

**Klausur im Fach
Messtechnik
20. März 2018**

Musterlösung

Aufgabe 1: 14

Aufgabe 2: 16

Aufgabe 3: 17

Aufgabe 4: 18

Gesamtpunkte: 65

Aufgabe 1: Kurvenanpassung (14 Punkte)

Sie möchten die Temperaturabhängigkeit eines Ohm'schen Widerstands untersuchen. Dazu messen sie den Spannungsabfall U über dem Widerstand in Abhängigkeit der Stromstärke I bei einer Referenztemperatur von $T_0 = 20^\circ\text{C}$. Sie nehmen zwei weitere Messreihen bei Temperaturen $T_1 = 30^\circ\text{C}$ und $T_2 = 50^\circ\text{C}$ auf. Die gemessenen Spannungen $U(I, T)$ der Messreihen sind in Tabelle 1 gegeben.

Tabelle 1: Gemessener Spannungsabfall $U(I, T)$ in V über dem Widerstand bei verschiedenen Temperaturen T und Stromstärken I .

T in $^\circ\text{C}$	I in mA			
	0	200	400	600
20	0	10,0	20,0	30,0
30	0	10,4	20,8	31,2
50	0	11,2	22,4	33,6

- a) Berechnen Sie den zu erwartenden Messwert $U(I, T)$ für $T = 25^\circ\text{C}$ und $I = 350\text{ mA}$ mittels bilinearer Interpolation.
Hinweis: Die Angabe des Ergebnisses als Bruch ist hier ausreichend. (3 Punkte)
- b) Berechnen Sie den zu erwartenden Messwert $U(I, T)$ für $T = 45^\circ\text{C}$ und $I = 450\text{ mA}$ mittels Nächster-Nachbar-Interpolation. (1 Punkt)
- c) Sie möchten die Messreihe $U(I = 600\text{ mA}, T_i)$, $i = 0, 1, 2$, mit einem globalen Polynom interpolieren. Welchen Grad N hat das Interpolationspolynom maximal? (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Sie untersuchen das Wachstum von Bakterien in der exponentiellen Phase. Dazu messen Sie die Anzahl A der Bakterien 24 Stunden lang alle 10 Minuten. Sie möchten die Messdaten mithilfe eines Least-Squares-Schätzers approximieren.

- d) Erklären Sie, warum hier eine Approximation der Interpolation zu bevorzugen ist. (1 Punkt)
- e) Erklären Sie, was beim Least-Squares-Schätzer minimiert wird. (1 Punkt)

Als Signalmodell wählen sie ein exponentielles Wachstum, d. h. $A(t) = A_0 \cdot e^{\alpha t}$ mit der unbekannten Anfangspopulation A_0 und dem ebenfalls unbekannten Wachstumsparameter α .

- f) Erklären Sie, wie Sie in diesem Fall die Messdaten mit einem Least-Squares-Schätzer approximieren können. Nennen Sie die gewählten Basisfunktionen. (3 Punkte)

Die Aufgaben werden auf der Rückseite fortgesetzt.

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Sie haben Messwerte und Interpolationsfunktionen gemäß Abbildung 1 gegeben.

- g) Bei welcher Funktion handelt es sich um eine Interpolation durch ein globales Polynom, bei welcher um eine Interpolation durch kubischen Splines? Begründen Sie Ihre Antwort. (3 Punkte)
- h) Wie viele Splines sind zur Interpolation der gegebenen Messwerte notwendig? (1 Punkt)

