Institut für
Industrielle Informationstechnik
Karlsruher Institut für Technologie
Prof. Dr.-Ing. M. Heizmann

Hertzstr. 16 / Geb. 06.35
76187 Karlsruhe

Klausur im Fach
Messtechnik
17. September 2021

Musterlösung

Aufgabe 1: 15
Aufgabe 2: 16
Aufgabe 3: 19
Aufgabe 4: 18

Gesamtpunkte: 68

Aufgabe 1: Kurvenanpassung (15 Punkte)

Sie bringen Wasser zum kochen und messen die Wassertemperatur mit einem Thermometer. Die Messwerte sind in Tabelle 1 dargestellt.

Tabelle 1: Gemessene Wassertemperatur y_i in °C in Abhängigkeit der Zeit u_i in min

i	0	1	2	3	4	5
y_i in °C	22	30	42	51	59	72
u_i in min	0	2	4	6	8	10

a) Bestimmen Sie die Regressionsgerade mittels linearer Regression. Geben Sie das Ergebnis in der Form $y(u) = a_0 + a_1 \cdot u$ an. *(3 Punkte)*

b) Bestimmen Sie die Temperatur y für $u = 30$ min. Was sagt der Wert über die Gültigkeit der Regressionsgraden aus? *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Für ein Messgerät wurden die Anzeigewerte y_i für die Stützstellen u_i laut Tabelle 2 aufgezeichnet.

Tabelle 2: Anzeigewerte y_i in Abhängigkeit der Stützstellen u_i.

i	0	1	2	3
y_i	2	8	6	5
u_i	1	3	5	6

c) Interpolieren Sie die Kennlinie $\tilde{y}(u)$ mittels Newton-Interpolation. Geben Sie das Ergebnis auch in ausmultiplizierter Form an. *(3 Punkte)*

d) Welchen Vorteil hat die Newton-Interpolation gegenüber der Lagrange-Interpolation? *(1 Punkt)*

Die Aufgaben werden auf der Rückseite fortgesetzt.

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Für n Messpunkte (u_i, y_i) lässt sich das Interpolationspolynom durch Lagrange-Polynome wie folgend darstellen:

$$y_L(u) = \sum_{i=0}^{n-1} l_i(u) \cdot y_i \,. \tag{1}$$

e) Von welchen Werten aus den Messpunkten hängt das Polynom $l_i(u)$ ab? *(1 Punkt)*

f) Zeigen Sie, dass gilt:

$$1 = \sum_{i=0}^{n-1} l_i(u)\,. \tag{2}$$

(2 Punkte)

Hinweis: Wählen Sie günstige Messpunkte (u_i, y_i), ohne die Allgemeingültigkeit der Aussage einzuschränken.

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

g) Welchen Vorteil haben die stückweise definierten Interpolationen (z.B. Splines) gegenüber Interpolation mittels globaler Polynome? *(1 Punkt)*

h) Bei der kubischen Splineinterpolation wird die Interpolationsfunktion $f(u)$ stückweise definiert. Die Funktion $f^{(k)}(u)$ bezeichnet die k-te Ableitung der Interpolationsfunktion (mit $k \geq 0$ und $f^{(0)}(u) = f(u)$). Geben Sie alle $f^{(k)}(u)$ an, die stetig sein müssen. *(1 Punkt)*

Sie haben m Messpunkte und sollen die Polynominterpolation mittels der Vandermonde-Matrix bestimmen.

i) Wie viele Zeilen und Spalten hat die Vandermonde-Matrix? Welche Voraussetzung muss die Matrix erfüllen, damit sich die Interpolationsfunktion bestimmen lässt? *(1 Punkt)*

j) Was muss man bei der Messung beachten, damit diese Voraussetzung erfüllt werden kann? *(1 Punkt)*

Lösung

a) Die Koeffizienten a_0 und a_1 sind gegeben durch:

$$a_0 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_k - a_1 \cdot \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u_k\,, \tag{L1}$$

$$a_1 = \frac{N\sum_{k=0}^{N-1} u_k y_k - \sum_{k=0}^{N-1} u_k \sum_{k=0}^{N-1} y_k}{N \cdot \sum_{k=0}^{N-1} u_k^2 - \left(\sum_{k=0}^{N-1} u_k\right)^2}\,. \tag{L2}$$

Aus den einzelnen Summen

$$\sum_{k=0}^{N-1} y_k = 276\,, \qquad \sum_{k=0}^{N-1} u_k = 30\,, \qquad \left(\sum_{k=0}^{N-1} u_k\right)^2 = 900\,,$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} u_k y_k = 1726\,, \qquad \sum_{k=0}^{N-1} u_k^2 = 220\,,$$

ergibt sich:

$$a_1 = \frac{6 \cdot 1726 - 30 \cdot 276}{6 \cdot 220 - 900} \approx 4{,}94\,, \tag{L3}$$

$$a_0 = \frac{1}{6} \cdot 276 - 4{,}94 \cdot \frac{1}{6} \cdot 30 = 21{,}30\,. \tag{L4}$$

Die Wassertemperatur wird also durch die Gerade $y(u) = 21{,}30 + 4{,}94 \cdot u$ approximiert.

