

Aufgabe 1: Kurvenanpassung / Kennfeldinterpolation (16 Punkte)

Zur Modellierung eines Systems sind folgende Messwerte $y(u_i)$ an den Stützstellen u_i bestimmt worden:

Tabelle 1: Messwerte.

u_i	$y(u_i)$
-4	-6
-2	-5
0	2

- Wie lautet das Interpolationspolynom bei Verwendung des Polynomansatzes nach Lagrange? (4 Punkte)
- Nun wird ein zusätzlicher Messwert an der Stützstelle $u_3 = 1$ ermittelt: $y(1) = 4$. Berechnen Sie das neue Interpolationspolynom unter Berücksichtigung dieses Messwertes. Verwenden Sie das Ergebnis der Lagrange-Interpolation weiter und nutzen Sie den rekursiven Ansatz der Newton-Methode. (4 Punkte)
- Nennen Sie einen Vorteil des Lagrange-Verfahrens gegenüber dem Newton-Verfahren für den Fall eines sich verändernden Funktionswertes. (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Bei tomografischen Verfahren können einzelne Ebenen innerer Strukturen von Objekten in Form von Schnittbildern ermittelt werden. Sie untersuchen Grauwerte einer tomografischen Aufnahme und möchten fehlende Intensitätswerte zwischen Ihnen bereits bekannten Intensitätswerten einzelner Ebenen interpolieren. Die Grauwerte einer Ebene sind in Tabelle 2 gegeben.

Tabelle 2: Intensitätswerte für Schnittebene $z = 120$.

	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$
$y = 3$	40	60	120
$y = 4$	200	50	60
$y = 5$	250	20	30

- Geben Sie den Grauwert für einen Punkt an der Position $x = 1,7$ und $y = 4,8$ jeweils mittels Nächster-Nachbar-Interpolation und mittels bilinearer Interpolation für die Ebene aus Tabelle 2 an.

Hinweis: Vernachlässigen Sie in dieser Teilaufgabe die z -Koordinate. (2 Punkte)

Tabelle 3: Intensitätswerte für Ebene $z = 70$.

	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$
$y = 3$	120	30	170
$y = 4$	60	40	70
$y = 5$	240	30	10

- e) Ihnen stehen jetzt zusätzlich die Intensitätswerte einer weiteren Ebene in Tabelle 3 zur Verfügung. Geben Sie den Grauwert für einen Punkt ($x = 1,7$; $y = 4,8$; $z = 90$) jeweils mittels Nächster-Nachbar-Interpolation und mittels trilineararer Interpolation an. **Hinweis:** Trilineare Interpolation bezeichnet die lineare Erweiterung der bilinearen Interpolation auf eine dritte Dimension. (3 Punkte)

Die folgenden Teilaufgabe ist unabhängig von den bisherigen.

- f) Wie viele globale Polynome und wie viele Splines sind für die Interpolation zwischen 4 Stützstellen nötig? (1 Punkt)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den bisherigen.

- g) Wie viele Stützstellen sind für eine bikubische Kennfeldinterpolation nötig? (1 Punkt)

Lösung

- a) Die Lagrange-Interpolation mit vier Stützstellen führt zu folgendem Polynom:

$$\begin{aligned}y_L(u) &= y(u_0) \frac{(u - u_1)(u - u_2)}{(u_0 - u_1)(u_0 - u_2)} + y(u_1) \frac{(u - u_2)(u - u_0)}{(u_1 - u_2)(u_1 - u_0)} \\&\quad + y(u_2) \frac{(u - u_0)(u - u_1)}{(u_2 - u_0)(u_2 - u_1)} \\&= -6 \frac{u^2 + 2u}{8} - 5 \frac{u^2 + 4u}{-4} + 2 \frac{u^2 + 6u + 8}{8} \\&= \frac{3}{4}u^2 + 5u + 2.\end{aligned}$$

(Σ: 4 Punkte)

- b) Der Ansatz für Newton-Polynome lautet:

$$\begin{aligned}y_N(u) &= a_0 + a_1(u - u_0) + a_2(u - u_0)(u - u_1) \\&\quad + \dots + a_{n-1}(u - u_0)(u - u_1) \dots (u - u_{n-2}).\end{aligned}$$

Somit lässt sich die um eine neue Stützstelle erweiterte Interpolationsfunktion darstellen als

$$y_{\text{Erw}}(u) = y_L(u) + a_3(u - u_0)(u - u_1)(u - u_2).$$

Ausgewertet am Punkt $u = u_3 = 1$ mit $y(u_3) = 4$ lässt sich der Koeffizient a_3 zu $-\frac{1}{4}$ bestimmen, womit

$$y_{\text{Erw}}(u) = -\frac{1}{4}u^3 - \frac{3}{4}u^2 + 3u + 2.$$

(Σ: 4 Punkte)

- c) Falls sich lediglich ein Funktionswert, beispielsweise bei einer falschen Messung, ändert, kann dieser deutlich einfacher bei dem Lagrange- als bei dem Newton-Verfahren korrigiert werden.

