

Aufgabe 1: Kurvenanpassung / Kennlinienanalyse (19 Punkte)

Aus einer Messung sind Ihnen folgende Messwerte $y(x_i)$ an den Stützstellen x_i bekannt:

x_i	-3,1	-2,2	0	1
$y(x_i)$	3	2	7	6

Tabelle 1: Messwerte.

Zusätzlich wissen Sie, dass Sie das gegebene System nur in einem Eingangsbereich von $-3,1 \leq x \leq 1$ vermessen können.

- a) Zunächst haben Sie keine weiteren Informationen über eine mögliche Kennlinie. Nutzen Sie ein Ihnen aus der Vorlesung bekanntes Verfahren und alle bekannten Messwerte, um den Messwert an der Stelle $x_4 = 1,1$ zu berechnen. (6 Punkte)
- b) Sie stellen nun fest, dass Sie den ersten Ihrer Messwerte falsch von dem Messgerät abgeschrieben haben. Welches Berechnungsverfahren hätten Sie mit diesem Wissen in der vorherigen Aufgabe besser nicht verwendet, wenn Sie Ihre Berechnungen nun korrigieren möchten? Begründen Sie Ihre Antwort kurz. (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- c) Sie können durch weitere Überlegungen das Verhalten ihrer Messgröße auf ein Polynom 3. Ordnung eingrenzen und führen weitere Messungen durch. Mit welchem Ansatz lassen sich diese neuen Messwerte bei der Berechnung des Polynoms berücksichtigen? Geben Sie die Gleichungen für den Lösungsansatz an, ohne die Lösung explizit zu berechnen und begründen Sie Ihre Antwort. Geben Sie die Dimensionen der verwendeten Ausdrücke für eine Anzahl von N Messungen an. (3 Punkte)
- d) Sie möchten durch weitere Messungen Ihr Modell weiter verbessern. Welche Eigenschaft benötigt Ihr Schätzer, damit dies funktioniert? (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

u_i	-2,2	0	1
$y_2(u_i)$	2	7	6

Tabelle 2: Spline-Interpolation.

- e) Berechnen Sie für die angegebenen Werte die Spline-Koeffizienten für alle nötigen kubischen Splines. Sie müssen die Koeffizienten nicht in den Polynomansatz einsetzen und ausmultiplizieren. (5 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- f) Nennen Sie einen Vor- und einen Nachteil der Spline-Interpolation. (2 Punkte)

- g) Eignet sich die Spline-Interpolation besser oder schlechter für eine Extrapolation im Vergleich zu einer Interpolation nach Newton oder Lagrange? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 Punkt)

Lösung

- a) Da kein Wissen über die zugrundeliegende Kennlinie vorliegt, bieten sich die Interpolationsverfahren nach Newton oder nach Lagrange an. Für die Interpolation des Punktes y_4 muss zuerst das Interpolationspolynom berechnet werden.

Differenzenschema des Newton-Verfahrens:

x	$\Delta^0 y = y$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
-3,1	3			
-2,2	2	$\frac{-1}{0,9} = -\frac{10}{9}$	$\frac{\frac{335}{99}}{3,1} = \frac{3350}{3069}$	
0	7	$\frac{5}{2,2} = \frac{25}{11}$	$\frac{-\frac{36}{11}}{3,2} = -\frac{45}{44}$	$\frac{-\frac{45}{44} \frac{3350}{3069}}{4,1} = -0,5157$
1	6	$\frac{-1}{1} = -1$		

Der Newton-Ansatz bei 4 Stützstellen lautet:

$$\begin{aligned}
 \tilde{y}_{\text{New}}(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\
 &\quad + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
 &= \Delta^0 y + \Delta^1 y(x - x_0) + \Delta^2 y(x - x_0)(x - x_1) \\
 &\quad + \Delta^3 y(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).
 \end{aligned}$$

Einsetzen der Werte aus dem Differenzenschema ergibt:

$$\begin{aligned}
 \tilde{y}_{\text{New}}(x) &= 3 - \frac{10}{9}(x + 3,1) + \frac{3350}{3069}(x + 3,1)(x + 2,2) \\
 &\quad - 0,5157(x + 3,1)(x + 2,2)(x + 0) \\
 &= -0,5157x^3 - 1,6415x^2 + 1,1572x + 7.
 \end{aligned}$$

Berechnen der Stützstelle $y_4(1,1)$ ergibt:

$$y_4(1,1) = \tilde{y}_{\text{New}}(x = 1,1) = 5,6.$$

- b) Falsche Eingangsgrößen (x -Werte) bedeuten für das Lagrange-Verfahren, dass alle Terme neu berechnet werden müssen, während beim Differenzschema des Newton-Verfahrens nur ein Ast korrigiert werden muss. In diesem Fall ist der Fehler allerdings auf den Anzeigewert y beschränkt, so dass es ausreicht nur den entsprechenden y -Wert zu ersetzen ohne die Lagrange-Polynome neu zu berechnen. Somit wäre es hier aufwändiger ein angewandtes Newton-Verfahren zu korrigieren.
- c) Da nun mehr Messwerte zu Verfügung stehen als für die Berechnung der Koeffizienten des Polynoms nötig sind, kann ein Least-Squares-Ansatz gewählt werden, um eventuelle Messfehler zu unterdrücken.

