

Aufgabe 1: Kurvenanpassung (22 Punkte)

Ihnen sind folgende Messwertpaare gegeben:

x	0,2	0,35	0,5	0,65
y	3,8	4,6	2,6	-1,1

- a) Rekonstruieren Sie die Messkennlinie $y(x)$ mittels des Newton-Interpolations-Verfahrens. Runden Sie die Koeffizienten dabei auf 2 Nachkommastellen. (6 Punkte)
- b) Wie groß ist der durch die Rundung entstehende relative Fehler an der 2. Stützstelle? (1 Punkt)
- c) Berechnen Sie die resultierende Kennlinie unter Hinzunahme eines 5. Messwertpaares $x_4 = 0,9$ mit $y_4 = 1$. (4 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen.

Aus der Überlagerung von zwei Sinusschwingungen sind folgende verrauschte Messwerte gegeben:

t/s	0,1	0,2	0,3	0,4
$z(t)$	3,803	3,647	0,676	-1,052

Die Funktion $z(t) = x(t) + y(t)$ setzt sich aus den Sinusschwingungen $x(t) = A \cdot \sin(2\pi t)$ und $y(t) = B \cdot \sin(4\pi t)$ zusammen. Sie möchten nun die Amplituden der beiden Signale mittels einer Least-Squares-Approximation bestimmen.

- d) Welche Bedingungen müssen die Basisfunktionen des LS-Verfahrens generell erfüllen? (1 Punkt)
- e) Nehmen Sie an, dass die Bedingung aus der vorherigen Teilaufgabe für das vorliegende Problem erfüllt ist, und bestimmen Sie nun A und B mittels des LS-Verfahrens. (4 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen.

Die Bayer-Maske ist ein Farbfilter, das Verwendung in den meisten digitalen Farbfotokameras findet. Um nicht für jedes einzelne Pixel auf dem Sensorchip die einfallende Lichtstärke für den roten, blauen und grünen Spektralbereich einzeln messen zu müssen, wird die Bayer-Maske gemäß Tab. 1 verwendet und lässt pro Pixel jeweils nur rotes, grünes oder blaues Licht auf den Sensor. Um dennoch für jedes Pixel drei Farbwerte (Rot, Grün, Blau) zu bekommen, errechnet man die jeweils fehlenden Farbwerte aus denjenigen von den direkt benachbarten 8 Pixeln, die die entsprechende Farbkomponente aufweisen.

G	B	G	B
R	G	R	G
G	B	G	B

Tabelle 1: Bayer-Maske.

$G_{00} = 50$	$B_{01} = 43$	$G_{02} = 21$	$B_{03} = 22$
$R_{10} = 11$	$G_{11} = 123$	$R_{12} = 144$	$G_{13} = 200$
$G_{20} = 240$	$B_{21} = 17$	$G_{22} = 29$	$B_{23} = 49$

Tabelle 2: Aufgezeichnete Werte.

- f) Führen Sie die (bi)lineare Interpolation der fehlenden RGB-Werte für die Pixel 11 und 12 aus Tab. 2 durch, wenn jede Farbkomponente mit 8 Bit (Wertebereich 0-255) quantisiert wird. *(4 Punkte)*
- g) Welches weitere einfachere Interpolationsverfahren könnten Sie hier verwenden? Auf welches Problem stoßen Sie, wenn Sie mit diesem Verfahren beispielsweise den Rot-Wert von Pixel 11 interpolieren wollen? *(2 Punkte)*

Lösung

a) Newton-Verfahren:

Differenzenschema:

x	$\Delta^0 y = y$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0,2	3,8				
		$\frac{0,8}{0,15} = \frac{16}{3}$			
0,35	4,6		$\frac{-56}{0,3} = -\frac{560}{9}$		
		$\frac{-2}{0,15} = -\frac{40}{3}$		$\frac{220}{0,45} = 54,32$	
0,5	2,6		$\frac{-34}{0,3} = -\frac{340}{9}$		
		$\frac{-3,7}{0,15} = -\frac{74}{3}$		$\frac{21680}{99}$	
0,65	-1,1		$\frac{248}{3}$		
		$\frac{2,1}{0,25}$			
0,9	1				

Der Newton-Ansatz bei 4 Stützstellen lautet:

$$\begin{aligned}
 \tilde{y}_{\text{New}}(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\
 &\quad + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
 &= \Delta^0 y + \Delta^1 y(x - x_0) + \Delta^2 y(x - x_0)(x - x_1) \\
 &\quad + \Delta^3 y(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)
 \end{aligned}$$

Einsetzen der Werte aus dem Differenzenschema ergibt:

$$\begin{aligned}
 \tilde{y}_{\text{New}}(x) &= 3,8 + \frac{16}{3}(x - 0,2) - \frac{560}{9}(x - 0,2)(x - 0,35) \\
 &\quad + 54,32(x - 0,2)(x - 0,35)(x - 0,5) \\
 &= 54,32x^3 - 119,26x^2 + 58,3x - 3,52
 \end{aligned}$$

b)

$$F_{\text{rel}} = \frac{\tilde{y}_{\text{New}}(x = 0,35) - y(x = 0,35)}{y(x = 0,35)} = \frac{4,6046 - 4,6}{4,6} \hat{=} 0,1\%$$

c) Die Erweiterung des Polynoms führt zu folgendem Ansatz:

$$\tilde{y}_{\text{New2}}(x) = \tilde{y}_{\text{New}}(x) + a_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Der Koeffizient a_4 lässt sich nun entweder über die Erweiterung des Differenzenschemas (in grün) berechnen oder alternativ auch über den rekursiven Ansatz der Newton-Interpolation. Hierzu wird der Ansatz von $\tilde{y}_{\text{New2}}(x)$ nach a_4 aufgelöst und für $x = x_4$ ausgewertet:

$$a_4 = \frac{\tilde{y}_{\text{New2}}(x_4) - \tilde{y}_{\text{New}}(x_4)}{(x_4 - x_0)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} = 235,24$$

Das erweiterte Polynom berechnet sich somit zu:

$$\begin{aligned}
 \tilde{y}_{\text{New2}}(x) &= \tilde{y}_{\text{New}}(x) + 235,24(x - 0,2)(x - 0,35)(x - 0,5)(x - 0,65) \\
 &= 235,24x^4 - 345,59x^3 + 122,45x^2 - 2,69x + 1,83
 \end{aligned}$$

- d) Die Basisfunktionen müssen linear unabhängig voneinander sein.
e) Das LS-Gleichungssystem lautet:

$$\mathbf{z} = \Phi \cdot \mathbf{b}$$

mit:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 3,803 \\ 3,647 \\ 0,676 \\ -1,052 \end{pmatrix}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \sin(2\pi \cdot 0,1) & \sin(4\pi \cdot 0,1) \\ \sin(2\pi \cdot 0,2) & \sin(4\pi \cdot 0,2) \\ \sin(2\pi \cdot 0,3) & \sin(4\pi \cdot 0,3) \\ \sin(2\pi \cdot 0,4) & \sin(4\pi \cdot 0,4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5878 & 0,9511 \\ 0,9511 & 0,5878 \\ 0,9511 & -0,5878 \\ 0,5878 & -0,9511 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