*(Σ: **3 Punkte**)*

b) Mithilfe der Regressionsgerade lässt sich die Temperatur nach 30 min bestimmen:

$$y(u = 30) = 21{,}30 + 4{,}94 \cdot 30 = 169{,}5°\mathrm{C} \gg 100°\mathrm{C}\,. \tag{L5}$$

D.h. die Temperatur ist zu hoch und physikalisch unmöglich. *(Σ: **1 Punkt**)*

c) Das Differenzschema des Newton-Verfahrens für nicht konstanten Stützstellenabstand ergibt:

u	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	2			
		$\frac{8-2}{3-1} = 3$		
3	8		$\frac{-1-3}{5-1} = -1$	
		$\frac{6-8}{5-3} = -1$		$\frac{0+1}{6-1} = 0{,}2$
5	6		$\frac{-1+1}{6-3} = 0$	
		$\frac{5-6}{6-5} = -1$		
6	5			

Einsetzen der Werte in den Newton-Ansatz ergibt:

$$\begin{aligned}\tilde{y}(u) &= a_0 + a_1(u-u_0) + a_2(u-u_0)(u-u_1) + a_3(u-u_0)(u-u_1)(u-u_2) && \text{(L6)}\\ &= 2 + 3(u-1) - 1(u-1)(u-3) + 0{,}2(u-1)(u-3)(u-5) && \text{(L7)}\\ &= 2 + 3u - 3 - (u^2-4u+3) + 0{,}2(u^3-9u^2+23u-15) && \text{(L8)}\\ &= 0{,}2u^3 - 2{,}8u^2 + 11{,}6u - 7\,. && \text{(L9)}\end{aligned}$$

*(Σ: **3 Punkte**)*

d) Einer der beider Vorteile reicht aus: (1) Leichte Erweiterbarkeit beim Hinzufügen von Stützstellen. (2) Einfachere Basispolynome (als Lagrange-Polynome) *(Σ: **1 Punkt**)*

e) Das Lagrange-Polynom $l_i(u)$ ist abhängig von den Stützstellen und ist unabhängig von den Messwerten. *(Σ: **1 Punkt**)*

f) Da das Lagrange-Polynom $l_i(u)$ unabhängig vom Messwert y_i ist, lassen sich die Messwerte beliebig wählen. Wir nehmen an, dass alle Messwerte aus einer konstanten Funktion $y(u) = k$ ($k \neq 0$) gewonnen werden. D.h. für beliebige Stützstellen u_i mit $i = 0, 1, ..., n-1$ gilt $y_0 = y_1 = ... = y_{n-1} = k$.

Offenbar ist

$$a_i = \begin{cases} k, & i = 0 \\ 0, & i > 0 \end{cases} \tag{L10}$$

eine Lösung für das Interpolationspolynom $y_L(u) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i$. Für n Messpunkte und ein Polynom vom Grad $n-1$ ist die Interpolationsfunktion eindeutig. Da die Lösung eindeutig ist und die Stützstellen beliebig sind, gilt stets:

$$\begin{aligned} y_L(u) &= \sum_{i=0}^{n-1} l_i(u) \cdot k = a_0 = k && \text{(L11)}\\ 1 &= \sum_{i=0}^{n-1} l_i(u)\,. && \text{(L12)}\end{aligned}$$

*(Σ: **2 Punkte**)*

g) Mit stückweise definierten Interpolationen kann man bei großer Anzahl von Messpunkten oszillierendes Verhalten der Interpolationsfunktion vermeiden. *(Σ: **1 Punkt**)*

h) Die Funktionen $f^{(0)}(u)$, $f^{(1)}(u)$ und $f^{(2)}(u)$ müssen stetig sein. *(Σ: **1 Punkt**)*

i) Die Vandermonde-Matrix hat m Zeilen und m Spalten. Sie muss invertierbar/regulär sein (oder: sie muss vollen Rang haben). *(Σ: **1 Punkt**)*

j) Bei der Messung muss man sicherstellen, dass die Stützstellen paarweise verschieden sind. *(Σ: **1 Punkt**)*

Aufgabe 2: Messsysteme (16 Punkte)

Um eine Messkennlinie mithilfe der Differenzmethode zu linearisieren, werden zwei baugleiche Sensoren mit den Kennlinien

$$y(u) = \sin(u\pi) + \frac{1}{2}u^2$$

mittels einer Parallelschaltung miteinander verknüpft.

a) Berechnen Sie die Kennlinie des Messsystems um den Arbeitspunkt $u_0 = 2$. Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. *(2 Punkte)*

b) Wie wirkt die Differenzmethode auf die Messkennlinie? Welche Fehler können mit dieser Methode unterdrückt werden? *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Die Kennlinie eines Sensors ist im Messbereich $0 \leq u \leq 6$ gegeben durch

$$y(u) = -\cos\left(\frac{\pi u}{9}\right) + 3.$$

c) Bestimmen Sie die ideale Kennlinie im Messbereich. *(1 Punkt)*

d) Bestimmen Sie den Kennlinienfehler der idealen Kennlinie. An welcher Stelle ist der Betrag des Kennlinienfehlers am größten und wie groß ist das Maximum des Betrags des absoluten Kennlinienfehlers?
Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass nur ein Extremwert innerhalb des Messbereichs liegt. *(3 Punkte)*

e) Kann hier eine Toleranzbandjustierung durchgeführt werden, um den maximalen Kennlinienfehler zu verkleinern? Begründen Sie Ihre Antwort. *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

f) Zeichnen Sie ein Blockschaltbild der Gegenkopplung mit Eingangssignal u und Ausgangssignal y und beschreiben Sie kurz die Funktionsweise. *(2 Punkte)*

g) Welcher Nachteil kann durch die Gegenkopplung entstehen? *(1 Punkt)*

h) Können die Fehler in der Kennlinie

$$y(u, \mathbf{z}) = \frac{1+u}{u} e(\mathbf{z})$$

mithilfe von Gegenkopplung unterdrückt werden? Die Funktion $e(\mathbf{z})$ hängt ausschließlich von den Störgrößen $\mathbf{z}$ ab. Begründen Sie Ihre Antwort. *(1 Punkt)*

Die Aufgaben werden auf der Rückseite fortgesetzt.