(Σ: 1 Punkt)

- d) Für den Grauwert des gesuchten Pixels nach Nächster-Nachbar-Interpolation muss lediglich der hierzu nächste Pixelwert übernommen werden. In diesem Fall ist dies der Intensitätswert $I(x = 2; y = 5) = 20$ und somit

$$I_{\text{NN}}(x = 1,7; y = 4,8) = I(x = 2; y = 5) = 20.$$

Für die bilineare Interpolation werden die vier umliegenden Pixel $I(x = 1; y = 4)$, $I(x = 2; y = 4)$, $I(x = 1; y = 5)$ und $I(x = 2; y = 5)$ benötigt:

$$\begin{aligned}I_{\text{BL}}(x = 1,7; y = 4,8; z = 120) &= 0,2(0,3 \cdot I(x = 1; y = 4) + 0,7 \cdot I(x = 2; y = 4)) \\&\quad + 0,8(0,3 \cdot I(x = 1; y = 5) + 0,7 \cdot I(x = 2; y = 5)) \\&= 90,2.\end{aligned}$$

(Σ: 2 Punkte)

- e) Für die 3D-Nächster-Nachbar-Interpolation muss wiederum das nächste Pixel gesucht werden:

$$I_{\text{NN3D}}(x = 1,7; y = 4,8; z = 90) = I(x = 2; y = 5; z = 70) = 30.$$

Für die trilineare Interpolation muss entsprechend der vorherigen Aufgabe zusätzlich bilinear in der Ebene $z = 70$ interpoliert werden und führt nach analoger Rechnung zu:

$$I_{\text{BL}}(x = 1,7; y = 4,8; z = 70) = 83,6.$$

Aus beiden Ebenen mit $z = 70$ und $z = 90$ kann nun die dritte Dimension linear interpoliert werden:

$$\begin{aligned} I_{\text{TL}}(x = 1,7; y = 4,8; z = 90) &= \frac{30}{50} \cdot I_{\text{BL}}(x = 1,7; y = 4,8; z = 70) \\ &+ \frac{20}{50} \cdot I_{\text{BL}}(x = 1,7; y = 4,8; z = 120) \\ &= 86,24. \end{aligned}$$

(Σ: 3 Punkte)

- f) Es sind 1 globales Polynom oder 3 Splines nötig. (Σ: 1 Punkt)
- g) Ein kubisches Polynom alleine benötigt 4 Stützstellen. Um die Interpolation auf eine zweite Dimension zu erweitern, sind $4^2 = 16$ Stützstellen nötig. (Σ: 1 Punkt)

Aufgabe 2: Stationäres Verhalten von Messsystemen (16 Punkte)

Ein Messgerät hat laut Datenblatt die Kennlinie $y_1(u) = 0,5 \sin(u) + 7$.

- a) Bestimmen Sie den günstigsten Messbereich der Breite π im Intervall $[0; 2\pi]$.
(4 Punkte)

Ein zweites Messgerät hat nun die Kennlinie $y_2(u) = 0,5 \sin(u) + 7 + A \cdot u^2$.

- b) Welches Gerät bevorzugen Sie? Begründen Sie Ihre Entscheidung durch eine Rechnung. Nehmen Sie an, dass der günstigste Messbereich des zweiten Messgeräts bei gleicher Breite bei $u_a = 1,508$ anfängt und $A = 0,01$ beträgt. (3 Punkte)
- c) Vergrößert oder verkleinert sich die betragsmäßige ideale Empfindlichkeit, falls der Parameter A nun zu $A = -0,01$ gewählt wird? Begründen Sie ohne Rechnung. (1 Punkt)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den bisherigen.

Die Kennlinie eines Messgerätes setzt sich abhängig von Eingangsgröße u und Störung z zu $y(u, z) = 3u^2 + 2u + 5uz$ zusammen.

- d) Um was für einen Fehler handelt es sich und unter welchen Umständen existiert ein Gegenkopplungsglied?

(2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Es soll ein Messverstärker mit zwei Stufen entworfen werden. Die einzelnen Stufen zeigen dabei lineares Verhalten. Als mögliche Bauteile stehen drei Elemente nach Tabelle 4 zur Auswahl.

Tabelle 4: Daten der zur Verfügung stehenden Bauteile.

Bauteil	Verstärkung S_k	Nullpunktdrift
A	$S_a = 20$	0,2 mV
B	$S_b = 30$	0,5 mV
C	$S_c = 20$	0,5 mV

- e) Skizzieren Sie die Anordnung allgemein unter Berücksichtigung der Nullpunktdrift. (1 Punkt)

- f) Welche beiden Bauteile aus Tabelle 4 müssen wie verschaltet werden, wenn von jedem Bauteil nur eines vorhanden ist und Sie eine maximale Verstärkung bei minimalem Fehler fordern? Begründen Sie Ihre Aussage durch Berechnung der absoluten Fehler. (2 Punkte)
- g) Können Sie zwei der Bauteile für die Methode „Herabsetzen des Messbereichs“ verwenden? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 Punkt)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den bisherigen.