Mit der Pseudoinversen berechnet man A und B :

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{z}$$

mit

$$(\Phi^T \Phi)^{-1} = \begin{pmatrix} 2,5 & 0 \\ 0 & 2,5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{pmatrix}$$

folgt

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,2914 \\ 2,5455 \end{pmatrix}.$$

- f) Die fehlenden Farbwerte werden interpoliert und anschließend gerundet, da durch die Quantisierung nur ganze Werte von 0 bis 255 zugelassen sind:

$$B_{11} = \frac{B_{01} + B_{21}}{2} = 30$$

$$R_{11} = \frac{R_{10} + R_{12}}{2} = 77,5 \hat{=} 78$$

$$G_{12} = \frac{G_{11} + G_{02} + G_{22} + G_{13}}{4} = 93,25 \hat{=} 93$$

$$B_{12} = \frac{\frac{B_{01} + B_{03}}{2} + \frac{B_{21} + B_{23}}{2}}{2} = 32,75 \hat{=} 33$$

- g) Das verwendete lineare Interpolationsverfahren hat die Ordnung 1. Ein Interpolationsverfahren niedrigerer Ordnung ist das Nächster-Nachbar-Verfahren. Bei mehreren gleichnahen Nachbarn müsste entschieden werden, welcher Nachbar verwendet wird.

Aufgabe 2: Stationäres Verhalten von Messsystemen (21 Punkte)

Im Folgenden soll das Verfahren der Gegenkopplung näher untersucht werden.

- a) Wann ist prinzipiell eine Gegenkopplung möglich? (1 Punkt)
- b) Nennen Sie einen Nachteil der Gegenkopplung. Wozu kann dies schlimmstenfalls führen? (1 Punkt)
- c) Berechnen Sie die Empfindlichkeit $S_g = \frac{dy}{du}$ am Ausgang eines Systems mit Gegenkopplung für eine allgemeine Messkennlinie $f(v)$. Erklären Sie daraus die linearisierende Wirkung des Verfahrens. (3 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- d) Wie groß ist der Kennlinienfehler im Arbeitspunkt bei der Differenzmethode? (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- e) Nennen Sie eine Möglichkeit, wie mit systematischen Störeinflüssen, welche vorab bekannt sind, umgegangen werden kann. (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Es soll ein Messverstärker mit drei Stufen entworfen werden. Die einzelnen Stufen zeigen dabei lineares Verhalten. Als mögliche Bauteile stehen drei Elemente nach Tabelle 3 zur Auswahl.

Bauteil	Verstärkung S_k	Nullpunktdrift
A	$S_a = 20$	0,2 mV
B	$S_b = 30$	0,5 mV
C	$S_c = 20$	0,5 mV

Tabelle 3: Daten der zur Verfügung stehenden Bauteile.

- f) Skizzieren Sie die Anordnung. (1 Punkt)
- g) Um welche Art von Fehler handelt es sich bei der Nullpunktdrift? (1 Punkt)
- h) In welcher Reihenfolge müssen die drei Stufen verschaltet werden, wenn von jedem Bauteil nur eines vorhanden ist? Begründen Sie Ihre Aussage mit dem absoluten Fehler. (2 Punkte)
- i) Wie müssen allgemein die Empfindlichkeit und die Nullpunktdrift des ersten Verstärkungsglieds gewählt werden? Begründen Sie anhand des relativen und des absoluten Fehlers. (2 Punkte)
- j) Wie würde die Wahl und Reihenfolge der Bauteile ausfallen, wenn von jedem Bauteil beliebig viele zur Verfügung stehen würden und eine Gesamtverstärkung von 12000 gefordert ist? (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Die Kennlinie eines Temperatursensors ist im Datenblatt wie folgt angegeben:

$$y(u) = 2 \cdot \arctan(u - 2) .$$

- k)** Nun muss der Messbereich festgelegt werden, in welchem die Kennlinie möglichst linear verläuft. Wovon hängen die Bedingungen für die Wahl des Messbereiches ab? Geben Sie den günstigsten Messbereich $u_a \leq u \leq u_a + d$ für $d = 2$ an. *(3 Punkte)*
- l)** Berechnen Sie für den Messbereich aus der vorherigen Aufgabe die zugehörige ideale Kennlinie $y_i(u)$. *(1 Punkt)*
- m)** Bestimmen Sie den Betrag des absoluten Fehlers $F_{\text{abs}}(u) = |y(u) - y_i(u)|$ und berechnen Sie dessen Maxima im Messbereich $u_a \leq u \leq u_e$. *(3 Punkte)*

Lösung

- a) Eine Gegenkopplung ist dann möglich, wenn ein Gegenkopplungsglied existiert, welches das Ausgangssignal y auf die physikalische Größe des Messsignals u abbilden kann.
- b) Durch die Gegenkopplung wird dem System zusätzliche Dynamik hinzugeführt. Im schlimmsten Fall kann dies zu sehr langen Einschwingzeiten oder sogar zur Instabilität führen.
- c) Für die Berechnung der Empfindlichkeit am Ausgang des Systems werden folgende Zusammenhänge benötigt:

$$y = Vf(v) \text{ und } v = u - K(y)$$

Durch Umformen der gewünschten Differentiation zu

$$S_g = \frac{dy}{du} = V \frac{df(v)}{dv} = V \frac{df(v)}{dv} \frac{dv}{du}$$

und Einsetzen der oben aufgestellten Beziehungen erhält man:

$$S_g = VS(v) \left(1 - \frac{dK(y)}{dy} \frac{dy}{du} \right) = VS(v) (1 - K' S_g).$$

Nach Zusammenfassen folgt als Ergebnis:

$$S_g = \frac{VS(v)}{1 + VS(v)K'}.$$

Die linearisierende Wirkung des Verfahrens wird deutlich bei der Betrachtung

$$\lim_{V \rightarrow \infty} S_g = \frac{1}{K'}.$$

Damit geht mit wachsender Verstärkung V die Kennlinie über in

$$y = \frac{1}{K'} u.$$

- d) Der Kennlinienfehler im Arbeitspunkt bei der Differenzmethode ist identisch null.
- e) Durch eine Kennfeld-Interpolation können die systematischen Störeinflüsse berücksichtigt und somit kompensiert werden.
- f) Die Anordnung ist in Abb. 1 zu sehen.

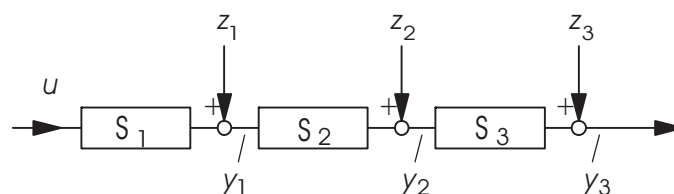


Abbildung 1: Messkette

- g) Es handelt sich dabei um einen superponierenden Fehler.