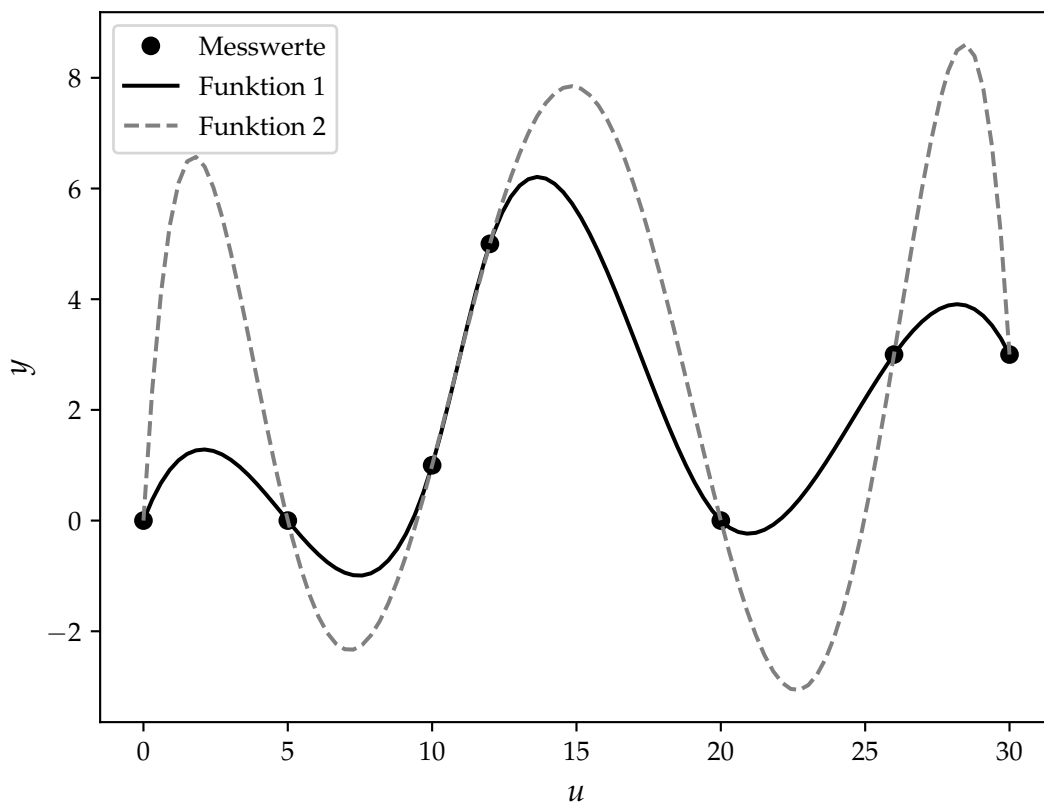


Abbildung 1: Gegebene Messwerte und Interpolationsfunktionen.

Lösung

- a) Wir berechnen den gesuchten Wert als gewichteten Mittelwert der Werte der nächsten Stützstellen:

$$U(I = 350 \text{ mA}, T = 25^\circ \text{C}) \approx \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 10,4 \right) \text{ V} + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 20 + \frac{1}{2} \cdot 20,8 \right) \text{ V} \quad (\text{L1})$$

$$= \frac{10,2}{4} \text{ V} + \frac{61,2}{4} \text{ V} \quad (\text{L2})$$

$$= \frac{71,4}{4} \text{ V} = 17,85 \text{ V} . \quad (\text{L3})$$

Die verwendeten Gewichte lassen sich am einfachsten bestimmen, indem man die Koordinaten der Tabelle 1 transformiert mit

$$u = \frac{I - 200 \text{ mA}}{400 \text{ mA} - 200 \text{ mA}} , \quad z = \frac{T - 20^\circ \text{C}}{30^\circ \text{C} - 20^\circ \text{C}} . \quad (\text{L4})$$

Der gesuchte Wert entspricht dann $U(T = 25^\circ \text{C}, I = 350 \text{ mA}) = U(z = 0,5, u = 0,75)$.
(Σ : 3 Punkte)

- b) Die Stützstelle, die dem Punkt $(I = 450 \text{ mA}, T = 45^\circ \text{C})$ am nächsten gelegen ist, ist $(I = 400 \text{ mA}, T = 50^\circ \text{C})$. Der gesuchte Wert ist demnach

$$U(I = 450 \text{ mA}, T = 45^\circ \text{C}) \approx 22,4 \text{ V} . \quad (\text{L5})$$

(Σ : 1 Punkt)

- c) Die Messreihe besteht aus 3 Messwerten, welche durch ein Polynom von maximalen Grad $N = 3 - 1 = 2$ interpoliert werden. (Σ : 1 Punkt)
- d) Wir nehmen für 24 Stunden alle 10 Minuten Messwerte auf. Die Messreihe umfasst daher $6 \cdot 24 = 144$ Messwerte. Zudem ist davon auszugehen, dass die Messwerte nicht exakt sind, da eine Messung der Anzahl auf ein Bakterium genau unrealistisch ist. Eine Approximation ist in diesem Fall also angemessen. (Σ : 1 Punkt)
- e) Ein Least-Squares-Schätzer minimiert die Summe der Quadrate der Approximationsfehler (oder: Energie des Approximationsfehlers) bei allgemeinen Basisfunktionen. (Σ : 1 Punkt)
- f) Beim Least-Squares-Schätzer wählt man den Approximationsansatz $\hat{y} = \Phi \mathbf{a}$, mit Basisfunktionsmatrix Φ und Parametervektor $\mathbf{a}$. Aufgrund der Nichtlinearität des Signalmodells logarithmieren wir die Daten und erhalten dafür das lineare Signalmodell

$$\ln A(t) = \ln A_0 + \ln e^{\alpha t} = \tilde{A}_0 + \alpha t . \quad (\text{L6})$$

