Institut für
Industrielle Informationstechnik
Karlsruher Institut für Technologie
Prof. Dr.-Ing. M. Heizmann

Hertzstr. 16 / Geb. 06.35
76187 Karlsruhe

Klausur im Fach
Messtechnik
9. September 2020

Musterlösung

Aufgabe 1: 16
Aufgabe 2: 16
Aufgabe 3: 18
Aufgabe 4: 17

Gesamtpunkte: 67

Aufgabe 1: Kurvenanpassung (16 Punkte)

Um die Federkonstante κ einer Feder zu messen, verwendet man das Hook'sche Gesetz

$$\kappa = F_\mathrm{g}/\Delta x\,,$$

wobei Δx die Auslenkung von der Ruheposition und F_g die Gewichtskraft einer bekannten Masse beschreibt. Mit der bestimmten Federkonstanten lässt sich anschließend wiederum die Gewichtskraft einer unbekannten Masse über die Auslenkung bestimmen. Mithilfe von Gewichtsnormalen haben Sie die Auslenkungen nach Tabelle 1 gemessen.

Tabelle 1: Gemessene Auslenkungen Δx bei verschiedenen Gewichtskräften F_g.

F_g in N	1	2	4
Δx in cm	5	11	19

a) Interpolieren Sie die Messwerte aus Tabelle 1 durch Newton-Polynome. Geben Sie das Ergebnis auch in ausmultiplizierter Form an. *(3 Punkte)*

b) Welche Auslenkung Δx ergibt sich für $F_\mathrm{g} = 0\,\mathrm{N}$ bei Verwendung der berechneten Kennlinie? Was sagt dies über die Gültigkeit der Kennlinie aus? *(1 Punkt)*

c) Welches Vorgehen wäre hier unter Berücksichtigung des physikalischen Kontextes sinnvoller gewesen, um die Federkonstante κ aus den Messwerten nach Tabelle 1 zu ermitteln? *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Sie haben zwei Signale $y_1(t)$ und $y_2(t)$ mit den Abtastraten $f_1 = 1\,\mathrm{Hz}$ und $f_2 = 2\,\mathrm{Hz}$ gemessen. Um die Signale gemeinsam verarbeiten zu können, möchten Sie die Abtastrate von y_1 an die von y_2 mittels Interpolation anpassen (sog. Upsampling). Die Messwerte von y_1 und y_2 sind in Tabelle 2 gegeben.

Tabelle 2: Aufgezeichnete Signale y_1 und y_2.

t in s	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$y_1(t)$ in V	3,0		5,0		5,5		5,5		5,7
$y_2(t)$ in V	1,0	2,0	2,5	0,4	1,2	0,1	5,9	0,1	5,9

d) Bestimmen Sie die upgesampleten Signalwerte von y_1 mittels linearer Interpolation. *(2 Punkte)*

e) Welches weitere einfachere Interpolationsverfahren könnten Sie hier auch verwenden? Auf welches Problem würden Sie stoßen, wenn Sie dieses Verfahren anwenden? *(2 Punkte)*

Die Aufgaben werden auf der Rückseite fortgesetzt.

Anstatt die Werte zu interpolieren, könnten Sie auch eine lineare Regression der Messwerte von y_1 durchführen.

f) Ohne die Regression durchzuführen, beschreiben sie qualitativ den Unterschied der Regressionsgeraden bei Minimierung der Fehlerquadrate im Vergleich zur Minimierung der absoluten Fehler? Begründen Sie Ihre Antwort unter Berücksichtigung der Messwerte von y_1. *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Sie haben die Messwerte und Interpolationsfunktionen gemäß Abbildung 1 gegeben.

g) Bei welcher Funktion handelt es sich um eine Interpolation durch ein globales Polynom, bei welcher um eine Interpolation durch kubischen Splines? Begründen Sie Ihre Antwort. *(2 Punkte)*

h) Wie viele Basisfunktionen muss ein Modell, mithilfe dessen Sie die Messwerte mittels Approximation annähern, aufweisen? Begründen Sie Ihre Antwort. *(2 Punkte)*

