Institut für
Industrielle Informationstechnik
Karlsruher Institut für Technologie
Prof. Dr.-Ing. F. Puente León

Hertzstr. 16 / Geb. 06.35
76187 Karlsruhe
Tel.: 0721 / 608 44521
Fax: 0721 / 608 44500

Klausur im Fach
Messtechnik
16. September 2019

Musterlösung

Aufgabe 1: 14
Aufgabe 2: 16
Aufgabe 3: 18
Aufgabe 4: 18

Gesamtpunkte: 66

Aufgabe 1: Messsysteme, Kurvenanpassung (14 Punkte)

a) Nennen Sie ein Beispiel für eine Intervallskala. *(1 Punkt)*

b) Was ist der Hauptunterschied zwischen Nominal- und Ordinalskala? *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Für ein Messgerät wurden, abhängig von der Messgröße u, die Messwerte $y(u)$ laut Tabelle 1 fehlerfrei aufgezeichnet.

Tabelle 1: Aufgezeichnete Messwerte.

u	0	1	2	4
$y(u)$	3	5	1	-1

c) Interpolieren Sie die Messwerte aus Tabelle 1 mittels Newton-Verfahren. Geben Sie das Ergebnis auch in ausmultiplizierter Form an. *(4 Punkte)*

d) Bestimmen Sie den fehlenden Messwert für $u = 3$. *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Sie haben die 4×4 Pixelgrafik $g(i, j)$ laut Tabelle 2 gegeben. Die Grafik ist im Wertebereich $[0; 255]$ mit $8\,\mathrm{bit}$ quantisiert.

Tabelle 2: Gegebene Pixelgrafik $g(i, j)$.

$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$			
	0	**1**	**2**	**3**
0	50	200	175	200
1	0	110	115	30
2	25	15	50	25
3	15	95	90	20

e) Berechnen Sie den Wert $g\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{3}\right)$ mittels Nächster-Nachbar-Interpolation. *(1 Punkt)*

f) Berechnen Sie den Wert $g\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{3}\right)$ mittels bilinearer Interpolation. Die Angabe in Bruchform ist hier ausreichend. *(2 Punkte)*

g) Skalieren Sie die Grafik g auf eine Größe von 3×3 mittels bilinearer Interpolation. Die Stützstellen liegen dabei immer **zentral** zwischen vier benachbarten Pixeln. Behalten Sie die Quantisierung der Grafik bei. *(4 Punkte)*

Lösung

a) Ein Beispiel ist die Grad-Celsius-Temperaturskala. *(Σ: **1 Punkt**)*

b) Zusätzlich zu den Eigenschaften der Nominalskala weist die Ordinalskala eine natürliche Rangordnung der Merkmalsausprägungen auf. *(Σ: **1 Punkt**)*

c) Differenzschema des Newton-Verfahrens für nicht konstanten Stützstellenabstand:

u	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	3			
		2		
1	5		−3	
		−4		1
2	1		1	
		−1		
4	−1			

Der Newton-Ansatz bei 4 Stützstellen lautet:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{\mathrm{N}}(u) &= a_0 + a_1(u-u_0) + a_2(u-u_0)(u-u_1) + a_3(u-u_0)(u-u_1)(u-u_2) \qquad \text{(L1)}\\ &= \Delta^0 y + \Delta^1 y(u-u_0) + \Delta^2 y(u-u_0)(u-u_1) + \Delta^3 y(u-u_0)(u-u_1)(u-u_2)\,.\end{aligned}$$

Einsetzen der Werte aus dem Differenzenschema ergibt:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{\mathrm{N}}(u) &= 3 + 2(u-0) - 3(u-0)(u-1) + (u-0)(u-1)(u-2)\\ &= 3 + 7u - 6u^2 + u^3\,.\end{aligned} \qquad \text{(L2)}$$

*(Σ: **4 Punkte**)*

d) Für $u = 3$ folgt $\tilde{y}_{\mathrm{N}}(u = 3) = -3$. *($\Sigma$: **1 Punkt**)*

e) Der gesuchte Wert bei Nächster-Nachbar-Interpolation lautet:

$$g\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{3}\right) = g(1,0) = 0\,. \qquad \text{(L3)}$$