Auf den logarithmierten Daten führen wir demnach eine lineare Regression durch, d.h. eine Approximation mit einem Least-Squares-Schätzer mit den Basisfunktionen

$$\varphi_0 = 1 , \quad \varphi_1 = t . \quad (\text{L7})$$

(Σ : 3 Punkte)

- g) Die Überschwinger der Funktion 2 sind charakteristisch für ein globales Interpolationspolynom. Bei der Interpolation durch kubische Splines wird die Krümmungsenergie der Interpolierenden minimiert. Offensichtlich ist diese bei Funktion 1 geringer als bei Funktion 2. Es handelt sich demnach bei Funktion 1 um eine Interpolation durch kubische Splines, bei Funktion 2 um eine Interpolation durch ein globales Polynom.
(Σ : 3 Punkte)
- h) Es sind 7 Messwerte gegeben. Für eine Interpolation sind $7 - 1 = 6$ Splines notwendig.
(Σ : 1 Punkt)

Aufgabe 2: Messsysteme (16 Punkte)

- a) Nennen Sie 3 Methoden, um die Kennlinie eines Messsystems zu linearisieren. (3 Punkte)
- b) Wie ist die Empfindlichkeit einer Kennlinie $y(u)$ definiert? (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Sie haben die Kennlinie

$$y(u) = \frac{1}{2}u^2 + 3$$

eines justierten Messsystems gegeben. Sie möchten mit einer idealen Empfindlichkeit von $S_1 = 3$ arbeiten.

- c) Geben Sie den günstigsten Messbereich $[u_a; u_a + d]$ der Breite $d = 2$ an. (2 Punkte)
- d) Wie lautet die ideale Kennlinie in diesem Messbereich? (2 Punkte)
- e) Berechnen Sie den relativen Kennlinienfehler $F_r(u)$ bezogen auf den Anzeigebereich. (1 Punkt)
- f) Berechnen Sie das Maximum des Betrags des relativen Kennlinienfehlers aus e). (3 Punkte)
- g) Nennen Sie ein Justierverfahren, mit dem sich das Maximum des Betrags des Kennlinienfehlers bei unveränderter Empfindlichkeit reduzieren lässt. Können Sie dieses Verfahren hier anwenden? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den bisherigen.

Die Kennlinie eines Messsystems ist in Abhängigkeit einer Eingangsgröße u und einer Störgröße z gegeben als

$$y(u, z) = \frac{1}{2} \cdot (u - z)^2 + uz - 6z.$$

- h) Kann der Kennlinienfehler mit der Differenzmethode kompensiert werden? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

Lösung

a) Wähle 3 aus:

- Herabsetzen des Messbereichs
- Hintereinanderschalten zweier nichtlinearer Glieder
- Wahl des günstigen Messbereichs
- Differenzmethode
- Gegenkopplung

(Σ : 3 Punkte)

b) Die Empfindlichkeit S ist definiert durch $S(u) = \frac{\partial y(u)}{\partial u}$. (Σ : 1 Punkt)

c) Die Kennlinie ist eine Parabel und besitzt demnach keinen Wendepunkt. Wir wenden also folgendes Kriterium (Kriterium II aus Messtechnik-Buch, Abschnitt 3.2.3) für die Wahl des günstigsten Messbereichs $[u_a; u_a + d]$ an:

$$0 = \frac{1}{2} [y'(u_a + d) + y'(u_a)] - S_i. \quad (\text{L8})$$

Dabei gilt $y'(u) = u$ und $S_i = 3$. Damit finden wir das Ergebnis

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} (2u_a + d) - 3 \\ \Rightarrow u_a &= \frac{6 - d}{2} = 2. \end{aligned} \quad (\text{L9})$$