Das LS-Gleichungssystem lautet:

$$\mathbf{y} = \Phi \cdot \mathbf{b}$$

mit:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \text{ mit Dimension } N \times 1$$

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & x_N^3 \end{pmatrix} \text{ mit Dimension } N \times 4$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \text{ mit Dimension } N \times 1.$$

Mit der Pseudoinversen berechnet man die Koeffizienten a, b, c und d :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = (\mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi})^{-1} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{y}.$$

Anschließend kann man die fehlenden Werte über die berechneten Koeffizienten berechnen:

$$y_{\text{neu}}(x_{\text{neu}}) = a + b \cdot x_{\text{neu}} + c \cdot x_{\text{neu}}^2 + d \cdot x_{\text{neu}}^3.$$

- d) Damit die Unsicherheit des Schätzergebnisses bei wachsendem Stichprobenumfang sinkt, muss der Schätzer konsistent sein.
- e) Für die gegebenen Werte können das erste und zweite Segment s_0 und s_1 berechnet werden. Mit den Eigenschaften $y_0'' = y_2'' = 0$ vereinfacht sich das zu lösende Gleichungssystem somit zu:

$$\begin{pmatrix} 2(h_0 + h_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{h_1}(y_2 - y_1) - \frac{6}{h_0}(y_1 - y_0) \end{pmatrix}.$$

Mit $h_0 = 2,2$ und $h_1 = 1$ lässt sich $y_1'' = -\frac{135}{44}$ bestimmen und sich die Koeffizienten des ersten Segments berechnen:

$$a_0 = \frac{1}{6 \cdot h_0}(y_1'' - y_0'') = \frac{1}{6 \cdot 2,2} \cdot -\frac{135}{44} = -\frac{225}{968} = -0,2324$$

$$b_0 = \frac{1}{2}y_0'' = 0$$

$$c_0 = \frac{1}{h_0}(y_1 - y_0) - \frac{h_0}{6}(y_1'' + 2y_0'') = \frac{5}{2,2} + \frac{2,2}{6} \cdot \frac{135}{44} = \frac{299}{88} = 3,3978$$

$$d_0 = y_0 = 2.$$

Das zweite Segment s_1 besitzt die Koeffizienten:

$$a_1 = 0,511$$

$$b_1 = -\frac{135}{88}$$

$$c_1 = \frac{1}{44}$$

$$d_1 = y_0 = 7.$$

- f) Vorteil: Beschreibung komplexer Kurven durch einfache Polynome
Nachteil: Anfällig für Rauschen
- g) Da die Spline-Interpolation zu lokalen Polynomen führt, ist deren Aussagekraft über Punkte außerhalb dieses Bereichs geringer als bei der Verwendung von globalen Polynomen wie beispielsweise bei der Newton-/Lagrange-Interpolation.

Aufgabe 2: Stationäres Verhalten von Messsystemen (20 Punkte)

Ihnen stehen für eine Messung zwei verschiedene Messgeräte zur Verfügung. Aus den Datenblättern erfahren Sie die beiden angegebenen Kennlinien:

$$y_1(u) = 2 \cdot \sin(u)$$

$$y_2(u) = 2 \cdot \sin(2u).$$

- a) Sie möchten ohne das Eingangssignal zu ändern Messungen im Bereich $2 < u < 3$ durchführen. Welches Messgerät wählen Sie? Begründen Sie Ihre Entscheidung. (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von der bisherigen Teilaufgabe.

Die folgende Messkennlinie sei gegeben:

$$y(x) = ax^3 + bx - cx^4.$$

Dabei seien die Parameter folgendermaßen belegt: $a = 20c$, $b = 1$, $c = 1$.

- b) Bestimmen Sie die maximale Empfindlichkeit für $x \geq -4$. (4 Punkte)
- c) Der gewünschte Messbereich soll möglichst linear sein und eine hohe Empfindlichkeit aufweisen. Nach welchem Kriterium ist der Messbereich zu wählen? Um welchen Punkt sollte er gelegt werden? (2 Punkte)
- d) Bestimmen Sie den günstigsten Messbereich $[x_a, x_a + d]$ für $x \geq -4$ mit $d = 2$. (4 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Gegeben sei ein Messergebnis y , welches sich mit Hilfe der fehlerbehafteten Einzelmessgrößen x_1 , x_2 und x_3 berechnen lässt:

$$y(\mathbf{x}) = y(x_1, x_2, x_3) = 4 + x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^3 - x_3.$$

Die Messfehler $\Delta x_i = x_i - x_{i0}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, seien rein zufällig und betragsmäßig klein. Außerdem seien die zugehörigen Varianzen σ_1^2 , σ_2^2 und σ_3^2 bekannt.

- e) Berechnen Sie allgemein die Varianz σ_y^2 des Messergebnisses y in Abhängigkeit der Korrelationskoeffizienten der Einzelmessgrößen. (3 Punkte)
- f) Berechnen Sie die Varianz σ_y^2 des Messergebnisses y für den Fall, dass x_1 und x_2 starr gebunden sind. x_3 sei dabei unkorreliert zu den anderen Messgrößen. (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- g) Beschreiben Sie was eine superponierende Störgröße kennzeichnet und durch welche Maßnahme sie unterdrückt werden kann. (2 Punkte)
- h) Wann kann Gegenkopplung nicht zur Linearisierung eingesetzt werden? (1 Punkt)
- i) Nennen Sie ein Beispiel zur Verschaltung von Widerstandsaufnehmern nach der Differenzmethode. (1 Punkt)