*(Σ: **1 Punkt**)*

f) Der gesuchte Wert bei bilinearer Interpolation lautet:

$$\begin{aligned}g\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{3}\right) &= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\,g(0,0) + \frac{1}{3}\,g(0,1)\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\,g(1,0) + \frac{1}{3}\,g(1,1)\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\cdot 50 + \frac{1}{3}\cdot 200\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 110\right)\\ &= \frac{100 + 200 + 330}{12} = \frac{315}{6} = \frac{105}{2}\end{aligned} \qquad \text{(L4)}$$

*(Σ: **2 Punkte**)*

g) Die bilineare Interpolation zentral zwischen den Stützstellen entspricht einer Mittelwertbildung der vier benachbarten Stützstellenwerte. Das Ergebnis wird aufgrund der Quantisierung auf eine ganze Zahl abgerundet. Es ergibt sich die skalierte Grafik nach Tabelle L1.

Tabelle L1: Skalierte Pixelgrafik.

i	j		
	0	**1**	**2**
0	90	150	130
1	37	72	55
2	37	62	46

*(Σ: **4 Punkte**)*

Aufgabe 2: Messsysteme (16 Punkte)

Sie haben die Messkennlinie

$$y(u) = \frac{1}{2}u^3 - \frac{9}{2}u^2 + 13u + 1$$

eines Fixpunkt-justierten Messsystems im Messbereich $[u_\mathrm{a}; u_\mathrm{e}] = [0; 2]$ gegeben.

a) Untersuchen Sie den Kennlinie im Messbereich auf Monotonie. *(3 Punkte)*

b) Bestimmen Sie den Anzeigebereich der Kennlinie. *(1 Punkt)*

c) Bestimmen Sie die ideale Kennlinie $y_\mathrm{i}(u)$. *(2 Punkte)*

d) Bestimmen Sie den relativen Kennlinienfehler **bezogen auf die Anzeigespanne**. *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Sie möchten eine Spannung u mithilfe der Differenzmethode mittels zweier gleichartiger Messsysteme y um den Arbeitspunkt u_0 messen. Sie wollen die Differenzkennlinie

$$y_\mathrm{D}(u) = y(u_0 + \Delta u) - y(u_0 - \Delta u)$$

mit $\Delta u = u - u_0$ erhalten. Hierzu stehen Ihnen die Blöcke nach Abbildung 1 zur Verfügung.

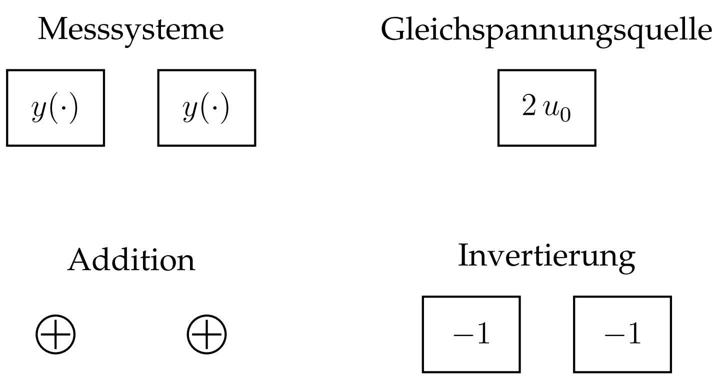

Abbildung 1: Zur Verfügung stehende Blöcke.

e) Verschalten Sie die gegebenen Blöcke so, dass Sie die Kennlinie $y_\mathrm{D}(u)$ erhalten. Begründen Sie Ihre Lösung durch eine kurze Rechnung. *(3 Punkte)*

Die Aufgaben werden auf der nächsten Seite fortgesetzt.