- h) Skizzieren Sie eine Beispielfunktion, die nicht als Kennlinie geeignet ist und begründen Sie Ihre Wahl. (2 Punkte)

Lösung

- a) Überprüfen, ob Wendepunkt im Messbereich:

$$y''(u) = -\frac{1}{2} \sin(u) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow u = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Innerhalb des Messbereiches liegen also die Wendepunkte $0, \pi, 2\pi$ mit dritter Ableitung verschieden null. Kriterium 1 aus dem Messtechnik-Buch ist also anwendbar:

$$\begin{aligned} S(u_a + d) - S(u_a) &= y'(u_a + \pi) - y'(u) \\ &= \frac{1}{2} \left(\underbrace{\cos(u_a + \pi)}_{= -\cos(u_a)} - \cos(u_a) \right) = -\cos(u_a) \stackrel{!}{=} 0 \\ &\Rightarrow u_a = \frac{\pi}{2} + m\pi, m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Es wären $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ im Messbereich, da aber das gesamte Intervall $[u_a, u_a + \pi]$ im Messbereich liegen soll, entfällt $\frac{3\pi}{2}$. Somit ist der optimale Messbereich $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.
(Σ: 4 Punkte)

- b) Für die Bewertung wird die ideale Empfindlichkeit herangezogen. Die ideale Empfindlichkeit S_i berechnet sich aus End- und Anfangspunkt des Messbereiches. Somit ergibt sich für die jeweilige ideale Empfindlichkeit:

$$\begin{aligned} S_{i1} &= \frac{y_1(u_{a1} + d) - y_1(u_{a1})}{d} = \frac{y_1(\frac{\pi}{2} + \pi) - y_1(\frac{\pi}{2})}{\pi} = -0,3183 \\ S_{i2} &= \frac{y_2(u_{a2} + d) - y_2(u_{a2})}{d} = \frac{y_2(1,508 + \pi) - y_2(1,508)}{\pi} = -0,2561. \end{aligned}$$

Kennlinie 1 besitzt betragsmäßig die höhere Empfindlichkeit und ist somit vorzuziehen.
(Σ: 3 Punkte)

- c) Der Betrag der idealen Empfindlichkeit vergrößert sich. Da die Sinusfunktion im Messbereich abnimmt, verstärkt eine nach unten geöffnete additive Parabel mit Ursprung 0 die Steigung. Eine nach oben geöffnete Parabel, wie in der vorherigen Teilaufgabe, vermindert hingegen die Steigung und somit die Empfindlichkeit.
(Σ: 1 Punkt)

- d) Es handelt sich um einen deformierenden Fehler, der mit Gegenkopplung unterdrückt werden kann, falls ein Glied existiert, das die Ausgangsgröße in die Eingangsgröße umformen kann.
(Σ: 2 Punkte)

- e) Die Anordnung ist in Abbildung L1 zu sehen.

(Σ: 1 Punkt)

- f) Für eine zweigliedrige Messkette berechnet sich der absolute Fehler aus

$$F_{\text{abs}} = S_2 z_1 + z_2.$$

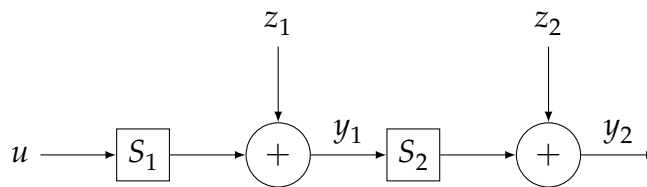


Abbildung L1: Messkette.

Um den kleinsten Fehler zu erhalten, fällt Bauteil C raus, da es eine größere Nullpunkt drift als A bei gleicher Verstärkung aufweist. Kombination A-B führt zu

$$F_{\text{Abs,AB}} = 30 \cdot 0,2 \text{ mV} + 0,5 \text{ mV} = 6,5 \text{ mV}.$$

Kombination B-A führt zu

$$F_{\text{Abs,BA}} = 20 \cdot 0,5 \text{ mV} + 0,2 \text{ mV} = 10,2 \text{ mV},$$

womit Kombination A-B vorzuziehen ist.

(Σ: 2 Punkte)

- g) Nein, da hierbei eine Gesamtverstärkung von 1 gefordert ist.

(Σ: 1 Punkt)

- h) In Abbildung L2 ist ein Ausschnitt einer nicht monotonen Funktion gezeigt. Bei einer Kennlinie würden in diesem Bereich Mehrdeutigkeiten entstehen, die zu vermeiden sind.

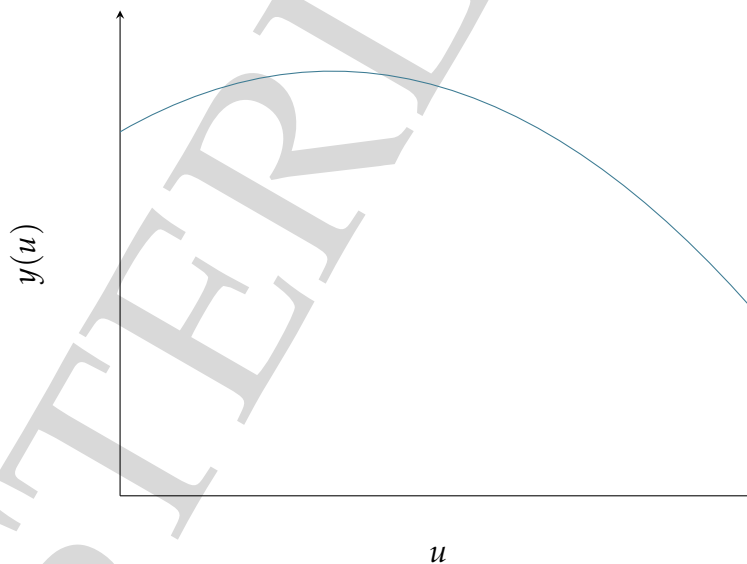


Abbildung L2: Ungeeignete Messkennlinie.