Lösung

- a) Sie wählen das Messgerät 1, da Sie ansonsten Ihren Messwerten nicht eindeutig einen Eingangswert zuordnen können.
- b) Die Empfindlichkeit berechnet sich zu

$$S = \frac{\partial f}{\partial x} = 60x^2 + 1 - 4x^3.$$

Ein Extremwert ist erreicht für:

$$S' = 12x(10 - x) \stackrel{!}{=} 0.$$

Diese Gleichung ist für $x_1 = 0$ und $x_2 = 10$ erfüllt. Das Maximum errechnet sich durch

$$S'' = 120 - 24x$$

$$S''(x_1) = 120 \Rightarrow \text{Minimum}$$

$$S''(x_2) = -120 \Rightarrow \text{Maximum}$$

zu

$$S_{\max} = S(x_2) = 2001.$$

- c) Um das gewünschte Ziel zu erreichen, muss idealerweise als Arbeitspunkt ein Wendepunkt gewählt werden. Ein Wendepunkt liegt genau dann vor, wenn $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$ ist. Damit kommen nach Aufgabenteil b) als Arbeitspunkte $x_1 = 0$ und $x_2 = 10$ in Frage. Da eine möglichst hohe Empfindlichkeit gefordert wird, muss also der Arbeitspunkt zu $x_2 = 10$ gewählt werden.
- d) Zur Bestimmung des günstigsten Messbereiches wird folgende Gleichung angesetzt:

$$S(x_a + 2) - S(x_a) \stackrel{!}{=} 0$$

Das Lösen dieser Gleichung

$$S(x_a + 2) - S(x_a) = -24x_a^2 + 192x_a + 208 \stackrel{!}{=} 0$$

führt zu $x_{a1} = 8,9666$ oder $x_{a2} = -0,9666$. Aufgrund der Wahl des Arbeitspunktes ergibt sich der Messbereich mit $x_a = 8,9666$ zu $8,9666 \leq x \leq 10,9666$.

- e) Zunächst werden die partiellen Ableitungen gebildet:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 2x_1$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = x_2^2$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_3} = -1.$$

Nun kann die resultierende Varianz berechnet werden:

$$\sigma_y^2 = 4x_{10}^2\sigma_1^2 + x_{20}^4\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 4x_{10}x_{20}^2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} - 4x_{10}\sigma_1\sigma_3\rho_{13} - 2x_{20}^2\sigma_2\sigma_3\rho_{23}.$$

- f) Durch die Angabe kann auf die jeweiligen ρ_{ij} geschlossen werden: $\rho_{12} = 1$. Alle anderen Korrelationskoeffizienten sind null:

$$\sigma_y^2 = 4x_{10}^2\sigma_1^2 + x_{20}^4\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 4x_{10}x_{20}^2\sigma_1\sigma_2.$$

- g) Eine superponierende Störgröße wirkt additiv auf die Messgröße ein und ist unabhängig von der Eingangsgröße ($e(u, z) = e(z)$). Sie ist leicht durch die Differenzmethode zu entfernen.
- h) Gegenkopplung kann nicht eingesetzt werden, wenn kein Übertragungsglied existiert, das ein Signal in der gleichen physikalischen Größe wie das Messsignal liefert.
- i) Messbrücke.

Aufgabe 3: Statistik (21 Punkte)

Sie wollen die Pünktlichkeit von Bussen an der Haltestelle Hertzstraße untersuchen. Hierfür haben Sie bei 11 unabhängigen Busfahrten Abweichungen vom exakten, planmäßigen Abfahrtszeitpunkt notiert, die in folgender Tabelle in Minuten angegeben sind.

0,74	0,75	0,71	0,17
0,02	-0,16	0,47	1
1,96	1,52	2,9	

Tabelle 3: Abweichungen von der planmäßigen Abfahrt in Minuten.

Sie wollen nun untersuchen, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Bus die Haltestelle vor seiner planmäßigen Abfahrtszeit verlässt. Dabei nehmen Sie an, dass die Abweichungen von der planmäßigen Abfahrt normalverteilt sind.

- Berechnen Sie Stichprobenmittelwert und Stichprobenvarianz der Verteilung. (2 Punkte)
- Skizzieren Sie die zu untersuchende Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und markieren Sie den Bereich, über den Sie integrieren müssten. (2 Punkte)
- Berechnen Sie näherungsweise die gesuchte Wahrscheinlichkeit. (3 Punkte)
- Nun wissen Sie zusätzlich, dass alle Busse in Karlsruhe normalverteilt im Mittel 30 Sekunden zu spät losfahren. Für welche Werte des Signifikanzniveaus α nehmen Sie die Nullhypothese an? Prüfen Sie zudem die Voraussetzungen für den Signifikanztest. (5 Punkte)
- Welche Wahrscheinlichkeit wird steigen, wenn Sie α aus der vorherigen Teilaufgabe verkleinern? (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Ein Kommilitone hat eine ähnliche Untersuchung durchgeführt und kam zu der in Abbildung 1 gegebenen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Abfahrtszeiten.

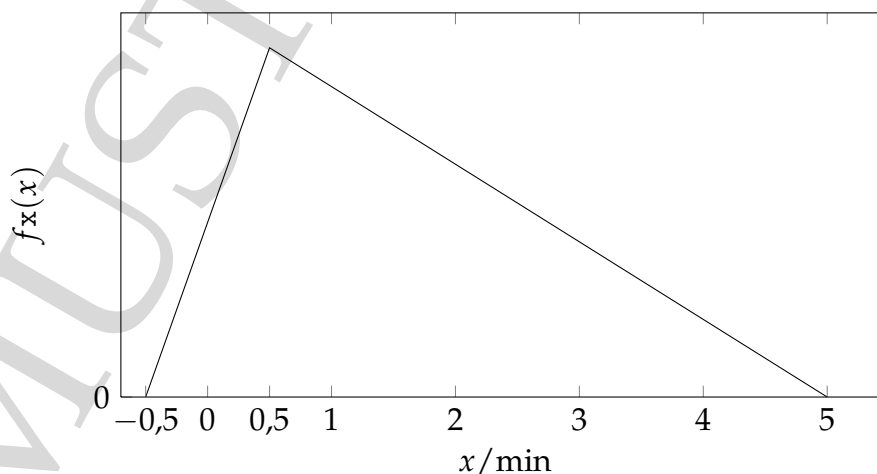


Abbildung 1: Wahrscheinlichkeitsdichte der Abfahrtszeiten.