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

i) Eine nichtlineare Kennlinie kann beispielsweise durch Herabsetzen des Messbereichs linearisiert werden. Welcher Nachteil kann durch diese Methode entstehen? *(1 Punkt)*

j) Was versteht man unter Justierung und Kalibrierung? Was ist der Unterschied zwischen diesen beiden Begriffen? Erläutern Sie kurz Ihre Antwort. *(2 Punkte)*

Lösung

a) Die Differenzkennlinie des Messsystems um den Arbeitspunkt u_0 berechnet sich wie folgt:

$$y_D(u) = y(u_0 + \Delta u) - y(u_0 - \Delta u) \tag{L13}$$

Einsetzen der gegebenen Funktion $y(u) = \sin(u\pi) + \frac{1}{2}u^2$ ergibt:

$$y_D(\Delta u) = \sin(\pi(2 + \Delta u)) + \frac{1}{2}(2 + \Delta u)^2 - \left(\sin(\pi(2 - \Delta u)) + \frac{1}{2}(2 - \Delta u)^2\right) \tag{L14}$$

$$\begin{aligned} &= \sin(2\pi)\cos(\Delta u\pi) + \cos(2\pi)\sin(\Delta u\pi) + \frac{1}{2}(4 + 4\Delta u + \Delta u^2) \\ &\quad - \sin(2\pi)\cos(\Delta u\pi) + \cos(2\pi)\sin(\Delta u\pi) - \frac{1}{2}(4 - 4\Delta u - \Delta u^2) \end{aligned} \tag{L15}$$

$$= 2\sin(\Delta u\pi) + 4\Delta u \tag{L16}$$

Mit $\Delta u = u - u_0$ und dem Arbeitspunkt $u_0 = 2$ erhält man:

$$y_D(u) = 2\sin(u\pi - 2\pi) + 4u - 8 \tag{L17}$$

$$= 2\sin(u\pi) + 4u - 8 \tag{L18}$$

(Σ: 2 Punkte)

b) Durch die Differenzmethode wird eine Linearisierung der Kennlinie und eine Steigerung der Empfindlichkeit (Verdoppelung der Empfindlichkeit im Arbeitspunkt im Vergleich zur ursprünglichen Kennlinie) erzielt. Systematische, superponierende Fehler können mit dieser Methode unterdrückt werden. ***(Σ: 2 Punkte)***

c) Die ideale Kennlinie ist eine Gerade und verläuft durch Messanfang und Messende. Mit der idealen Empfindlichkeit

$$S_i = \frac{y_e - y_a}{u_e - u_a} = \frac{y(6) - y(0)}{6 - 0} = \frac{3,5 - 2}{6} = \frac{1}{4} \tag{L19}$$

wird die ideale Kennlinie berechnet:

$$y_i(u) = S_i(u - u_a) + y_a = \frac{1}{4}u + 2 \tag{L20}$$

(Σ: 1 Punkt)

d) Der Kennlinienfehler ist definiert als Differenz der realen und idealen Kennlinie:

$$F(u) = y(u) - y_i(u) = -\cos\left(\frac{\pi u}{9}\right) + 3 - \left(\frac{1}{4}u + 2\right) \tag{L21}$$

Mit dem Hinweis aus der Aufgabenstellung ist das Vorzeichen innerhalb des Messbereichs konstant. Da $F(u)$ im Messbereich negativ ist, folgt für $u \in [0; 6]$:

$$|F(u)| = -F(u) = \cos\left(\frac{\pi u}{9}\right) + \frac{1}{4}u - 1 \tag{L22}$$

An der Stelle des maximalen Betrags des Kennlinienfehlers muss dessen erste Ableitung 0 sein:

$$-F'(u) = -\frac{\pi}{9}\sin\left(\frac{\pi u}{9}\right) + \frac{1}{4} \stackrel{!}{=} 0 \tag{L23}$$

Damit erhält man

$$u = \frac{9}{\pi}\arcsin\left(\frac{9}{4\pi}\right) \approx 2,29 \in [0;6]. \tag{L24}$$

Überprüfung, ob tatsächlich Maximum vorliegt:

$$-F''(u) = -\frac{\pi^2}{9^2}\cos\left(\frac{\pi u}{9}\right) \qquad F''(2,287) = -0,09 < 0 \tag{L25}$$

Der maximale Betrag des Kennlinienfehlers beträgt

$$F_{\text{max}} = |F(2,287)| = 0,27. \tag{L26}$$

(Σ: 3 Punkte)

e) Ja, hier kann eine Toleranzbandjustierung durchgeführt werden, da im vorgegebenen Messbereich die Funktion monoton steigend ist / das Vorzeichen des Kennlinienfehlers nicht wechselt. ***(Σ: 1 Punkt)***

f) Das Blockschaltbild zur Gegenkopplung ist in Abbildung L1 abgebildet. Die Messgröße u wird mit einer vom Ausgangssignal y abgeleiteten Größe $K(y)$ verglichen und ein Abgleich wird durchgeführt, bis die Differenz v gleich null ist. ***(Σ: 2 Punkte)***

