

**Klausur im Fach
Messtechnik
13. März 2019**

Musterlösung

Aufgabe 1: 14

Aufgabe 2: 16

Aufgabe 3: 17

Aufgabe 4: 17

Gesamtpunkte: 64

Aufgabe 1: Kurvenanpassung (14 Punkte)

Um die Kennlinie eines Barometers zu bestimmen, haben Sie den Luftdruck p in Abhängigkeit der Höhe h über dem Meeresspiegel für 4 Stützstellen gemessen. Sie haben den Tageszeitpunkt jeweils so gewählt, dass die Temperatur bei allen Messungen $T = 15^\circ\text{C}$ betrug. Die Messwerte sind in Tabelle 1 gezeigt.

Tabelle 1: Gemessener Druck p für verschiedene Höhen h über dem Meeresspiegel.

h in km	1	3	4	5
p in hPa	900	710	600	540

- a) Wozu dient die Vandermonde-Matrix? Bestimmen Sie die Vandermonde-Matrix für die Messwerte aus Tabelle 1. (2 Punkte)
- b) Interpolieren Sie eine Kennlinie aus den Messwerten in Tabelle 1 durch ein Newton-Polynom. Geben Sie das Ergebnis auch in ausmultiplizierter Form an. (4 Punkte)
- c) Wie groß ist der Luftdruck laut Interpolation aus b) auf Höhe des Meeresspiegels? Was sagt der interpolierte Wert über die Gültigkeit der Kennlinie aus? (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

- d) Anstelle eines Interpolationsverfahrens könnten Sie die Daten aus Tabelle 1 mittels Regression approximieren. Wann ist es im Allgemeinen vorteilhaft, Approximationsanstelle von Interpolationsverfahren anzuwenden? (1 Punkt)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den bisherigen.

Sie haben die Messreihe laut Tabelle 2 gegeben.

Tabelle 2: Messreihe.

t	-1	0	1	2
x	2	4	5,5	6,5

- e) Approximieren Sie die Messwerte aus Tabelle 2 durch eine Funktion $x(t)$ mittels linearer Regression durch Minimierung der Fehlerquadrate. (4 Punkte)
- f) Wie viele Polynome werden maximal benötigt, um die Messwerte aus Tabelle 2 durch kubische Splines zu interpolieren? (1 Punkt)

Lösung

- a) Die Vandermonde-Matrix lautet

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & h_0 & h_0^2 & h_0^3 \\ 1 & h_1 & h_1^2 & h_1^3 \\ 1 & h_2 & h_2^2 & h_2^3 \\ 1 & h_3 & h_3^2 & h_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{bmatrix}. \quad (\text{L1})$$

Mithilfe ihrer Inversen lassen sich direkt die Koeffizienten a_i des Interpolationspolynoms $\tilde{p}(h) = \sum_{i=0}^N a_i h^i$ bestimmen. (Σ: 2 Punkte)

- b) Differenzschema des Newton-Verfahrens für nicht konstanten Stützstellenabstand:

h	p	Δp	$\Delta^2 p$	$\Delta^3 p$
1	900			
		-95		
3	710		-5	
		-110		$\frac{15}{2}$
4	600		25	
		-60		
5	540			

Der Newton-Ansatz bei 4 Stützstellen lautet:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_N(h) &= a_0 + a_1(h - h_0) + a_2(h - h_0)(h - h_1) + a_3(h - h_0)(h - h_1)(h - h_2) \quad (\text{L2}) \\ &= \Delta^0 p + \Delta^1 p(h - h_0) + \Delta^2 p(h - h_0)(h - h_1) + \Delta^3 p(h - h_0)(h - h_1)(h - h_2). \end{aligned}$$

Einsetzen der Werte aus dem Differenzschema ergibt:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_N(h) &= 900 - 95(h - 1) - 5(h - 1)(h - 3) + \frac{15}{2}(h - 1)(h - 3)(h - 4) \\ &= 890 + \frac{135}{2}h - 65h^2 + \frac{15}{2}h^3 \end{aligned} \quad (\text{L3})$$

(Σ: 4 Punkte)

