

**Klausur im Fach
Messtechnik
17. März 2016**

Musterlösung

Aufgabe 1: 16

Aufgabe 2: 16

Aufgabe 3: 17

Aufgabe 4: 15

Gesamtpunkte: 64

Aufgabe 1: Kurvenanpassung (16 Punkte)

Ein Messgerät hat folgende Werte $y(u_i)$ an den Stützstellen u_i fehlerfrei aufgezeichnet:

u_i	1	2	4
$y(u_i)$	3	1	2

- a) Interpolieren Sie die Kennlinie des Messgeräts. Verwenden Sie hierzu die Interpolationsmethode nach Lagrange! (5 Punkte)
- b) Um die interpolierte Kennlinie zu verbessern, wurde eine weitere Messung durchgeführt. Dabei hat sich das Wert $y(3) = 1$ ergeben. Berechnen Sie das neue Interpolationspolynom unter Berücksichtigung dieses Messwertes. Wenden Sie dazu das Newton-Verfahren an. Nennen Sie einen Vorteil der Interpolation durch Newton-Polynome. (5 Punkte)
- c) Zur Approximation der Kennlinie anhand der 4 Messwerte wird ein Least-Squares-Schätzer mit den Basisfunktionen

$$\varphi_0(l) = 1, \quad \varphi_1(l) = l, \quad \varphi_2(l) = l^2, \quad \varphi_3(l) = l^3$$

angewendet. Geben Sie den Parametervektor $\mathbf{a}$ an, der vom Least-Squares-Schätzer ermittelt wird. (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

- d) Erklären Sie, was beim Least-Squares-Schätzer minimiert wird!

(1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

- e) Wann ist es vorteilhaft, Approximations- anstelle von Interpolationsverfahren zu verwenden? (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

- f) Welche Voraussetzung muss im Idealfall erfüllt sein, um einen Least-Squares-Schätzer anzuwenden? (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

- g) Tabelle 1 repräsentiert einen Ausschnitt der Intensitätswerte eines diskreten Grauwertbildes. Berechnen Sie den Intensitätswert $g(x; y)$ an dem Punkt $(x = 1,5; y = 4,8)$ mit Hilfe der bilinearen Interpolation. (2 Punkte)

Tabelle 1: Intensitätswerte.

	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$
$y = 4$	10	70	250
$y = 5$	40	80	100
$y = 6$	120	135	140

Lösung

a) Für die Lagrange-Interpolation gilt:

$$\hat{y}_L(u) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot \ell_i(u), \quad n = 2$$

Es werden die Lagrange-Polynome $\ell_0(u)$, $\ell_1(u)$ und $\ell_2(u)$ benötigt.

$$\begin{aligned}\ell_0(u) &= \frac{(u-2)(u-4)}{(1-2)(1-4)} = \frac{u^2 - 6u + 8}{3} \\ \ell_1(u) &= \frac{(u-1)(u-4)}{(2-1)(2-4)} = \frac{-u^2 + 5u - 4}{2} \\ \ell_2(u) &= \frac{(u-1)(u-2)}{(4-1)(4-2)} = \frac{u^2 - 3u + 2}{6}\end{aligned}$$

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\hat{y}_L(u) &= 3 \cdot \ell_0(u) + 1 \cdot \ell_1(u) + 2 \cdot \ell_2(u) \\ &= u^2 - 6u + 8 + \frac{-u^2 + 5u - 4}{2} + \frac{u^2 - 3u + 2}{3} \\ &= u^2 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + u \left(-6 + \frac{5}{2} - 1\right) + 8 - 2 + \frac{2}{3} \\ &= \frac{5}{6}u^2 - \frac{9}{2}u + \frac{20}{3}\end{aligned}$$

(Σ : 5 Punkte)

b) Bei dem rekursiven Ansatz nach Newton gilt:

$$\hat{y}_N(u) = \hat{y}_L(u) + a_3 (u - u_0) (u - u_1) (u - u_2)$$

Parameter a_3 muss für $u = u_3$ bestimmt werden.

$$a_3 = \frac{\hat{y}_N(u_3) - \hat{y}_L(u_3)}{(u_3 - 1)(u_3 - 2)(u_3 - 4)} = \frac{1 - \frac{2}{3}}{2 \cdot 1 \cdot (-1)} = -\frac{1}{6}$$

Durch Einsetzen von a_3 und $\hat{y}_L(u_3)$ in die vorletzte Gleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned}\hat{y}_N(u) &= \frac{5}{6}u^2 - \frac{9}{2}u + \frac{20}{3} - \frac{1}{6}(u-1)(u-2)(u-4) \\ &= -\frac{1}{6}u^3 + 2u^2 - \frac{41}{6}u + 8\end{aligned}$$

Newton-Polynome weisen eine leichte Erweiterbarkeit beim Hinzufügen von Stützstellen auf.