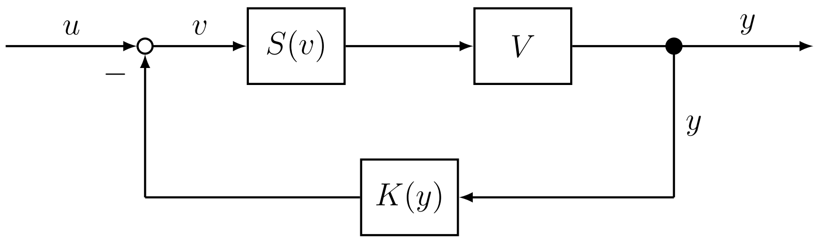

Abbildung L1: Blockschaltbild der Gegenkopplung.

g) Ein Nachteil der Gegenkopplung ist die durch den Regelkreis hinzukommende Dynamik. Bei zu hoher Verstärkung V kann das System sehr lange Einschwingzeiten besitzen oder sogar instabil werden. ***(Σ: 1 Punkt)***

h) Nein, die Fehler können nicht vollständig kompensiert werden, da $y(u, \mathbf{z})$ sowohl superponierende als auch deformierende Fehler enthält. Mithilfe der Gegenkopplung lassen sich deformierende Fehler reduzieren, superponierende Fehler bleiben jedoch erhalten. ***(Σ: 1 Punkt)***

i) Ist das nichtlineare Glied oder das erste Verstärkerglied rauschbehaftet, so wird durch die Verstärkung $S_1 \gg 1$ der Anzeigegröße das Rauschen ebenfalls verstärkt. Diese Methode kann also Rauschen erhöhen. ***(Σ: 1 Punkt)***

j) Justierung: Veränderung des Messkennlinie, sodass Messbereich auf gewünschten Anzeigebereich abgebildet wird. Physikalischer Eingriff in das Messgerät, um das Messsystem für die vorgesehen Messaufgabe ideal einzustellen.
Kalibrierung: Analyse und Beschreibung der Abweichungen von idealem und realem Mess- bzw. Anzeigewert. Im Unterschied zur Justierung ist die Kalibrierung kein Eingriff in das Messsystem. ***(Σ: 2 Punkte)***

Aufgabe 3: Statistik, Stochastische Signale (19 Punkte)

a) Erklären Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen dem χ^2-Anpassungstest und dem Signifikanztest für den Stichprobenmittelwert. *(2 Punkte)*

b) Was versteht man unter der Ergodizität eines stochastischen Prozesses? *(1 Punkt)*

c) Zeichnen Sie das Blockdiagramm des Wiener-Filters. Beschreiben Sie kurz die vorkommenden Glieder und Signale. *(3 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Sie haben den Signalflussplan nach Abbildung 1 gegeben.

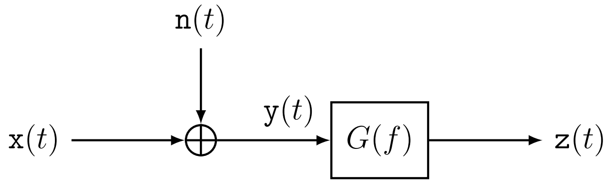

Abbildung 1: Gegebener Signalflussplan.

Hierbei sei das Nutzsignal $\mathtt{x}(t)$ eine harmonische Schwingung mit Autokorrelationsfunktion:

$$r_{\mathtt{xx}}(\tau) = a^2 \cos(2\pi f_0 \tau)\,. \tag{3}$$

Das Signal $\mathtt{n}(t)$ entspricht weißem Rauschen mit $r_{\mathtt{nn}}(\tau) = b^2\delta(\tau)$. Außerdem ist $\mathtt{n}(t)$ unkorreliert mit $\mathtt{x}(t)$. Die Übertragungsfunktion des LTI-Systems sei bekannt:

$$G(f) = \frac{f_\mathrm{g}}{f_\mathrm{g} + \mathrm{j}f}\,. \tag{4}$$

d) Berechnen Sie die Kreuzkorrelationsfunktion $r_{\mathtt{xy}}(\tau)$. *(1 Punkt)*

e) Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion $r_{\mathtt{yy}}(\tau)$. *(1 Punkt)*

f) Berechnen Sie den Leistungsdichtspektrum $S_{\mathtt{zz}}(f)$. *(2 Punkte)*

g) Berechnen Sie die Signalleistung P_z. *(2 Punkte)*

h) Aus welchen Signalen besteht das Ausgangssignal $\mathtt{z}(t)$? Beschreiben Sie kurz den Nutzanteil und Rauschanteil. *(1 Punkt)*

Die Aufgaben werden auf der Rückseite fortgesetzt.

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Ein Schätzer des Mittelwerts einer unbekannten Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{\mathtt{x}}(x)$ wird wie folgend definiert:

$$\tilde{\mathtt{x}} = \frac{\mathtt{x}_0 + \mathtt{x}_{n-1}}{2} \tag{5}$$

D.h. bei einer wiederholten Stichprobe mit dem Umfang n ($n \geq 2$) ist die Schätzung des Mittelwerts der Durchschnitt des ersten und letzten Stichprobewertes.

i) Ist der Schätzer $\tilde{\mathtt{x}}$ erwartungstreu? Begründen Sie Ihre Angabe. *(2 Punkte)*

j) Ist der Schätzer $\tilde{\mathtt{x}}$ konsistent? Begründen Sie Ihre Angabe. *(2 Punkte)*

k) Ist der Schätzer $\tilde{\mathtt{x}}$ effizient? Begründen Sie Ihre Angabe. *(2 Punkte)*