Der günstigste Messbereich bei einer idealen Empfindlichkeit von $S_i = 3$ ist demnach $[u_a; u_e] = [2; 4]$. (Σ : 2 Punkte)

d) Zuerst berechnen wir den Anzeigebereich $[y_a; y_e]$ zu:

$$y_a = y(u_a) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 + 3 = 5 \quad (\text{L10})$$

$$y_e = y(u_e) = \frac{1}{2} \cdot 4^2 + 3 = 11. \quad (\text{L11})$$

Die ideale Kennlinie ist jene Gerade, die die Punkte $(u_a; y_a) = (2; 5)$ und $(u_e; y_e) = (4; 11)$ interpoliert. Wir finden

$$\begin{aligned} y_i(u) &= \frac{y_e - y_a}{u_e - u_a} \cdot (u - u_a) + y_a \\ &= \frac{11 - 5}{2} \cdot (u - 2) + 5 \\ &= 3u - 1. \end{aligned} \quad (\text{L12})$$

(Σ : 2 Punkte)

e) Der relative Kennlinienfehler bezogen auf den Anzeigebereich berechnet sich zu:

$$\begin{aligned} F_r(u) &= \frac{y(u) - y_i(u)}{y_e - y_a} \\ &= \frac{\frac{1}{2}u^2 + 3 - 3u + 1}{11 - 5} \\ &= \frac{1}{12} \cdot u^2 - \frac{1}{2} \cdot u + \frac{2}{3}. \end{aligned} \quad (\text{L13})$$

(Σ : 1 Punkt)

- f) Gesucht ist das Maximum von $|F_r(u)|$ im Messbereich $[u_a; u_e]$. Da die Kennlinie $y(u)$ eine quadratische Funktion ist, besitzt sie keinen Wendepunkt. Der Kennlinienfehler $F_r(u)$ hat im Messbereich demnach ein konstantes Vorzeichen. Das Vorzeichen ergibt sich beispielsweise aus $F_r(u = 3) = \frac{9}{12} - \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = -\frac{1}{12}$ und ist demnach negativ. Im Messbereich finden wir daher

$$|F_r(u)| = -F_r(u) = -\frac{1}{12} \cdot u^2 + \frac{1}{2} \cdot u - \frac{2}{3}. \quad (\text{L14})$$

Wir suchen im Messbereich ein Extremum des absoluten relativen Fehlers. Wir berechnen also im Messbereich

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{du} |F_r(u)| = -\frac{d}{du} F_r(u) = -\frac{1}{6} \cdot u + \frac{1}{2} \\ \Rightarrow u &= \frac{6}{2} = 3. \end{aligned} \quad (\text{L15})$$

Wir überprüfen das Vorzeichen der zweiten Ableitung und finden

$$\frac{d^2}{du^2} |F_r(u)| = -\frac{d^2}{du^2} F_r(u) = -\frac{1}{6}. \quad (\text{L16})$$

Es handelt sich tatsächlich um ein Maximum. Wir finden also

$$|F_{r, \max}| = |F_r(3)| = \left| \frac{9}{12} - \frac{3}{2} + \frac{2}{3} \right| = \left| -\frac{1}{12} \right| = \frac{1}{12}. \quad (\text{L17})$$

(Σ : 3 Punkte)

- g) Mit der Toleranzbandjustierung lässt sich der maximale Betrag des Fehlers reduzieren. Die gegebene Kennlinie ist eine Parabel und besitzt keinen Wendepunkt. Die Toleranzbandjustierung kann in diesem Fall also angewandt werden und der Betrag des Fehlers kann (um die Hälfte) reduziert werden. (Σ : 2 Punkte)

- h) Die Kennlinie ist gegeben durch

$$\begin{aligned} y(u, z) &= \frac{1}{2}(u - z)^2 + uz - 6z = \frac{1}{2}(u^2 - 2uz + z^2) + uz - 6z \\ &= \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}z^2 - 6z. \end{aligned} \quad (\text{L18})$$

Es handelt sich bei den Störgrößen also ausschließlich um superponierende Störgrößen, welche mit Hilfe der Differenzmethode kompensiert werden können.

(Σ : 2 Punkte)

Aufgabe 3: Statistik, Stochastische Signale (17 Punkte)

Gegeben seien zwei reelle stochastische Prozesse $x(t)$ und $y(t)$ mit Erwartungswerten $\mu_x(t)$ und $\mu_y(t)$, Kreuzkorrelation $r_{xy}(t_1, t_2)$ und Kreuzkovarianz $C_{xy}(t_1, t_2)$.

- a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$C_{xy}(t_1, t_2) = r_{xy}(t_1, t_2) - \mu_x(t_1)\mu_y(t_2) .$$

(2 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den bisherigen.

Gegeben seien zwei unabhängige stationäre stochastische Prozesse $x(t)$ und $y(t)$. Es wird

$$z(t) = x(t) + y(t)$$

definiert.