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

f) Nennen Sie 3 Methoden, um die Kennlinie eines Messsystems zu linearisieren. *(3 Punkte)*

g) Nennen Sie eine Methode, mit der sich **superponierende** Störgrößen einer Kennlinie unterdrücken lassen. *(1 Punkt)*

h) Nennen Sie eine Methode, mit der sich **deformierende** Störgrößen einer Kennlinie unterdrücken lassen. *(1 Punkt)*

Lösung

a) Die Empfindlichkeit der Kennlinie ist

$$S(u) = \frac{3}{2}u^2 - 9u + 13 \tag{L5}$$

mit den Nullstellen

$$0 = S(u) = \frac{3}{2}u^2 - 9u + 13 \quad \Longrightarrow \quad u_{1/2} = 3 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\,. \tag{L6}$$

Diese Nullstellen liegen außerhalb des Messbereichs. Die Kennlinie hat im Messbereich also weder Extrema noch einen Wendepunkt und ist daher streng monoton.
(Σ: 3 Punkte)

b) Der Anzeigebereich ergibt sich zu $[y_\mathrm{a}; y_\mathrm{e}] = [y(u_\mathrm{a}); y(u_\mathrm{e})] = [1; 13]\,.$ ***(Σ: 1 Punkt)***

c) Die ideale Empfindlichkeit berechnet sich zu

$$S_\mathrm{i} = \frac{y_\mathrm{e} - y_\mathrm{a}}{u_\mathrm{e} - u_\mathrm{a}} = \frac{13 - 1}{2} = 6\,. \tag{L7}$$

Die ideale Kennlinie ist demnach gegeben durch

$$y_\mathrm{i}(u) = S_\mathrm{i}(u - u_\mathrm{a}) + y_\mathrm{a} = 6u + 1\,. \tag{L8}$$

(Σ: 2 Punkte)

d) Mithilfe der idealen Kennlinie bestimmen wir

$$F_\mathrm{r}(u) = \frac{y(u) - y_\mathrm{i}(u)}{y_\mathrm{i}(u) - y_\mathrm{a}} = \frac{\frac{1}{2}u^3 - \frac{9}{2}u^2 + 13u + 1 - 6u - 1}{6u} = \frac{1}{12}u^2 - \frac{3}{4}u + \frac{7}{6}\,. \tag{L9}$$

(Σ: 2 Punkte)

e) Mit $\Delta u = u - u_0$ folgt

$$y_\mathrm{D}(u) = y(u_0{+}\Delta u){-}y(u_0{-}\Delta u) = y(u_0{+}u{-}u_0){-}y(u_0{-}u{+}u_0) = y(u){-}y(2u_0{-}u)\,. \tag{L10}$$

Die gegebenen Blöcke werden also laut Abbildung L1 verschaltet, um die gewünschte Kennlinie zu erhalten. ***(Σ: 3 Punkte)***

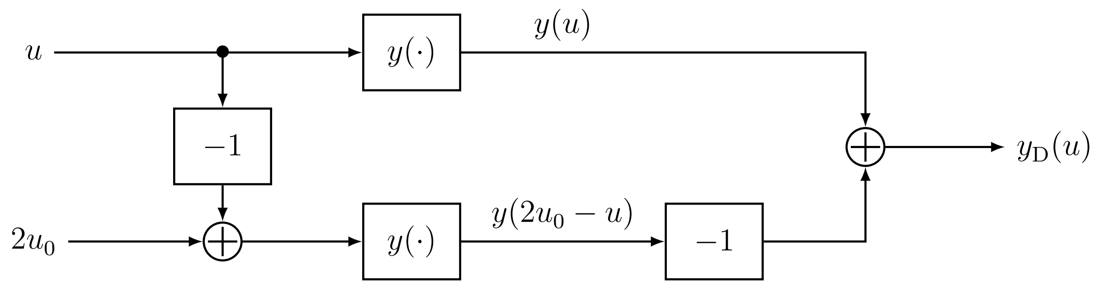

Abbildung L1: Verschaltung der gegebenen Blöcke zur Differenzkennlinie.

f) Wähle 3 aus:

- Herabsetzen des Messbereichs
- Hintereinanderschalten zweier nichtlinearer Glieder
- Wahl des günstigen Messbereichs
- Differenzmethode
- Gegenkopplung

*(Σ: **3 Punkte**)*

g) Superponierende Störgrößen lassen sich mit der Differenzmethode unterdrücken.

*(Σ: **1 Punkt**)*

h) Deformierende Störgrößen lassen sich durch Gegenkopplung unterdrücken.