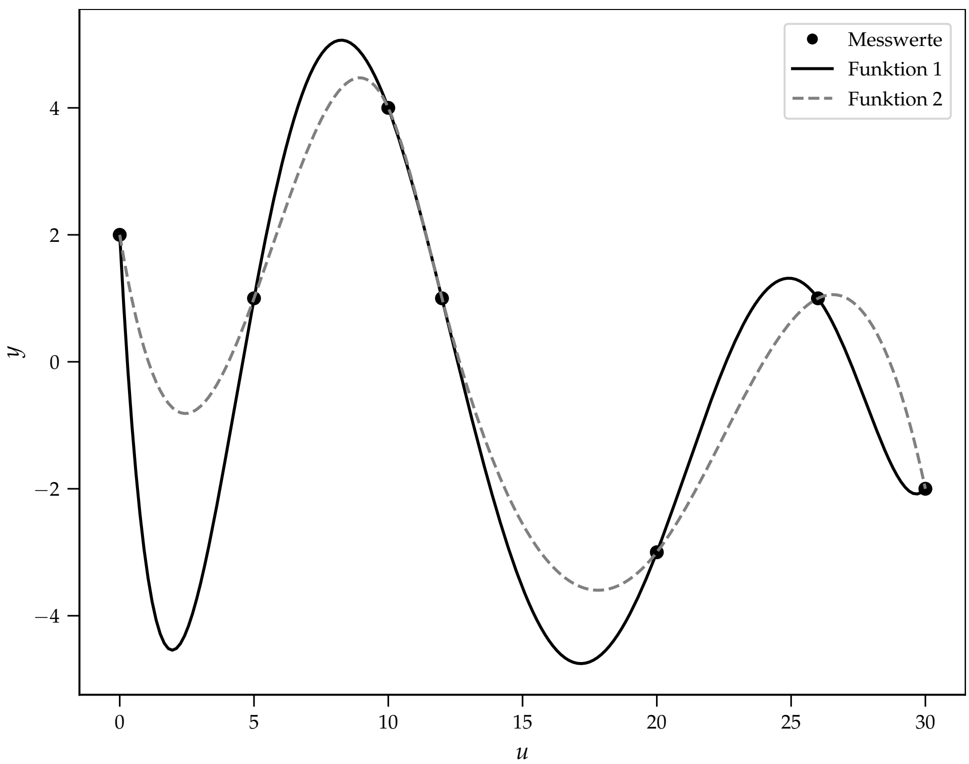

Abbildung 1: Gegebene Messwerte und Interpolationsfunktionen.

Lösung

a) Das Differenzschema des Newton-Verfahrens für nicht konstanten Stützstellenabstand ergibt:

F_g	Δx	$\Delta(\Delta x)$	$\Delta^2(\Delta x)$
1	5		
		6	
2	11		-2/3
		4	
4	19		

Einsetzen der Werte in den Newton-Ansatz ergibt:

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta x}(F_\mathrm{g}) &= a_0 + a_1\big(F_\mathrm{g} - F_{\mathrm{g},0}\big) + a_2\big(F_\mathrm{g} - F_{\mathrm{g},0}\big)\big(F_\mathrm{g} - F_{\mathrm{g},1}\big)\\ &= 5 + 6\big(F_\mathrm{g} - 1\big) - \frac{2}{3}\big(F_\mathrm{g} - 1\big)\big(F_\mathrm{g} - 2\big)\\ &= 5 + 6F_\mathrm{g} - 6 - \frac{2}{3}\big(F_\mathrm{g}^2 - 3F_\mathrm{g} + 2\big)\\ &= -\frac{2}{3}F_\mathrm{g}^2 + 8F_\mathrm{g} - \frac{7}{3}\,. \end{aligned} \tag{L1}$$

(Σ: 3 Punkte)

b) Für $F_\mathrm{g} = 0\,\mathrm{N}$ ergibt sich eine Auslenkung von $\widetilde{\Delta x} = -7/3\,\mathrm{cm}$. Dies ist unphysikalisch, da hier die Ruheposition $\Delta x = 0\,\mathrm{cm}$ zu erwarten ist. Negative Auslenkungen sind nicht möglich. Die Kennlinie verliert hier ihre Gültigkeit. ***(Σ: 1 Punkt)***

c) Das Hook'sche Gesetz formuliert einen linearen Zusammenhang zwischen Gewichtskraft und Auslenkung

$$\Delta x = \frac{1}{\kappa}F_\mathrm{g}\,, \tag{L2}$$

was als Modellansatz für eine Regression (Approximation) verwendet werden sollte. In diesem Fall ergibt die Steigung einer mittels linearer Regression der Messwerte ermittelten Geraden den Wert $1/\kappa$. ***(Σ: 2 Punkte)***

d) Da die fehlenden Stützstellen genau mittig zwischen den gegebenen Stützstellen liegen, ist die lineare Interpolation identisch zur Mittelwertbildung benachbarter Werte. Es ergeben sich also die upgesampleten Werte nach Tabelle L1. ***(Σ: 2 Punkte)***

e) Die lineare Interpolation hat die Ordnung 1. Ein Interpolationsverfahren niedrigerer Ordnung ist das Nächster-Nachbar-Verfahren. Da die zu interpolierenden Werte genau mittig zwischen den Stützstellen liegen, und damit alle Nachbarn gleich weit entfernt sind, müsste entschieden werden, welcher Nachbar zur Interpolation verwendet wird. ***(Σ: 2 Punkte)***

Tabelle L1: Mittels linearer Interpolation upgesamplete Messwerte.

t in s	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$y_1(t)$ in V	3,0	**4,0**	5,0	**5,25**	5,5	**5,5**	5,5	**5,6**	5,7

f) Bei der Minimierung der Fehlerquadrate werden Ausreißer, d.h. stark von der Regressionsgerade abweichende Werte, stärker berücksichtigt als bei der Minimierung der absoluten Fehler. Im Fall von y_1 kann $y_1(0)$ als ein solcher Ausreißer, bezogen auf die lineare Regression, bezeichnet werden. Die Regressionsgerade bei der Minimierung der absoluten Fehler wird demnach eine geringere Steigung und eine größere Ordinate aufweisen als die Regressionsgerade bei der Minimierung der Fehlerquadrate.

(Σ: 2 Punkte)

g) Die Überschwinger der Funktion 1 sind charakteristisch für ein globales Interpolationspolynom. Bei der Interpolation durch kubische Splines wird die Krümmungsenergie der Interpolierenden minimiert. Offensichtlich ist diese bei Funktion 2 geringer als bei Funktion 1. Es handelt sich demnach bei Funktion 1 um eine Interpolation durch ein globales Polynom, bei Funktion 2 um eine Interpolation durch (kubische) Splines.