- c) Auf Höhe des Meeresspiegels ergibt sich $\tilde{p}(h = 0 \text{ km}) = 890 \text{ hPa}$. Dies ist niedriger als der für $h = 1 \text{ km}$ gemessene Wert, was unphysikalisch ist: Der Druck nimmt mit steigender Höhe bei gleich bleibender Temperatur stetig ab. Die Kennlinie ist demnach in diesem Bereich offensichtlich nicht mehr gültig. (Σ: 2 Punkte)
- d) Wenn viele und/oder verrauschte Messwerte vorliegen, ist eine Interpolation i. A. nicht sinnvoll. Eine Interpolation mit Polynomen würde hier zu Überschwängern führen. (Σ: 1 Punkt)
- e) Die Koeffizienten der Approximation $x(t) = a_0 + a_1 t$ der N Messwerte mittels linearer Regression sind gegeben durch (vgl. MT-Buch Abschnitt 2.1.3)

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_i x_i - a_1 \frac{1}{N} \sum_i t_i \quad (\text{L4})$$

$$a_1 = \frac{N \sum_i x_i t_i - \sum_i x_i \sum_i t_i}{N \sum_i t_i^2 - (\sum_i t_i)^2}, \quad (\text{L5})$$

wobei die Grenzen in der Summen-Notation der Übersicht halber unterdrückt wurden. Alle Summationen laufen über $i = 0, 1, \dots, N - 1$. Wir berechnen die auftretenden Summen:

$$\sum_i x_i = 2 + 4 + 5,5 + 6,5 = 18 \quad (\text{L6})$$

$$\sum_i t_i = -1 + 0 + 1 + 2 = 2 \quad (\text{L7})$$

$$\left(\sum_i t_i\right)^2 = 4 \quad (\text{L8})$$

$$\sum_i t_i^2 = 1 + 1 + 4 = 6 \quad (\text{L9})$$

$$\sum_i t_i x_i = -2 + 5,5 + 13 = 16,5. \quad (\text{L10})$$

Damit ergibt sich

$$a_1 = \frac{4 \cdot 16,5 - 2 \cdot 18}{4 \cdot 6 - 4} = \frac{2 \cdot 16,5 - 18}{2 \cdot 6 - 2} = \frac{33 - 18}{10} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}, \quad (\text{L11})$$

womit folgt:

$$a_0 = \frac{1}{4} \cdot 18 - 1,5 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{9}{2} - \frac{3}{4} = \frac{15}{4}. \quad (\text{L12})$$

Die Messwerte werden also durch die Gerade $x(t) = \frac{15}{4} + \frac{3}{2}t$ approximiert.

(Σ : 4 Punkte)

- f) Um die 4 Messwerte durch ein Spline zu interpolieren, werden (maximal) 3 Polynome benötigt. (Σ : 1 Punkt)

Aufgabe 2: Messsysteme (16 Punkte)

Für die berührungslose Temperaturmessung wird die Temperatur T eines Körpers indirekt über dessen Strahlungsleistung bestimmt. Die Strahlung wird vom Sensor (teilweise) absorbiert und führt zu einer Temperaturänderung des Sensors, welche, z. B. mithilfe eines Thermoelements oder über einen Widerstand, in eine Spannung gewandelt wird (vgl. Abbildung 1).

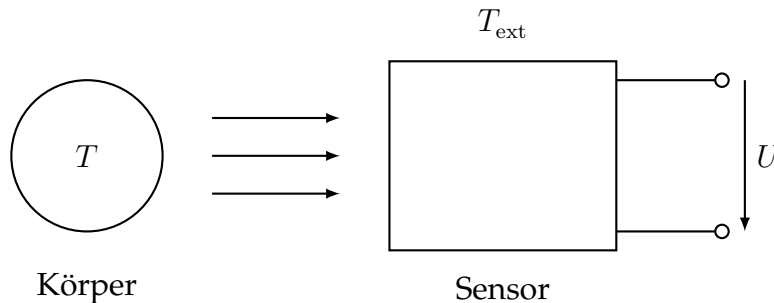


Abbildung 1: Messsystem zur berührungslosen Temperaturmessung.

Die Spannung am Ausgang des Messsystems beträgt

$$U(T) = \epsilon_K c (T^4 - T_{\text{ext}}^4).$$

Hierbei bezeichnet ϵ_K den Emissionskoeffizienten des Körpers, T die Temperatur des Körpers sowie T_{ext} die Umgebungstemperatur in K. Des Weiteren ist c eine vom Messsystem abhängige Konstante (in V/K^4), die als bekannt vorausgesetzt wird.