*(Σ: **1 Punkt**)*

Aufgabe 3: Statistik, Stochastische Signale, LTI-Systeme (18 Punkte)

Sie wollen die Pünktlichkeit von Bussen an einer Haltestelle untersuchen. Hierzu wählen Sie die Zufallsgröße $\mathtt{x}$, welche die Abweichung des Abfahrtszeitpunktes vom fahrplanmäßigen Zeitpunkt bezeichnet. Sie haben für $N = 11$ unabhängige Busfahrten die Stichprobenwerte x_i laut Tabelle 3 gemessen. Sie nehmen an, dass $\mathtt{x}$ normalverteilt sei.

Tabelle 3: Stichprobenwerte der Abweichung des Abfahrtszeitpunktes vom Fahrplan.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i in min	1	−3	4	7	−2	13	2	−1	−5	5	1

a) Berechnen Sie den Stichprobenmittelwert $\hat{\mathtt{x}}$ und die Stichprobenvarianz $\mathtt{s}_{\mathtt{x}}^2$. *(2 Punkte)*

b) Wie verändert sich die Varianz $\sigma_{\hat{\mathtt{x}}}^2$ des Stichprobenmittelwertes bei wachsendem Stichprobenumfang N? Welche Eigenschaft des Stichprobenmittelwertes spiegelt sich in diesem Verhalten wider? *(2 Punkte)*

c) Berechnen Sie die Unsicherheit $u_{\hat{\mathtt{x}}}$ des Stichprobenmittelwerts mit einer statistischen Sicherheit von $90\,\%$. *(3 Punkte)*

Hinweis: Verwenden Sie die Näherung $\sqrt{26/11} \approx 1{,}5$.

d) Berechnen Sie **näherungsweise** die Wahrscheinlichkeit, dass der Bus die Haltestelle **vor** der geplanten Abfahrtszeit verlässt. *(3 Punkte)*

Hinweis: Verwenden Sie die Näherung $\sqrt{26} \approx 5$.

Hinweis: Ihnen stehen für die Berechnungen die Werte aus Tabelle 4 und Tabelle 5 zur Verfügung.

Tabelle 4: Ausgewählte Werte der Verteilungsfunktion $F_{\mathtt{z}}(z)$ einer standardnormalverteilten Zufallsgröße $\mathtt{z} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

z	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,5	2,0
$F_{\mathtt{z}}(z)$	0,5	0,54	0,58	0,62	0,66	0,69	0,73	0,76	0,79	0,82	0,84	0,93	0,97

Tabelle 5: Ausgewählte Werte der Wahrscheinlichkeit $P_n(c) = P(|\mathtt{t}| \leq c)$ einer t-verteilten Zufallsgröße $\mathtt{t}$ mit n Freiheitsgraden.

c	$P_{10}(c)$	$P_{11}(c)$	$P_{12}(c)$
1,5	0,8355	0,8382	0,8405
1,6	0,8593	0,8621	0,8644
1,7	0,8800	0,8828	0,8851
1,8	0,8979	0,9007	0,9030
1,9	0,9134	0,9161	0,9183
2,0	0,9266	0,9292	0,9313

Die Aufgaben werden auf der nächsten Seite fortgesetzt.

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Sie haben das System laut Abbildung 2 mit unbekannter Impulsantwort $g(t)$ gegeben. Hierbei bezeichnet $\mathtt{x}(t)$ einen ergodischen stochastischen Prozess mit Autoleistungsdichtespektrum $S_{\mathtt{xx}}(f) = a^2$ mit $a > 0$.

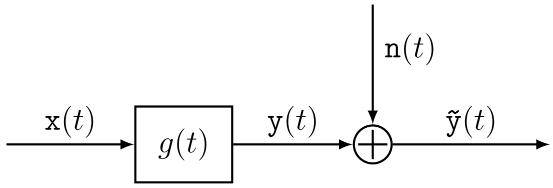

Abbildung 2: Modell des gegebenen Systems.