(Σ: 2 Punkte)

h) Im Falle einer Approximation mit orthogonalen Basisfunktionen ist die Anzahl der Funktionen (also die Modellordnung) unabhängig von den gegebenen Messwerten. Das Modell wird i.d.R. basierend auf Hintergrundwissen gewählt. Um eine Approximation durchzuführen, bedarf es mindestens eines zu optimierenden Modellparameters (d.h. mindestens eine Basisfunktion). ***(Σ: 2 Punkte)***

Aufgabe 2: Messsysteme (16 Punkte)

Eine Messkennlinie wird durch die Gleichung

$$y(u) = 3\sin\left(\frac{\pi u}{4}\right) + 4$$

im Messbereich $u \in [0;2]$ vorgegeben.

a) Bestimmen Sie die ideale Empfindlichkeit und die ideale Kennlinie. *(2 Punkte)*

b) Wo liegt der maximale Kennlinienfehler?
Hinweis: Verwenden Sie die Annäherung: $\arccos\left(\frac{2}{\pi}\right) \approx \frac{5}{18}\pi$. *(2 Punkte)*

Jetzt wird die Kennlinie durch Reihenschaltung eines zweiten nichtlinearen Glieds y_2 linearisiert. Die resultierende Kennlinie ist nun $\tilde{y}(u) = y_2(y(u))$.

c) Was ist das ideale zweite Glied y_2, damit $\tilde{y}$ in der gesamte Übertragungsfunktion proportional zu u und die resultierende Empfindlichkeit gleich 1 ist? *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Sie wollen das Wasservolumen V (in ml) in einem Behälter vermessen. Da das Wasservolumen nicht direkt messbar ist, wählen Sie die Höhe h (in cm) des Wassers als Messgröße. Ihnen ist die Beziehung zwischen der Höhe h und der Fläche des Querschnitts des Behälters A (in cm^2) im Messbereich $h \in [0;10]$ bekannt:

$$A(h) = h^2 - 6h + 109\,.$$

d) Bestimmen Sie die Kennlinie $V(h)$ und ihre Empfindlichkeit. Es sei $V(h=0) = 0$. *(2 Punkte)*

e) Bestimmen Sie den günstigsten Messbereich $[h_\mathrm{a}; h_\mathrm{a} + 2]$ für $V(h)$. *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Um ein nichtlineares Glied mit Empfindlichkeit $S(u)$ zu linearisieren, werden zwei lineare Glieder mit konstanter Empfindlichkeit S_0 und S_1 jeweils vor und nach $S(u)$ hinzugefügt.

f) Welche Eigenschaften müssen S_0 und S_1 haben? Begründen Sie Ihre Angabe. *(2 Punkte)*

Die Aufgaben werden auf der Rückseite fortgesetzt.

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Um die temperaturabhängige Offsetschwankungen von Operationsverstärkern zu unterdrücken werden häufig Zerhackerverstärker verwendet. Beim Zerhackerverstärker wird das Eingangssignal zweimal moduliert.

g) Welches Modulationssignal wird in der Regel verwendet? Wird das Eingangssignal unverzerrt übertragen, wenn das Modulationssignal bei den zwei Modulationen nicht synchronisiert ist? Begründen Sie Ihre Angabe. *(2 Punkte)*

Ein mehrstufiger Verstärker besteht aus mehreren hintereinander geschalteten Operationsverstärker mit gleicher Verstärkung. Aufgrund der Kosten kann nur ein Zerhackerverstärker eingesetzt werden.

h) An welcher Stelle muss der Zerhackerverstärker eingebaut werden, damit der durch Offsetschwankungen verursachte Fehler minimiert wird? Begründen Sie Ihre Angabe. *(2 Punkte)*

Lösung

a) Es gilt gemäß der Definition der idealen Empfindlichkeit:

$$S_i = \frac{y_e - y_a}{u_e - u_a} = \frac{y(2) - y(0)}{2 - 0} = \frac{3 + 4 - 0 - 4}{2} = \frac{3}{2}\,. \tag{L3}$$

Damit folgt die ideale Kennlinie:

$$y_i(u) = S_i(u - u_a) + y_a = \frac{3}{2}(u - 0) + 4 = \frac{3}{2}u + 4\,. \tag{L4}$$

(Σ: 2 Punkte)

b) Der Kennlinienfehler ist definiert als:

$$F(u) = y - y_i = 3\sin\left(\frac{\pi u}{4}\right) - \frac{3}{2}u\,. \tag{L5}$$

Um das Maximum zu ermitteln, muss die erste Ableitung des Kennlinienfehler berechnet werden.

$$\frac{\mathrm{d}F(u)}{\mathrm{d}u} = \frac{3\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi u}{4}\right) - \frac{3}{2} \stackrel{!}{=} 0\,. \tag{L6}$$

Damit erhält man:

$$u = \frac{4}{\pi}\arccos\left(\frac{2}{\pi}\right)\,. \tag{L7}$$

Gemäß der Annäherung $\arccos(\frac{2}{\pi}) \approx \frac{5}{18}\pi$ erhält man:

$$u \approx \frac{5}{18}\pi\frac{4}{\pi} = \frac{10}{9}\,. \tag{L8}$$

Da der Kennlinienfehler am Messanfang und am Messende null ist und nur einen Extremwert hat, ist der Kennlinienfehler an der Stelle $u = 10/9$ maximal.