Lösung

a) **Gemeinsamkeit:** Beide Tests beantworten die Frage, ob eine Stichprobe zu einer vorgegebenen Grundgesamtheit mit vorgegebener, bekannter Verteilung gehört.
Unterschied: Der Signifikanztest für den Stichprobenmittelwert prüft, ob der aus der Stichprobe geschätzte Parameter dem vorgegebenen Wert entspricht. Im Gegensatz dazu prüft der χ^2-Anpassungstest nicht nur einen Parameter, sondern die Verteilung.
*(Σ: **2 Punkte**)*

b) Ein Zufallsprozess ist (streng) ergodisch, wenn die Zeitmittelwerte aller Momente einer beliebigen Musterfunktion mit den Scharmittelwerten des Prozesses übereinstimmen. *(Σ: **1 Punkt**)*

c) Das Blockdiagramm des Wiener-Filters wird in Abbildung L2 dargestellt.

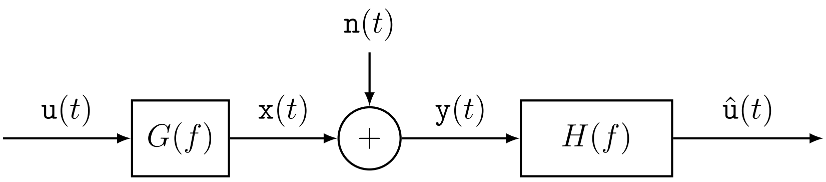

Abbildung L2: Blockdiagramm des Wiener-Filters

$\mathtt{u}(t)$: Nutzsignal.
$G(f)$: LTI-System.
$\mathtt{x}(t)$: Durch $G(f)$ übertragenes Nutzsignal.
$\mathtt{n}(t)$: Rauschsignal.
$\mathtt{y}(t)$: Additive Überlagerung von $\mathtt{x}(t)$ und $\mathtt{n}(t)$.
$\hat{\mathtt{u}}(t)$: Rekonstruiertes Nutzsignal.
$H(f)$: Schätzfilter, mit dem die Leistung des Fehlersignals $\mathtt{e}(t) = \hat{\mathtt{u}}(t) - \mathtt{u}(t)$ minimiert wird.

*(Σ: **3 Punkte**)*

d) Da das Rauschen $\mathtt{n}(t)$ mittelwertfrei und unkorreliert mit $\mathtt{x}(t)$ ist, enthält man:

$$\begin{aligned}
r_{\mathtt{xy}} &= \mathrm{E}\{\mathtt{x}(t+\tau)\mathtt{y}(t)\} && \text{(L27)}\\
&= \mathrm{E}\{\mathtt{x}(t+\tau)\mathtt{x}(t) + \mathtt{x}(t+\tau)\mathtt{n}(t)\} && \text{(L28)}\\
&= r_{\mathtt{xx}}(\tau) + \mathrm{E}\{\mathtt{x}(t+\tau)\} \cdot \mathrm{E}\{\mathtt{n}(\tau)\} && \text{(L29)}\\
&= r_{\mathtt{xx}}(\tau) + \mathrm{E}\{\mathtt{x}(t+\tau)\} \cdot 0 && \text{(L30)}\\
&= r_{\mathtt{xx}}(\tau) = a^2 \cos(2\pi f_0 \tau)\,. && \text{(L31)}
\end{aligned}$$

*(Σ: **1 Punkt**)*

e) Es gilt:

$$\begin{aligned}
r_{\mathtt{yy}} &= \mathrm{E}\{(\mathtt{x}(t+\tau) + \mathtt{n}(t+\tau))(\mathtt{x}(t) + \mathtt{n}(t))\} && \text{(L32)}\\
&= r_{\mathtt{xx}}(\tau) + r_{\mathtt{xn}}(\tau) + r_{\mathtt{nx}}(\tau) + r_{\mathtt{nn}}(\tau) && \text{(L33)}\\
&= r_{\mathtt{xx}}(\tau) + r_{\mathtt{nn}}(\tau) && \text{(L34)}\\
&= a^2 \cos(2\pi f_0 \tau) + b^2 \delta(\tau)\,. && \text{(L35)}
\end{aligned}$$

*(Σ: **1 Punkt**)*

f) Zunächst berechnen wir das Leistungsdichtspektrum $S_{\mathtt{yy}}(f)$:

$$r_{\mathtt{yy}}(\tau) = a^2 \cos(2\pi f_0 \tau) + b^2 \delta(\tau) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{a^2}{2}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) + b^2 = S_{\mathtt{yy}}(f)\,. \tag{L36}$$

Mit $S_{\mathtt{zz}}(f) = S_{\mathtt{yy}}(f)|G(f)|^2$ erhält man:

$$S_{\mathtt{zz}}(f) = (\frac{a^2}{2}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) + b^2) \cdot \frac{f_{\mathrm{g}}^2}{f_{\mathrm{g}}^2 + f^2} \tag{L37}$$

$$= \frac{a^2 f_{\mathrm{g}}^2}{2(f_{\mathrm{g}}^2 + f_0^2)}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) + \frac{b^2 f_{\mathrm{g}}^2}{f_{\mathrm{g}}^2 + f^2} \tag{L38}$$