(Σ : 5 Punkte)

- c) Dieser Least-Squares-Schätzer setzt als Approximationsfunktion ein Polynom 3. Grades an und hat 4 Messpunkte, d. h. das Gleichungssystem ist exakt bestimmt, er liefert also die gleichen Koeffizienten wie das Lagrange-Verfahren.

$$\mathbf{a} = \left[8, -\frac{41}{6}, 2, -\frac{1}{6}\right]^T$$

(Σ: 1 Punkt)

- d) Ein Least-Squares-Schätzer minimiert die Summe der Approximationsfehlerquadrate (Energie des Approximationsfehlers) bei allgemeinen Basisfunktionen.

(Σ: 1 Punkt)

- e) Die Anwendung von Approximationsverfahren ist dann vorteilhaft, wenn viele verbrauchte Messwerte vorhanden sind. In diesem Fall würden Interpolationsverfahren zu einem Polynom hohen Grades führen, was einerseits rechenaufwendig ist und andererseits zur unrealistischen Kennlinien führen kann.

(Σ: 1 Punkt)

- f) Im Idealfall muss Vorwissen über den Verlauf der Kennlinie vorhanden sein (Signalmodell).

(Σ: 1 Punkt)

- g) Für die bilineare Interpolation werden die Intensitäten der vier umliegenden Pixel $g(1; 4)$, $g(2; 4)$, $g(1; 5)$ und $g(2; 5)$ gewichtet.

$$g(1,5; 4,8) = 0,2 \cdot (0,5 \cdot 10 + 0,5 \cdot 70) + 0,8 \cdot (0,5 \cdot 40 + 0,5 \cdot 80) = 56$$

(Σ: 2 Punkte)

Aufgabe 2: Messsysteme (16 Punkte)

Ihnen steht ein Messgerät mit der folgenden Messkennlinie zur Verfügung:

$$y(u) = \frac{1}{27}u^3 - \frac{1}{9}u^2 + \frac{1}{3}u + 1.$$

Die zu messende Größe u ist auf das Intervall $[-1; 3]$ beschränkt.

- Im Folgenden soll der Messbereich festgelegt werden, in welchem die Kennlinie möglichst linear verläuft. Ferner ist neben der Linearität auch eine möglichst hohe Empfindlichkeit wichtig. Um welchen Punkt sollte der Messbereich gelegt werden? Bestimmen Sie den günstigsten Messbereich $[u_a; u_a + d]$ für $d = 2$. (5 Punkte)
- Berechnen Sie für den Messbereich aus der vorherigen Aufgabe die zugehörige ideale Kennlinie $y_i(u)$. Geben Sie den relativen Kennlinienfehler bezogen auf den Anzeigebereich an. (4 Punkte)

Neben dem oben beschriebenen Messgerät sind Ihnen folgende Bauteile gegeben:

- Ein Verstärkerglied A_1 mit der Kennlinie $y_1(u_1, u_2) = (u_1 + u_2) \cdot V_1$, wo $V_1 = 0,1$ der konstante Verstärkungsfaktor ist.
- Ein Verstärkerglied A_2 mit der Kennlinie $y_2(u_1, u_2) = u_1 \cdot V_2 + u_2$, wo der Verstärkungsfaktor V_2 im Bereich $[-50; 50]$ stufenlos einstellbar ist.
- Zwei konstante Signalquellen $u_{c,1}$ und $u_{c,2}$.

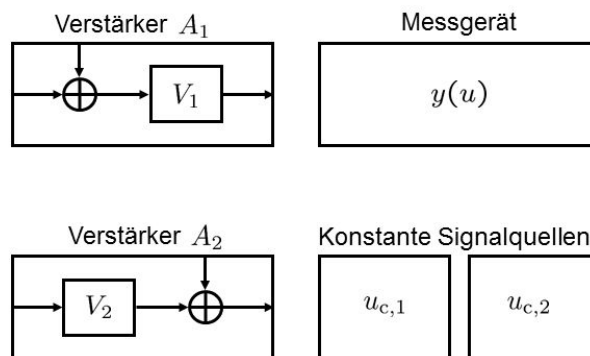


Abbildung 1: Zur Verfügung stehende Blöcke.