- h) Für eine dreigliedrige Messkette berechnet sich der absolute Fehler aus

$$F_{\text{abs}} = S_2 S_3 z_1 + S_3 z_2 + z_3.$$

Um also den kleinsten Fehler zu erhalten, muss S_3 und z_1 gering sein. Damit ergibt sich der absolute Fehler zu

$$F_{\text{abs}} = 130,5 \text{ mV}, \text{ mit } S_1 = S_a, S_2 = S_b, S_3 = S_c.$$

- i) Der absolute Fehler berechnet sich als die Summe der von den jeweils nachfolgenden Bauteilen verstärkten Nullpunktdrifts. Somit wird die erste Nullpunktdrift von allen nachfolgenden Bauteilen verstärkt und sollte möglichst klein gewählt werden.

Um einen zur Gesamtverstärkung relativ kleinen Fehler zu erhalten, muss die Verstärkung des ersten Bauteiles möglichst groß sein, da dieses die Nullpunktdrift nicht verstärkt.

- j) A-A-B

- k) Für die Wahl des günstigsten Messbereiches wird überprüft, ob die Kennlinie einen Wendepunkt im betrachteten Intervall hat oder nicht.

$$\begin{aligned} \frac{dy(u)}{du} &= \frac{2}{1 + (u - 2)^2} \\ \frac{d^2y(u)}{du^2} &= \frac{-4 \cdot (u - 2)}{(1 + (u - 2)^2)^2} \\ \frac{d^3y(u)}{du^3} &= \frac{-4}{(1 + (u - 2)^2)^2} + \frac{16 \cdot (u - 2)^2}{(1 + (u - 2)^2)^3} \end{aligned}$$

Aus

$$\frac{d^2y(u)}{du^2} = 0$$

folgt $u_W = 2$.

Daher ist folgende Bedingung zu erfüllen:

$$\frac{dy(u_a)}{du} \stackrel{!}{=} \frac{dy(u_a + d)}{du}$$

$$\begin{aligned} u_a^2 - 4u_a + 4 &= u_a^2 + 2u_a d - 4u_a + d^2 - 4d + 4 \\ 0 &= 2u_a d + d^2 - 4d. \end{aligned}$$

Der Messanfang ergibt sich aus

$$u_a = \frac{4 - d}{2}$$

mit $d = 2$ zu $u_a = 1$.

Der Messbereich liegt im Intervall $1 \leq u \leq 3$.

- l) Für die Berechnung der idealen Kennlinie $y_i = S_i \cdot (u - u_a) + y_a$ geht man wie folgt vor:

$$1. \quad S_i = \frac{y_e - y_a}{u_e - u_a} = \frac{1,5708 - (-1,5708)}{3 - 1} = 1,5708$$

$$2. \quad y_i = S_i \cdot (u - u_a) + y_a = 1,5708(u - 1) - 1,5708 = 1,5708u - 3,1416$$

m) Der absolute Fehler ergibt sich zu:

$$F_{\text{abs}}(u) = |y(u) - y_i(u)| = |2 \arctan(u - 2) - 1,5708u + 3,1416|.$$

Um eine Fallunterscheidung bei der Ableitung des Betrages im absoluten Kennlinienfehler zu umgehen, betrachtet man stattdessen die stetig differenzierbare Funktion $\tilde{F}_{\text{abs}}$ mit $F_{\text{abs}} = |\tilde{F}_{\text{abs}}|$. Im vorgegebenen Intervall werden die sich ergebenden Fehlerwerte aller lokalen Extrema im Messbereich von $\tilde{F}_{\text{abs}}$ miteinander verglichen. Diejenigen Stellen mit dem betragsmäßig größten Fehlerwert sind gleichzeitig die Stellen, bei denen F_{abs} maximal wird:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{F}_{\text{abs}}(u)}{du} &= \frac{2}{1 + (u - 2)^2} - 1,5708 \\ \frac{d\tilde{F}_{\text{abs}}(u)}{du} &\stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Man erhält aus der quadratischen Gleichung $u^2 - 4u + 5 - \frac{2}{1,5708} = 0$

$$u_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 5 + \frac{2}{1,5708}}$$

bzw. $u_1 = 2,5227$ und $u_2 = 1,4772$.

Es ergibt sich für den absoluten Fehler $F_{\text{abs}}(u_1) = F_{\text{abs}}(u_2) = 0,1422$.

Zur Untersuchung der Ränder des Messbereiches setzt man u_a, u_e in $F_{\text{abs}}(u)$ ein und erhält $F_{\text{abs}}(u) \approx 0$. Auch an der Stelle $u = 0$ ergibt sich $F_{\text{abs}}(u) = 2$, da hier durch den Betrag ein weiterer Extrempunkt des absoluten Fehlers liegt.

Die beiden Werte u_1, u_2 sind also die Stellen, an denen $F_{\text{abs}}(u)$ maximal wird.

Aufgabe 3: Statistik (17 Punkte)

Aus einer Stichprobe haben Sie folgende 20 voneinander unabhängige Messwerte x gegeben:

-2,4	2,3	-0,9	1,2	1,1	1,7	-1,3	1,3	-0,7	1,3
0,3	0,1	0,4	0,3	0,2	0,6	-0,6	1,2	-1,1	-0,4

Tabelle 4: Messwerte.

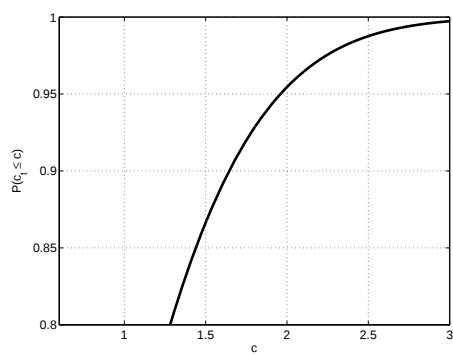
- a) Teilen Sie die Stichprobe in 5 gleich breite Klassen im Wertebereich $-2,5$ bis $+2,5$ ein und zeichnen Sie das Histogramm. (2 Punkte)
- b) Nehmen Sie an, dass die Stichprobenwerte annähernd eine unsymmetrische Dreiecksverteilung mit den Grenzen $-2,5$ und $2,5$ besitzen. Geben Sie eine mathematische Beschreibung dieser Verteilungsdichte $f_{\text{tri}}(x)$ an, wenn ihr Maximum bei $x = 1$ liegt. (3 Punkte)
- c) Zeichnen Sie mittels Ihres Ergebnisses aus der vorherigen Aufgabe die erwartete Verteilung im Bezug auf die Größe der Stichprobe in Ihr Histogramm ein. (1 Punkt)

Um Ihre Annahme zu überprüfen, verwenden Sie den χ^2 -Anpassungstest.