(Σ: 2 Punkte)

g) Es gilt $P_{\mathtt{z}} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathtt{zz}}(f)\,\mathrm{d}f$. Damit erhält man:

$$P_{\mathtt{z}} = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\frac{a^2 f_{\mathrm{g}}^2}{2(f_{\mathrm{g}}^2 + f_0^2)}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) + \frac{b^2 f_{\mathrm{g}}^2}{f_{\mathrm{g}}^2 + f^2}\Big)\,\mathrm{d}f \tag{L39}$$

$$= \frac{a^2 f_{\mathrm{g}}^2}{f_{\mathrm{g}}^2 + f_0^2} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b^2 f_{\mathrm{g}}^2}{f_{\mathrm{g}}^2 + f^2}\,\mathrm{d}f \tag{L40}$$

$$= \frac{a^2 f_{\mathrm{g}}^2}{f_{\mathrm{g}}^2 + f_0^2} + b^2 f_{\mathrm{g}} \arctan\Big(\frac{f}{f_{\mathrm{g}}}\Big)\Big|_{-\infty}^{\infty} \tag{L41}$$

$$= \frac{a^2 f_{\mathrm{g}}^2}{f_{\mathrm{g}}^2 + f_0^2} + b^2 f_{\mathrm{g}} \pi\,. \tag{L42}$$

(Σ: 2 Punkte)

h) Das Signal $\mathtt{y}(t)$ entspricht einer harmonischen Schwingung mit additiv überlagertem weißem Rauschen. Das LTI-System $G(f)$ entspricht einem Tiefpass. Deswegen ist $\mathtt{z}(t)$ eine gedämpfte harmonische Schwingung mit additiv überlagertem farbigem Rauschen. ***(Σ: 1 Punkt)***

i) Zuerst wird der Erwartungswert des Schätzers berechnet:

$$\mathrm{E}\{\tilde{\mathtt{x}}\} = \mathrm{E}\{\frac{\mathtt{x}_0 + \mathtt{x}_{n-1}}{2}\} \tag{L43}$$

$$= \frac{\mathrm{E}\{\mathtt{x}_0\} + \mathrm{E}\{\mathtt{x}_{n-1}\}}{2} \tag{L44}$$

$$= \frac{\mathrm{E}\{\mathtt{x}\} + \mathrm{E}\{\mathtt{x}\}}{2} = \mathrm{E}\{\mathtt{x}\}\,. \tag{L45}$$

D.h. die Erwartungswert des Schätzer ist gleich der wahre Mittelwert. Der Schätzer ist daher erwartungstreu. ***(Σ: 2 Punkte)***

j) Die Varianz des Schätzers ist:

$$\sigma_{\tilde{\mathtt{x}}}^2 = \mathrm{E}\{\tilde{\mathtt{x}}^2\} - \mathrm{E}\{\tilde{\mathtt{x}}\}^2 \tag{L46}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \mathrm{E}\{\mathtt{x}_0^2 + \mathtt{x}_{n-1}^2 + 2\mathtt{x}_0\mathtt{x}_{n-1}\} - \mathrm{E}\{\mathtt{x}\}^2\,. \tag{L47}$$

Da $\mathtt{x}_0$ und $\mathtt{x}_{n-1}$ unabhängig sind, gilt $\mathrm{E}\{\mathtt{x}_0\mathtt{x}_{n-1}\} = \mathrm{E}\{\mathtt{x}_0\}\mathrm{E}\{\mathtt{x}_{n-1}\} = \mathrm{E}\{\mathtt{x}\}^2$. Damit erhält man:

$$\sigma_{\tilde{\mathtt{x}}}^2 = \frac{1}{4} \cdot (2 \cdot \mathrm{E}\{\mathtt{x}^2\} + 2 \cdot \mathrm{E}\{\mathtt{x}\}^2) - \mathrm{E}\{\mathtt{x}\}^2 \tag{L48}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\mathrm{E}\{\mathtt{x}^2\} - \mathrm{E}\{\mathtt{x}\}^2) = \frac{1}{2}\sigma_{\mathtt{x}}^2 . \tag{L49}$$

D.h. die Varianz des Schätzers ist unabhängig vom Stichprobenumfang. Der Schätzer ist daher nicht konsistent. *(Σ: **2 Punkte**)*

k) Zuerst muss ein effizienter Schätzer erwartungstreu sein. Gemäß des Ergebnis der Teilaufgabe **i)** wird die Voraussetzung erfüllt.

Aus Teilaufgaben **j)** enthält man die Varianz des Schätzers $\sigma_{\tilde{\mathtt{x}}}^2 = \frac{1}{2}\sigma_{\mathtt{x}}^2$. Die Varianz ist nicht kleiner als die Varianz des Stichprobenmittelwerts $\sigma_{\hat{\mathtt{x}}}^2 = \frac{1}{n}\sigma_{\mathtt{x}}^2$ ($n \geq 2$).

Da ein effizienter Schätzer aus allen erwartungstreuen Schätzern die kleinste Varianz besitzen muss, ist der Schätzer $\tilde{\mathtt{x}}$ nicht effizient. *(Σ: **2 Punkte**)*

Aufgabe 4: Digitalisierung (18 Punkte)

a) Was versteht man unter Jitter? Bei welchen Signalen tritt es verstärkt auf? Begründen Sie Ihre Antwort. *(2 Punkte)*

b) Was kann bei Einhaltung des Quantisierungstheorems fehlerfrei aus dem quantisierten Signal rekonstruiert werden? *(1 Punkt)*

c) Wie lautet das lineare Quantisierungsmodell? Benennen Sie die auftretenden Größen. *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Sie haben das periodische Rechtecksignal $r(t) = \mathrm{sgn}\big(\sin(2\pi f_0 t)\big)$ mit der Wiederholungsfrequenz $f_0 = 2\,\mathrm{kHz}$ gegeben. Hierbei gilt