Verwenden Sie in der folgenden Aufgabe die Schaltsymbole entsprechend Abbildung 1. Sie wollen die Kennlinie $y(u)$ um ihren Wendepunkt als Arbeitspunkt u_w herum linearisieren.

- Skizzieren Sie, wie Sie die gegebenen Bauteile verschalten müssen. Geben Sie an, welche Werte Sie für V_2 , $u_{c,1}$ und $u_{c,2}$ einstellen müssen, damit Sie eine maximale Linearisierung erreichen und die Gesamtkennlinie im Arbeitspunkt keinen Offset besitzt, d. h. $y_{\text{Ges,H}}(u_w) = y(u_w)$. Es soll weiterhin $V_1 \cdot V_2 = 1$ gelten. (3 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Ihnen stehen zwei baugleiche Sensoren für eine Messung zur Verfügung. Um die Messkennlinie zu linearisieren, wenden Sie die Differenzmethode an.

- d) Wie groß ist der Kennlinienfehler im Arbeitspunkt bei der Differenzmethode?
(1 Punkt)
- e) Warum hat diese Methode eine linearisierende Wirkung? Begründen Sie stichwortartig Ihre Antwort (keine Rechnung erforderlich). Nennen Sie einen Fehlertyp, der mit dieser Methode effektiv unterdrückt werden kann.
(3 Punkte)

Lösung

- a) Um das gewünschte Ziel zu erreichen, muss idealerweise der Arbeitsbereich nach Möglichkeit um einen Wendepunkt gewählt werden. Ein Wendepunkt liegt genau dann vor, wenn $y''(u) = 0$ und $y'''(u) \neq 0$ ist.

Die Empfindlichkeit der Kennlinie ist

$$S(u) = y'(u) = \frac{1}{9}u^2 - \frac{2}{9}u + \frac{1}{3}.$$

Aus

$$y''(u) = \frac{2}{9}u - \frac{2}{9} \stackrel{!}{=} 0$$

und

$$y'''(u) = \frac{2}{9} \neq 0$$

folgt, dass ein Wendepunkt bei $u = 1$ existiert.

Da im Messbereich die Kennlinie einen Wendepunkt hat, kann das erste Kriterium (3.78 im MT-Buch) verwendet werden.

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} S(u_a + 2) - S(u_a) \\ &= \frac{1}{9}u_a^2 + \frac{2}{9}u_a + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{9}u_a^2 - \frac{2}{9}u_a + \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{4}{9}u_a \\ u_a &= 0 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich der günstigste Messbereich zu $[0; 2]$.

(Σ : 5 Punkte)

- b) Die ideale Kennlinie ist definiert als

$$y_i(u) = S_i \cdot (u - u_a) + y_a.$$

Die ideale Empfindlichkeit ergibt sich zu

$$S_i = \frac{y_e - y_a}{u_e - u_a} = \frac{\frac{41}{27} - 1}{2 - 0} = \frac{7}{27}.$$

Somit ist die ideale Kennlinie in dem gegebenen Messbereich

$$y_i(u) = \frac{7}{27}u + 1.$$

Der relative Kennlinienfehler bezogen auf den Anzeigebereich ist definiert zu

$$\begin{aligned} F_{rA} &= \frac{y - y_i}{y_e - y_a} \\ &= \frac{\frac{1}{27}u^3 - \frac{1}{9}u^2 + \frac{1}{3}u + 1 - \left(\frac{7}{27}u + 1 \right)}{\frac{41}{27} - 1} \\ &= \frac{1}{14}u^3 - \frac{3}{14}u^2 + \frac{1}{7}u \end{aligned}$$

(Σ : 4 Punkte)

- c) Um die Kennlinie zu linearisieren muss ein Verstärker jeweils vor und einer hinter das Messgerät gesetzt werden. An dem zweiten Eingang der einzelnen Verstärker werden die konstanten Signalquellen geschaltet. Abbildung L1 zeigt das resultierende Schaltbild.

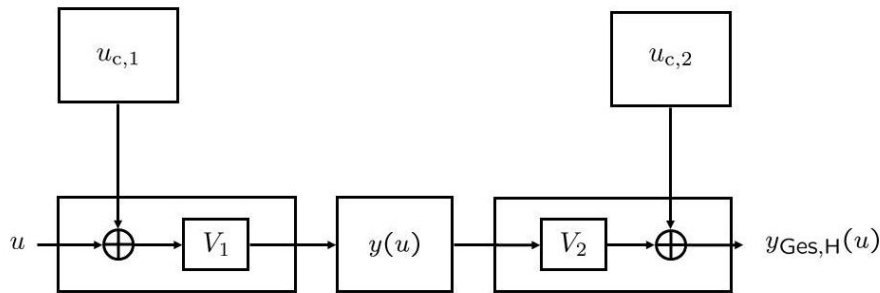


Abbildung L1: Linearisierende Schaltung.