(Σ: 2 Punkte)

Aufgabe 3: Statistik, Stochastische Signale (17 Punkte)

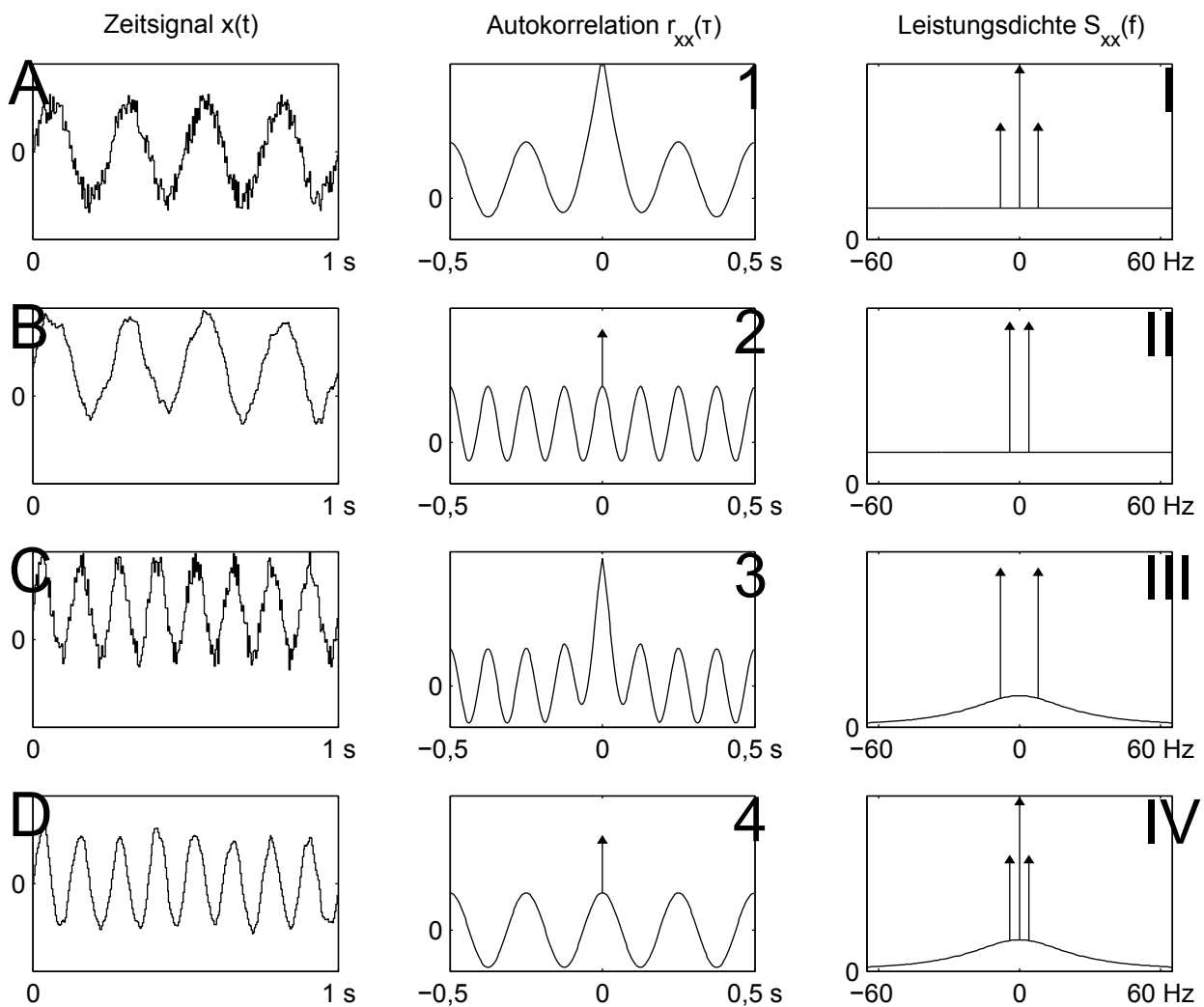


Abbildung 1: Zuordnungsaufgabe.

- a) Ordnen Sie den Zeitsignalen $x(t)$ in Abbildung 1 die entsprechenden Autokorrelationsfunktionen $r_{xx}(\tau)$ und Leistungsdichten $S_{xx}(f)$ zu. Eine Begründung ist nicht nötig. (4 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

In einer Lerngruppe von 200 Studierenden wird ein neues Lehrkonzept eingeführt. Sie sind für die Beurteilung des Konzepts zuständig und möchten Ihr Urteil durch Begutachtung der Prüfungsergebnisse stützen. Sie wissen aus vergleichbaren Lehrveranstaltungen, dass die Gruppe im Mittel die Note 3,1 erreicht bei einer Varianz von 1,17 und Normalverteilung der Noten.