- b) Handelt es sich bei $z(t)$ um einen stationären stochastischen Prozess? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den bisherigen.

Sie haben das Signal $x(t) = \begin{cases} \sqrt{1+t}, & t \in [-1; 0] \\ \sqrt{1-t}, & t \in [0; 1] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ gegeben.

- c) Kann $x(t)$ eine Musterfunktion eines schwach ergodischen Prozesses sein? Begründen Sie Ihre Antwort. (3 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Ein Schwangerschaftstest teste die Hypothese "Die Person ist schwanger". Ein Mann führt den Schwangerschaftstest durch, welcher überraschenderweise positiv ausfällt.

- d) Um welche Fehlerart handelt es sich hierbei? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 Punkt)
- e) Geben Sie ein Beispiel eines Szenarios für den jeweils anderen Fehler. (1 Punkt)

Die Aufgaben werden auf der nächsten Seite fortgesetzt.

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Sie möchten die Entfernung zu einem Objekt mittels Radar messen. Dazu senden Sie einen gerichteten Radarpuls der (idealisierten) Form

$$x(t) = e^{-\pi t^2} \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$

aus. Hierbei ist $f_0 = 1 \text{ GHz}$ die Trägerfrequenz des Pulses und t bezeichnet die Zeit. Sie möchten den am Objekt reflektierten Impuls $x(t - t_0)$ messen und aus der Laufzeitdifferenz t_0 die Entfernung zum Objekt bestimmen. Am Empfänger ist das Signal mit additivem Rauschen überlagert.

- f) Welches Filter eignet sich zur Detektion des reflektierten Pulses? (1 Punkt)
- g) Berechnen Sie den Frequenzgang $G(f)$ dieses Filters für das Signal $x(t)$. Nehmen Sie hierzu an, das Signal sei am Empfänger mit weißem Rauschen überlagert. (3 Punkte)

In der Praxis können nur endlich lange Pulse verwendet werden. Sie senden also tatsächlich den Puls

$$\tilde{x}(t) = r_T(t) \cdot x(t), \quad r_T(t) := \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

der Breite $T = 1 \mu\text{s}$.

- h) Wie wirkt sich die endliche Pulsdauer auf den Frequenzgang $G(f)$ des Filters aus? (1 Punkt)
- i) Sie messen eine Laufzeitverzögerung von $t_0 = 33,3 \mu\text{s}$. Wie weit ist das Objekt näherungsweise vom Sender entfernt? (2 Punkte)
- j) In welcher Größenordnung muss die Genauigkeit der Messung der Laufzeitdifferenz liegen, um Entfernungen von 50 m, wie sie etwa im Straßenverkehr auftreten, auf 5 m genau messen zu können? (1 Punkt)

Hinweis: Es gilt

$$\begin{aligned} e^{-\pi t^2} &\circ\!\!\!\bullet e^{-\pi f^2}, \\ \cos(2\pi f_0 t) &\circ\!\!\!\bullet \frac{1}{2}(\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)), \\ r_T(t) &\circ\!\!\!\bullet T \operatorname{sinc}(Tf). \end{aligned}$$

Lösung

- a) Kreuzkorrelation ist definiert als

$$r_{xy}(t_1, t_2) = E\{x(t_1)y(t_2)\} , \quad (\text{L19})$$

die Kreuzkovarianz als

$$C_{xy}(t_1, t_2) = E\{(x(t_1) - \mu_x(t_1))(y(t_2) - \mu_y(t_2))\} . \quad (\text{L20})$$

Wir benutzen die beiden Definitionen sowie die Eigenschaft, dass der Erwartungswertoperator linear ist.

$$\begin{aligned} C_{xy}(t_1, t_2) &= E\{(x(t_1) - \mu_x(t_1))(y(t_2) - \mu_y(t_2))\} \\ &= E\{x(t_1)y(t_2)\} - E\{\mu_x(t_1)y(t_2)\} - E\{\mu_y(t_2)x(t_1)\} + E\{\mu_x(t_1)\mu_y(t_2)\} \\ &= r_{xy}(t_1, t_2) - \mu_x(t_1)\mu_y(t_2) - \mu_x(t_1)\mu_y(t_2) + \mu_x(t_1)\mu_y(t_2) \\ &= r_{xy}(t_1, t_2) - \mu_x(t_1)\mu_y(t_2) \end{aligned} \quad (\text{L21})$$

(Σ : 2 Punkte)