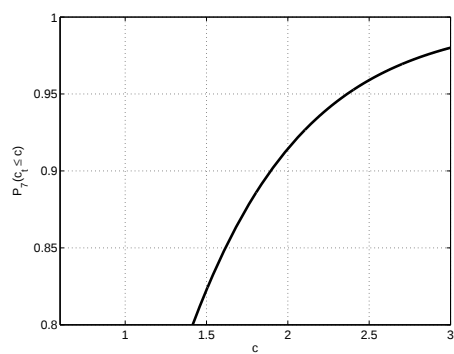
- d) Nennen Sie alle Anforderungen an die Stichprobe und die Klasseneinteilung für den χ^2 -Anpassungstest und prüfen Sie, ob diese erfüllt sind. Hinweis: Der Stichprobenumfang wird als ausreichend groß angenommen. (2 Punkte)
- e) Stellen Sie die Nullhypothese für den χ^2 -Anpassungstest auf. (1 Punkt)
- f) Testen Sie, ob Sie die Hypothese aus der vorherigen Teilaufgabe annehmen bei einer statistischen Sicherheit von 96 %. Geben Sie ebenfalls die Anzahl der Freiheitsgrade für den gegebenen Fall an. (4 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen.

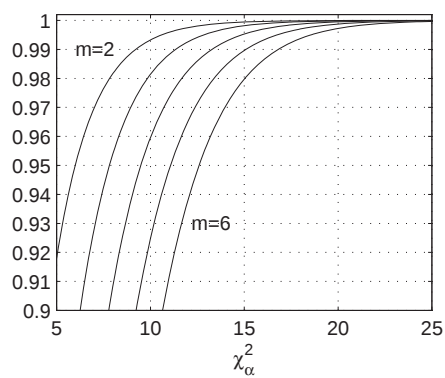
- g) Nehmen Sie an, der Anpassungstest hätte Ihre Anfangsvermutung bestätigt. Durch weitere Stichproben stellen Sie jedoch fest, dass die Messgröße doch nicht der angenommenen Verteilung entspricht. Was für einen Fehler hätten Sie begangen und wie lässt sich dieser vermeiden? (2 Punkte)
- h) Eine Zufallsvariable ist χ^2 verteilt, wenn sie sich aus einer Verknüpfung verschiedener anderer Zufallsgrößen zusammensetzt. Wie sind diese Zufallsgrößen miteinander verknüpft und wie sehen deren Wahrscheinlichkeitsdichten aus? (1 Punkt)
- i) Wie verändert sich die Varianz $\sigma_{\bar{x}}^2$ eines Stichprobenmittelwertes von statistisch unabhängigen Messgrößen bei wachsendem Stichprobenumfang n ? (1 Punkt)



(a) Standardnormalverteilung



(b) t-Verteilung



(c) χ^2 -Verteilung

Abbildung 2: Verteilungsfunktionen für verschiedene Zufallsvariablen.

Lösung

a) Abb. 3 zeigt die gesuchten Klassen.

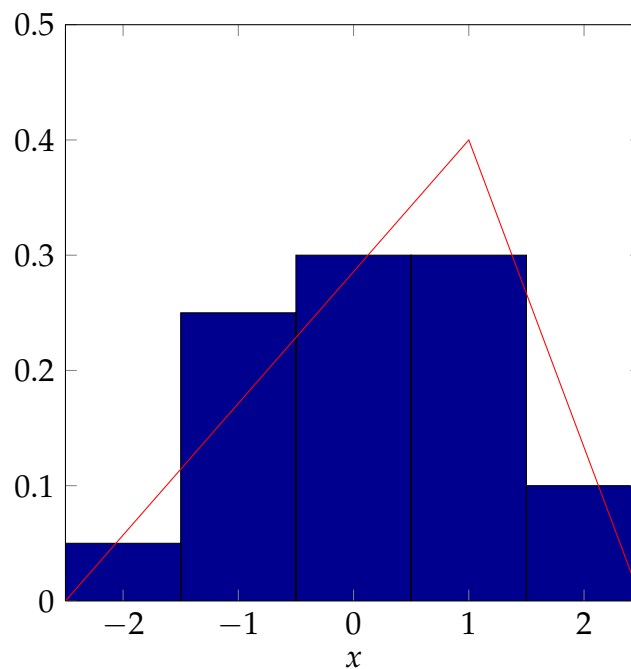


Abbildung 3: Histogramm

b) Die Fläche unter der Dreiecksdichte muss eins ergeben und somit lautet:

$$f_{\text{tri}}(x) = \begin{cases} \frac{2}{7} + x \cdot \frac{4}{35} & \text{für } -2,5 \leq x < 1 \\ \frac{2}{3} - x \cdot \frac{4}{15} & \text{für } 1 \leq x \leq 2,5 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

c) Siehe Abb. 3.

- d)
- unabhängige Messwerte
 - ausreichend große Stichprobe
 - $n_i \geq 5$
 - $n_{i \text{ Rand}} \geq 1$

Alle Anforderungen sind erfüllt.

e)

$$H_0 : f_x(x) = f_{\text{tri}}(x)$$

f) Berechnung der Klassenwahrscheinlichkeiten

$$p_i = P(a_i \leq x \leq b_i) = \int_{a_i}^{b_i} f_{\text{tri}}(x) dx, \text{ mit den Klassengrenzen } a_i \text{ und } b_i$$

i	p_i	$(n_i - np_i)^2$	np_i	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
1	$\frac{2}{35}$	0,0204	1,1429	0,0179
2	$\frac{6}{35}$	2,4695	3,4286	0,7202
3	$\frac{2}{7}$	0,0816	5,7143	0,0143
4	$\frac{37}{105}$	1,0975	7,0476	0,1557
5	$\frac{2}{15}$	0,4444	2,6667	0,1667

Berechnung der Prüfgröße χ^2

$$\chi^2 \approx \sum_{i=1}^5 \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = 1,0748$$

Bestimmung der Freiheitsgrade

$$m = k - 1 = 5 - 1 = 4$$

Ermitteln von χ_α^2 beispielsweise aus Abbildung 4.20 aus dem Messtechnik-Buch (8. Auflage) und mit $1 - \alpha = 0,96$ ergibt $\chi_\alpha^2 \approx 10$. Daher wird die Hypothese angenommen, da $\chi_\alpha^2 \geq \chi^2$.

- g) Es würde sich um einen unterbliebenen Alarm (Schlupf), also einen Fehler 2. Art, handeln. Die Wahrscheinlichkeit eines solchen Fehlers steigt für kleine Werte von α , weswegen α nicht so klein wie möglich gewählt werden sollte, sondern größer.
- h) Eine χ^2 -verteilte Zufallsvariable setzt sich aus der Quadratsumme normalverteilter Zufallsvariablen zusammen.
- i) Die Varianz des Stichprobenmittelwertes ist proportional zu $1/n$, nimmt also bei wachsender Stichprobe ab.