(Σ: 2 Punkte)

c) Gesucht ist diejenige Funktion y_2, so dass gilt:

$$\tilde{y}(u) = y_2\big(y(u)\big) = u\,. \tag{L9}$$

Es ist also y_2 die Umkehrfunktion von y:

$$y_2(y) = \frac{4}{\pi}\arcsin\left(\frac{y-4}{3}\right)\,, \tag{L10}$$

mit $y \in [4; 7]$.

(Σ: 2 Punkte)

d) Gemäß der physikalische Bedeutung der Größen folgt der Ansatz:

$$V(h) = \int_0^h A(\tilde{h})\ \mathrm{d}\tilde{h}\,. \tag{L11}$$

Mit $V(0) = 0$ wird die Integrationskonstante null und man erhält:

$$V(h) = \int_0^h (\tilde{h}^2 - 6\tilde{h} + 109)\ \mathrm{d}\tilde{h} = \frac{1}{3}h^3 - 3h^2 + 109h\,. \tag{L12}$$

Die Empfindlichkeit ist gleich die Fläche $A(h)$:

$$S(h) = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\int_0^h A(\tilde{h})\ \mathrm{d}\tilde{h} = A(h) = h^2 - 6h + 109\,. \tag{L13}$$

(Σ: 2 Punkte)

e) Zuerst wird der Wendepunkt der Kennlinie untersucht:

$$\frac{\mathrm{d}S(h)}{\mathrm{d}h} = 2h - 6 \stackrel{!}{=} 0\,. \tag{L14}$$

Damit erhält man $h = 3 \in [0; 10]$. Da ein Wendepunkt vorliegt, verwendet man das Kriterium I aus der Vorlesung.

$$\begin{aligned} 0 &= S(h_a + d) - S(h_a) \\ &= (h_a + 2)^2 - 6(h_a + 2) - (h_a)^2 + 6u_a \\ &= 4h_a - 8\,. \end{aligned} \tag{L15}$$

Damit erhält man $u_a = 2$. Der entsprechende Messbereich ist $[2; 4]$. Da $[2; 4] \subset [0; 10]$, ist $[2; 4]$ der gesuchte günstigste Messbereich. *(Σ: **2 Punkte**)*

f) Das Verfahren entspricht dem Herabsetzen des Messbereichs. S_0 und S_1 müssen die folgenden Eigenschaften besitzen: $S_0 \ll 1$, $S_1 \gg 1$ und $S_0 \cdot S_1 = 1$.

Wegen $S_0 \ll 1$ arbeitet das nichtlinieare Glied $S(u)$ am Anfang des Messbereichs. Um das Glied S_0 zu kompensieren, folgt die Bedingung $S_0 \cdot S_1 = 1$. *(Σ: **2 Punkte**)*

g) Beim Zerhackerverstäcker wird ein Rechtecksignal zur Modulation verwendet. Das Eingangssignal wird verfälscht, wenn das Modulationssignal bei zwei Modulationen nicht synchronisiert wird. Beim Rechtecksignal $p(t)$ gilt: $p(t) \cdot p(t) = 1$. Damit wird das Eingangssignal trotz zweier Modulationen unverzerrt übertragen. Bei nicht synchronisierten Modulationssignalen entsteht eine Phasendifferenz τ zwischen den zwei Modulationen. Damit ist $p(t) \cdot p(t + \tau)$ nicht konstant und das Eingangssignal wird durch die Verstärkung verfälscht. *(Σ: **2 Punkte**)*

h) Die Offsetschwankung gilt als superponierende Störgröße. In Messketten hängt der Einfluss der superponierenden Störgröße von ihrer Position ab. Die Störung aus dem ersten Verstärker wird von allen Verstärkern vergrößert und hat den größten Einfluss. Da der Zerhackervertärker die Offsetschwankung unterdrücken kann, muss er als der erster Verstärker benutzt werden. *(Σ: **2 Punkte**)*

Aufgabe 3: Statistik und Stochastische Signale (18 Punkte)

a) Was versteht man unter strenger Ergodizität? *(1 Punkt)*

b) Wozu dient das Wiener-Filter? Bezüglich welches Gütemaßes ist das Wiener-Filter optimal? *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Es seien x, y zwei Zufallsvariablen. Die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{\mathrm{x}}(x)$ der Zufallsgröße x ist durch

$$f_{\mathrm{x}}(x) = \begin{cases} \sqrt{R^2 - x^2} & , \quad x \in [-R; R] \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

mit $R > 0$ gegeben. Die diskrete Zufallsgröße y habe die Verteilungsfunktion

$$F_{\mathrm{y}}(y) = \begin{cases} 0 & , \quad y < 2 \\ 0{,}3 & , \quad 2 \leq y < 5 \\ 1 & , \quad \text{sonst} \end{cases} .$$

c) Bestimmen Sie die Konstante R. *(1 Punkt)*

d) Es sei z = x + y. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{\mathrm{z}}(z)$. *(3 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Sie haben als Stichprobe zufällig 10 Brötchen in einer Bäckerei gekauft. Die Bäckerei hat Ihnen versprochen, dass das Gewicht m der Brötchen voneinander unabhängig und normalverteilt mit dem Mittelwert 101,2 g ist. Die Gewichte der gekauften Brötchen ist in Tabelle 3 gegeben.