Aus der Bedingung $V_1 \cdot V_2 = 1$ ergibt sich $V_2 = 10$. Damit das Verhalten im Arbeitspunkt gleich bleibt, müssen noch die Werte der konstanten Quellen gewählt werden:

$$\begin{aligned} V_1 \cdot (u_w + u_{c,1}) &= u_w \\ 0,1 \cdot (1 + u_{c,1}) &= 1 \\ 1 + u_{c,1} &= 10 \\ u_{c,1} &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{c,2} + V_2 \cdot y(u_w) &= y(u_w) \\ u_{c,2} + 10 \cdot \frac{34}{27} &= \frac{34}{27} \\ u_{c,2} &= -9 \cdot \frac{34}{27} \\ u_{c,2} &= -\frac{34}{3} \end{aligned}$$

(Σ: 3 Punkte)

- d) Der Kennlinienfehler im Arbeitspunkt bei der Differenzmethode ist identisch null.
(Σ: 1 Punkt)
- e) Das Ausgangssignal der Parallelschaltung gleichartiger Messsysteme lässt sich darstellen als:

$$y_D = \underbrace{y(u_0 + \Delta u)}_{y_1} - \underbrace{y(u_0 - \Delta u)}_{y_2}.$$

Entwickelt man beide Funktionen y_1 und y_2 in eine Taylor-Reihe um den Arbeitspunkt $u = u_0$ und bildet man deren Differenz, fallen alle Terme mit geradem Exponenten von Δu heraus. Dadurch wird auch die „Krümmung“ der Messkennlinie unterdrückt: $\frac{S'(u_0)}{2} (\Delta u)^2$. Das erklärt die linearisierende Wirkung.

Fehler, die als gerade Funktionen in $y(u)$ eingehen, können unterdrückt werden, z. B. systematische, superponierende Fehler.

(Σ: 3 Punkte)

Aufgabe 3: Statistik, Stochastische Signale (17 Punkte)

Sie haben in Abbildung 2 das mit weißem Rauschen überlagerte Signal $x(t)$ gegeben.

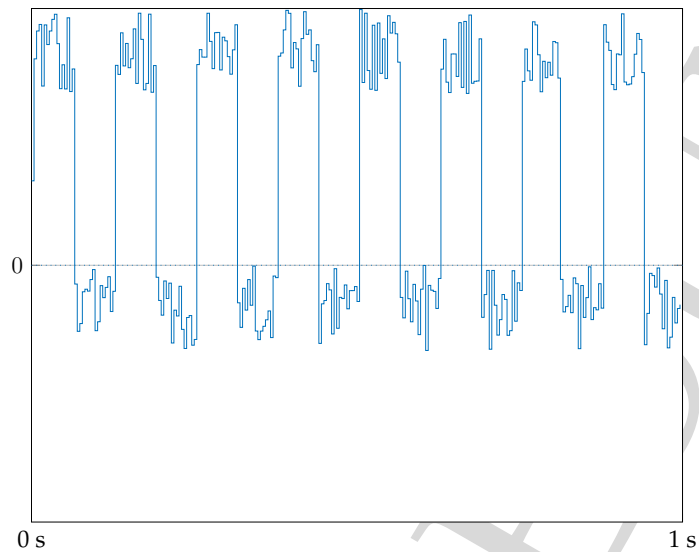


Abbildung 2: Zeitsignal $x(t)$.

- a) Zeichnen Sie die Autokorrelationsfunktion $r_{xx}(\tau)$ und die Autoleistungsdichte $S_{xx}(f)$ des Zeitsignals $x(t)$. Beschriften und beziffern Sie nach Möglichkeit die Koordinatenachsen. (4 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

Sie haben in Abbildung 3 die Autokorrelationsfunktion eines Signals $y(t)$ gegeben.