- f) Berechnen Sie hier die Wahrscheinlichkeit, dass Sie den Bus verpassen, obwohl Sie rechtzeitig an der Haltestelle sind. (2 Punkte)
- g) Berechnen Sie den Erwartungswert der Dichtefunktion in Abbildung 1. (4 Punkte)
- h) Wie können Sie überprüfen, ob Ihre Stichprobe der in Abbildung 1 angegebenen Dichte entspricht? (1 Punkt)
- i) Warum kann es sich bei der Dichte in Abbildung 1 nicht um eine realistische Wahrscheinlichkeitsdichte der Abfahrtszeiten handeln? (1 Punkt)

Lösung

- a) Der Stichprobenmittelwert berechnet sich zu:

$$\hat{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{11} \sum_{i=1}^n x_i = 0,9164.$$

Die Stichprobenvarianz berechnet sich zu:

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x})^2 = 0,8216.$$

- b) Abbildung 2 zeigt die gesuchte Skizze mit blauer Fläche für Werte kleiner null.

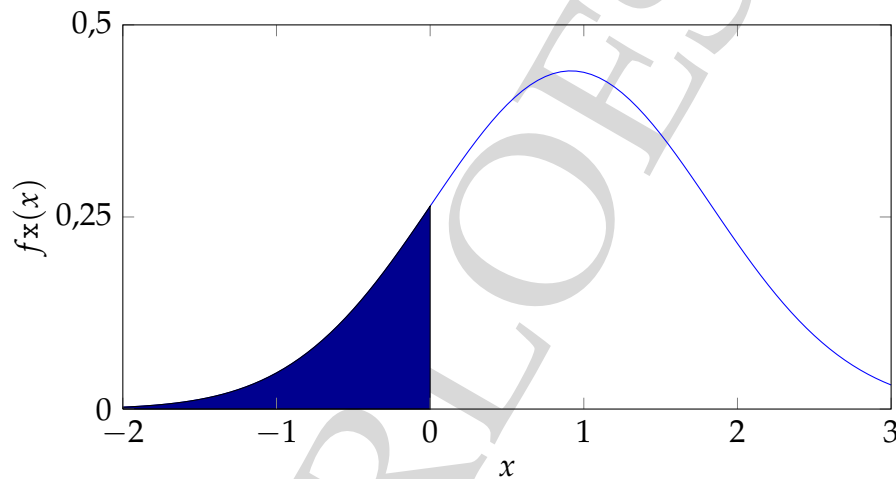


Abbildung 2: Dichte.

- c) Um die gesuchte Wahrscheinlichkeit in Tabellen nachschlagen zu können, muss die Verteilung zuerst auf Standardnormalform gebracht werden. Somit berechnet sich die Größe c zu:

$$c = \frac{|0 - \hat{x}|}{\sqrt{s_x^2}} = \frac{0,9164}{\sqrt{0,8216}} = 1,011.$$

Die Variable c beschreibt allerdings das zweiseitige Konfidenzintervall. Da aber nur die Wahrscheinlichkeit von Interesse ist, dass ein Bus vor der planmäßigen Zeit abfährt, ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu:

$$P_{\text{früh}} = \frac{1 - P(c)}{2} \approx \frac{1 - P(1)}{2} = \frac{1 - 0,6827}{2} = 15,9\%.$$

- d) Bevor der Signifikanztest durchgeführt werden kann, müssen die Voraussetzungen geprüft werden: Die Messwerte werden als unabhängig angenommen und die Grundgesamtheit ist in der Aufgabenstellung als normalverteilt angegeben.

Die Nullhypothese lautet in diesem Fall:

$$H_0 : \hat{x} = \mu_0 = 0,5.$$

Da die Varianz durch die Stichprobenvarianz geschätzt wurde, erhalten wir eine t-verteilte Prüfgröße mit $n = 10$ Freiheitsgraden:

$$t = \frac{|\hat{x} - \mu_0|}{s_x} \sqrt{n} = 1,6027$$

Damit ergibt sich:

$$P_{10}(t) = 85,9318\%$$

Für die Annahme der Hypothese muss $P_{10}(t) \leq 1 - \alpha$ sein. Somit wird die Hypothese angenommen, falls:

$$\alpha \leq 1 - 0,859318 = 0,1407.$$

- e) Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art (Bestätigung der Nullhypothese trotz signifikanter Abweichung) wird steigen.
- f) Zuerst muss sichergestellt werden, dass es sich bei der Dichte um eine gültige Wahrscheinlichkeitsdichte handelt. Die Fläche muss also in der Summe eins ergeben. Somit kann die Höhe A bestimmt werden:

$$1 = \frac{1}{2}(A \cdot 1 + A \cdot 4,5)$$
$$A = \frac{2}{5,5} = \frac{4}{11} = 0,3636.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit lässt sich berechnen, indem wir $P(x < 0)$ berechnen, was der Dreiecksfläche von $-0,5$ bis 0 entspricht.

$$P(x < 0) = \frac{0,5 \cdot \frac{A}{2}}{2} = 4,545\%$$

- g) Der Mittelwert lässt sich über Auswertung der Integrale oder über den allgemeinen Zusammenhang für den Erwartungswert für Dreiecksverteilungen berechnen:

$$E\{x\} = \frac{a + b + c}{3} = \frac{-0,5 + 0,5 + 5}{3} = \frac{5}{3}$$

oder

$$E\{x\} = A \cdot \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(x + \frac{1}{2} \right) x \, dx + \int_{\frac{1}{2}}^5 \left(-\frac{2}{9}x + \frac{10}{9} \right) x \, dx \right) = A \left(\frac{1}{12} + \frac{9}{2} \right) = \frac{5}{3}.$$

- h) Die Anpassung einer Stichprobe an eine beliebige Wahrscheinlichkeitsdichte lässt sich mit dem χ^2 -Test überprüfen.
- i) Da die Wahrscheinlichkeiten für Verspätungen über 5 Minuten oder Fahrten, die mehr als 30 Sekunden vor planmäßiger Abfahrt starten, gleich null sind, kann es sich nicht um eine realistische Dichte handeln.