- Berechnen Sie die Empfindlichkeit S_0 der Kennlinie im Arbeitspunkt $T = T_{\text{ext}}$. Welche Einheit besitzt die Empfindlichkeit? (2 Punkte)
- Nähern Sie die Kennlinie durch eine Gerade der Steigung S_0 , welche durch den Punkt $(T, U) = (T_{\text{ext}}, 0)$ geht, an. (1 Punkt)
- Berechnen Sie den dadurch entstehenden relativen Kennlinienfehler bezogen auf den tatsächlichen Wert $U(T)$. (1 Punkt)

Unter Normalbedingungen seien die Umgebungstemperatur $T_{\text{ext}} = T_0$ sowie $\epsilon_K = \epsilon_0$.

- Berechnen Sie den relativen Fehler $F_{r,T}(\Delta T)$ der Ausgangsspannung, der durch die Abweichung $\Delta T = T_{\text{ext}} - T_0$ von den Normalbedingungen entsteht, bezogen auf den tatsächlichen Wert $U(T)$ unter Normalbedingungen. (1 Punkt)
- Approximieren Sie den relativen Fehler $F_{r,T}(\Delta T)$ mittels Taylor-Reihenentwicklung ersten Grades in $\Delta T = 0$. (2 Punkte)

Sie tolerieren in dem Messsystem einen durch Temperaturschwankungen hervorgerufenen (approximierten) relativen Fehler von maximal 0,4 %. Es sei nun $T = 900 \text{ K}$ und $T_0 = 300 \text{ K}$.

- Berechnen Sie die entsprechende maximal tolerierte externe Temperaturschwankung ΔT_{max} unter Verwendung der Approximation aus Aufgabe e). (2 Punkte)
- Wie können Sie das Messsystem von der Umgebungstemperatur abschirmen? Ist eine Abschirmung bei Anwendung im Innenbereich notwendig? (2 Punkte)

Die Aufgaben werden auf der nächsten Seite fortgesetzt.

In vielen Fällen ist der Emissionskoeffizient ϵ_K nicht genau bekannt und weicht entsprechend von den Normalbedingungen ϵ_0 ab.

- h) Lässt sich der durch die Abweichung von ϵ_K von den Normalbedingungen entstandene Fehler durch Gegenkopplung in der Praxis kompensieren? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den bisherigen.

Sie möchten ein schwaches niederfrequentes Spannungssignal $u(t)$ verstärken. Hierfür verwenden Sie einen Operationsverstärker mit einem unbekannten und nicht zu vernachlässigenden Offset.

- i) Nennen Sie eine Vorrichtung zur Unterdrückung des entstehenden Fehlers und beschreiben Sie kurz die Funktionsweise. (3 Punkte)

Lösung

- a) Die Empfindlichkeit ergibt sich durch Ableiten zu

$$S(T) = \frac{\partial U}{\partial T} = 4\epsilon_K c T^3 \quad (\text{L13})$$

in V/K. Damit ergibt sich am Arbeitspunkt $S(T = T_{\text{ext}}) = 4\epsilon_K c T_{\text{ext}}^3$ (Σ : 2 Punkte)

- b) Die Gerade ergibt sich mit der berechneten Empfindlichkeit zu

$$U_i(T) = 4\epsilon_K c T_{\text{ext}}^3 (T - T_{\text{ext}}). \quad (\text{L14})$$

(Σ : 1 Punkt)

- c) Mit dem obigen Ergebnis ergibt sich der relative Kennlinienfehler zu

$$\begin{aligned} F_{r,i}(T) &= \frac{U_i(T) - U(T)}{U(T)} \\ &= \frac{4\epsilon_K c T_{\text{ext}}^3 (T - T_{\text{ext}}) - \epsilon_K c (T^4 - T_{\text{ext}}^4)}{\epsilon_K c (T^4 - T_{\text{ext}}^4)} \\ &= \frac{4T_{\text{ext}}^3 T - T^4 - 3T_{\text{ext}}^4}{T^4 - T_{\text{ext}}^4}. \end{aligned} \quad (\text{L15})$$

(Σ : 1 Punkt)

- d) Der relative Fehler durch die Abweichung der Temperatur von den Normalbedingungen ergibt sich zu

$$F_{r,T}(\Delta T) = \frac{T^4 - (T_0 + \Delta T)^4 - (T^4 - T_0^4)}{T^4 - T_0^4} = \frac{T_0^4 - (T_0 + \Delta T)^4}{T^4 - T_0^4}. \quad (\text{L16})$$

(Σ : 1 Punkt)