e) Welche Anforderungen stellen Sie an $\mathtt{n}(t)$, damit

$$S_{\tilde{\mathtt{y}}\tilde{\mathtt{y}}}(f) = S_{\mathtt{yy}}(f) + S_{\mathtt{nn}}(f)$$

in jedem Fall erfüllt ist? *(2 Punkte)*

Nehmen Sie an, die Anforderungen aus **e)** seien erfüllt und $\mathtt{n}(t)$ habe das Autoleistungsdichtespektrum

$$S_{\mathtt{nn}}(f) = \left[1 + (2\pi f/a)^2\right]^{-1}.$$

Am Ausgang messen Sie die Autokorrelationsfunktion

$$r_{\tilde{\mathtt{y}}\tilde{\mathtt{y}}}(\tau) = a\,\mathrm{e}^{-a|\tau|}.$$

f) Berechnen Sie $S_{\tilde{\mathtt{y}}\tilde{\mathtt{y}}}(f)$. *(3 Punkte)*

g) Berechnen Sie das Betragsquadrat $|G(f)|^2$ der Übertragungsfunktion. *(2 Punkte)*

h) Was müssten Sie messen, um auch die Phase der Übertragungsfunktion bestimmen zu können? *(1 Punkt)*

Lösung

a) Der Stichprobenmittelwert ergibt sich mit den gegebenen Werten zu

$$\hat{\mathtt{x}} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} \mathtt{x}_i = 2\,\mathrm{min}\,. \tag{L11}$$

Die Stichprobenvarianz berechnet sich bei geschätztem Mittelwert für unabhängige Zufallsgrößen zu

$$\mathtt{s}_{\mathtt{x}}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=0}^{N-1}(\mathtt{x_i} - \hat{\mathtt{x}})^2 = 26\,\mathrm{min}^2\,. \tag{L12}$$

*(Σ: **2 Punkte**)*

b) Die Varianz $\sigma_{\hat{\mathtt{x}}}^2$ des Stichprobenmittelwertes ist proportional zu $1/N$, nimmt also bei wachsendem Stichprobenumfang ab. Für $N \to \infty$ geht die Varianz gegen null. Da der Stichprobenmittelwert erwartungstreu ist, ist der Stichprobenmittelwert also ein *konsistenter* Schätzer des wahren Mittelwerts $\mu_{\mathtt{x}}$. *(Σ: **2 Punkte**)*

c) Gesucht ist die Messunsicherheit $u_{\hat{\mathtt{x}}} = c \cdot \sigma_{\hat{\mathtt{x}}} = c \cdot \frac{\sigma_{\mathtt{x}}}{\sqrt{N}}$, so dass

$$P\left(\mu_{\mathtt{x}} - u_{\hat{\mathtt{x}}} \leq \hat{\mathtt{x}} \leq \mu_{\mathtt{x}} + u_{\hat{\mathtt{x}}}\right) = 0.9 \tag{L13}$$

mit dem wahren Mittelwert $\mu_{\mathtt{x}}$ gilt. Da die tatsächliche Varianz $\sigma_{\mathtt{x}}^2$ unbekannt sind, verwenden wir den bereits berechneten Schätzwert. Die Transformation

$$\mathtt{t} = \frac{\hat{\mathtt{x}} - \mu_{\mathtt{x}}}{\mathtt{s}_{\mathtt{x}}/\sqrt{N}} \tag{L14}$$

ergibt eine t-verteilte Zufallsgröße mit $n = N - 1$ Freiheitsgraden, da x normalverteilt ist. Äquivalent zu (L13) suchen wir also den Wert c, für den gilt

$$P_n(c) = P\left(|t| \leq c\right) = 0.9\,. \tag{L15}$$

Aus der gegebenen Tabelle 5 lesen wir für $n = N - 1 = 10$ den Wert $c = 1{,}8$ für eine Konfidenz von 90 % ab. Die Messunsicherheit ergibt sich mit dem zuvor berechneten Stichprobenmittelwert zu

$$\begin{aligned} u_{\hat{\mathtt{x}}} &\approx c \cdot \sqrt{\mathtt{s}_{\mathtt{x}}^2/N} \\ &= 1{,}8 \cdot \sqrt{\frac{26}{11}}\,\mathrm{min} \\ &\approx 1{,}8 \cdot 1{,}5\,\mathrm{min} = 2{,}7\,\mathrm{min}\,. \end{aligned} \tag{L16}$$