$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1\,, & t \geq 0 \\ -1\,, & t < 0 \end{cases} .$$

d) Wie müssen Sie vorgehen, um bei der Abtastung des Signals Aliasing zu vermeiden? Begründen Sie Ihre Antwort. *(2 Punkte)*

e) Wieviel Bit benötigt man zur fehlerfreien Quantisierung des Signals? Begründen Sie Ihre Antwort. *(1 Punkt)*

f) Zeichnen Sie die ideale Quantisierungskennlinie für das Signal im Bereich $[-2; 2]$. Achten Sie auf eine korrekte Achsenbeschriftung. *(1 Punkt)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Sie möchten ein bandbegrenztes Signal $x(t)$ mit Hilfe eines Analog-Digital-Umsetzers (ADU) digital aufzeichnen. Das Signal besitzt nur Frequenzanteile kleiner als $f_\mathrm{g} = 16\,\mathrm{kHz}$. Aliasing soll bei der Aufzeichnung vermieden werden. Ihnen steht ein Speicher mit 20 MB (Megabyte) zur Verfügung. Es wird angenommen, dass das Signal eine gleichverteilte Amplitudendichte besitzt. Gehen Sie vom linearen Quantisierungsmodell aus.

g) Sie möchten eine 5-minütige Aufzeichnung erstellen. Dimensionieren Sie die Abtastrate und die Auflösung in Bit des ADU für eine möglichst hochwertige Aufzeichnung. Welches Signal-Rausch-Verhältnis (SNR) in dB infolge der Quantisierung erreichen Sie damit? *(2 Punkte)*

h) Welche Anforderungen ergeben sich an die zeitliche Genauigkeit der Abtastung, wenn der durch die Abweichung entstehende Fehler höchstens so groß wie das Quantisierungsrauschen sein soll? Berechnen Sie dazu den maximalen Abtastzeitfehler $\tau_{\max}$. Der Abtastzeitfehler sei im Interval $[-\tau_{\max}; \tau_{\max}]$ gleichverteilt. *(2 Punkte)*

Die Aufgabe wird auf der Rückseite fortgesetzt.

Sie möchten nun als ADU einen $\Delta\Sigma$-Umsetzer verwenden. Der Taktgeber des Modulators arbeitet mit einer Frequenz von $f_{\mathrm{M}} = 2{,}4\,\mathrm{MHz}$.

i) Bestimmen Sie den Überabtastfaktor M für das Signal $x(t)$. *(1 Punkt)*

j) Wie groß ist die effektive Auflösung in Bit für das Signal $x(t)$ bei Verwendung eines Modulators 1. Ordnung? *(2 Punkte)*

k) Wie können Sie – bei Verwendung des gleichen Taktgebers – das SNR der Aufnahme des Signals $x(t)$ erhöhen? Begründen Sie Ihre Antwort unter Berücksichtigung der Übertragungsfunktion des Nutzsignals und des Quantisierungsrauschen. *(2 Punkte)*

Lösung

a) Unter Jitter versteht man den Abtastfehler, der durch die Abweichung der zeitlichen Abtastung eines Signals von einer idealen äquidistanten Abtastung entsteht. Je höher die Signalfrequenz ist, desto größer ist der Jitter-Fehler, da sich hochfrequente Anteile innerhalb des Zeitfehlers stärker verändern als niederfrequente. *(Σ: **2 Punkte**)*

b) Bei Einhaltung des Quantisierungstheorems kann die Amplitudendichte des ursprünglichen Signals aus dem quantisierten Signal rekonstruiert werden. *(Σ: **1 Punkt**)*

c) Das lineare Quantisierungsmodell lautet

$$\mathtt{x}_\mathrm{q}(t) = x(t) + \mathtt{e}_\mathrm{q}(t)\,. \tag{L50}$$

Hierbei ist $x(t)$ das wertekontinuierliche Eingangssignal, $\mathtt{x}_\mathrm{q}(t)$ das quantisierte Signal und $\mathtt{e}_\mathrm{q}(t)$ der Quantisierungsfehler. *(Σ: **2 Punkte**)*

d) Das genannte Rechtecksignal hat eine Grundfrequenz von 2 kHz. Die Fourier-Transformierte des Rechtecksignals ist jedoch eine Summe aus harmonischen Schwingungen mit allen ungeraden Vielfachen der Grundfrequenz. Das heißt insbesondere, dass das Rechtecksignal nicht bandbegrenzt ist. Um Aliasing zu vermeiden (bzw. zu reduzieren), muss ein Anti-Aliasing Filter verwendet werden. Die Abtastfrequenz muss mindestens doppelt so groß wie die Grenzfrequenz des Filters sein. *(Σ: **2 Punkte**)*

e) Das Signal besitzt nur Amplitudenwerte -1 und 1. Entsprechend kann das Signal fehlerfrei mit einem 1 bit Quantisierer quantisiert werden, welche die Werte -1 und 1 auf die quantisierten Werte -1 und 1 abbildet. *(Σ: **1 Punkt**)*

f) Eine mögliche ideale Quantisierungskennlinie ist in Abbildung L3 gegeben.