- b) Mit dem neuen Konzept erreichen die Studenten in der Klausur eine Durchschnittsnote von 2,9. Ist die neue Methode signifikant besser unter Berücksichtigung einer statistischen Sicherheit von 96 %? (4 Punkte)

- c) Skizzieren Sie die ursprüngliche Verteilung und geben Sie an, ab wann von einer signifikanten Abweichung zu sprechen ist. Markieren Sie den Bereich ohne signifikante Abweichung in Ihrer Skizze. (4 Punkte)
- d) Wie wirkt sich eine veränderte Anzahl an Studierenden auf die Signifikanz der Abweichung des Ergebnisses aus? Bei wie vielen Studierenden wäre der neue Notendurchschnitt gerade signifikant abweichend? (2 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den bisherigen.

- e) Gegeben sei die Zufallsvariable $z = x + \frac{1}{4}y$. Geben Sie den Erwartungswert $E\{zx\}$ in Abhängigkeit von den Mittelwerten und Varianzen der Zufallsvariablen x und y an, falls x und y unkorreliert sind. (2 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den bisherigen.

- f) Für welche stochastischen Prozesse gilt, dass schwache Ergodizität auf strenge Stationarität schließen lässt? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 Punkt)

Lösung

- a)
- A – 4 – II
 - B – 1 – IV
 - C – 2 – I
 - D – 3 – III

(Σ: 4 Punkte)

- b) Da die Abweichung des Stichprobenmittelwerts überprüft werden soll, wird ein Signifikanztest durchgeführt. Gegeben sind eine normalverteilte Grundgesamtheit mit Mittelwert $\mu_0 = 3,1$ und Varianz $\sigma_x^2 = 1,17$ mit 200 unabhängigen Stichproben und deren Stichprobenmittelwert $\hat{x} = 2,9$.

Die Nullhypothese lautet, dass keine signifikante Abweichung vorhanden ist

$$H_0 : \hat{x} = \mu_0 .$$

Da die Varianz gegeben ist, folgt eine normalverteilte Prüfgröße

$$z = \frac{|\hat{x} - \mu_0|}{\sigma_x} \sqrt{n} = c = \frac{|2,9 - 3,1|}{\sqrt{1,17}} \sqrt{200} = 2,614 .$$

Das Signifikanzniveau liegt bei $1 - \alpha = 96 \%$, somit kann $P(2,6) = 99,0678$ bestimmt werden. Da $P(c) > 1 - \alpha$, wird die Nullhypothese abgelehnt. Somit führt die neue Lehrmethode zu einer signifikanten Verbesserung in den Ergebnissen der Studenten.

(Σ: 4 Punkte)

- c) Die Grenze für eine signifikante Veränderung der Ergebnisse liegt bei dem Parameter c_{Grenze} , für den gilt $P(c_{\text{Grenze}}) \approx 96 \%$. Aus der Tabelle der Standardnormalverteilung lässt sich ablesen, dass dies etwa für $c_{\text{Grenze}} \approx 2,1$ der Fall ist. Somit ergibt sich als maximale nicht signifikante Abweichung des Stichprobenmittelwertes

$$|\hat{x} - \mu_0| \leq \frac{c_{\text{Grenze}} \cdot \sigma_x}{\sqrt{n}} \approx \frac{2,1 \cdot \sqrt{1,17}}{\sqrt{200}} = 0,161 .$$

Der Bereich um den Mittelwert μ ist in Abbildung L3 durch den Doppelpfeil gekennzeichnet.

(Σ: 4 Punkte)

- d) Mit wachsender Anzahl an mitschreibenden Studierenden verkleinert sich der Bereich, in dem eine Abweichung als nicht signifikant bezeichnet wird. Die Schwelle liegt hierbei bei

$$n_{\text{Schwelle}} = \left(\frac{\sigma_x \cdot c}{|2,9 - 3,1|} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{1,17} \cdot 2,1}{|2,9 - 3,1|} \right)^2 \approx 129 .$$

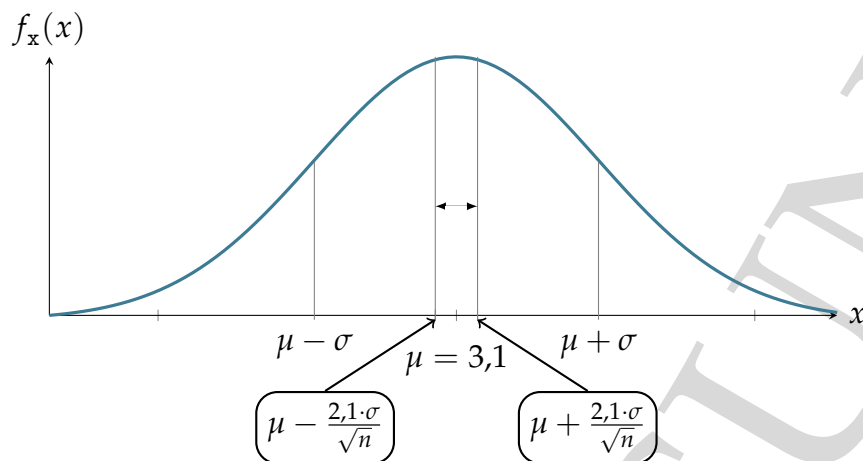


Abbildung L3: Normalverteilung der Prüfungsergebnisse.