Aufgabe 4: Stochastische Signale (20 Punkte)

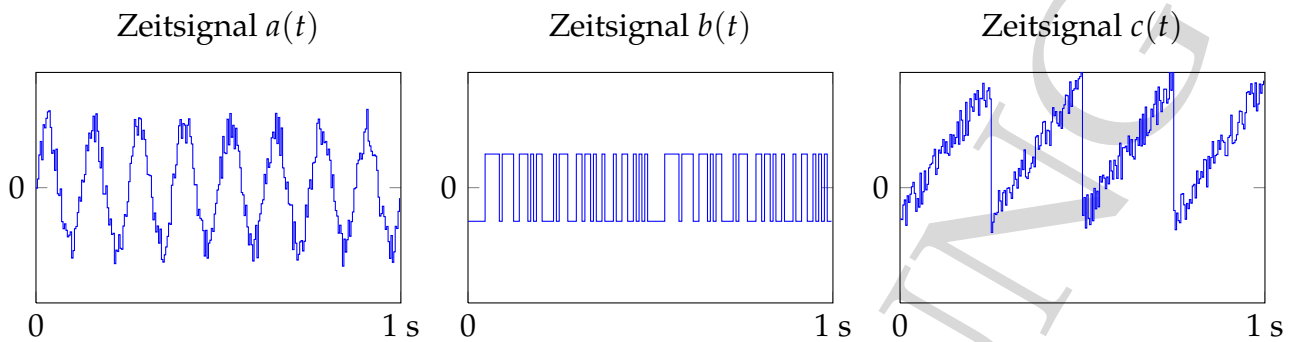


Abbildung 3: Zeitsignale.

- a) Sie haben in Abbildung 3 drei teils mit weißem Rauschen überlagerte Zeitsignale gegeben. Skizzieren Sie zu jedem der drei Signale Autokorrelationsfunktion und Leistungsdichte. Beschriften Sie die Achsen. Bei der Ordinate reicht es anzugeben, wo sich die Nulllinie befindet. (9 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Ihnen ist die Amplitudendichte einer Musterfunktion eines stochastischen Rauschprozesses $y(t)$ mit den Konstanten a , b und c gegeben:

$$\mathcal{N}(\mu = a + b \cdot t; \sigma^2 = c).$$

- b) Für welche Werte von a , b und c kann es sich um weißes Rauschen handeln? (1 Punkt)
- c) Für welche Werte von a , b und c kann die Musterfunktion Teil eines schwach stationären Zufallsprozesses sein? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)
- d) Für welche Werte von a , b und c kann die Musterfunktion Teil eines streng stationären Zufallsprozesses sein? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 Punkt)
- e) Berechnen Sie für den Fall eines weißen Gauß'schen Rauschprozesses $y(t)$ den Erwartungswert $E\{y(t_1) \cdot y(t_2)\}$. (2 Punkte)
- f) Kann der stochastische Prozess ergodisch sein, falls er unter anderem drei Musterfunktionen mit den Parametern $c = 1$, $b = 0$ und $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 0$ besitzt? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 Punkt)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

Sie haben folgende Kreuzkorrelationsfunktion gegeben:

$$r_{xy}(\tau) = \frac{3\tau^3 + 2\tau - 5}{2\tau - \tau^3}.$$

Die Signale $x(t)$ und $y(t)$ sind reell und stationär. Ebenso ist der Mittelwert $\mu_y = 3$ bekannt.

- g) Berechnen Sie die Kreuzkovarianzfunktion $C_{yx}(\tau)$. (4 Punkte)

Lösung

- a) Abbildung 4 zeigt die vollständige Zuordnung der Signale.