Aufgabe 4: Korrelation (20 Punkte)

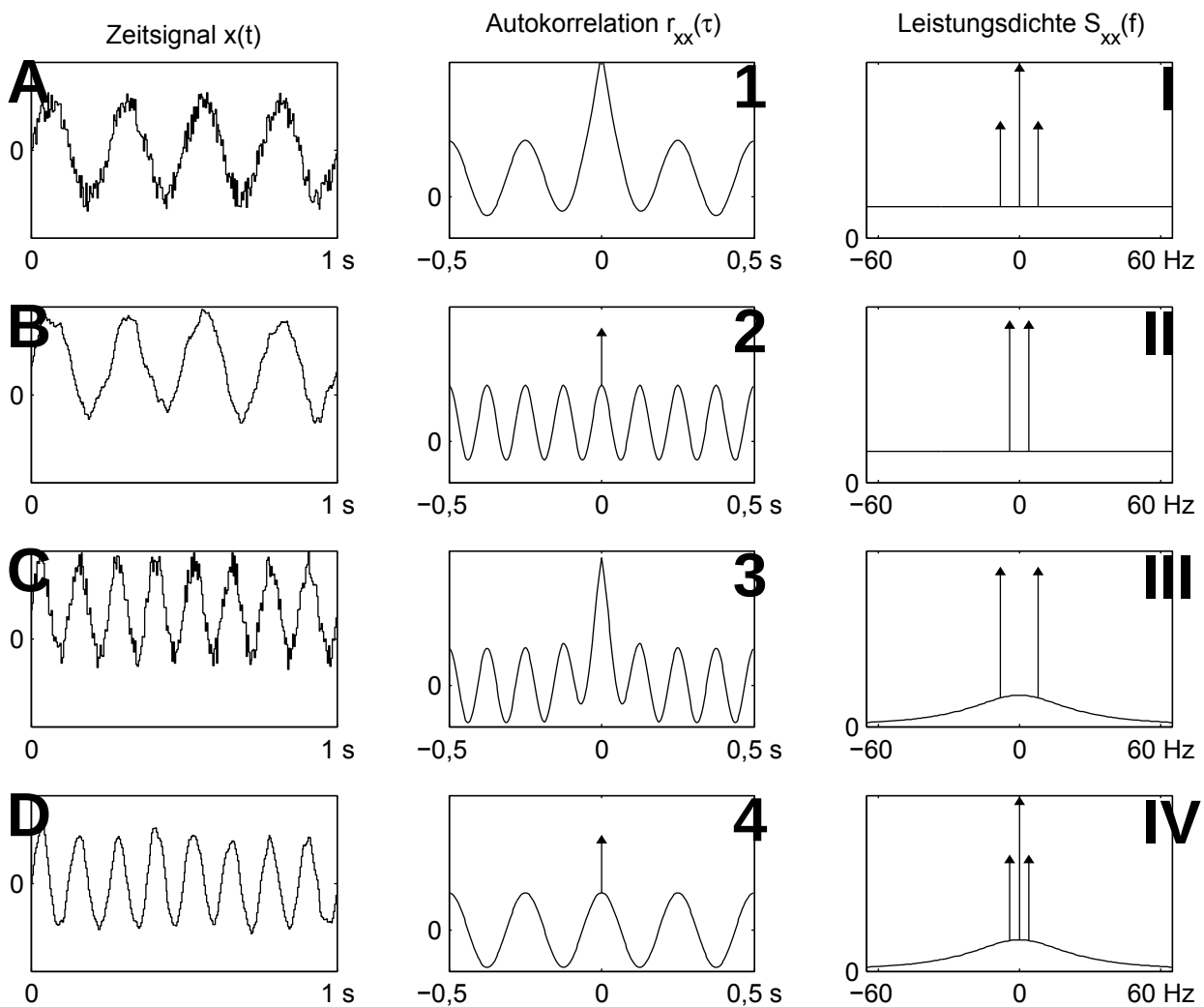


Abbildung 4: Zuordnungsaufgabe.

- a) Ordnen Sie den Zeitsignalen $x(t)$ in Abb. 4 die entsprechenden Autokorrelationsfunktionen $r_{xx}(\tau)$ und Leistungsdichten $S_{xx}(f)$ zu und begründen Sie jede Zuordnung über die jeweils entscheidenden Eigenschaften der Funktionen. (6 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von der vorherigen.

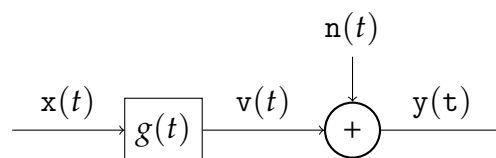


Abbildung 5: Modell eines Systems.

- b) In Abb. 5 ist ein System mit unbekannter Impulsantwort $g(t)$ abgebildet. Welche Voraussetzung müssen $x(t)$ und $n(t)$ erfüllen, damit $g(t)$ eindeutig identifiziert werden

kann, wenn die Kreuzkorrelationsfunktion $r_{yx}(\tau)$ gemessen und $x(t)$ als bekannt vorausgesetzt wird? Begründen Sie Ihre Antwort rechnerisch. (3 Punkte)

- c) Die Autokorrelationsfunktion am Ausgang wurde zu $r_{yy}(\tau) = \frac{b}{2} \cdot \exp(-b|\tau|)$ bestimmt. Als Eingangssignal diene weißes Rauschen mit der konstanten Leistungsdichte $S_{xx}(f) = N^2$. Das farbige Rauschen $n(t)$ hat die Leistungsdichte $S_{nn}(f) = 1/(2 + 2 \cdot (2\pi f/b)^2)$. Berechnen Sie das Betragsquadrat der Übertragungsfunktion $|G(f)|^2$ unter der Annahme, dass die Voraussetzungen aus der vorherigen Teilaufgabe erfüllt sind. (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen.

In einem unterirdischen mit Wasser gefüllten Rohrnetz ist ein Leck aufgetreten, welches das Schallsignal $z(t)$ verursacht. Um die Rohre nicht komplett freilegen zu müssen, soll mit Hilfe der Korrelationsmesstechnik der Ort des Lecks gefunden werden. Dafür werden drei Sensoren in den Rohrenden platziert, die die Signale $u_1(t)$, $u_2(t)$ und $u_3(t)$ messen (Abb. 6). Dabei wird angenommen, dass der Schall des ausströmenden Wassers sich über die Rohrmitten mit der konstanten Geschwindigkeit c ausbreitet (vgl. gestrichelte Linie). Ebenso erfolgt die Ausbreitung ideal und ohne Streuung, so dass die Schallintensität als konstant angenommen werden kann. Die Längen der beiden geraden Rohrstücke l_1 und l_2 sowie der Durchmesser der Rohre d seien bekannt.