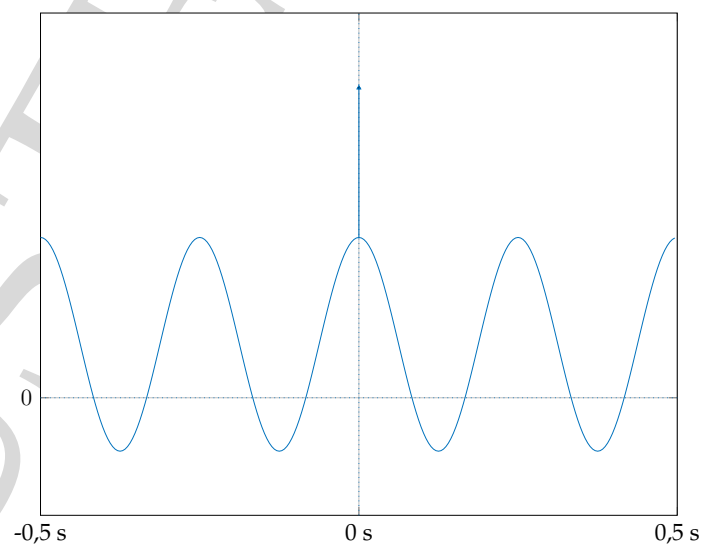


Abbildung 3: Autokorrelation $r_{yy}(\tau)$.

- b) Zeichnen Sie das zugehörige Zeitsignal $y(t)$ und die Autoleistungsdichte $S_{yy}(f)$ des Zeitsignals $y(t)$. Beschriften und beziffern Sie nach Möglichkeit die Koordinatenachsen. (4 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen.

Sie haben eine Ware aus dem Ausland bestellt. Aufgrund der großen geographischen Entfernung kann es zu unterschiedlichen Lieferzeiten kommen. Laut Angaben beträgt die Lieferzeit mindestens 1, maximal 5 Wochen. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die Lieferzeit im angegebenen Intervall gleichverteilt ist.

- c) Zeichnen Sie die entsprechende Dichtefunktion. Beschriften Sie die Achsen. (2 Punkte)
- d) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass Sie auf Ihre Bestellung mindestens 2,5 und nicht mehr als 4 Wochen warten müssen. Geben Sie ferner die Varianz der Lieferzeit an. (2 Punkte)

Anhand seiner Erfahrungen hat der Händler folgende Tabelle mit Lieferzeiten t für Deutschland erstellt. Darin ist die Anzahl der gelieferten Waren in dem jeweiligen Zeitintervall angegeben.

Tabelle 2: Anzahl der gelieferten Waren.

Lieferzeit in Wochen	$1 \leq t < 2$	$2 \leq t < 3$	$3 \leq t < 4$	$4 \leq t \leq 5$
Anzahl der Waren	18	20	22	20

- e) Nutzen Sie den χ^2 -Anpassungstest, um zu überprüfen, ob die Statistik der vermuteten Gleichverteilung entspricht. Das Signifikanzniveau soll bei 1 % liegen. Geben Sie alle nötigen Zwischenschritte an. **Hinweis:** Die Tabelle 3 enthält die Quantile der χ^2 -Verteilung für unterschiedliche Freiheitsgrade f . (5 Punkte)

Tabelle 3: Quantile der χ^2 -Verteilung.

	$\chi^2_{1-\alpha}$			
f	0,975	0,990	0,995	0,999
1	5,02	6,63	7,88	10,83
2	7,38	9,21	10,60	13,82
3	9,35	11,34	12,84	16,27
4	11,14	13,28	14,86	18,47

Lösung

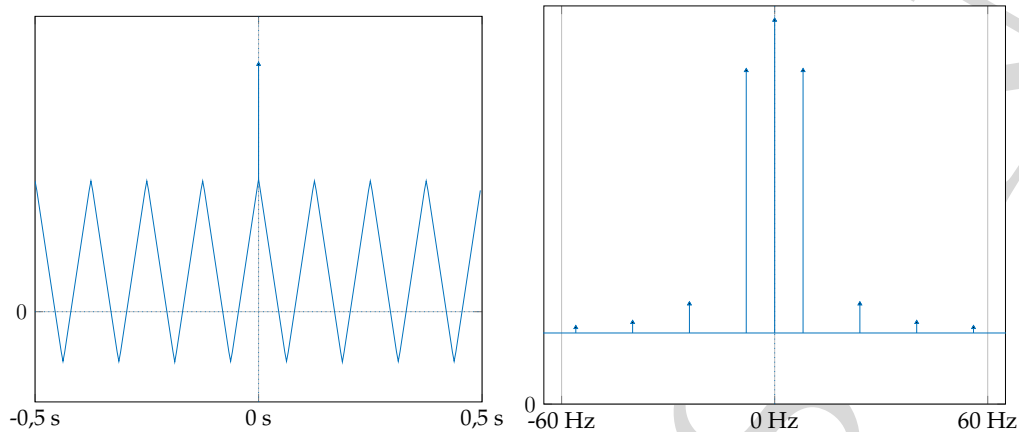


Abbildung L2: Autokorrelation und Autoleistungsdichte von $x(t)$.