Somit würde die Abweichung als nicht signifikant gelten, falls weniger als 129 Studierende die Klausur mitgeschrieben hätten. (Σ: 2 Punkte)

e)

$$\begin{aligned} E\{zx\} &= E\left\{\left(x + \frac{1}{4}y\right)x\right\} = E\left\{x^2 + \frac{1}{4}yx\right\} = E\{x^2\} + \frac{1}{4}E\{yx\} \\ &= \sigma_x^2 + \mu_x^2 + \frac{1}{4}C_{yx} + \frac{1}{4}\mu_y\mu_x = \sigma_x^2 + \mu_x^2 + \frac{1}{4}\mu_y\mu_x \end{aligned}$$

(Σ: 2 Punkte)

- f) Bei normalverteilten Prozessen werden die statistischen Eigenschaften komplett durch die ersten beiden Momente bestimmt. Schwache Ergodizität erfordert schwache Stationarität und diese ist im Falle eines normalverteilten Prozesses gleichbedeutend mit strenger Stationarität. (Σ: 1 Punkt)

Aufgabe 4: Quantisierung, Abtastung, LTI-Systeme (19 Punkte)

Ein Rauschgenerator liefere ein Signal $u(t)$ mit dem Mittelwert $\mu_u = 1,5 \text{ V}$ und der Varianz $\sigma_u^2 = 0,9 \text{ V}^2$. Dieses Signal werde nun mit verschiedenen A/D-Umsetzern quantisiert. Der Eingangsbereich der Umsetzer liege bei $\pm 5 \text{ V}$. Für die quantisierten Signale ergeben sich die folgenden statistischen Kennwerte in Tabelle 5.

Tabelle 5: Statistische Kennwerte der quantisierten Signale verschiedener A/D-Umsetzer.

	Mittelwert/V	Varianz/ V^2
A/D-Umsetzer 1	1,54	1,3
A/D-Umsetzer 2	1,52	0,9

- a) Berechnen Sie die Breite q einer Quantisierungsstufe für jeden der A/D-Umsetzer unter der Annahme eines linearen Quantisierungsmodells. (4 Punkte)
- b) Berechnen Sie aus der Breite q einer Quantisierungsstufe nach Teilaufgabe a) die Auflösung in Bit der eingesetzten A/D-Umsetzer. (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Sie wollen eine sinusförmige Spannung ohne Kompression digitalisieren. Sie wissen, dass das Signal maximal Frequenzen von 20 kHz aufweist. Ihnen stehen $20 \cdot 10^6$ Byte Speicher zur Verfügung und Sie wollen Aliasing vermeiden.

- c) Sie möchten eine 5-minütige Aufzeichnung erstellen. Dimensionieren Sie Ihre Abtastrate und Bits pro Abtastzeitpunkt für eine möglichst hochwertige Aufzeichnung. Welches theoretische SNR erreichen Sie hierbei? (2 Punkte)

Für die praktische Umsetzung steht Ihnen nun ein Delta-Sigma-Umsetzer 1. Ordnung mit einer maximalen Taktrate von $2,4 \cdot 10^6$ Abtastwerten pro Sekunde zur Verfügung

- d) Wie lange können Sie unter Berücksichtigung vom SNR des A/D-Umsetzers in best-möglicher Qualität aufzeichnen? (3 Punkte)
- e) Sie bemerken, dass kleine Signalamplituden häufiger als große auftreten. Nennen Sie ein Verfahren, welches hier Abhilfe schafft! (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Ihnen ist in Abbildung 2 die Amplitudendichte eines quantisierten Signals gegeben.

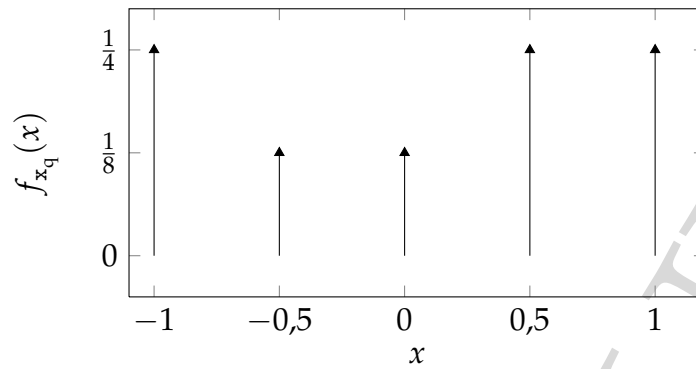


Abbildung 2: Amplitudendichte eines quantisierten Signals.

- f) Was können Sie über die für die Quantisierung verwendete Anzahl von Bits aussagen? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 Punkt)

Sie gehen nun von einem 3-Bit-Umsetzer und der Breite einer Quantisierungsstufe $q = 0,5$ für die Quantisierung aus. Nehmen Sie an, dass der Umsetzer einen Eingangsbereich von $-1,75$ bis $2,25$ besitzt.

- g) Zeichnen Sie die zugehörige äquidistante Quantisierungskennlinie. (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Ein weiterer A/D-Umsetzer verwendet bei gleichem Eingangsbereich 2 Bit bei einer variablen Stufenbreite.