- e) Für die Reihenentwicklung wird die Ableitung von $F_{r,T}(\Delta T)$ nach ΔT benötigt:

$$\frac{\partial F_{r,T}(\Delta T)}{\partial(\Delta T)} = \frac{-4(T_0 + \Delta T)^3}{T^4 - T_0^4}. \quad (\text{L17})$$

Damit ergibt für die Entwicklung im Punkt $\Delta T = 0$:

$$F_{r,T}(\Delta T) \approx \frac{-4T_0^3}{T^4 - T_0^4} \Delta T. \quad (\text{L18})$$

(Σ : 2 Punkte)

- f) Mit den gegebenen Größen findet man für den tolerierten relativen Fehler

$$\left| \frac{-4T_0^3}{T^4 - T_0^4} \Delta T \right| \leq 4 \cdot 10^{-3} \quad (\text{L19})$$

und somit für die Temperaturschwankungen

$$|\Delta T| \leq 10^{-3} \cdot \frac{T^4 - T_0^4}{T_0^3} = 10^{-3} \cdot \left[\left(\frac{T}{T_0} \right)^3 T - T_0 \right]. \quad (\text{L20})$$

Mit den gegebenen Werten $T = 900$ K und $T_0 = 300$ K findet man das Ergebnis

$$|\Delta T| \leq 10^{-3} \cdot (3^3 \cdot 900 - 300) \text{ K} = 24 \text{ K}. \quad (\text{L21})$$

(Σ : 2 Punkte)

- g) Das Messsystem lässt sich beispielsweise durch Thermostatisierung von Schwankungen der Umgebungstemperatur abschirmen. Unter Berücksichtigung der Ergebnisse aus Aufgabe f) ist dies bei Anwendungen im Innenbereich nicht erforderlich, da die zu erwartende Temperaturschwankung innerhalb der Grenzen von $(300 \pm 24) \text{ K}$ (abgeschätzt etwa 0°C bis 50°C) liegen. (Σ : 2 Punkte)
- h) Der Fehler hat sowohl einen deformierenden als auch einen superponierenden Anteil. Prinzipiell können deformierende Fehler durch Gegenkopplung kompensiert werden. In der Praxis existiert allerdings kein Übertragungsglied, das eine Spannung unmittelbar in einer Temperatur umsetzt, welches für die Gegenkopplung benötigt wird. (Σ : 2 Punkte)
- i) Durch einen Zerschneidungsverstärker lässt sich eine driftfreie Verstärkung realisieren. Hierzu wird das zu verstärkende, niederfrequente Signal mit einem höherfrequenten, mittelwertfreien Signal, beispielsweise einem Rechtecksignal oder einer harmonischen Schwingung, moduliert. Die durch die Verstärkung auftretende Drift wird durch eine synchrone Gleichrichtung und anschließende Tiefpassfilterung unterdrückt. (Σ : 3 Punkte)

Aufgabe 3: Statistik, stochastische Signale (17 Punkte)

Es sei x eine Zufallsvariable mit gerader Wahrscheinlichkeitsdichte $f_x(x) = f_x(-x)$. Sie führen die Transformation $y = ax^2 + b$, mit $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, durch.

- a) Zeigen Sie, dass

$$f_y(y) = \left| \frac{1}{a} \right| \sqrt{\frac{a}{y-b}} \cdot f_x\left(\sqrt{\frac{y-b}{a}}\right)$$

gilt.

(4 Punkte)

Es sei nun $x \sim \mathcal{N}(0, 1)$ standard-normalverteilt.

- b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsgröße y in Abhängigkeit der Parameter a und b .

(3 Punkte)

Es gelte nun darüber hinaus $a = 1$ und $b = 0$.

- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(y \leq 1)$.

(3 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Ein Smartphone benutzt zur Entsperrung einen Sensor zur Gesichtserkennung. Nach der Aufnahme der Daten wird die Hypothese "Die Person ist ein registrierter Benutzer" geprüft. Wird die Hypothese bestätigt, wird das Smartphone entsperrt, andernfalls bleibt es gesperrt.

- d) Beschreiben Sie ein Szenario für den Fehler 1. und 2. Art. Begründen Sie Ihre Antwort.

(2 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den bisherigen.

Sie stellen bei einem rauschbehafteten Messsystem (LTI-System) fest, dass gewisse Frequenzen gedämpft werden.