Tabelle 3: Gemessene Gewichte der gekauften Brötchen.

Index i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m_i in g	99	98	103	98	102	98	100	99	103	100

e) Bestimmen Sie den Stichprobenmittelwert und Stichprobenvarianz. *(2 Punkte)*

f) Führen Sie den Signifikanztest für den Stichprobenmittelwert mit der statistischen Sicherheit von 95% durch. *(3 Punkte)*

Hinweis: Die Funktionswerte von $P_n(c)$ sind in Tabelle 4 geben. Verwenden Sie die Näherung $\sqrt{10} \approx 3{,}2$.

Die Aufgaben werden auf der Rückseite fortgesetzt.

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Es sei x ein stationäres Signal mit der Autokorrelationsfunktion

$$r_{\mathrm{xx}}(\tau) = \frac{1}{1+\tau^2} \, .$$

g) Bestimmen Sie die Signalleistung P_{x} des Signals. *(1 Punkt)*

h) Bestimmen Sie den Mittelwert μ_{x} des Signals. *(1 Punkt)*

i) Bestimmen Sie die Varianz σ_{x}^2 des Signals. *(1 Punkt)*

j) Bestimmen Sie das Leistungsdichtespektrum $S_{\mathrm{xx}}(f)$.
Hinweis: Verwenden Sie die Korrespondenz

$$\mathrm{e}^{-a|t|} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2} \, , \quad a > 0$$

und die Symmetrie der Fouriertransformation.

(2 Punkte)

k) Handelt es sich bei x um farbiges Rauschen? Begründen Sie Ihre Antwort. *(1 Punkt)*

Tabelle 4: Ausgewählte Werte der Wahrscheinlichkeit $P_n(c) = P(|\mathtt{t}| \leq c)$ einer t-verteilten Zufallsgröße t mit n Freiheitsgraden.

c	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$
1,5	0,8280	0,8321	0,8354
1,6	0,8517	0,8559	0,8591
1,7	0,8724	0,8767	0,8800
1,8	0,8904	0,8946	0,8979
1,9	0,9060	0,9101	0,9134
2,0	0,9195	0,9234	0,9266
2,1	0,9311	0,9349	0,9379
2,2	0,9410	0,9447	0,9476
2,3	0,9495	0,9530	0,9557
2,4	0,9568	0,9601	0,9627
2,5	0,9631	0,9661	0,9686

Lösung

a) Ein Zufallsprozess heißt (streng) ergodisch, wenn die Zeitmittelwerte aller Momente einer beliebigen Musterfunktion mit den Scharmittelwerten des Prozesses übereinstimmen *(Σ: 1 Punkt)*

b) Das Wiener-Filter dient zur Signalschätzung. Die Aufgabe ist die möglichst gute Rekonstruktion eines Signals, das durch die Dynamik eines nichtidealen (Mess-)Systems und überlagerte Störungen verfälscht wurde. Das Wiener-Filter wird bezüglich der Leistung des Fehlersignals (Differenz zwischen dem Eingangssignal $u(t)$ und dem rekonstruierten Signal $\hat{u}(t)$) optimiert:

$$P_e = \mathbb{E}\{e^2(t)\} = \mathbb{E}\{(\hat{u}(t) - u(t))^2\}\,. \tag{L16}$$

(Σ: 2 Punkte)

c) Aufgrund der Normierung der Wahrscheinlichkeitsdichte muss gelten:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathrm{x}}(x)\;\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{R^2 - x^2}\;\mathrm{d}x = \frac{\pi R^2}{2}\,. \tag{L17}$$

Damit erhält man $R = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. *(Σ: 1 Punkt)*

d) Die Wahrscheinlichkeitsdichte der diskreten Verteilung wird mithilfe von Dirac-Impulsen dargestellt:

$$f_{\mathrm{y}}(y) = 0{,}3 \cdot \delta(y-2) + 0{,}7 \cdot \delta(y-5)\,. \tag{L18}$$

Für die Zufallsvariable z = x + y erhält man die Wahrscheinlichkeitsdichte durch Faltung der Dichten f_{x} und f_{y}:

$$f_{\mathrm{z}}(z) = f_{\mathrm{x}}(z) * f_{\mathrm{y}}(z) = (0{,}3 \cdot \delta(z-2) + 0{,}7 \cdot \delta(z-5)) * f_{\mathrm{x}}(x) \tag{L19}$$

$$= \begin{cases} 0{,}3 \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi} - (z-2)^2} & , \quad z \in [2 - \sqrt{\frac{2}{\pi}}; 2 + \sqrt{\frac{2}{\pi}}] \\ 0{,}7 \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi} - (z-5)^2} & , \quad z \in [5 - \sqrt{\frac{2}{\pi}}; 5 + \sqrt{\frac{2}{\pi}}] \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} \tag{L20}$$

(Σ: 3 Punkte)

e) Um die Rechnung zu vereinfachen, kann man die Offsets der Messwerte bezüglich eines Referenzwerts (z.B. 100) zuerst ermitteln.