- b) Ja, denn: die Summe zweier stochastischer Prozesse ist offensichtlich wieder ein stochastischer Prozess. Des Weiteren ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung gegeben durch (vgl. Messtechnik-Buch S. 116, Satz 4.2)

$$f_{z(t)}(z) = f_{x(t)}(z) * f_{y(t)}(z) .$$

Da $x(t)$ und $y(t)$ stationär sind, hängen $f_{x(t)}(z)$ und $f_{y(t)}(z)$ nicht von der Zeit t ab. Somit ist auch $f_{z(t)}(z)$ von der Zeit unabhängig und damit $z(t)$ ein stationärer stochastischer Prozess. (Σ : 2 Punkte)

- c) Das gegebene Signal $x(t)$ ist stückweise stetig, beschränkt und es gilt

$$|x(t)|^2 = \begin{cases} 1+t, & t \in [-1; 0] \\ 1-t, & t \in [0; 1] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} . \quad (\text{L22})$$

Dies entspricht einem Dreiecks-Signal und wir finden

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = 1 . \quad (\text{L23})$$

Das Signal ist also ein Energiesignal und daher insbesondere kein Leistungssignal. Musterfunktionen von schwach ergodischen Prozessen sind immer Leistungssignale. Das Signal $x(t)$ kann daher keine solche Musterfunktion sein. (Σ : 3 Punkte)

- d) Es handelt sich hierbei um einen Fehler 2. Art, da die Hypothese bestätigt wird, obwohl sie nicht zutrifft. (Σ : 1 Punkt)
- e) Ein Beispiel für den Fehler 1. Art wäre hier, wenn der Schwangerschaftstest einer schwangeren Frau negativ ausfällt. (Σ : 1 Punkt)

- f) In der Vorlesung wurde zur Signaldetektion das Matched-Filter (oder: Korrelationsfilter, Optimalfilter, optimales Detektionsfilter) behandelt. (Σ : 1 Punkt)
- g) Der Frequenzgang $G(f)$ des Filters ergibt sich aus der Fourier-Transformierten $X(f)$ des zu detektierenden Signals $x(t)$ via

$$G(f) = \lambda X^*(f) , \quad (\text{L24})$$

wobei λ eine Konstante darstellt. Im Folgenden wählen wir der Einfachheit halber $\lambda = 2$ und berechnen

$$\begin{aligned} G(f) &= \lambda X^*(f) = 2X(f) = 2 \cdot \mathcal{F}\left\{e^{-\pi t^2} \cdot \cos(2\pi f_0 t)\right\} \\ &= 2 \cdot \mathcal{F}\left\{e^{-\pi t^2}\right\} * \mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0 t)\} \\ &= 2 \cdot e^{-\pi f^2} * \frac{1}{2}(\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)) \\ &= e^{-\pi f^2} * \delta(f + f_0) + e^{-\pi f^2} * \delta(f - f_0) \\ &= e^{-\pi(f+f_0)^2} + e^{-\pi(f-f_0)^2} . \end{aligned} \quad (\text{L25})$$

Wir haben ausgenutzt, dass die Fourier-Transformierte $X(f)$ reell ist und dass eine Multiplikation im Zeitbereich einer Faltung im Frequenzbereich entspricht.

(Σ : 3 Punkte)

- h) Die Multiplikation mit $r_T(t)$, $T = 1 \cdot 10^{-6}$ s, im Zeitbereich entspricht einer Faltung mit $T \operatorname{sinc}(Tf)$ im Frequenzbereich:

$$\tilde{G}(f) = T \operatorname{sinc}(Tf) * G(f) . \quad (\text{L26})$$

(Σ : 1 Punkt)

- i) Radarwellen sind elektromagnetische Wellen, welche sich in Luft mit nahezu Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Die Strecke, die der Radarpuls zurückgelegt hat, ist näherungsweise

$$\begin{aligned} x &= c \cdot t_0 \approx 3 \cdot 10^5 \text{ km s}^{-1} \cdot 33,3 \mu\text{s} \\ &\approx 3 \cdot 10^5 \text{ km s}^{-1} \cdot \frac{1}{3} \cdot 10^{-4} \text{ s} \\ &= 10 \text{ km} \end{aligned} \quad (\text{L27})$$

Die Entfernung zum Objekt entspricht der Hälfte der zurückgelegten Strecke, also etwa 5 km.