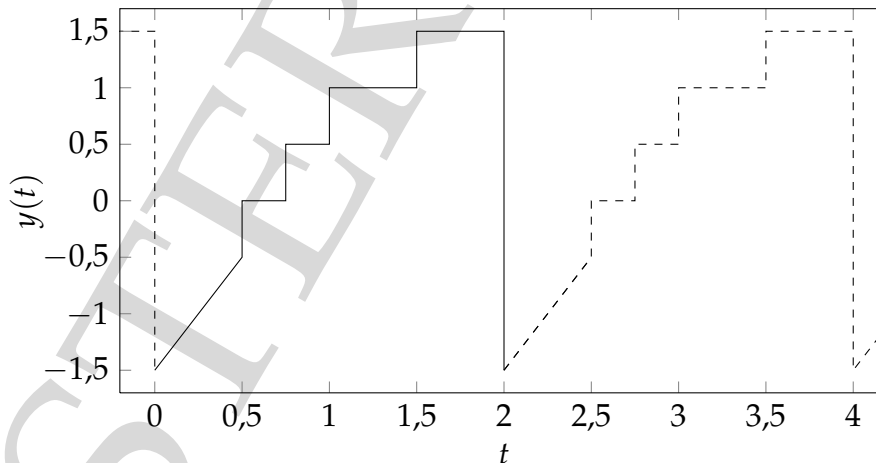


Abbildung 3: Periodisches Signal $y(t)$.

- h) Zeichnen Sie für das periodische Signal $y(t)$ in Abbildung 3 die zugehörige Amplitudendichte $f_y(y)$. (2 Punkte)
- i) Zeichnen Sie eine optimale Quantisierungskennlinie für das Signal $y(t)$.
Hinweis: Eine Rechnung ist nicht erforderlich. (2 Punkte)

Lösung

- a) Gesucht ist die Breite q der Amplitudenstufen. Das lineare Quantisierungsmodell lautet:

$$u_q(t) = u(t) + e_q(t), \quad (L1)$$

und somit gilt, da u und e_q als unkorreliert angenommen werden,

$$E\{u_q^2\} = E\{u^2\} + E\{e_q^2\} \quad (L2)$$

bzw.

$$\sigma_{u_q}^2 + \mu_{u_q}^2 = \sigma_u^2 + \mu_u^2 + \sigma_{e_q}^2 + \mu_{e_q}^2. \quad (L3)$$

Da e als mittelwertfrei und gleichverteilt angenommen wird, gilt $\mu_{e_q} = 0$ und $\sigma_{e_q}^2 = \frac{q^2}{12}$. Einsetzen und Auflösen nach q liefert:

$$q = \sqrt{12(\sigma_{u_q}^2 + \mu_{u_q}^2 - \sigma_u^2 - \mu_u^2)}. \quad (L4)$$

Damit lassen sich die Breiten der Quantisierungsstufen der einzelnen ADU berechnen:

$$q_1 = 2,5018 \text{ V}, \quad (L5)$$

$$q_2 = 0,8514 \text{ V}. \quad (L6)$$

(Σ: 4 Punkte)

- b) Der Eingangsbereich aller Wandler ist $u_E = 10 \text{ V}$ breit und wird in 2^N Stufen der Breite q unterteilt, d. h. es gilt:

$$u_E = q \cdot 2^N \quad \Rightarrow \quad N = \log_2 \frac{u_E}{q}. \quad (L7)$$

Damit lassen sich die Auflösungen der einzelnen ADU berechnen:

$$N_1 = 1,9989 \text{ Bit} \rightarrow 2 \text{ Bit}, \quad (L8)$$

$$N_2 = 3,5541 \text{ Bit} \rightarrow 4 \text{ Bit}. \quad (L9)$$

(Σ: 2 Punkte)

- c) Um Aliasing zu vermeiden, muss das Signal mit mindestens 40 kHz abgetastet werden. Bei einer Aufzeichnung von 300 Sekunden ergeben sich so

$$\frac{20\,000\,000 \cdot 8 \text{ bit}}{300 \text{ s} \cdot 40 \text{ kHz}} = 13,333 \text{ bit}$$

pro Abtastwert. Das Signal kann somit mit 13 bit quantisiert werden. Für den Quantisierungsfehler gilt laut Vorlesung für sinusförmige Signale:

$$\text{SNR}_{\text{Quant}} = 6,02 \cdot N + 1,76$$

und damit

$$\text{SNR}_{\text{Quant}} = 6,02 \cdot 13 + 1,76 = 80,02 \text{ dB}.$$

(Σ: 2 Punkte)

- d) Aus der maximalen Geschwindigkeit des Delta-Sigma-Umsetzers ergibt sich der Überabstastfaktor zu

$$M = \frac{2\,400\,000\text{ Hz}}{20\,000\text{ Hz}} = 120$$

Für Delta-Sigma-Umsetzer 1. Ordnung gilt näherungsweise

$$\begin{aligned}\text{SNR}_{\Delta\Sigma} &\approx \frac{1}{4 \sin^2(\pi \frac{1}{M})} \\ &= \frac{1}{4 \sin^2(\pi \frac{1}{120})} = 364,84 \hat{=} 25,62\text{ dB}\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich entsprechend der vorherigen Teilaufgabe die benötigte Anzahl an Bits zu

$$N = \frac{\text{SNR}_{\Delta\Sigma} - 1,76}{6,02} = 3,96$$

Bei Verwendung von 4 Bits ergibt sich eine Aufnahmelänge L von

$$L = \frac{20\,000\,000 \cdot 8\text{ bit}}{4\text{ bit} \cdot 40\text{ kHz}} = 1000\text{ s}$$