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \frac{1}{10}\sum_{i=0}^{9} m_i \\ &= \frac{1}{10}(100 - 1 + 100 - 2 + 100 + 3 + 100 - 2 + 100 + 2 + 100 - 2 \\ &\quad + 100 + 100 - 1 + 100 + 3 + 100)\,\mathrm{g} \\ &= \frac{1}{10}(1000 - 1 - 2 + 3 - 2 + 2 - 2 - 1 + 3)\,\mathrm{g} = 100\,\mathrm{g}\,. \end{aligned}$$

Für die Varianz ergibt sich:

$$s_x^2 = \frac{1}{10-1}\sum_{i=0}^{9}(m_i - \hat{x})^2 = \frac{1}{9}(1 + 4 + 9 + 4 + 4 + 4 + 1 + 9)\,\mathrm{g}^2 = \frac{40}{9}\mathrm{g}^2 = 4\,\mathrm{g}^2\,.$$

(Σ: 2 Punkte)

f)
- Prüfung der Voraussetzung. Die Unabhängigkeit der Messwerte und Normalverteilung der Grundgesamtheit mit Erwartungswert $\mu_0 = 101{,}2$ wird vorgegeben. Der Stichprobenmittelwerts $\hat{x}$ und die Stichprobenvarianz s_x^2 wurden in der vorigen Teilaufgabe berechnet.
- Aufstellen der Hypothesen: $H_0 : \hat{x} = \mu_0$, $H_1 : \hat{x} \neq \mu_0$
- Festlegen der Prüfgröße c:

  $$c = \frac{|\hat{\mathrm{x}} - \mu_0|}{s_x}\sqrt{n} = \frac{|100 - 101{,}2|}{2}\sqrt{10} \approx 1{,}9 \tag{L21}$$

  ist t-verteilt mit $n - 1$ Freiheitsgraden.
- Festlegen des Signifikanzniveau α bzw. der statistischen Sicherheit $1 - \alpha$. Die statistische Sicherheit $1 - \alpha = 95\%$ ist vorgegeben.
- Bestimmen der Wahrscheinlichkeit der Prüfgröße $P(c)$. Mit 10 Stichproben betragen die Freiheitsgrade 9. Damit ergibt sich $P(c) = P_9(1{,}9) = 0{,}9101$.
- Testentscheidung: Da $P(c) < 1 - \alpha$, wird die Nullhypothese angenommen.

*(Σ: **3 Punkte**)*

g) $P_{\mathrm{x}} = r_{\mathrm{xx}}(0) = 1$ *(Σ: **1 Punkt**)*

h) Gemäß der Eigenschaft der Korrelationsfunktion gilt:

$$\mu_{\mathrm{x}}^2 = \lim_{\tau\to\infty} r_{\mathrm{xx}}(\tau) = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{1+\tau^2} = 0\,. \tag{L22}$$

Damit erhält man $\mu_{\mathrm{x}} = 0$. *(Σ: **1 Punkt**)*

i) Gemäß der Eigenschaft der Korrelationsfunktion gilt:

$$\mu_{\mathrm{x}}^2 + \sigma_{\mathrm{x}}^2 = r_{\mathrm{xx}}(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1 \tag{L23}$$

Da $\mu = 0$, ergibt sich $\sigma_{\mathrm{x}}^2 = 1$. *(Σ: **1 Punkt**)*

j) Mit der gegebenen Fourierkorrespondenz

$$\mathrm{e}^{-a|t|} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2} = \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{1 + (2\pi f/a)^2}$$

wählen wir $a = 2\pi$ und erhalten

$$\mathrm{e}^{-2\pi|t|} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+f^2}\,.$$

Mit der Symmetrie $Y(f) \circ\!\!-\!\!\bullet\, y(-t)$ folgt das Leistungsdichtespektrum

$$S_{\mathrm{xx}}(f) = \mathcal{F}\{r_{\mathrm{xx}}(\tau)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{1+\tau^2}\right\} = \pi\mathrm{e}^{-2\pi|f|}\,. \tag{L24}$$

*(Σ: **2 Punkte**)*

k) Beim Signal x handelt sich um farbiges Rauschen, da das Leistungsdichtespektrum $S_{\mathrm{xx}}(f) = \pi e^{-2\pi|f|}$ zu hohen Frequenzen hin abfällt. *(Σ: **1 Punkt**)*

Aufgabe 4: Digitalisierung (17 Punkte)

a) Was versteht man unter Aliasing? *(1 Punkt)*

b) Nennen Sie zwei Möglichkeiten, um Aliasing für bandbegrenzte bzw. nicht bandbegrenzte Signale zu vermeiden und erklären Sie diese kurz. *(2 Punkte)*

c) Was kann bei Einhaltung des Quantisierungstheorems fehlerfrei aus dem quantisierten Signal rekonstruiert werden? *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Sie wollen das analoge Signal eines Messgerätes mit 8 Bit quantisieren. Der Ausgabebereich des Quantisierers liegt zwischen 0 V und 8 V.

d) Geben Sie die Anzahl und Breite der Quantisierungsstufen an. Gehen Sie hierbei von einer äquidistanten Quantisierungskennlinie aus. *(1 Punkt)*

e) Zeichnen Sie die Amplitudendichte eines Signals, für welches diese äquidistante Quantisierung optimal ist. Achten Sie auf eine korrekte Achsenbeschriftung. *(2 Punkte)*

Sie stellen fest, dass das zu quantisierende Signal Sinus-förmig ist.

f) Berechnen Sie das SNR in dB in Folge der Quantisierung für dieses Signal. Gehen Sie davon aus, dass das Signal den gesamten Wertebereich [0 V; 8 V] durchläuft. *(1 Punkt)*

g) Wie müssten Sie die Quantisierungskennlinie ändern, um weiterhin eine optimale Quantisierung zu garantieren, ohne dabei die Auflösung des Quantisierers zu ändern? Begründen Sie ohne explizite Rechnung. *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Sie haben ein mit $f_g = \sqrt{15}\,\mathrm{kHz}$ bandbegrenztes Signal gegeben. Sie tasten das Signal mit einem maximalen zeitlichen Abtastfehler $\tau_{\max} = \frac{10^{-6}}{\pi}\,\mathrm{s}$ ab.