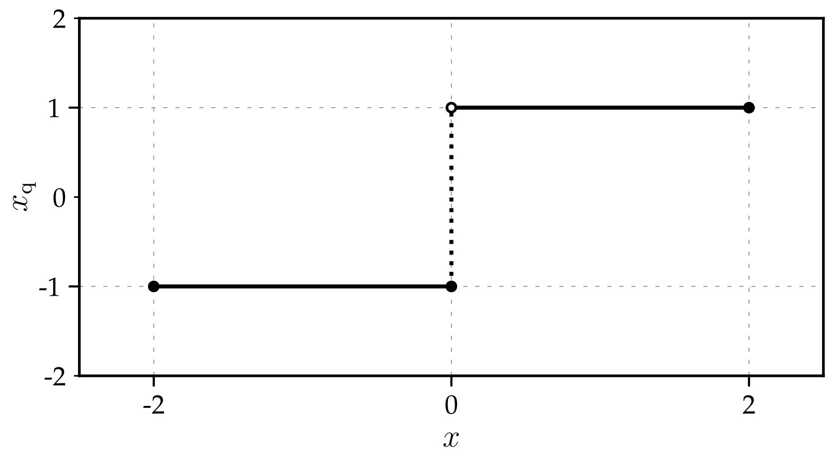

Abbildung L3: Mögliche ideale Quantisierungskennlinie für das Signal $r(t)$.

*(Σ: **1 Punkt**)*

g) Um Aliasing zu vermeiden, muss die Abtastfrequenz mindestens doppelt so groß wie Grenzfrequenz sein. Damit möglichst wenig Speicher in Anspruch genommen wird, wählen wir

$$f_\mathrm{A} = 2 \cdot f_\mathrm{g} = 32\,\mathrm{kHz}\,. \tag{L51}$$

Nun kann die Auflösung N in Bit unter Berücksichtigung des verfügbaren Speichers so groß wie möglich gewählt werden. Es muss gelten:

$$5 \cdot 60\,\mathrm{s} \cdot 32 \cdot 10^3\,\mathrm{s}^{-1} \cdot N \leq 20 \cdot 10^6 \cdot 8\,\mathrm{bit} \tag{L52}$$

$$\iff N \leq \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 8\,\mathrm{bit}}{5 \cdot 60 \cdot 32} = 16{,}7\,\mathrm{bit}\,. \tag{L53}$$

Für eine möglichst hochwertige Aufzeichnung muss also $N = 16\,\mathrm{bit}$ gewählt werden.

Für Signale mit gleichverteilter Amplitudendichte folgt für das SNR

$$\mathrm{SNR_q} = 2^{2N} \implies \mathrm{SNR_{q,dB}} = 6{,}02 \cdot N = 96{,}3\,\mathrm{dB}\,. \tag{L54}$$

*(Σ: **2 Punkte**)*

h) Für das SNR infolge von Jitter gilt

$$\mathrm{SNR_{Jitter}} = \frac{2}{(2\pi f_\mathrm{g})^2 \sigma_\tau^2}\,. \tag{L55}$$

Da τ im Intervall $[-\tau_\mathrm{max}; \tau_\mathrm{max}]$ gleichverteilt ist, folgt

$$\sigma_\tau^2 = \frac{(2\tau_\mathrm{max})^2}{12} = \frac{\tau_\mathrm{max}^2}{3} \tag{L56}$$

und somit

$$\mathrm{SNR_q} \leq \mathrm{SNR_{Jitter}} \tag{L57}$$

$$\iff \quad 2^{2N} \leq \frac{6}{(2\pi f_\mathrm{g})^2 \tau_\mathrm{max}^2} \tag{L58}$$

$$\iff \quad \tau_\mathrm{max} \leq \sqrt{\frac{6}{(2\pi f_\mathrm{g} 2^N)^2}} = 3{,}7 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{s} = 0{,}37\,\mathrm{ns}. \tag{L59}$$

*(Σ: **2 Punkte**)*

i) Es ist

$$M = f_\mathrm{M}/f_\mathrm{g} = \frac{2{,}4 \cdot 10^6\,\mathrm{Hz}}{16 \cdot 10^3\,\mathrm{Hz}} = 150\,. \tag{L60}$$

*(Σ: **1 Punkt**)*

j) Das SNR des $\Delta\Sigma$-Umsetzers 1. Ordnung ist

$$\mathrm{SNR}_{\Delta\Sigma} = \frac{1}{4\sin^2(\pi/M)} = 570{,}0 \tag{L61}$$

$$\implies \mathrm{SNR}_{\Delta\Sigma,\mathrm{dB}} = 10 \cdot \lg \mathrm{SNR}_{\Delta\Sigma} = 27{,}6\,\mathrm{dB}. \tag{L62}$$

Die entsprechende Auflösung N in Bit im Falle des Signals mit gleichverteilter Amplitudendichte ergibt sich mit

$$\mathrm{SNR_{q,\,dB}} = 6{,}02 \cdot N \implies N = \frac{27{,}6}{6{,}02} = 4{,}6 \tag{L63}$$

also entsprechend eine effektive Auflösung von rund 4 bit. *(Σ: **2 Punkte**)*

k) Bei Verwendung des gleichen Taktgebers, und somit des gleichen Überabtastfaktors M, kann das SNR erhöht werden, indem ein Modulator höherer Ordnung verwendet wird. Beim $\Delta\Sigma$-Umsetzer wird das Nutzsignal ungestört übertragen, während das Quantisierungsrauschen zu hohen Frequenzen hin verschoben wird (sog. *noise shaping*). Dieser Effekt ist umso stärker, je höher die Ordnung des Modulators ist. Nach einer entsprechenden Tiefpassfilterung durch das Digitalfilter am Ausgang des Umsetzers ist das SNR in diesem Fall also vergrößert. ***(Σ: 2 Punkte)***