a) Siehe Abbildung L2:

$x(t)$	Rechtecksignal $f_0 = 8$ Hz	Offset	Weißes Rauschen
$r_{xx}(\tau)$	dreieckförmig $f_0 = 8$ Hz	Offset	$\delta(\tau)$
$S_{xx}(f)$	Impulse bei $(2k+1)f_0$	$\delta(f)$	Offset

(Σ : 4 Punkte)

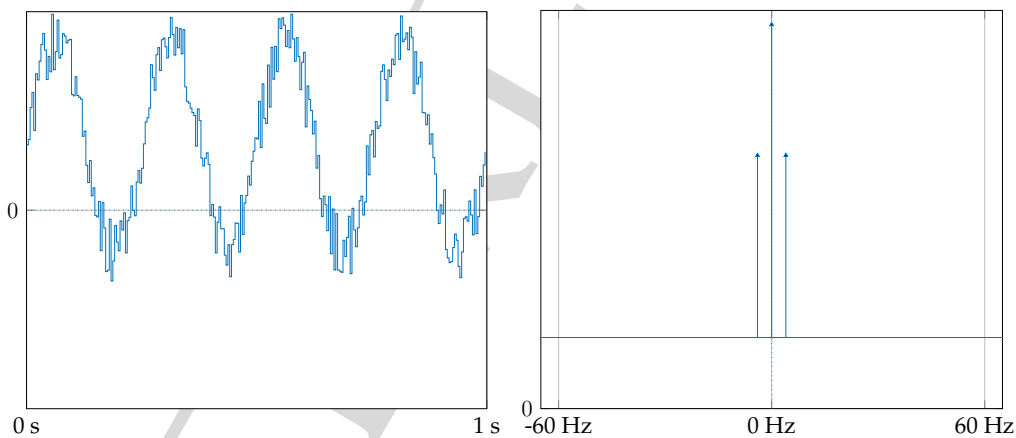


Abbildung L3: Zeitsignal und Autoleistungsdichte von $y(t)$.

b) Siehe Abbildung L3:

$y(t)$	Harmonische $f_0 = 4$ Hz	Offset	Weißes Rauschen
$r_{yy}(\tau)$	Cosinus $f_0 = 4$ Hz	Offset	$\delta(\tau)$
$S_{yy}(f)$	Impulse bei $f = \pm f_0$	$\delta(f)$	Offset

(Σ : 4 Punkte)

c) Abbildung L4 zeigt die Dichte $f_t(t)$.

Per Definition nimmt $f_t(t)$ den Wert $\frac{1}{5-1} = \frac{1}{4}$ im Intervall $1 \leq t \leq 5$ auf (sonst 0).

(Σ : 2 Punkte)

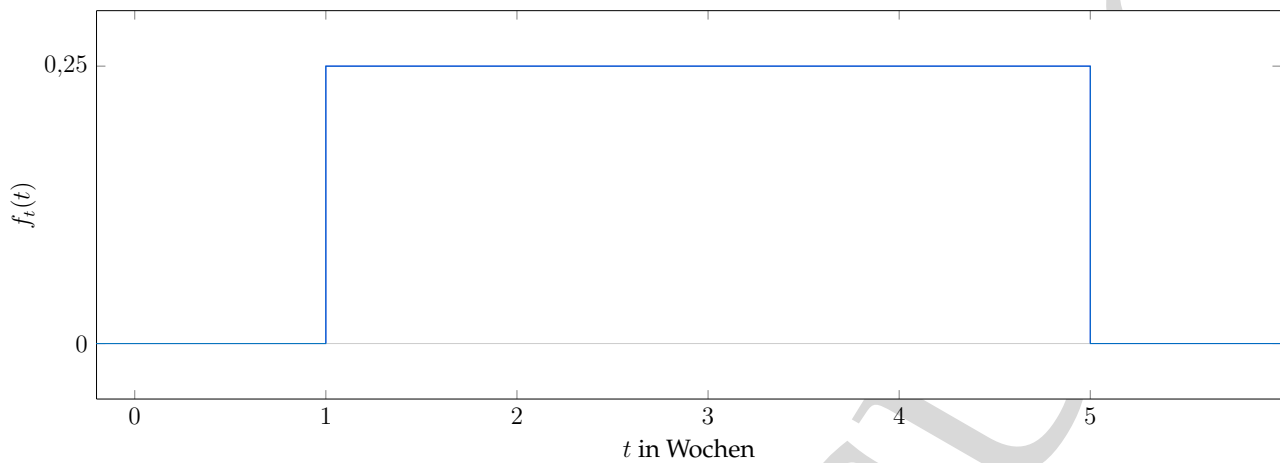


Abbildung L4: Wahrscheinlichkeitsdichte.

d) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist:

$$P\left(\frac{5}{2} \leq t \leq 4\right) = \int_{\frac{5}{2}}^4 \frac{1}{4} dt = \left(4 - \frac{5}{2}\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

Die Varianz der Lieferzeiten beträgt $\frac{1}{12}(5 - 1)^2 = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$.

(Σ: 2 Punkte)

e) Voraussetzungen:

- unabhängige Messwerte
- ausreichend große Stichprobe (wird angenommen)

Das Histogramm wurde in der Aufgabe vorgegeben. Folgende Bedingungen müssen erfüllt werden:

- $n_i \geq 5$
- $n_{i,\text{Rand}} \geq 1$ erfüllt.

Die Nullhypothese lautet: H_0 : Die Lieferzeit der Waren pro Intervall ist gleichverteilt entsprechend Abbildung L4.

Die Summe der Häufigkeiten ist $n = 80$.

Gegeben sind 4 Klassen mit der gleichen Breite $b = 1$, die Klassenwahrscheinlichkeiten p_i ergeben sich als

$$p_i = b \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

i	p_i	np_i	$(n_i - np_i)^2$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
0	$\frac{1}{4}$	20	$(18 - 20)^2 = 4$	$\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$
1	$\frac{1}{4}$	20	$(20 - 20)^2 = 0$	0
2	$\frac{1}{4}$	20	$(22 - 20)^2 = 4$	$\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$
3	$\frac{1}{4}$	20	$(20 - 20)^2 = 0$	0

Die Prüfgröße χ^2 lautet

$$\chi^2 \approx \sum_{i=0}^3 \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{2}{5}.$$

Bei der Bestimmung der Freiheitsgrade muss berücksichtigt werden, dass 4 Klassen verwendet werden. Somit verringert sich die Anzahl der Freiheitsgrade m auf

$$m = k - 1 = 4 - 1 = 3.$$

Der Wert χ_α^2 kann von der Tabelle 3 abgelesen werden und ergibt sich mit $1 - \alpha = 0,99$ zu $\chi_\alpha^2 \approx 11,34$. Die Hypothese wird also angenommen, da $\chi_\alpha^2 \geq \chi^2$. (Σ : 5 Punkte)

Aufgabe 4: Digitalisierung, Drehzahlmessung (15 Punkte)

- a) Was versteht man unter Rauschformung (*noise shaping*) und mit welcher weiteren Technik wird diese üblicherweise kombiniert? Beschreiben Sie wie sich das SNR mit dieser Kombination bei der A/D-Umsetzung erhöhen lässt. (3 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen.

Zur Regelung einer Fräsmaschine soll die Drehzahl des Fräasers gemessen werden. Dazu wird ein Sensorzahnrad mit $Z = 100$ Zähnen verwendet. Die Referenzfrequenz bei der Periodendauermessung betrage $f_0 = 1$ MHz, die Messzeit bei der Frequenzmessung $T_{\text{ref}} = 1$ s.

- b) Ab welcher Drehzahl n_g ist eine Frequenzmessung gegenüber einer Periodendauermessung vorzuziehen? **Hinweis:** Untersuchen Sie dafür den Quantisierungsfehler. (3 Punkte)
- c) Wie hoch ist der Zählerstand am Ende der Messung bei der Drehzahl n_g aus dem Aufgabenteil b) bei Verwendung des Frequenzmessverfahrens? (1 Punkt)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den vorherigen.

- d) In der Tabelle 4 finden Sie die Charakteristika von drei A/D-Umsetzern. Die Spalte q enthält die Breite der jeweiligen Quantisierungsstufen, die Spalten f_A und f_G enthalten jeweils die Abtastfrequenz und die maximale Frequenz des Eingangssignals. Welchen der drei A/D-Umsetzer würden Sie bevorzugen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Tabelle 4: Charakteristika der drei A/D-Umsetzer.

	q in V	f_A in kHz	f_G in kHz
A	2	40	18
B	0,5	50	18
C	0,2	40	22

(2 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den vorherigen.