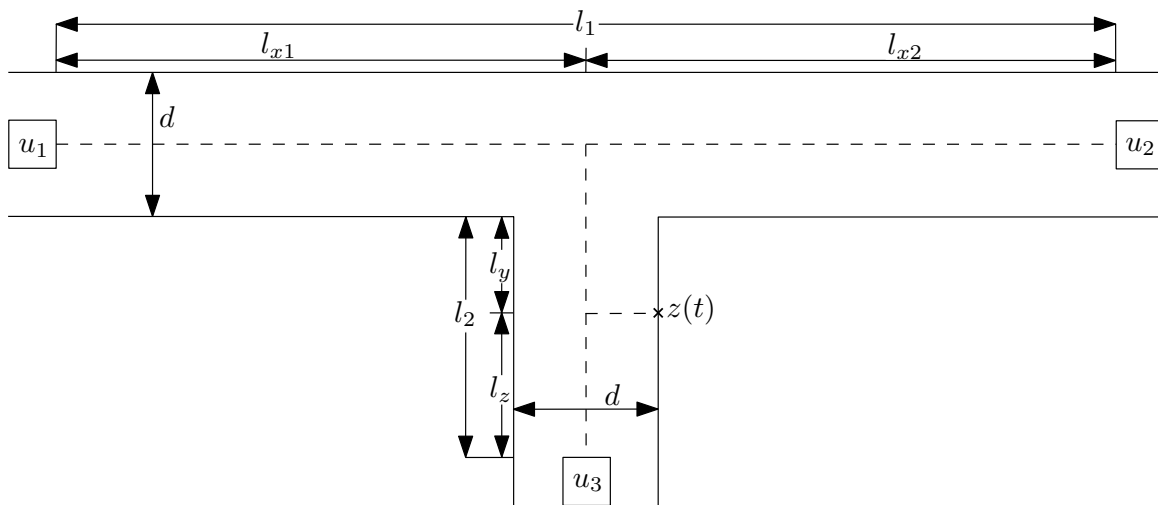


Abbildung 6: Das beschädigte Rohrnetz.

- d) Geben Sie die an den drei Sensoren empfangenen Signale $u_1(t)$, $u_2(t)$ und $u_3(t)$ in Abhängigkeit vom Lecksignal $z(t)$ an. (2 Punkte)
- e) Wie können Sie über die Kreuzkorrelationen $r_{u_1 u_2}(\tau)$, $r_{u_2 u_3}(\tau)$ die beiden Entfernungen l_{x_2} und l_y bestimmen? Geben Sie die gesuchten Längen an. Verwenden Sie hierbei nur aus der Aufgabenstellung oder durch das Verfahren ermittelte Werte.
Hinweis: Die Kreuzkorrelationen müssen nicht explizit berechnet werden. (5 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen.

- f) Wie können Sie das Wiener-Filter in einer Echtzeitanwendung einsetzen? Welchen Nachteil bringt dies mit sich? (2 Punkte)

Lösung

a) • A – 4 – II

$x(t)$	Sinus $f_0 = 4 \text{ Hz}$	kein Offset	weißes Rauschen
$r_{xx}(\tau)$	Cosinus $f_0 = 4 \text{ Hz}$	kein Offset	$\delta(\tau) \cdot \sigma^2$
$S_{xx}(f)$	Impulse bei f_0	kein $\delta(f)$	Offset σ^2

• B – 1 – IV

$x(t)$	Sinus $f_0 = 4 \text{ Hz}$	Offset A	farbiges Rauschen
$r_{xx}(\tau)$	Cosinus $f_0 = 4 \text{ Hz}$	Offset A^2	Überhöhung um $\tau = 0$
$S_{xx}(f)$	Impulse bei f_0	$\delta(f) \cdot A^2$	Glocke um $f = 0$

• C – 2 – I

$x(t)$	Sinus $f_0 = 8 \text{ Hz}$	Offset A	weißes Rauschen
$r_{xx}(\tau)$	Cosinus $f_0 = 8 \text{ Hz}$	Offset A^2	$\delta(\tau)$
$S_{xx}(f)$	Impulse bei f_0	$\delta(f) \cdot A^2$	Offset σ^2

• D – 3 – III

$x(t)$	Sinus $f_0 = 8 \text{ Hz}$	kein Offset	farbiges Rauschen
$r_{xx}(\tau)$	Cosinus $f_0 = 8 \text{ Hz}$	kein Offset	Überhöhung um $\tau = 0$
$S_{xx}(f)$	Impulse bei f_0	kein $\delta(f)$	Glocke um $f = 0$

b) Eine eindeutige Identifikation lässt sich laut Vorlesung für den gegebenen Fall aus:

$$G(f) = \frac{S_{xy}(f)}{S_{xx}(f)}$$

berechnen. Da jedoch nur $r_{yx}(\tau)$ gegeben ist, muss gezeigt werden, unter welchen Voraussetzungen auch mittels $r_{yx}(\tau)$ die Übertragungsfunktion $G(f)$ angegeben werden kann. Dazu wird die gemessene Kreuzkorrelation genauer betrachtet:

$$\begin{aligned} r_{yx}(\tau) &= E \{y(t+\tau)x(t)\} \\ &= E \{(v(t+\tau) + n(t+\tau))x(t)\} \\ &= \underbrace{E \{v(t+\tau)x(t)\}}_{r_{vx}(\tau)} + \underbrace{E \{n(t+\tau)x(t)\}}_{r_{nx}(\tau)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Wenn $x(t)$ und $n(t)$ unkorreliert sind, ist $r_{nx} = E \{n(t)\} \cdot E \{x(t)\} = 0$, falls eines der beiden Signale mittelwertfrei ist. Somit fällt der Term r_{nx} in Gleichung 1 heraus und hat damit keinen Einfluss auf die Identifikation des Systems.

Also müssen $x(t)$ und $n(t)$ unkorreliert sein und $n(t)$ oder $x(t)$ muss ein mittelwertfreies Signal sein.

c) Die Leistungsdichte von $y(t)$ ist $S_{yy}(f) = \frac{b^2}{b^2 + (2\pi f)^2}$ und ergibt sich aus

$$S_{yy}(f) = S_{xx}(f)|G(f)|^2 + S_{nn}(f), \text{ wenn } x(t) \text{ und } n(t) \text{ unkorreliert sind.}$$

Für $|G(f)|^2$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \underbrace{G(f)G^*(f)}_{|G(f)|^2} &= \frac{S_{yy}(f) - S_{nn}(f)}{S_{xx}(f)} = \frac{\frac{b^2}{b^2 + (2\pi f)^2} - \frac{b^2}{2(b^2 + (2\pi f)^2)}}{N^2} \\ &= \frac{b^2}{2 \cdot N^2(b^2 + (2\pi f)^2)}. \end{aligned}$$

d) Die drei empfangenen Signale ergeben sich zu

$$\begin{aligned}u_1(t) &= z\left(t - \frac{l_y + d + l_{x1}}{c}\right) \\u_2(t) &= z\left(t - \frac{l_y + d + l_{x2}}{c}\right) \\u_3(t) &= z\left(t - \frac{\frac{d}{2} + l_z}{c}\right).\end{aligned}$$

e) Die Kreuzkorrelation $r_{u_1 u_2}(\tau)$ berechnet sich zu

$$r_{u_1 u_2}(\tau) = E \left\{ z\left(t + \tau - \frac{l_y + d + l_{x1}}{c}\right) z\left(t - \frac{l_y + d + l_{x2}}{c}\right) \right\}.$$