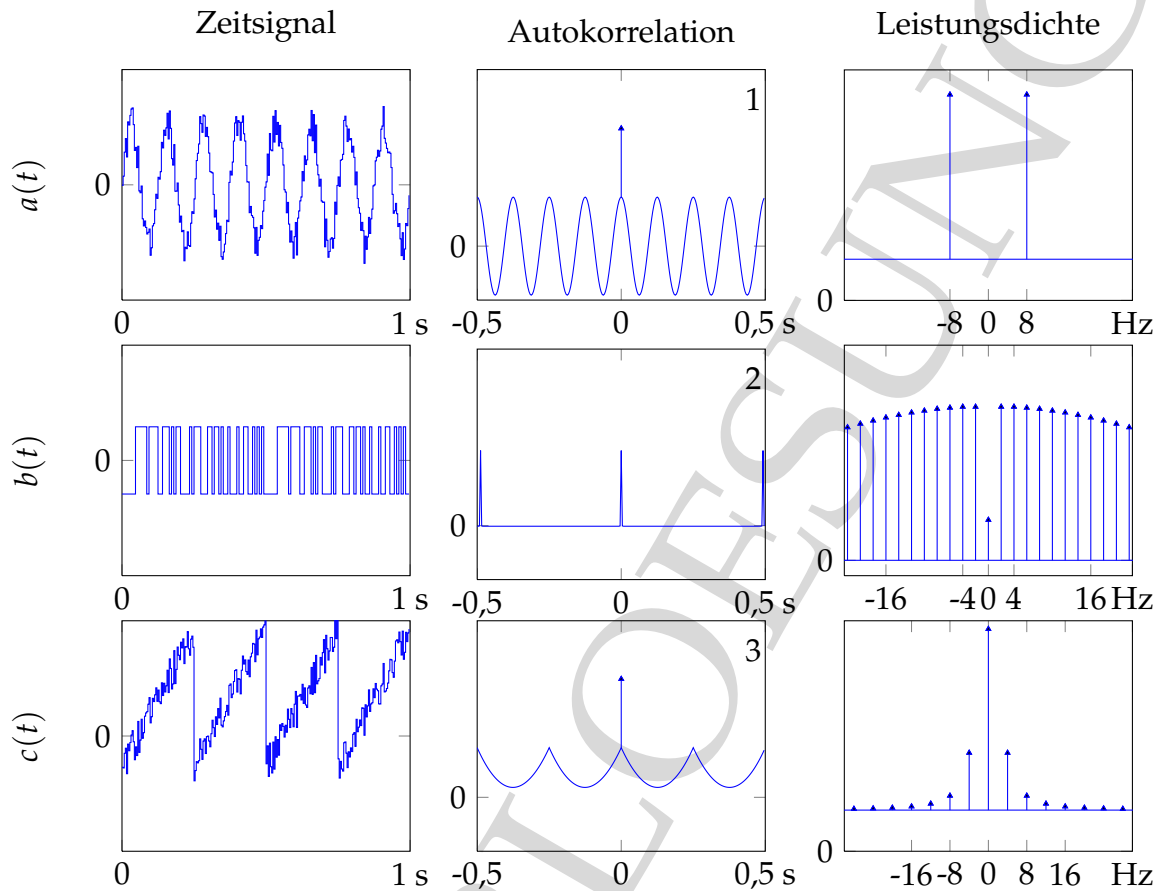


Abbildung 4: Zuordnung der Signale.

- b) Weißes Rauschen setzt Mittelwertfreiheit voraus, so dass $a = b = 0$ erfüllt sein muss. c kann beliebig größer null gewählt werden.
- c) Bei beliebigem $c \geq 0$ darf der Mittelwert nicht von der Zeit abhängen, so dass a beliebig ist, aber $b = 0$ gewählt werden muss.
- d) Bei Normalverteilungen ist schwache Stationarität gleichbedeutend mit strenger Stationarität.
- e) Da $y(t)$ ein weißer Gauß'scher Rauschprozess ist, sind unterschiedliche Zeitpunkte unkorreliert. Somit ergibt sich:

$$E\{y(t_1) \cdot y(t_2)\} = c \cdot \delta(t_1 - t_2).$$

- f) Der Prozess kann nicht ergodisch sein, da hierfür alle Scharmittelwerte gleich allen Zeitmittelwerten sein müssten.
- g) Wegen fehlender Periodizität nehmen wir an, dass $x(t)$ und $y(t)$ für große Verschiebungen von τ unkorreliert sind, $\lim_{\tau \rightarrow \infty} r_{xy}(\tau) = \mu_x \cdot \mu_y$. Somit ergibt sich nach Grenzwertbildung $\mu_x = -1$. Mit der Symmetrieeigenschaft und dem Zusammenhang zwischen Kovarianz und Korrelation lässt sich $C_{yx}(\tau) = r_{xy}(-\tau) - \mu_x \mu_y$ berechnen und ergibt sich zu:

$$C_{yx}(\tau) = \frac{-3\tau^3 - 2\tau - 5}{-2\tau + \tau^3} + 3 = \frac{-8\tau - 5}{-2\tau + \tau^3}.$$

MUSTERLOESUNG

Aufgabe 5: Quantisierung und Abtastung (20 Punkte)

Sie wollen eine Signalquelle digitalisieren. Zur Beschreibung des Signals wollen Sie 3 Bit nutzen. Ihr Signal besitzt Frequenzen bis maximal 10 kHz.

- Entwerfen Sie eine optimale Quantisierungskennlinie für einen Eingangsbereich von $-A$ bis A unter der Annahme, dass alle Amplitudenwerte gleichwahrscheinlich sind. Geben Sie sowohl die Stufenbreite q als auch die Intervallmitte der untersten Stufe an. (2 Punkte)
- Wie können Sie sicherstellen, dass das Quantisierungstheorem für beliebige Eingangssignale näherungsweise erfüllt ist? (1 Punkt)

Sie können nun annehmen, dass das Quantisierungstheorem erfüllt ist.

- Warum erreichen Sie mit dem gleichen Quantisierer ein besseres Signal-Rausch-Verhältnis bei sinusförmigen Signalen als bei sägezahnförmigen Signalen? (1 Punkt)

Sie betrachten nun ein harmonisches Signal mit oben genannten Kennwerten und Ihnen stehen drei 3-Bit Analog-Digital-Umsetzer (ADU) zur Verfügung. Ihre Signalquelle generiert Amplituden im Bereich zwischen -2 V und 2 V . Die Umsetzer unterscheiden sich jedoch in Abtastfrequenz, Abtastzeitfehler und dem nutzbaren Eingangsbereich. Alle Umsetzer haben eine „lineare“ Kennlinie. Der Abtastzeitfehler kann als gleichverteilt angenommen werden. Sie wollen nun den für das gegebene Signal besten ADU finden.

ADU	Abtastfrequenz	max. Abtastfehler	Eingangsbereich
ADU1	15 kHz	$\pm 500\text{ ns}$	$\pm 2\text{ V}$
ADU2	32 kHz	$\pm 5\text{ }\mu\text{s}$	$\pm 4\text{ V}$
ADU3	45 kHz	$\pm 10\text{ }\mu\text{s}$	$\pm 2\text{ V}$

Tabelle 4: ADU-Kennwerte.