Sie nehmen an, dass der zeitliche Abtastfehler τ im Intervall $[-\tau_{\max}; \tau_{\max}]$ gleichverteilt sei.

h) Berechnen Sie das SNR in dB in Folge von Jitter. *(2 Punkte)*

Die Aufgaben werden auf der Rückseite fortgesetzt.

Der zeitliche Abtastfehler τ sei nun verteilt mit der Wahrscheinlichkeitsdichte nach Abbildung 2 mit unverändertem $\tau_{\max}$.

i) Bestimmen Sie den fehlenden Wert h. *(1 Punkt)*

j) Bestimmen Sie die Varianz σ_τ^2. Drücken Sie die Varianz über die entsprechende Varianz des gleichverteilten Abtastfehlers $\sigma_{\tau,\mathrm{gv}}^2$ aus. *(3 Punkte)*

k) Berechnen Sie erneut das SNR in dB in Folge von Jitter. *(1 Punkt)*

Hinweis: Verwenden Sie die Näherung $\log_{10} 2 \approx 0{,}3$.

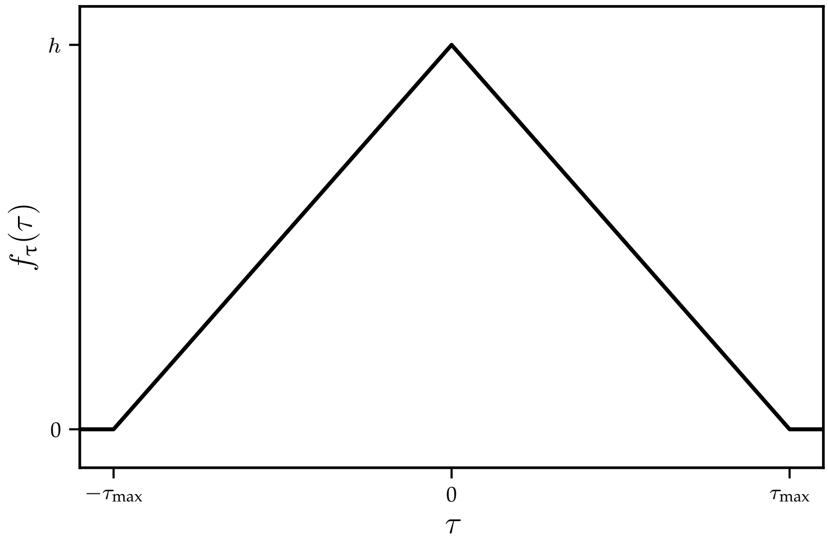

Abbildung 2: Wahrscheinlichkeitsdichte des zeitlichen Abtastfehlers τ.

Lösung

a) Unter Aliasing versteht man Fehler beim Abtasten (zeitkontinuierlicher) Signale, die aufgrund spektraler Überlappungen bei Verletzung des Abtasttheorems entstehen.
*(Σ: **1 Punkt**)*

b) Bei bandbegrenzten Signalen muss die Abtastfrequenz größer gewählt werden als das Doppelte der höchsten im Signal vorkommenden Frequenz. Dies garantiert die Einhaltung des Abtasttheorems. Bei nicht bandbegrenzten Signalen kann ein Tiefpassfilter (Anti-Aliasing-Filter) verwendet werden, um das Signal mit der Nyquist Frequenz bandzubegrenzen. Damit ist das abzutastende Signal bandbegrenzt und die Einhaltung des Abtasttheorems wird gewährleistet. *(Σ: **2 Punkte**)*

c) Bei Einhaltung des Quantisierungstheorems kann die Amplitudendichte des ursprünglichen Signals aus der Amplitudendichte des quantisierten Signals rekonstruiert werden. *(Σ: **1 Punkt**)*

d) Die Anzahl der Quantisierungsstufen ergibt sich zu $N = 2^8 = 256$. Daraus folgt für die Breite der Quantisierungsstufen

$$q = \frac{8\,\mathrm{V}}{256} = \frac{1}{32}\,\mathrm{V}\,. \tag{L25}$$

*(Σ: **1 Punkt**)*

e) Eine äquidistante Quantisierung ist für Signale mit (auf dem gesamten zu quantisierenden Intervall) gleichverteilter Amplitudendichte optimal. Die Amplitudendichte ist in Abbildung L1 gegeben. *(Σ: **2 Punkte**)*