Sie wird genau dann maximal, wenn die beiden Terme übereinstimmen. Dann gilt folgende Beziehung, wobei τ_1 den Wert für τ repräsentiert, der die Korrelation maximal werden lässt:

$$\begin{aligned}\tau_1 - \frac{l_y + d + l_{x1}}{c} &= -\frac{l_y + d + l_{x2}}{c} \\ \Rightarrow \tau_1 &= \frac{l_{x1} - l_{x2}}{c}.\end{aligned}$$

Mit Hilfe der bekannten Länge l_1 ergibt sich für die gesuchte Länge

$$l_{x2} = \frac{l_1 - \tau_1 c}{2}.$$

Die zweite zu berechnende Kreuzkorrelation berechnet sich analog.

$$r_{u_2 u_3} = E \left\{ z\left(t + \tau - \frac{l_y + d + l_{x2}}{c}\right) z\left(t - \frac{\frac{d}{2} + l_z}{c}\right) \right\}$$

Aus den gleichen Überlegungen resultiert das Maximum dieser Korrelation genau dann, wenn

$$\tau_2 = \frac{l_y + l_{x2} - l_z + \frac{d}{2}}{c} = \frac{2l_y + l_{x2} - l_2 + \frac{d}{2}}{c}$$

ist. Daraus ergibt sich die zweite gesuchte Länge zu

$$l_y = \frac{l_2 + c\tau_2 - l_{x2} - \frac{d}{2}}{2}.$$

f) Das Wiener-Filter ist im Allgemeinen akausal. Indem man die Impulsantwort des Filters für $t < 0$ zu null setzt, erhält man ein kausales Filter. Dieses Filter kann in Echtzeitanwendungen eingesetzt werden, führt jedoch nicht mehr zu optimaler Signalrekonstruktion.

Aufgabe 5: Quantisierung und Abtastung (20 Punkte)

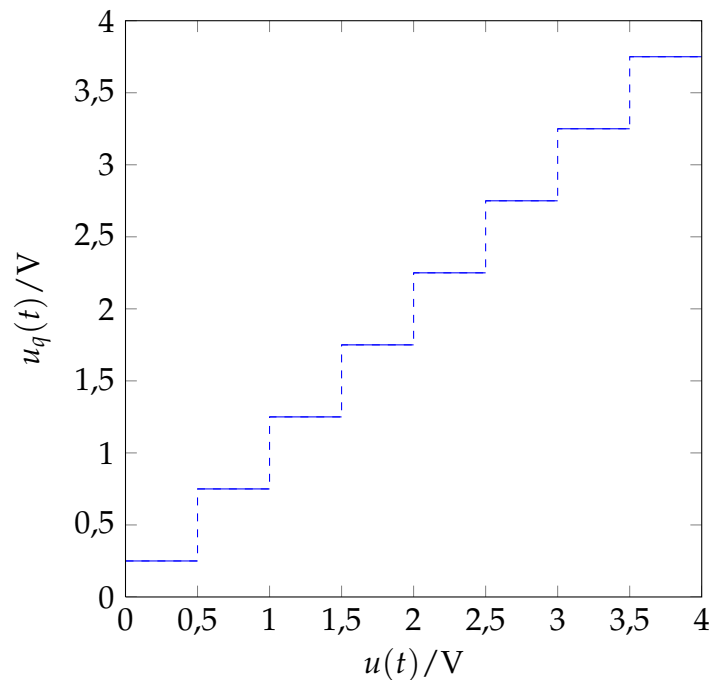


Abbildung 7: Kennlinie eines Quantisierers.

Sie haben einen A/D-Umsetzer mit einem Eingangsbereich von 0 V–4 V gegeben. Seine Kennlinie ist in Abb. 7 gegeben. Dieser wird mit dem konstanten Eingangssignal $U = 3,3$ V beschaltet.

- Skizzieren Sie die schrittweise Umsetzung mittels sukzessiver Approximation und geben Sie die jeweils gesetzten Bits an. (3 Punkte)
- Vergleichen Sie für den Nachlaufumsetzer und die sukzessive Approximation den für das Signal $U = 3,3$ V resultierenden mittleren Quantisierungsfehler für $t \rightarrow \infty$ und entscheiden Sie sich für das Verfahren mit der größeren Genauigkeit. (2 Punkte)
- Geben Sie das mit diesem Umsetzer erreichbare SNR in dB unter Annahme eines linearen Quantisierungsmodells und eines sinusförmigen Eingangssignals an. (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen.

Sie möchten ein Musiksignal aufzeichnen und wählen hierzu eine Abtastfrequenz von $f_A = 44$ kHz.

- Warum ist die gewählte Abtastfrequenz sinnvoll, wenn Sie davon ausgehen, dass Sie Frequenzen oberhalb von 20 kHz nicht hören können? (1 Punkt)

Das aufzunehmende Signal besitzt Frequenzspitzen von bis zu 24 kHz. Ihnen steht jedoch

ein Vorverarbeitungsfiler $|G(f)|^2 \approx \begin{cases} 1 & \text{für } |f| \leq f_g \\ \left(\frac{f_g}{f}\right)^{10} & \text{für } |f| > f_g \end{cases}$ mit einer Grenzfrequenz von

$f_g = 18$ kHz zur Verfügung. Die Leistungsdichte des Eingangssignals kann vereinfacht als konstant für $|f| < 24$ kHz angenommen werden und sonst als null.

- e) Berechnen Sie den durch Aliasing entstehenden Signal-Störabstand (SNR) in dB des Signals ohne und mit Verwendung des Vorfilters. *(5 Punkte)*
- f) Sie sind mit dem Ergebnis noch nicht zufrieden. Nennen Sie 2 mögliche Verbesserungen. *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen.

Mit der nun verbesserten Vorfilterung erreichen Sie eine Bandbegrenzung bei 22 kHz und können Aliasingeffekte vernachlässigen. Sie fordern für die komplette D/A-Umsetzung nun ein SNR von 80 dB.

- g) Welche Anforderungen müssen Sie an einen gleichverteilten Abtastzeitfehler τ und die Anzahl der Quantisierungsstufen N_q stellen, um das gewünschte SNR einzuhalten?

Hinweis: Nehmen Sie an, dass das Quantisierungstheorem erfüllt ist und berechnen Sie zuerst die für die Quantisierung benötigte Bitanzahl.

(3 Punkte)

- h) Für die Umsetzung verwenden Sie einen Delta-Sigma-Umsetzer 1. Ordnung. Bestimmen Sie den nötigen Überabtastfaktor M . *(1 Punkt)*
- i) Beschreiben Sie kurz den Zweck des MA-Filters am Ausgang des Delta-Sigma-Umsetzers. *(2 Punkte)*

Lösung

a) Abb. 8 zeigt Approximation in i Schritten.

$i = 1$: Bitkonfiguration 100 wird gesetzt und wird bestätigt.

$i = 2$: Bitkonfiguration 110 wird gesetzt und wird bestätigt.