- e) Erklären Sie ausführlich, wie Dithering funktioniert.

(4 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den vorherigen.

- f) Was versteht man unter Jitter? Wann tritt es verstärkt auf? Begründen Sie Ihre Antwort.

(2 Punkte)

Lösung

- a) Als Rauschformung bezeichnet man die Hochpasswirkung des Delta-Sigma-Modulators auf das Quantisierungsrauschen, im Gegensatz zur Allpasswirkung auf das Nutzsignal. Üblicherweise wird das Signal zusätzlich überabgetastet, d. h. die Abtastfrequenz ist deutlich höher, als es für das Nutzsignal aufgrund des Abtasttheorems nötig wäre. Dadurch werden die Leistungsanteile von Quantisierungsrauschen und Nutzsignal im Spektralbereich separiert und lassen sich somit durch eine anschließende Tiefpassfilterung voneinander trennen. (Σ : 3 Punkte)
- b) Die relativen Quantisierungsfehler der beiden Verfahren sind gegeben als:

$$F_{r,FM} \leq \frac{\varphi_0}{\omega_q T_{\text{ref}}} = \frac{\frac{2\pi}{Z}}{2\pi n_g}$$
$$F_{r,PDM} \leq \frac{\omega_q}{\varphi_0 f_0} = \frac{2\pi n_g}{\frac{2\pi}{Z} 10^6}$$

Die Frequenzmessung wird bevorzugt, wenn

$$F_{r,FM} < F_{r,PDM}$$

gilt. Daraus folgt:

$$\frac{\frac{2\pi}{Z}}{2\pi n_g} < \frac{2\pi n_g}{\frac{2\pi}{Z} 10^6}$$
$$\frac{1}{100 n_g} < \frac{n_g}{10000}$$
$$100 < n_g^2$$
$$10 < n_g$$

(Σ : 3 Punkte)

- c) Für die Frequenzmessung gilt:

$$\omega_q = 2\pi n_g = \frac{N \cdot 2\pi}{Z \cdot T_{\text{ref}}} \Rightarrow N = n_g \cdot Z \cdot T_{\text{ref}} = 1000$$

(Σ : 1 Punkt)

- d) A/D-Umsetzer C verletzt das Abtasttheorem. Von den verbleibenden beiden Wandlern hat B die höhere Auflösung. Die Wahl fällt damit auf A/D-Umsetzer B. (Σ : 2 Punkte)

- e) Dithering: Voraussetzung für die approximative Erfüllung des Quantisierungstheorem ist, dass die Amplitude des kontinuierlichen Eingangssignals mehrere Quantisierungsstufen durchläuft. Wird diese Voraussetzung im Beobachtungsintervall nicht erfüllt, ist im Grenzfall der Signalabschnitt konstant ($u(t) = u_0 = \text{const}$), was zu einer impulsförmigen lokalen Amplitudendichte $f_u(u)$ führt. Die zugehörige charakteristische Funktion $\Phi_u(f)$ ist dann eine Harmonische. Die fehlende Bandbegrenzung führt

zu starken spektralen Überlappungen der charakteristischen Funktion nach der Quantisierung.

Bei Dithering wird dem Nutzsignal ein hochfrequentes, mittelwertfreies Dithersignal mit einer, näherungsweise bandbegrenzten charakteristischen Funktion überlagert. Dadurch wird die charakteristische Funktion des Nutzsignals mit der charakteristischen Funktion des Dithersignals multipliziert und somit auch bandbegrenzt. Dadurch werden Bandüberlappungen weitgehend vermieden. Bei bekannten Momenten des Dithersignals lassen sich nach der Quantisierung die Momente des Nutzsignals durch Tiefpassfilterung rekonstruieren. (Σ : 4 Punkte)

- f) Im Idealfall wird davon ausgegangen, dass die Abtastung zu exakt festgelegten Zeitpunkten $n \cdot t_A$ erfolgt, was aber in realen Systemen oft nicht der Fall ist. Als Jitter wird der zeitliche Abtastfehler bezeichnet.

Je näher die Signalfrequenz an der Nyquist-Frequenz liegt, desto stärker treten Jitter-Fehler auf, da sich hochfrequente Signalanteile innerhalb des Zeitfehlers τ_n stärker verändern als tieffrequente Signalanteile. (Σ : 2 Punkte)