(Σ : 3 Punkte)

- e) Transformation des Signales durch eine nichtlineare Kennlinie (Kompondierung).
(Σ : 1 Punkt)
- f) Da das gegebene Signal 5 Zustände besitzt, wurde für die Quantisierung des Signals ein A/D-Umsetzer mit mindestens 3 Bits verwendet.
(Σ : 1 Punkt)
- g) Der gesuchte Quantisierer besitzt gleich breite Stufen der Breite $q = 0,5$ und teilt somit die Stufen gleichmäßig entsprechend Abbildung L4 über den Eingangsbereich auf.
(Σ : 2 Punkte)
- h) Die gesuchte Amplitudendichte ist in Abbildung L5 gegeben.
(Σ : 2 Punkte)
- i) Eine mögliche Quantisierungskennlinie ist in Abbildung 2 gegeben. (Σ : 2 Punkte)

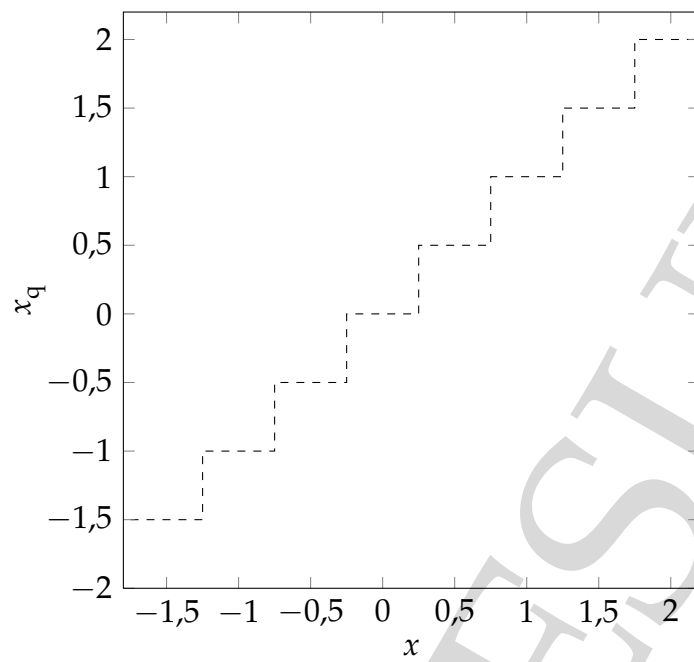


Abbildung L4: Kennlinie des 3-Bit-Quantisierers mit gleich breiten Stufen.

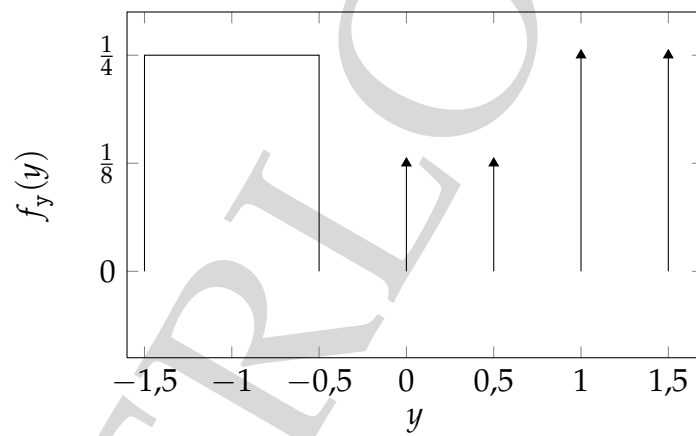


Abbildung L5: Amplitudendichte von $y(t)$.

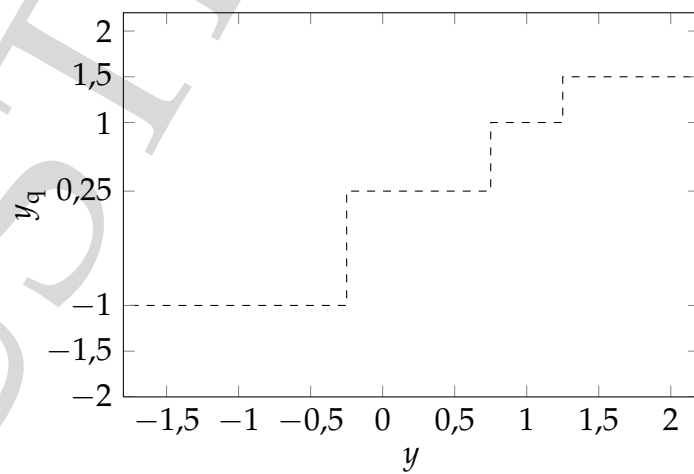


Abbildung L6: Kennlinie eines optimalen 2-Bit-Quantisierers.