- e) Schlagen Sie in einem beschrifteten Schaltbild eine optimale Gegenmaßnahme vor und geben Sie die benötigten Zusammenhänge und Größen an. Wie können diese Größen in der Realität robust bestimmt werden?
- f) Welches Problem tritt hierbei in Echtzeitanwendungen auf und wie können Sie dies lösen?

(4 Punkte)

(1 Punkt)

Lösung

- a) Für die transformierte Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsgröße $y = g(x) = ax^2 + b$ gilt

$$f_y(y) = \sum_i f_x(x_i) \left| \frac{dg(x)}{dx} \right|_{x=x_i}^{-1}, \quad (\text{L22})$$

wobei $x_i = g^{-1}(y)$ die Lösungen der inversen Abbildung darstellen. Wir berechnen diese zu

$$x_{1,2} = g^{-1}(y) = \pm \sqrt{\frac{y-b}{a}} \quad (\text{L23})$$

und die Ableitung zu

$$\left| \frac{dg(x)}{dx} \right|_{x=x_{1,2}}^{-1} = |2ax|_{x=x_{1,2}}^{-1} = \left| \frac{1}{2ax_i} \right| = \left| \frac{1}{\pm 2a\sqrt{\frac{y-b}{a}}} \right| = \left| \frac{1}{2a} \right| \cdot \sqrt{\frac{a}{y-b}}. \quad (\text{L24})$$

Somit ergibt sich für die transformierte Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\begin{aligned} f_y(y) &= \sum_{i=1}^2 f_x(x_i) \left| \frac{dg(x)}{dx} \right|_{x=x_i}^{-1} \\ &= \left[f_x\left(\sqrt{\frac{y-b}{a}}\right) + f_x\left(-\sqrt{\frac{y-b}{a}}\right) \right] \cdot \left| \frac{1}{2a} \right| \cdot \sqrt{\frac{a}{y-b}} \\ &= f_x\left(\sqrt{\frac{y-b}{a}}\right) \cdot \left| \frac{1}{a} \right| \cdot \sqrt{\frac{a}{y-b}}, \end{aligned} \quad (\text{L25})$$

wobei im letzten Schritt verwendet wurde, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_x(x)$ eine gerade Funktion ist. (Σ: 4 Punkte)

- b) Der Erwartungswert ergibt sich zu

$$E\{y\} = E\{ax^2 + b\} = a E\{x^2\} + b = a E\{(x - \mu_x)^2\} + b = a\sigma_x^2 + b = a + b \quad (\text{L26})$$

da $\mu_x = 0$ und $\sigma_x^2 = 1$ gilt. Für die Varianz berechnen wir

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= E\{(y - \mu_y)^2\} \\ &= E\{(ax^2 + b - (a + b))^2\} \\ &= E\{(ax^2 - a)^2\} \\ &= E\{a^2x^4 - 2a^2x^2 + a^2\} \\ &= a^2(E\{x^4\} - 2E\{x^2\} + 1) \\ &= a^2(3 - 2 + 1) = 2a^2 \end{aligned} \quad (\text{L27})$$

da der Exzess der Standardnormalverteilung $\epsilon_x = E\{x^4\} - 3 = 0$ ist. (Σ: 3 Punkte)

- c) Es ist x standard-normalverteilt, also

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (\text{L28})$$

und somit, für $a = 1, b = 0$,

$$f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot f_x(\sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{y}{2}}. \quad (\text{L29})$$

Somit ist

$$P(y \leq 1) = \int_{-\infty}^1 f_y(y) dy = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{y}{2}} dy. \quad (\text{L30})$$

Wir führen die Variablensubstitution $t = \sqrt{y}$ (daher $dy = 2t dt$) durch und finden

$$\begin{aligned} P(y \leq 1) &= \int_0^1 \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot 2t dt \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \end{aligned} \quad (\text{L31})$$

Dies entspricht genau der Wahrscheinlichkeit der σ -Umgebung einer Standardnormalverteilung. Diese entnehmen wir beispielsweise der Tabelle A.2 des Messtechnik-Buchs und finden

$$P(y \leq 1) = 0,6827. \quad (\text{L32})$$

(Σ : 3 Punkte)

- d) Ein Fehler 1. Art bedeutet hier, dass die Hypothese verworfen wird, obwohl sie tatsächlich zutrifft. Das heißt, das Smartphone bleibt gesperrt, obwohl die Person rechtmäßiger Nutzer ist. Der Fehler 2. Art bedeutet, dass die Hypothese angenommen wird, obwohl sie nicht zutrifft. Das bedeutet hier, dass das Smartphone entsperrt wird, obwohl die Person kein registrierter Benutzer ist. (Σ : 2 Punkte)
- e) Gesucht ist das Wiener-Filter $H(f)$ als Optimalfilter nach dem Schaltbild aus Abb. L1 mit der Übertragungsfunktion $G(f)$ des Messsystems.