(Σ : 2 Punkte)

- j) Aus der vorigen Rechnung wissen wir, dass eine Laufzeitdifferenz von $33,3 \mu\text{s}$ einer Entfernung von 5 km entspricht. Daher entspricht einer Entfernung von 50 m einer Differenz von $0,333 \mu\text{s} = 333 \text{ ns}$ und einer Genauigkeit von 5 m einer Genauigkeit in der Differenz von $33,3 \text{ ns}$.

(Σ : 1 Punkt)

Aufgabe 4: Digitalisierung, Drehzahlmessung (18 Punkte)

- a) Was kann bei Einhaltung des Quantisierungstheorems fehlerfrei aus dem quantisierten Signal rekonstruiert werden? (1 Punkt)
- b) Nennen Sie zwei Fehler, die in realen Anwendungen infolge von Abtastung eines zeitkontinuierlichen Signals auftreten können. (2 Punkte)
- c) Nennen Sie zwei Eigenschaften des Quantisierungsrauschens im linearen Quantisierungsmodell. (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Gegeben sei ein Analog-Digital-Umsetzer mit sukzessiver Approximation mit einer Auflösung von 5 bit und einer Abtastfrequenz von 20 kHz.

- d) Wie viel Zeit darf ein Schritt der Umsetzung maximal in Anspruch nehmen? (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Sie möchten ein Signal mit Hilfe eines Analog-Digital-Umsetzers (ADU) mit einer Abtastfrequenz von 96 kHz und einer Auflösung von 13 bit digital aufzeichnen.

- e) Sie machen eine Aufnahme mit einer Dauer von 100 s. Wie viel Speicher (in MB) wird hierzu benötigt? (1 Punkt)
- f) Wie groß ist das Signal-Rausch-Verhältnis (SNR) in dB infolge der Quantisierung? Gehen Sie hierzu von einem Signal mit gleichverteilter Amplitudendichte und dem linearen Quantisierungsmodell aus. (1 Punkt)

Sie wählen als ADU einen $\Delta\Sigma$ -Umsetzer mit einem Modulator 3. Ordnung.

- g) Wie groß darf die maximal im Signal vorkommende Frequenz $f_{\max}$ sein, um das SNR aus Teilaufgabe f) mit dem $\Delta\Sigma$ -Umsetzer erreichen zu können? (2 Punkte)

Sie stellen fest, dass das Signal nicht bandbegrenzt ist.

- h) Stellen Sie eine Bedingung an die Ordnung eines realen Tiefpasses als Anti-Aliasing-Filter, sodass das SNR infolge von Aliasing größer als das SNR aufgrund des Quantisierungsrauschens ist. Gehen Sie davon aus, das Signal habe ein konstantes Leistungsdichtespektrum. **Hinweis:** Ein Auflösen der Bedingung nach der Ordnung des Tiefpasses ist nicht erforderlich. (2 Punkte)
- i) Beschreiben Sie kurz den Zweck eines MA-Filters am Ausgang des $\Delta\Sigma$ -Umsetzers. (2 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den bisherigen.

- j) Worin unterscheiden sich Frequenzmessung und Periodendauermessung im Kontext der Drehzahlmessung? Wann sollte welches Verfahren bevorzugt werden? Begründen Sie Ihre Antwort. (3 Punkte)

Lösung

- a) Bei Einhaltung des Quantisierungstheorem kann aus der Wahrscheinlichkeitsdichte (oder: Amplitudendichte) des quantisierten Signals die ursprüngliche Wahrscheinlichkeitsdichte des kontinuierlichen Signals fehlerfrei rekonstruiert werden. (Σ : 1 Punkt)
- b) Zwei aus folgenden Fehlern:
- Bandüberlappungsfehler (oder: Aliasing)
 - Ideal, d. h. unendlich kurze Abtastung ist in realen Anwendungen nicht möglich. Durch eine endliche Abtastdauer entstehen Fehler gegenüber dem idealen Modell.
 - Abweichung vom idealen Abtastzeitpunkt (oder: Jitter)
 - Fehler infolge der Verwendung eines endlichen Beobachtungsfensters (oder: Leckeffekt)

(Σ : 2 Punkte)

- c) Zwei aus folgenden Eigenschaften:
Das Quantisierungsrauschen

- wirkt additiv.
- wird als weißes Rauschen angenommen.
- ist innerhalb einer Quantisierungsstufe gleichverteilt.
- ist unabhängig vom Eingangssignal.
- ist Mittelwertfrei.