$i = 3$: Bitkonfiguration 111 wird gesetzt und auf 110 zurückgesetzt.

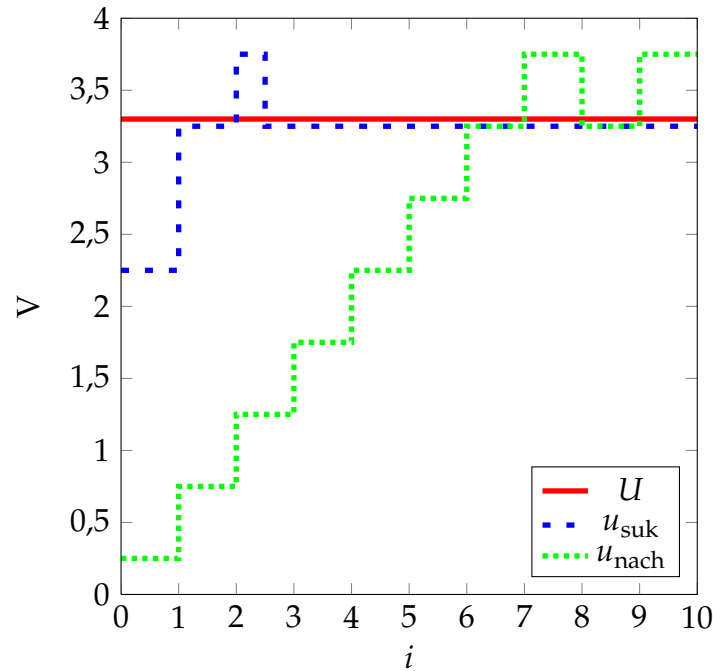


Abbildung 8: Kennlinie eines Quantisierers.

b) Siehe Abb. 8.

Nach unendlich langer Zeit ist der Fehler konstant für u_{suk} und alternierend für u_{nach} :

$$F_{u_{suk}} = U - u_{suk} = 3,3 \text{ V} - 3,25 \text{ V} = 0,05 \text{ V}$$

$$F_{u_{nach}} = \frac{U - u_{nach+} + U - u_{nach-}}{2} = \frac{3,3 \text{ V} - 3,75 \text{ V} + 3,3 \text{ V} - 3,25 \text{ V}}{2} = -0,2 \text{ V}.$$

Der sukzessive Umsetzer besitzt im Mittel eine höhere Genauigkeit.

c) Mit $N = 3$ Bit:

$$\text{SNR} = 10 \log(2^{2N} \cdot 1,5) = 10 \log(2^{2 \cdot 3} \cdot 1,5) = 19,82 \text{ dB}.$$

d) Die Abtastfrequenz f_A muss doppelt so hoch wie die höchste Signalfrequenz sein, um Aliasing zu vermeiden. Durch die begrenzte Steilheit von realen Filtern wird ein gewisser Puffer zwischen Durchlassbereich und Sperrbereich benötigt.

e) Ohne Vorfilter:

$$P_{\text{Nutz}} = \int_{-f_A/2}^{f_A/2} S_{xx} df = 2 \int_0^{22 \text{ kHz}} A df = A \cdot 44 \text{ kHz}$$

$$P_{\text{Stoer}} = \int_{-\infty}^{-f_A/2} S_{xx} df + \int_{f_A/2}^{\infty} S_{xx} df = 2 \int_{22 \text{ kHz}}^{24 \text{ kHz}} A df = A \cdot 4 \text{ kHz}$$

$$\text{SNR} = \frac{P_{\text{Nutz}}}{P_{\text{Stoer}}} = \frac{A \cdot 44 \text{ kHz}}{A \cdot 4 \text{ kHz}} = 11 \hat{=} 10,4139 \text{ dB.}$$

Mit Vorfilter:

$$\begin{aligned} P_{\text{Nutz}} &= 2 \int_0^{18 \text{ kHz}} A df + 2 \int_{18 \text{ kHz}}^{22 \text{ kHz}} A \left(\frac{18 \text{ kHz}}{f} \right)^{10} df \\ &= A \cdot 36 \text{ kHz} + 2A \frac{18 \text{ kHz}^{10}}{-9} (22 \text{ kHz}^{-9} - 18 \text{ kHz}^{-9}) \\ &= 2A(19\,671,3918 \text{ Hz}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{\text{Stoer}} &= 2 \int_{22 \text{ kHz}}^{24 \text{ kHz}} A \left(\frac{18 \text{ kHz}}{f} \right)^{10} df = \\ &= 2A \frac{18 \text{ kHz}^{10}}{-9} (24 \text{ kHz}^{-9} - 22 \text{ kHz}^{-9}) \\ &= 2A(178,4388 \text{ Hz}) \end{aligned}$$

$$\text{SNR} = \frac{P_{\text{Nutz}}}{P_{\text{Stoer}}} = 110,2416 \hat{=} 20,4234 \text{ dB.}$$

- f) Erhöhung der Abtastfrequenz und Senkung der Grenzfrequenz des verwendeten Filters.
g) Für den Quantisierungsfehler gilt laut Vorlesung:

$$\text{SNR}_{\text{Quant}} = 6,02 \cdot N + 1,76$$

und damit

$$\begin{aligned} \text{SNR} &= 80 \text{ dB} \leq \text{SNR}_{\text{Quant}} \\ \Rightarrow N &\geq 12,997 \hat{=} 13 \text{ Bit} \\ N_q &= 2^N = 8192 \text{ Quantisierungsstufen,} \end{aligned}$$

analog gilt für den Jitterfehler:

$$\begin{aligned} \text{SNR}_{\text{Jitter}} &= 10 \log \left(\frac{2}{(2\pi f_g \sigma_\tau)^2} \right) \\ \text{SNR} &= 80 \text{ dB} \leq \text{SNR}_{\text{Jitter}} \\ \Rightarrow \sigma_\tau^2 &= \left(\frac{10^{\frac{80}{10}}}{2} \cdot (2\pi 22 \text{ kHz})^2 \right)^{-1} = 1,0467 \cdot 10^{-18} \text{ s}^2. \end{aligned}$$

Zur Berechnung von τ_{max} wird der durch die Gleichverteilung gegebene Zusammenhang zu σ_τ genutzt:

$$\sigma_\tau^2 \leq \frac{(2\tau_{max})^2}{12}$$
$$\Rightarrow \tau_{max} \leq 1,772 \cdot 10^{-9} \text{ s} \approx 1,77 \text{ ns.}$$

h) Für Delta-Sigma-Umsetzer 1. Ordnung gilt näherungsweise

$$\text{SNR}_{\Delta\Sigma} \approx \frac{1}{4 \sin^2(\pi \frac{1}{M})}$$

und daher

$$\text{SNR}_{\Delta\Sigma} \geq \text{SNR}$$
$$M \geq 62831,85.$$

- i)**
- Erhöhung der Genauigkeit und Senkung der Abtastrate
 - Trennung von Signal- und Rauschanteilen durch Tiefpassfilterung