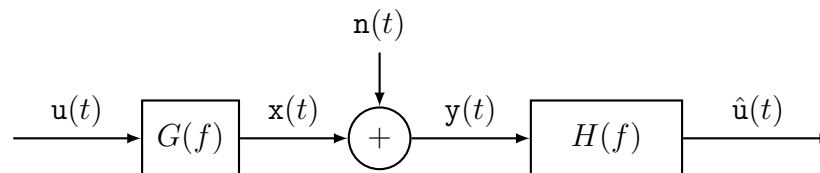


Abbildung L1: Wiener-Filter.

Das Wiener-Filter lässt sich über

$$H(f) = \frac{S_{uy}(f)}{S_{yy}(f)} = \frac{S_{uu}(f)G^*(f)}{S_{uu}(f)|G(f)|^2 + S_{nn}(f)}$$

bestimmen. Die Übertragungsfunktion $G(f)$ lässt sich dabei durch Systemidentifikation mit einem breitbandigem, bekannten Eingangssignal über

$$G(f) = \frac{S_{yx}(f)}{S_{xx}(f)}$$

bestimmen.

Da die Leistungsdichtespektren, beispielsweise $S_{uy}(f)$, nicht bekannt sind, müssen diese über Periodogramme aus der Fourier-Transformation zeitbegrenzt aufgezeichneter Signale abgeschätzt werden:

$$\hat{S}_{uy}(f) = U(f)Y^*(f).$$

Zusätzliche Mittelung über mehrere Aufzeichnungen verbessert das Schätzergebnis.
(Σ : 4 Punkte)

- f) Das Wiener-Filter ist i. A. akausal und somit nicht für Echtzeitanwendungen geeignet. In Echtzeitanwendungen muss das kausale Wiener-Filter verwendet werden.
(Σ : 1 Punkt)

Aufgabe 4: Digitalisierung (17 Punkte)

Sie haben einen Quantisierer gegeben, welcher Werte im Bereich $[-2, 2]$ mit einer Auflösung von $N = 3$ bit äquidistant mit der Kennlinie nach Abbildung 2 quantisiert.