- Berechnen Sie alle für den Vergleich benötigte Signal-Rausch-Verhältnisse (SNR) aufgrund der Quantisierung. (2 Punkte)
- Berechnen Sie nun die SNR aufgrund des Jitter-Fehlers. (2 Punkte)
- Wählen Sie den für das gegebene Signal besten ADU und begründen Sie Ihre Antwort über das Signal-Rausch-Verhältnis. (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

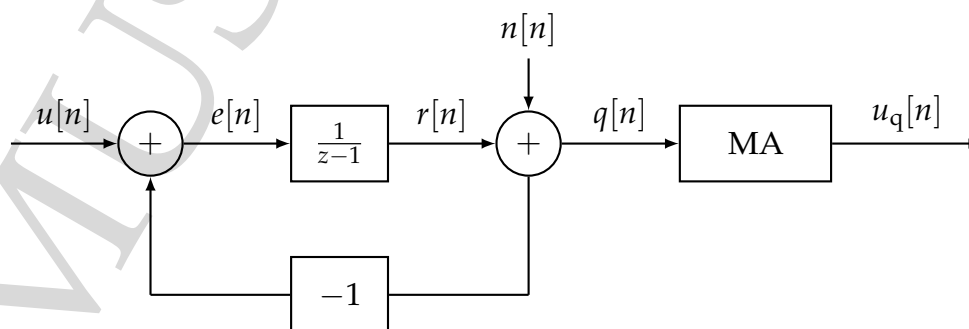


Abbildung 5: Strukturbild des Delta-Sigma-Modulators.

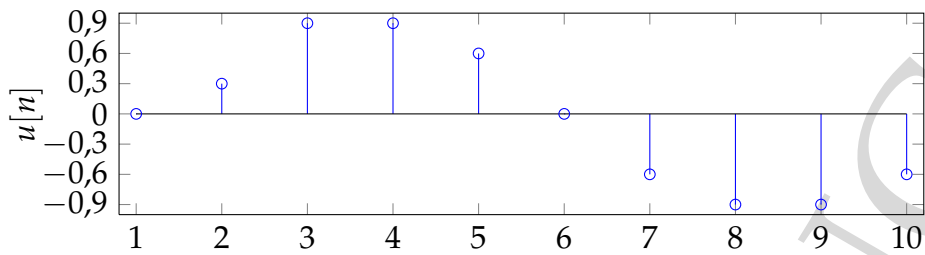


Abbildung 6: Überabgetastetes Eingangssignal des Delta-Sigma-Modulators.

Ihnen ist das bereits mit dem Überabtastfaktor $M = 5$ abgetastete Eingangssignal eines Delta-Sigma-Umsetzers in Abbildung 6 gegeben. Zusätzlich ist Ihnen das vereinfachte Schaltbild des Delta-Sigma-Umsetzers in Abbildung 5 gegeben. Der verwendete 1-Bit-Quantisierer besitzt als Ausgangswerte nur $+1$ oder -1 . Dies entspricht auch der maximalen/minimalen Amplitude des Eingangssignals.

- g) Geben Sie für alle 10 Zeitschritte die zeitdiskreten Verläufe der Signale $e[n]$, $q[n]$, $r[n]$ und $u_q[n]$ an. Für den ersten Zeitschritt kann angenommen werden, dass $r[1] = 0$ und $q[1] = 1$. Bei dem Signal $u_q[n]$ ist es ausreichend, das unterabgetastete Signal anzugeben, also das Signal zu den Zeitpunkten $n = 5$ und $n = 10$. (6 Punkte)
- h) Welche Werte kann $u_q[n]$ annehmen? (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben.

- i) Erklären Sie, warum in realen Anwendungen der Überabtastungsfaktor oft höher gewählt wird. (2 Punkte)
- j) Was bestimmt die Ordnung eines Delta-Sigma-Umsetzers? (1 Punkt)
- k) Welches Verfahren bevorzugen Sie bei der digitalen Drehzahlmessung bei sehr hohen Winkelgeschwindigkeiten und warum? (1 Punkt)

Lösung

- a) Die für alle Stufen gleiche Stufenbreite berechnet sich zu:

$$q = \frac{2A}{2^N} = \frac{A}{4}$$

Die Intervallmitte der untersten Stufe ist somit:

$$u_q(u < -A + q) = -A + \frac{q}{2} = -\frac{7}{8}A$$

- b) Addition eines Signals, dessen charakteristische Funktion bandbegrenzt ist (entspricht Multiplikation mit bandbegrenzter charakteristischer Funktion) und später wieder entfernt werden kann (Dithering).
- c) Bei sinusförmigen Signalen ist die Signalleistung bei gleicher Maximalamplitude höher als bei Signalen mit gleichverteilter Amplitude. Die Leistung des Rauschens ist durch das Quantisierungsmodell jedoch in beiden Fällen gleich groß.
- d) ADU1 fällt raus, da er das Abtasttheorem nicht einhalten kann. Bei ADU2 ist der Eingangsbereich doppelt so groß wie bei ADU3, so dass effektiv mit der vorher entworfenen Kennlinie nur noch 2 der 3 Bits genutzt werden können. Somit erhält man für das SNR durch die Quantisierung:

$$SNR_{qADU2} = 6,02 \cdot N + 1,76 = 6,02 \cdot 2 + 1,76 = 13,8 \text{ dB}$$

$$SNR_{qADU3} = 6,02 \cdot 3 + 1,76 = 19,82 \text{ dB.}$$

- e) Das Jitter-SNR berechnet sich mit $\sigma_\tau^2 = \frac{\tau_{\max}^2}{3}$ zu:

$$SNR_{\text{JitterADU2}} = \frac{2}{(2\pi f_g \sigma_\tau)^2} = \frac{2}{(2\pi f_g \frac{\tau_{\max}}{\sqrt{3}})^2} = \frac{2}{(2\pi 10 \text{ kHz} \frac{5 \mu\text{s}}{\sqrt{3}})^2} \hat{=} 17,84 \text{ dB}$$

$$SNR_{\text{JitterADU3}} = \frac{2}{(2\pi f_g \sigma_\tau)^2} = \frac{2}{(2\pi f_g \frac{\tau_{\max}}{\sqrt{3}})^2} = \frac{2}{(2\pi 10 \text{ kHz} \frac{10 \mu\text{s}}{\sqrt{3}})^2} \hat{=} 11,82 \text{ dB}$$