(Σ : 2 Punkte)

- d) Ein AD-Umsetzer mit sukzessiver Approximation benötigt pro Umsetzung $N = 5$ Schritte. Die Dauer der Abtastung beträgt $T_a = 1/f_a$. Die maximale Zeit, die ein Schritt in Anspruch nehmen darf, ist daher

$$T_{\text{Schritt,max}} = \frac{T_a}{N} = \frac{1}{f_a N} = \frac{1}{5 \cdot 2 \cdot 10^4 \text{ Hz}} = 1 \cdot 10^{-5} \text{ s} = 10 \mu\text{s} . \quad (\text{L28})$$

(Σ : 2 Punkte)

- e) Die Auflösung des Wandlers beträgt $N = 13$ bit. Der benötigte Speicher berechnet sich demnach zu

$$\begin{aligned} 96 \text{ kHz} \cdot 13 \text{ bit} \cdot 100 \text{ s} &= \frac{96}{8} \cdot 13 \cdot 10^5 \text{ B} \\ &= 12 \cdot 13 \cdot 10^5 \text{ B} = 156 \cdot 10^5 \text{ B} = 15,6 \text{ MB} . \end{aligned} \quad (\text{L29})$$

(Σ : 1 Punkt)

- f) Das SNR infolge der Quantisierung beträgt bei Signalen mit gleichverteilter Amplitudendichte bei einer Auflösung von $N = 13$ bit

$$\text{SNR} = 10 \cdot \left(\lg 2^{2N} \right) \text{ dB} = 6,02 \cdot N \text{ dB} \approx 78 \text{ dB} . \quad (\text{L30})$$

(Σ : 1 Punkt)

- g) Das gewünschte SNR beträgt 78 dB. Wir bestimmen den Überabtastfaktor $M = \frac{f_A}{f_{\max}}$ aus Abbildung 7.41 des Messtechnik-Buchs (S. 366, 10. Auflage). Für einen $\Delta\Sigma$ -Modulator 3. Ordnung und dem gegebenen SNR finden wir $M = 128$. Es folgt

$$f_{\max} = \frac{f_A}{M} = \frac{96 \text{ kHz}}{128} = 0,75 \text{ kHz} = 750 \text{ Hz} . \quad (\text{L31})$$

(Σ : 2 Punkte)

- h) Das SNR infolge von Aliasing für einen Anti-Aliasing-Filter der Ordnung k beträgt (vgl. Messtechnik-Buch S. 325, 10. Auflage)

$$\text{SNR}_{\text{Aliasing}} \approx (2k - 1) \left(\frac{f_A}{2f_{\max}} \right)^{2k-1} . \quad (\text{L32})$$

Mit $M = \frac{f_A}{f_{\max}} = 128$ und $\text{SNR}_q = 2^{2N} = 2^{26}$ finden wir die Bedingung

$$\begin{aligned} (2k - 1) \left(\frac{f_A}{2f_{\max}} \right)^{2k-1} &\geq \text{SNR}_q \\ \iff (2k - 1) \cdot 64^{2k-1} &\geq 2^{26} \\ \iff (2k - 1) \cdot 2^{5(2k-1)} &\geq 2^{26} . \end{aligned} \quad (\text{L33})$$

(Σ : 2 Punkte)

- i) Ein MA-Filter am Ausgang des Umsetzers dient zum einen zur Trennung des Nutzsignals vom Quantisierungsrauschen durch eine Tiefpassfilterung und zum anderen zur Datenreduktion (Senkung der Abtastrate). (Σ : 2 Punkte)

- j) Während die Frequenzmessung *zeitsynchron* erfolgt, verläuft die Periodendauermessung *winkelsynchron*. Welche Methode zu bevorzugen ist, hängt vom Frequenzgehalt des Signals ab:

Bei Signalen mit langsam veränderlicher Frequenz kann der relative Quantisierungsfehler zur Beurteilung herangezogen werden. Der relative Quantisierungsfehler ist bei der Periodendauermessung proportional zur Drehzahl ω , für die Frequenzmessung hingegen proportional zu ω^{-1} . Bei hohen Drehzahlen ist daher die Frequenzmessung zu bevorzugen, während die Periodendauermessungen für niedrigere Drehzahlen besser geeignet ist.

Hat das Signal hochfrequente Anteile, d. h. sich schnell verändernde Drehzahlen, so wird aufgrund der effektiven Mittelwertbildung über das Referenzintervall bei der Frequenzmessung das Abtasttheorem verletzt und es kommt zu Aliasing: die hochfrequenten Änderung können mit dieser Methode nicht aufgelöst werden. Hier ist dann trotz hoher Drehzahlen die Periodendauermessung zu bevorzugen. (Σ : 3 Punkte)