*(Σ: **3 Punkte**)*

d) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P\left(\mathtt{x} < 0\right)$. Die Transformation

$$\mathtt{z} = \frac{\mathtt{x} - \mu_{\mathtt{x}}}{\sigma_{\mathtt{x}}} \tag{L17}$$

führt auf eine Standardnormalverteilung. Mit den zuvor geschätzten Werten berechnen wir

$$\begin{aligned} P\left(\mathtt{x} < 0\right) &= P(\sigma_{\mathtt{x}}\,\mathtt{z} + \mu_{\mathtt{x}} < 0) \\ &= P(\mathtt{z} < -\mu_{\mathtt{x}}/\sigma_{\mathtt{x}}) \\ &\approx P(\mathtt{z} < -2/\sqrt{26}) \\ &\approx P(\mathtt{z} < -0{,}4) \\ &= 1 - P(\mathtt{z} < 0{,}4) = 1 - 0{,}66 = 0{,}34\,, \end{aligned} \tag{L18}$$

wobei der Wert $P(\mathtt{z} < 0{,}4) = F_{\mathtt{z}}(0{,}4)$ aus Tabelle 4 abgelesen werden kann. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Bus die Haltestelle vor der planmäßigen Abfahrtszeit verlässt, beträgt demnach etwa 34 %. ***(Σ: 3 Punkte)***

e) Es müssen $\mathtt{y}(t)$ bzw. $\mathtt{x}(t)$ und $\mathtt{n}(t)$ unkorreliert sein. Darüber hinaus muss $\mathtt{n}(t)$ mittelwertfrei sein, da der Mittelwert von $\mathtt{y}(t)$ nicht bekannt ist und ungleich null sein kann. ***(Σ: 2 Punkte)***

f) Das Autoleistungsdichtespektrum ergibt sich aus der Fouriertransformierten der Autokorrelationsfunktion

$$\begin{aligned} S_{\tilde{\mathtt{y}}\tilde{\mathtt{y}}}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} r_{\tilde{\mathtt{y}}\tilde{\mathtt{y}}}(\tau)\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{j}f\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= a\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a|\tau|}\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{j}f\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= a\left[\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\tau(a-2\pi\mathrm{j}f)}\,\mathrm{d}\tau + \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\tau(a+2\pi\mathrm{j}f)}\,\mathrm{d}\tau\right] \\ &= a\left[\left.\frac{\mathrm{e}^{\tau(a-2\pi\mathrm{j}f)}}{a-2\pi\mathrm{j}f}\right|_{-\infty}^{0} - \left.\frac{\mathrm{e}^{-\tau(a+2\pi\mathrm{j}f)}}{a+2\pi\mathrm{j}f}\right|_{0}^{\infty}\right] \\ &= a\left[\frac{1}{a-2\pi\mathrm{j}f} + \frac{1}{a+2\pi\mathrm{j}f}\right] \\ &= \frac{2a^2}{a^2+(2\pi f)^2} = \frac{2}{1+(2\pi f/a)^2} \end{aligned} \tag{L19}$$

(Σ: 3 Punkte)

g) Es gilt

$$S_{\tilde{\mathtt{y}}\tilde{\mathtt{y}}}(f) = S_{\mathtt{xx}}(f)\,|G(f)|^2 + S_{\mathtt{nn}}(f)\,. \tag{L20}$$

Mit den gegebenen Werten finden wir

$$\begin{aligned} |G(f)|^2 &= \frac{S_{\tilde{\mathtt{y}}\tilde{\mathtt{y}}}(f) - S_{\mathtt{nn}}(f)}{S_{\mathtt{xx}}(f)} \\ &= \frac{1}{a^2}\cdot\left[\frac{2}{1+(2\pi f/a)^2} - \frac{1}{1+(2\pi f/a)^2}\right] = \frac{1}{a^2+(2\pi f)^2}\,. \end{aligned} \tag{L21}$$

(Σ: 2 Punkte)

h) Um auch die Phase (und somit $G(f)$ vollständig) bestimmen zu können, kann hier das Kreuzleistungsdichtespektrum $S_{\tilde{\mathtt{y}}\mathtt{x}}$ bestimmt werden. Die Übertragungsfunktion bestimmt sich dann über

$$S_{\tilde{\mathtt{y}}\mathtt{x}} = G(f)S_{\mathtt{xx}}\,. \tag{L22}$$

(Σ: 1 Punkt)