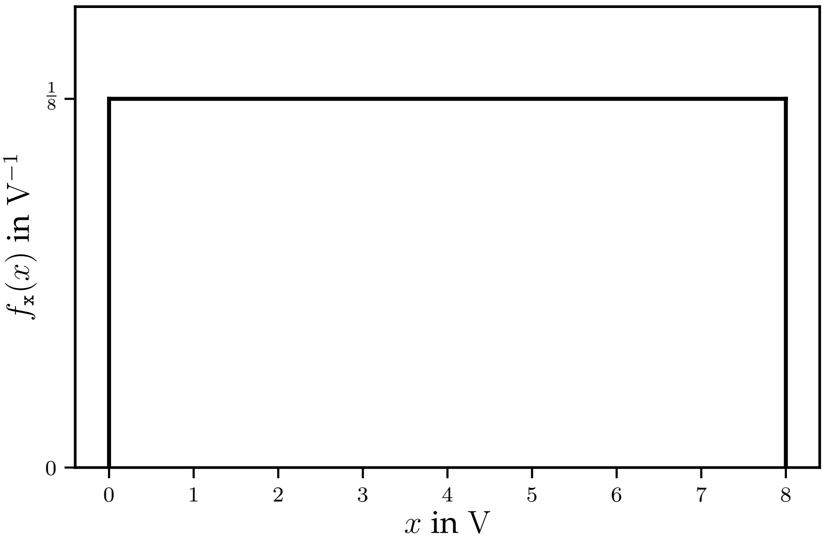

Abbildung L1: Eine im Intervall [0 V; 8 V] gleichverteilte Amplitudendichte.

f) Für Sinus-förmige Signale gilt

$$\mathrm{SNR_q} = (6{,}02 \cdot N + 1{,}76)\,\mathrm{dB} \approx 50\,\mathrm{dB}\,. \tag{L26}$$

*(Σ: **1 Punkt**)*

g) Die Stufen am Rand müssten kleiner werden und die in der Mitte breiter. Ursache hierfür ist die U-förmige Amplitudendichte Sinus-förmiger Funktionen. Somit sind die Amplituden am Rand wahrscheinlicher als in der Mitte des Ausgangsbereichs und sollten daher unter Verwendung von kleineren Stufen quantisiert werden.

*(Σ: **2 Punkte**)*

h) Es ist $f_\mathrm{g}^2 = 15 \cdot 10^6\,\mathrm{s}^{-2}$ und $\tau_\mathrm{max}^2 = \frac{10^{-12}}{\pi^2}\,\mathrm{s}^2$. Für die Varianz des gleichverteilten zeitlichen Abtastfehler τ gilt

$$\sigma_\tau^2 = \frac{\left(2\,\tau_\mathrm{max}\right)^2}{12} = \frac{\tau_\mathrm{max}^2}{3}\,. \tag{L27}$$

Damit folgt für das SNR in Folge von Jitter

$$\mathrm{SNR} = \frac{2}{\left(2\pi f_\mathrm{g}\sigma_\tau\right)^2} = \frac{1}{2\pi^2 f_\mathrm{g}^2\sigma_\tau^2} \tag{L28}$$

$$= \frac{3\,\pi^2}{2\,\pi^2 \cdot 15 \cdot 10^6 \cdot 10^{-12}} \tag{L29}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} \tag{L30}$$

$$= 10^5 = 10 \cdot \lg 10^5\,\mathrm{dB} = 50\,\mathrm{dB}\,. \tag{L31}$$

*(Σ: **2 Punkte**)*

i) Aus der Normierungsbedingung der Wahrscheinlichkeitsdichte ergibt sich

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_\tau(\tau)\;\mathrm{d}\tau = h \cdot \tau_\mathrm{max} \implies h = 1/\tau_\mathrm{max} = \pi \cdot 10^6\,\mathrm{s}^{-1}\,. \tag{L32}$$

*(Σ: **1 Punkt**)*

j) Da die Wahrscheinlichkeitsdichte eine gerade Funktion ist, gilt $\mu_\tau = 0$. Damit berechnet sich die Varianz zu

$$\sigma_\tau^2 = \mathrm{E}\{\tau^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 f_\tau(\tau)\;\mathrm{d}\tau \tag{L33}$$

$$= 2\int_0^{\tau_\mathrm{max}} \tau^2\left(-\frac{h}{\tau_\mathrm{max}}\tau + h\right)\;\mathrm{d}\tau \tag{L34}$$

$$= 2h\int_0^{\tau_\mathrm{max}} \left(\tau^2 - \frac{1}{\tau_\mathrm{max}}\tau^3\right)\;\mathrm{d}\tau \tag{L35}$$

$$= 2h\left[\frac{1}{3}\tau^3 - \frac{1}{4\tau_\mathrm{max}}\tau^4\right]_0^{\tau_\mathrm{max}} \tag{L36}$$

$$= 2h\tau_\mathrm{max}^3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \tag{L37}$$

$$= \frac{\tau_\mathrm{max}^2}{6} = \frac{1}{2}\sigma_{\tau,\mathrm{gv}}^2\,. \tag{L38}$$

*(Σ: **3 Punkte**)*

k) Da die Varianz des zeitlichen Abtastfehlers halb so groß ist wie bei einem gleichverteilten Abtastfehler und das SNR in Folge von Jitter proportional zu $1/\sigma_\tau^2$ ist, ergibt sich

$$\mathrm{SNR} = 2 \cdot \mathrm{SNR}_\mathrm{gv} = 10 \cdot \lg\left(2 \cdot \mathrm{SNR}_\mathrm{gv}\right)\mathrm{dB} = \left(50 + 10 \cdot \lg 2\right)\mathrm{dB} \approx 53\,\mathrm{dB}\,. \tag{L39}$$

*(Σ: **1 Punkt**)*