- f) Somit erzielt ADU2 mit minimal 13,8 dB das bessere SNR und sollte somit ausgewählt werden.
- g) Die gesuchten Signale sind in Abbildung 7 und Tabelle 5 gezeigt.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$u[n]$	0	0,3	0,9	0,9	0,6	0	-0,6	-0,9	-0,9	-0,6
$e[n]$	-1,0	1,3	-0,1	-0,1	-0,4	1,0	-1,6	0,1	0,1	0,4
$q[n]$	1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1
$r[n]$	0,0	-1,0	0,3	0,2	0,1	-0,3	0,7	-0,9	-0,8	-0,7
$u_q[n]$					0,6					-0,6

Tabelle 5: Delta-Sigma-Signale.

- h) In dieser Konfiguration kann u_q 6 Werte annehmen: $1, -1, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{5}$ und $-\frac{3}{5}$.

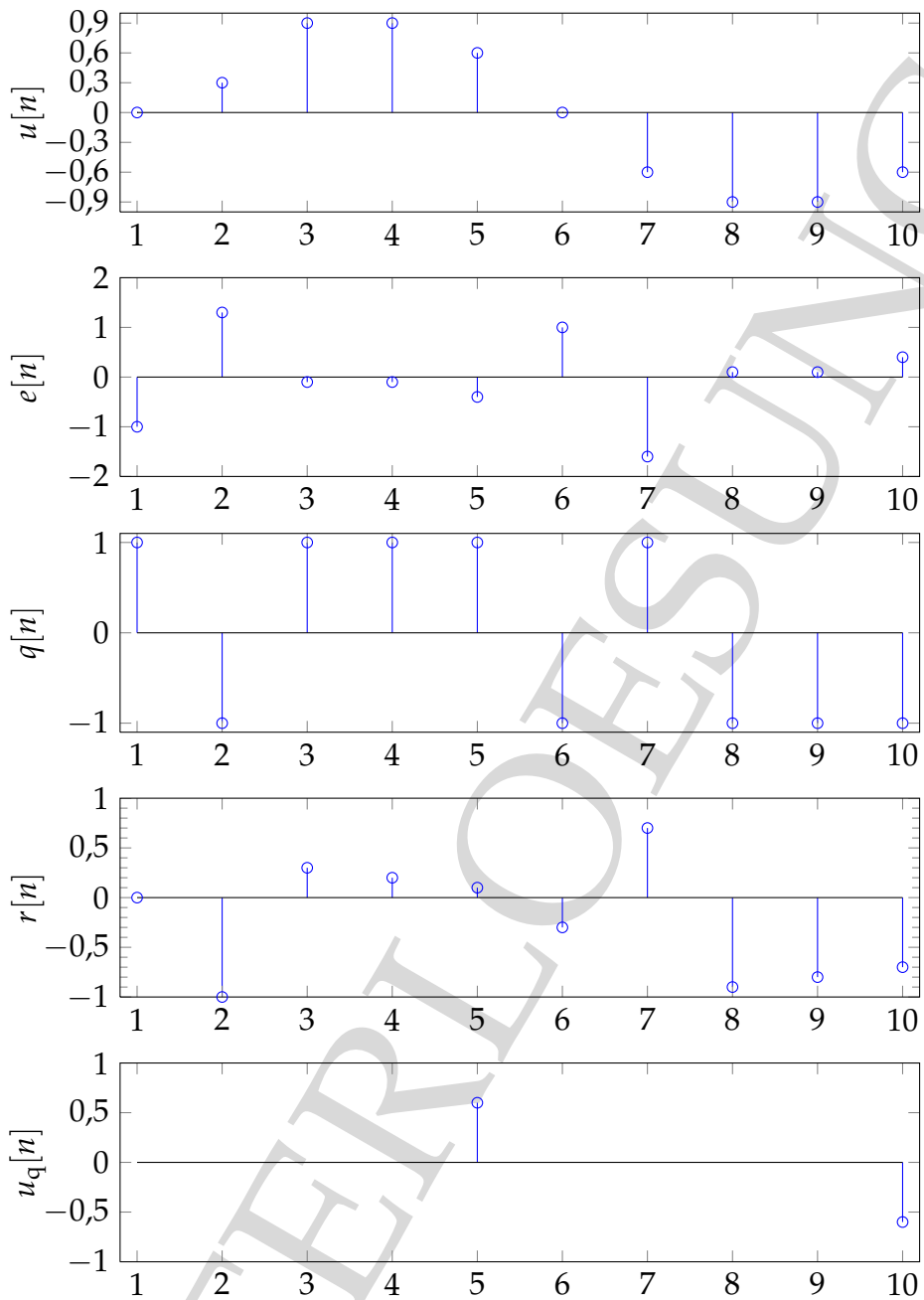


Abbildung 7: Signalverläufe des Delta-Sigma-Umsetzers.

- i) Die Delta-Sigma-Modulation verlagert die Rauschleistung zu hohen Frequenzen hin (Rauschformung oder noise shaping). Für ein großes SNR ist es daher von Vorteil, wenn die Grenzfrequenz des Nutzsignals wesentlich kleiner ist als die Abtastfrequenz. So kann bei hoher Überabtastung das Quantisierungsrauschen durch Tiefpassfilterung besser unterdrückt werden.
- j) Die Anzahl der Integratoren bzw. die Anzahl der Gegenkopplungsschleifen ist ausschlaggebend für die Ordnung des Umsetzers.
- k) Das Frequenzzählverfahren, da der relative Fehler bei höheren Drehzahlen sinkt.