Aufgabe 4: Digitalisierung (18 Punkte)

a) Was ist der Leckeffekt und wie kann man ihn reduzieren? *(2 Punkte)*

b) Was muss für Signale gelten, die als Dither-Signal geeignet sind? Nennen Sie ein Beispiel. *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Sie haben ein Signal $\mathtt{x}(t)$ mit Mittelwert $\mu_{\mathtt{x}}$ und Varianz $\sigma_{\mathtt{x}}^2$ gegeben. Das Signal wird mittels eines Quantisierers mit Quantisierungsstufen der Breite q quantisiert.

c) Welche Voraussetzung muss erfüllt sein, damit das lineare Quantisierungsmodell angewandt werden kann? *(1 Punkt)*

d) Unter Annahme, dass die in **c)** genannte Voraussetzung für $\mathtt{x}(t)$ erfüllt sei, berechnen Sie den Mittelwert und die Varianz des quantisierten Signals $\mathtt{x}_{\mathtt{q}}(t)$. *(3 Punkte)*

e) Erklären Sie, wie Sie mit Hilfe der Berechnung aus **d)** die Breite der Quantisierungsstufen eines unbekannten, äquidistant quantisierenden Quantisierers in der Praxis bestimmen können. *(3 Punkte)*

Der Quantisierer quantisiere Werte im Bereich $\pm 2\,\mathrm{V}$ mit $q = 0{,}25\,\mathrm{V}$.

f) Bestimmen Sie die Auflösung des Quantisierers in Bit. *(1 Punkt)*

g) Bestimmen Sie das SNR in dB in Folge der Quantisierung unter der Annahme, dass $\mathtt{x}(t)$ Sinus-förmig ist. *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Sie möchten ein mit $f_{\mathrm{g}} = 20\,\mathrm{kHz}$ bandbegrenztes Musiksignal digitalisieren. Das Signal besitze eine gleichverteilte Amplitudendichte.

h) Welche Abtastfrequenz f_{A} wählen Sie? Begründen Sie Ihre Antwort. *(1 Punkt)*

Sie fordern nun für die gesamte A/D-Umsetzung ein SNR von 54 dB.

i) Welche Anforderungen müssen Sie an die Auflösung N des Quantisierers stellen, um das gewünschte SNR zu erreichen? *(1 Punkt)*

j) Welche Anforderungen ergeben sich an die zeitliche Genauigkeit der Abtastung, wenn der durch Jitter entstehende Fehler höchstens so groß wie das Quantisierungsrauschen sein soll? Berechnen Sie dazu den maximalen Abtastzeitfehler $\tau_{\max}$. Der Abtastzeitfehler sei im Interval $[-\tau_{\max}; \tau_{\max}]$ gleichverteilt.

Hinweis: Sie müssen den exakten Wert nicht berechnen. Geben Sie das Ergebnis nach Einsetzen der Werte in Bruchform an. *(3 Punkte)*

Lösung

a) Der Leckeffekt bezeichnet den Fehler (bzw. das Auftreten unerwünschter Frequenzen), welcher infolge der Verwendung eines zeitlich begrenzten Beobachtungsfensters entsteht. Der Leckeffekt lässt sich durch Anwenden angepasster Fensterfunktionen (z. B. Hann-Fenster, Gauß-Fenster o. Ä.) reduzieren. *(Σ: **2 Punkte**)*

b) Geeignet sind Signale, deren charakteristische Funktion (näherungsweise) bandbegrenzt ist. Beispielsweise sind Sägezahn-Signale oder Gaußsches weißes Rauschen geeignet. *(Σ: **2 Punkte**)*

c) Das Quantisierungstheorem muss erfüllt sein. *(Σ: **1 Punkt**)*

d) Ist das Quantisierungstheorem erfüllt, kann das lineare Quantisierungsmodell verwendet werden. Es gilt also

$$\mathtt{x}_\mathrm{q}(t) = \mathtt{x}(t) + \mathtt{e}_\mathrm{q}(t)\,, \tag{L23}$$

wobei $\mathtt{e}_\mathrm{q}(t) \sim \mathcal{U}(0, q)$ mit $\mu_{\mathtt{e}_\mathrm{q}} = 0$ und $\sigma^2_{\mathtt{e}_\mathrm{q}} = q^2/12$. Damit folgt

$$\mu_{\mathtt{x}_\mathrm{q}} = \mathrm{E}\{\mathtt{x}_\mathrm{q}(t)\} = \mathrm{E}\{\mathtt{x}(t) + \mathtt{e}_\mathrm{q}(t)\} = \mathrm{E}\{\mathtt{x}(t)\} = \mu_\mathtt{x} \tag{L24}$$

