Signalanteils einen δ-Impuls. Die charakteristische Funktion (die inverse Fourier-Transformierte der Amplitudendichte) enthält somit nicht-bandbegrenzte Anteile. Unabhängig vom Quantisierer kann das Quantisierungstheorem für das Signal $x(t)$ nicht erfüllt werden. ***(Σ: 2 Punkte)***

h) Mit Hilfe von Dithering kann man Sorge tragen, dass das Quantisierungstheorem annähernd erfüllt ist: Zum Eingangssignal $x(t)$ wird ein Signal $d(t)$ addiert, dessen charakteristische Funktion $\Phi_{\mathtt{d}}(f)$ näherungsweise bandbegrenzt ist, beispielsweise ein Sägezahn-Signal. Die Addition der Signale $x(t)$ und $d(t)$ führt auf eine Faltung der entsprechenden Amplitudendichten und somit zu einer Multiplikation der charakteristischen Funktionen $\Phi_{\mathtt{x}}(f)$ und $\Phi_{\mathtt{d}}(f)$. Die resultierende charakteristische Funktion ist demnach näherungsweise bandbegrenzt und das Quantisierungstheorem, bei entsprechend zur Quantisierungsstufe des Quantisierers gewählten Amplitude des Dither-Signals, näherungsweise erfüllt. Die Periodendauer des Dither-Signals (bzw. allgemeiner dessen Frequenzspektrum) sollte so gewählt sein, dass keine spektralen Anteile im Frequenzbereich des Nutzsignals vorhanden sind. Das Abtasttheorem muss jedoch auch für das Dither-Signal erfüllt sein. ***(Σ: 5 Punkte)***

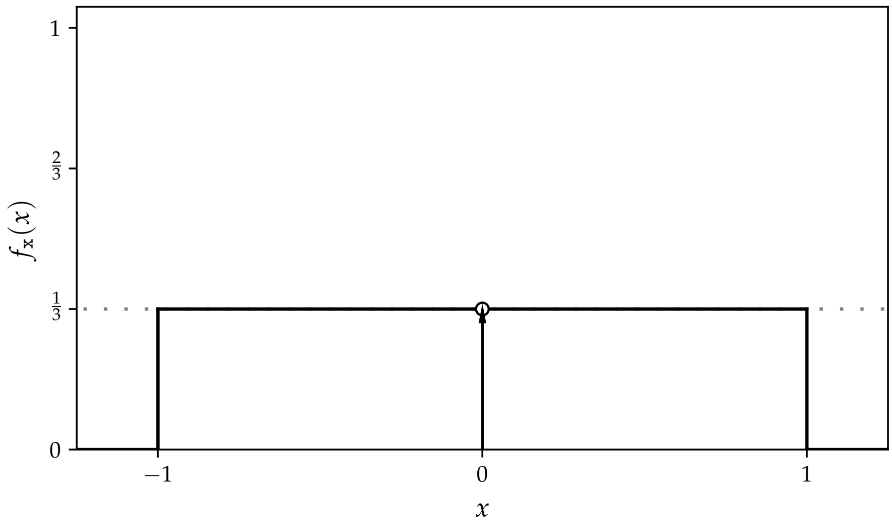

Abbildung L2: Amplitudendichte des Signals $x(t)$.

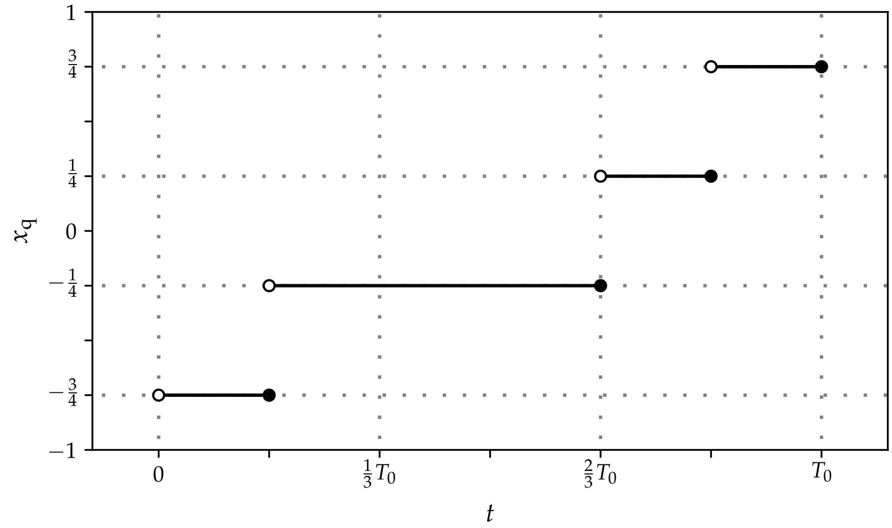

Abbildung L3: Quantisiertes Signal $x_{\mathrm{q}}(t)$.

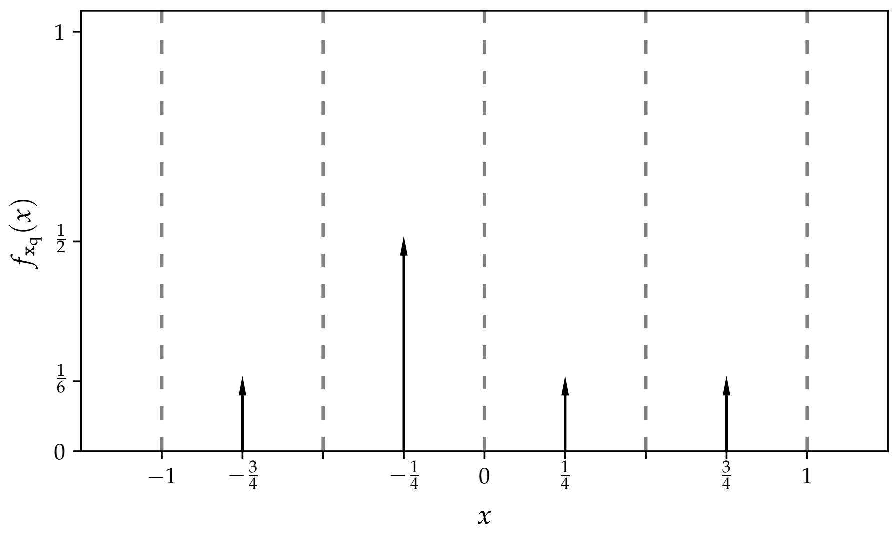

Abbildung L4: Amplitudendichte des quantisierten Signals $x_{\mathrm{q}}(t)$.