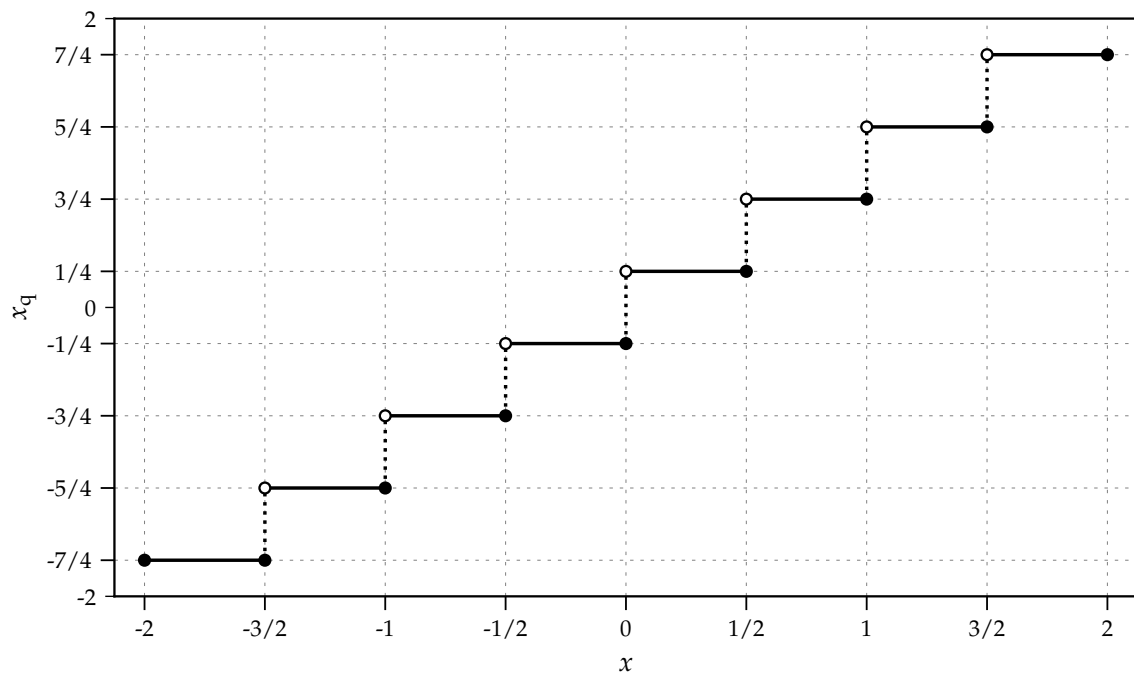


Abbildung 2: Kennlinie des gegebenen Quantisierers.

- a) Berechnen Sie das SNR in dB infolge der Quantisierung nach Abbildung 2 für ein Sinus-förmiges Signal mit der Amplitude 2. (1 Punkt)

Sie wollen das Rechtecksignal $x(t) = 2 \cdot \text{sgn}(\sin(2\pi f_0 t))$ mit dem Quantisierer laut Abbildung 2 quantisieren.

- b) Berechnen Sie die charakteristische Funktion $\Phi(f)$ des Signals $x(t)$. (3 Punkte)
- c) Ist das Quantisierungstheorem für das Signal $x(t)$ erfüllt? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 Punkt)
- d) Berechnen sie das SNR in dB infolge der Quantisierung für das Signal $x(t)$.
Hinweis: Verwenden Sie die Näherung $10 \lg 2 \approx 3$. (3 Punkte)
- e) Mit welcher Maßnahme, unter Beibehaltung des Quantisierers und der Kennlinie nach Abbildung 2, können Sie das SNR infolge der Quantisierung für das Signal $x(t)$ erhöhen? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

Die Aufgaben werden auf der Rückseite fortgesetzt.

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den bisherigen.

Sie betrachten weiterhin das Rechtecksignal $x(t) = 2 \cdot \operatorname{sgn}(\sin(2\pi f_0 t))$. Es sei nun $f_0 = 2,5$ kHz. Sie wollen, zur vollständigen Digitalisierung, das Signal $x(t)$ vor der obigen Quantisierung abtasten. Sie wählen eine Abtastfrequenz von $f_A = 10$ kHz.

- f) Wie lautet das perfekte Rekonstruktionsfilter bei einer idealen Abtastung? Begründen Sie Ihre Antwort anschaulich. *(3 Punkte)*
- g) Welche Voraussetzung muss für die perfekte Rekonstruktion nach idealer Abtastung erfüllt sein? *(1 Punkt)*
- h) Ist diese Voraussetzung für das Signal $x(t)$ mit der gegebenen Abtastfrequenz f_A erfüllt? Begründen Sie Ihre Antwort. *(1 Punkt)*
- i) Wie hängt das perfekte Rekonstruktionsfilter mit der linearen Interpolation zusammen? *(2 Punkte)*

Lösung

- a) Das SNR in dB infolge der Quantisierung mit $N = 3$ bit für ein Sinus-förmiges Signal ist gegeben durch

$$\text{SNR} = (6,02 \cdot N + 1,76) \text{ dB} = (6,02 \cdot 3 + 1,76) \text{ dB} = 19,82 \text{ dB} \approx 20 \text{ dB} . \quad (\text{L33})$$

(Σ : 1 Punkt)

- b) Das Signal $x(t)$ hat die Amplitudendichte

$$f_x(x) = \frac{1}{2} (\delta(x-2) + \delta(x+2)) . \quad (\text{L34})$$

Die charakteristische Funktion ist demnach

$$\begin{aligned} \Phi_x(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) e^{j2\pi f x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} (\delta(x-2) + \delta(x+2)) e^{j2\pi f x} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-2) e^{j2\pi f x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x+2) e^{j2\pi f x} dx \right] \\ &= \frac{1}{2} (e^{j4\pi f} + e^{-j4\pi f}) \\ &= \cos(4\pi f) . \end{aligned} \quad (\text{L35})$$

(Σ : 3 Punkte)

- c) Entsprechend dem Ergebnis aus Aufgabe b) ist die Amplitudendichte $f_x(x)$ nicht bandbegrenzt. Unabhängig von der Auflösung des Quantisierers kann das Quantisierungstheorem für das Signal $x(t)$ nicht erfüllt werden. (Σ : 1 Punkt)