und

$$\begin{aligned} \sigma^2_{\mathtt{x}_\mathrm{q}} + \mu^2_{\mathtt{x}_\mathrm{q}} &= \mathrm{E}\{\mathtt{x}^2_\mathrm{q}(t)\} = \mathrm{E}\{\mathtt{x}^2(t)\} + \mathrm{E}\{\mathtt{e}^2_\mathrm{q}(t)\} = \sigma^2_\mathtt{x} + \mu^2_\mathtt{x} + \sigma^2_{\mathtt{e}_\mathrm{q}} + \mu_{\mathtt{e}_\mathrm{q}} \\ \iff \sigma^2_{\mathtt{x}_\mathrm{q}} &= \sigma^2_\mathtt{x} + \frac{q^2}{12}\,, \end{aligned} \tag{L25}$$

da $\mathtt{x}$ und $\mathtt{e}_\mathrm{q}$ stochastisch unabhängig sind. *(Σ: **3 Punkte**)*

e) Mithilfe eines Signalgenerators wird ein Signal mit bekanntem Mittelwert und Varianz, beispielsweise ein mittelwertfreies Rauschsignal, erzeugt. Die Varianz des quantisierten Signals kann dann mit mehreren Messungen über die Stichprobenvarianz geschätzt werden. Aus der Differenz der geschätzten und der bekannten Varianz kann dann die Quantisierungsstufe

$$\hat{q} = \sqrt{12\left(s^2_{\mathtt{x}_\mathrm{q}} - \sigma^2_\mathtt{x}\right)}$$

geschätzt werden. *(Σ: **3 Punkte**)*

f) Die Quantisierer besitzt $\frac{4\,\mathrm{V}}{0{,}25\,\mathrm{V}} = 16$ Stufen und damit eine Auflösung von $N = 4\,\mathrm{Bit}$.

g) Das SNR infolge der Quantisierung für ein Sinus-förmiges Signal ist gegeben durch

$$\mathrm{SNR}_\mathrm{q} = (6{,}02\,N + 1{,}76)\,\mathrm{dB} = (6{,}02 \cdot 4 + 1{,}76)\,\mathrm{dB} \approx 26\,\mathrm{dB}\,. \tag{L26}$$

h) Um Aliasing zu vermeiden, wählen wir eine Abtastfrequenz von $f_\mathrm{A} = 40\,\mathrm{kHz}$.

i) Für Signale mit gleichverteilter Amplitudendichte gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{SNR}_\mathrm{q}\big|_\mathrm{dB} &= 6{,}02\,N > 54 \\ &\implies N \geq 9\,\mathrm{Bit}\,. \end{aligned} \tag{L27}$$

*(Σ: **1 Punkt**)*

j) Für den zeitlichen Abtastfehlers soll gelten

$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{Jitter}} = \frac{2}{\left(2\pi f_{\mathrm{g}}\, \sigma_\tau\right)^2} \geq \mathrm{SNR}_{\mathrm{q}} = 2^{2N}\,, \tag{L28}$$

woraus folgt

$$\sigma_\tau^2 \leq \frac{2}{2^{2N}(2\pi f_{\mathrm{g}})^2} = \frac{2}{2^{2(N+1)}(\pi f_{\mathrm{g}})^2} \tag{L29}$$

Da der Fehler als gleichverteilt angenommen wird, gilt weiterhin

$$\sigma_\tau^2 = \frac{(2\,\tau_{\max})^2}{12} = \frac{\tau_{\max}^2}{3}\,. \tag{L30}$$

Mit $N = 9$ und $f_{\mathrm{g}} = 2 \cdot 10^3\,\mathrm{Hz}$ berechnet sich der maximal zulässige zeitliche Abtastfehler zu

$$\tau_{\max} = \sqrt{3}\,\sigma_\tau \leq \frac{\sqrt{6}}{2^{N+1} \cdot \pi \cdot f_{\mathrm{g}}} = \frac{\sqrt{6}}{2^{11} \cdot 10^3 \cdot \pi}\,\mathrm{s}\,. \tag{L31}$$

*(Σ: **3 Punkte**)*