- d) Um das SNR infolge der Quantisierung anzugeben, müssen die Signal- und die Störleistung berechnet werden. Da das Quantisierungstheorem nicht erfüllt ist, kann nicht das lineare Quantisierungsmodell verwendet werden (der Quantisierungsfehler ist nicht gleichverteilt innerhalb der Quantisierungsstufe). Wir können jedoch den Quantisierungsfehler explizit mithilfe des Signals und der gegebenen Kennlinie berechnen

$$\begin{aligned} e_q(t) &= x_q(t) - x(t) \\ &= \frac{7}{4} \cdot \text{sgn}(\sin(2\pi f_0 t)) - 2 \cdot \text{sgn}(\sin(2\pi f_0 t)) \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \text{sgn}(\sin(2\pi f_0 t)) . \end{aligned} \quad (\text{L36})$$

Sowohl $x(t)$ als auch $e_q(t)$ sind (Rechteck-) Leistungssignale. Die mittlere Leistung ei-

nes Rechtecksignals mit Amplitude A berechnet sich zu (Rechnung nicht erforderlich)

$$\begin{aligned}
 P &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |A \cdot \operatorname{sgn}(\sin(2\pi f_0 t))|^2 dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2T} \int_{-T}^T |\operatorname{sgn}(\sin(2\pi f_0 t))|^2 dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2T} \int_{-T}^T dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2TA^2}{2T} \\
 &= A^2.
 \end{aligned} \tag{L37}$$

Damit finden wir

$$\text{SNR} = \frac{P_{\text{sig}}}{P_{\text{stör}}} = \frac{2^2}{(1/4)^2} = 4 \cdot 16 = 64 \tag{L38}$$

beziehungsweise in dB mithilfe der angegebenen Approximation:

$$\text{SNR} = 10 \lg(64) \text{ dB} = 10 \lg 2^6 = 6 \cdot 10 \lg 2 \approx 18 \text{ dB}. \tag{L39}$$

(Σ : 3 Punkte)

- e) Mithilfe von Dithering, d. h. durch Addition eines Dithersignals dessen Amplitudendichte (annähernd) bandbegrenzt ist, lässt sich das Quantisierungstheorem für Signale, deren Amplitudendichten nicht bandbegrenzt sind, (annähernd) erfüllen. Die Addition der Signale führt zur Multiplikation der charakteristischen Funktionen – die Amplitudendichte des Gesamtsignals ist somit (annähernd) bandbegrenzt. Der Quantisierungsfehler lässt sich dann als innerhalb einer Quantisierungsstufe gleichverteilt annehmen. Die Leistung des Quantisierungsrauschen fällt somit auf $q^2/12$, wobei q die Quantisierungsstufe bezeichnet. Dies hat ein höheres SNR zur Folge. (Σ : 2 Punkte)
- f) Die ideale Abtastung entspricht einer Multiplikation mit einem Dirac-Kamm im Zeitbereich, entsprechend einer periodischen Fortsetzung des Spektrums des ursprünglichen Signals im Frequenzbereich. Die perfekte Rekonstruktion entspricht dann einer Multiplikation mit einem Rechteckfenster der Breite f_A im Frequenzbereich, bzw. der Faltung mit einer Sinc-Funktion $\operatorname{sinc}(f_A t)$ im Zeitbereich. (Σ : 3 Punkte)
- g) Die maximal im Signal vorkommende Frequenz f_g muss kleiner sein als die halbe Abtastfrequenz f_A , um spektrale Überlappungen (Aliasing) zu vermeiden. (Σ : 1 Punkt)
- h) Das Rechtecksignal $x(t)$ hat eine Grundfrequenz von 2,5 kHz. Die Fourier-Transformation des Rechtecksignals ist jedoch eine Summe aus harmonischen Schwingungen mit allen ungeraden Vielfachen der Grundfrequenz. Das heißt insbesondere, dass das Rechtecksignal nicht bandbegrenzt ist. Das Abtasttheorem ist somit (unabhängig von der gewählten Abtastfrequenz) hier nicht erfüllt. (Σ : 1 Punkt)
- i) Der linearen Interpolation entspricht eine Faltung des abgetasteten Signals mit einem Dreieckfenster (im Zeitbereich). Das Dreieckfenster kann als Approximation der Ordnung eins des Sinc-Fensters der idealen Interpolation interpretiert werden. (Σ : 2 Punkte)