

**Klausur im Fach
Messtechnik
11. März 2020**

Musterlösung

Aufgabe 1: 15

Aufgabe 2: 15

Aufgabe 3: 17

Aufgabe 4: 21

Gesamtpunkte: 68

Aufgabe 1: Kurvenanpassung (15 Punkte)

Um den Zusammenhang zwischen der Länge und Masse einer Bauteilserie zu erfassen, werden die Eigenschaften jeweils vermessen. Die Messwerte sind in Tabelle 1 gegeben. Es ist bekannt, dass der Messfehler nur bei der Massenmessung auftreten kann.

Tabelle 1: Ergebnisse der Länge- und Massenmessung.

Bauteil-ID i	0	1	2	3
Länge l_i in cm	1	2	3	4
Masse m_i in g	1	3	4	6

- a) Ist die Masse ein intervallskaliertes Merkmal? Begründen Sie Ihre Angabe. (1 Punkt)
- b) Bestimmen Sie eine Regressionsgerade mittels linearer Regression. Geben Sie das Ergebnis in der Form $m(l) = a_0 + a_1 \cdot l$ an. (4 Punkte)
- c) Eine Approximation durch die Kennlinie $m(l) = a_0 + a_1 \cdot l$ lässt sich alternativ auch mithilfe der LS-Schätzung bestimmen. Geben Sie die dazu benötigte Matrix Φ und den Parametervektor $\mathbf{a}$ an. (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Zur Erfassung der Temperatur-Widerstands-Kennlinie eines Materials wird der elektrische Widerstand einer Probe bei verschiedenen Temperaturen gemessen. Um die Berechnung zu vereinfachen, wird der Widerstand bei Raumtemperatur als Referenz verwendet. Die Widerstandsänderung y bezüglich der Referenz und die entsprechende Temperaturänderung u sind in Tabelle 2 gegeben.

Tabelle 2: Widerstandsänderung der Probe und entsprechende Temperaturänderung.

Index i	0	1	2	3
Temperaturänderung u_i in K	0	2	3	4
Widerstandsänderung y_i in Ω	0	-6	-3	12

- d) Ermitteln Sie das Interpolationspolynom mit Hilfe der Lagrange-Interpolation. (4 Punkte)

Die Aufgaben werden auf der Rückseite fortgesetzt.

- e) Um die zufälligen Messfehler der Messung zu unterdrücken, schlägt ein Kollege von Ihnen vor, den Widerstand unter denselben Temperaturen nochmals zu messen und mit den gesamten 8 Messpunkten die Kennlinie zu interpolieren. Halten Sie den Vorschlag für sinnvoll? Begründen Sie Ihre Angabe. (1 Punkt)
- f) Welches Problem kann das Lagrange-Interpolationsverfahren haben, wenn eine große Anzahl von Messpunkten vorliegen? Welche Interpolationsverfahren kann man verwenden, um das Problem zu vermeiden? (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

- g) Ist es möglich, dass ein mittels bilinearer Interpolation ermittelter Wert größer ist als alle seine vier Nachbarn? Begründen Sie Ihre Angabe. (2 Punkte)

Lösung

- a) Der Nullpunkt der Intervallskala ist willkürlich. Aber der Nullpunkt der Masse lässt sich nicht frei wählen, er ist physikalisch eindeutig bestimmt. Daher ist die Masse kein intervallskaliertes Merkmal. (Σ : 1 Punkt)
- b) Der Ansatz für die lineare Regression für N Messwerte lautet:

$$a_1 = \frac{N \sum_{k=0}^{N-1} l_k m_k - \sum_{k=0}^{N-1} l_k \sum_{k=0}^{N-1} m_k}{N \sum_{k=0}^{N-1} l_k^2 - (\sum_{k=0}^{N-1} l_k)^2}, \quad (\text{L1})$$

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} m_k - a_1 \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} l_k. \quad (\text{L2})$$

Mit $N = 4$ Messwerten und

$$\sum_{k=0}^{N-1} l_k = 10, \quad \sum_{k=0}^{N-1} m_k = 14, \quad \sum_{k=0}^{N-1} l_k^2 = 30, \quad \sum_{k=0}^{N-1} l_k m_k = 43 \quad (\text{L3})$$

erhält man

$$a_1 = \frac{4 \cdot 43 - 140}{4 \cdot 30 - 100} = \frac{32}{20} = \frac{8}{5} = 1,6, \quad (\text{L4})$$

$$a_0 = \frac{1}{4} \cdot 14 - \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 10 = -\frac{1}{2} = -0,5. \quad (\text{L5})$$

Die Regressionsgerade ist demnach $m(l) = 1,6 \cdot l - 0,5$. (Σ : 4 Punkte)

- c) Die Matrix Φ der Basisfunktionswerte und der Parametervektor $\mathbf{a}$ sind für das lineare Signalmodell gegeben mit

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & l_0 \\ 1 & l_1 \\ 1 & l_2 \\ 1 & l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{L6})$$

(Σ : 1 Punkt)

- d) Der Ansatz für die Lagrange-Interpolation lautet bei N Messpunkten allgemein:

$$y(u) = \sum_{i=0}^{N-1} y_i L_i(u) \quad \text{mit} \quad L_i(u) = \prod_{j=0, j \neq i}^{N-1} \frac{u - u_j}{u_i - u_j}, \quad (\text{L7})$$

wobei $L_i(u)$ die zu bestimmenden Lagrange-Polynome sind. Da hier $y_0 = 0$ ist, muss $L_0(u)$ nicht berechnet werden. Die restlichen Polynome ergeben sich zu:

$$L_1(u) = \frac{u(u-3)(u-4)}{(2-0)(2-3)(2-4)} = \frac{1}{4}(u^3 - 7u^2 + 12u), \quad (\text{L8})$$

$$L_2(u) = \frac{u(u-2)(u-4)}{(3-0)(3-2)(3-4)} = -\frac{1}{3}(u^3 - 6u^2 + 8u), \quad (\text{L9})$$

$$L_3(u) = \frac{u(u-2)(u-3)}{(4-0)(4-2)(4-3)} = \frac{1}{8}(u^3 - 5u^2 + 6u). \quad (\text{L10})$$

Einsetzen in der Ansatz (L7) liefert:

$$y(u) = 0 \cdot L_0(u) - 6 \cdot L_1(u) - 3 \cdot L_2(u) + 12 \cdot L_3(u) \quad (\text{L11})$$

$$= u^3 - 3u^2 - u. \quad (\text{L12})$$

(Σ : 4 Punkte)

- e) Der Vorschlag ist nicht sinnvoll. Die Interpolation ist nur möglich, wenn alle Stützstellen paarweise verschieden sind. Andernfalls ist die Vandermonde-Matrix nicht invertierbar. (Um die zufälligen Messfehler mithilfe einer mehrmaligen Messung zu unterdrücken, kann man zuerst den Mittelwert für jede Stützstelle bestimmen und dann die Kennlinie interpolieren oder eine Approximation durchführen.) (Σ : 1 Punkt)
- f) Bei einer großen Anzahl von Messpunkten ist im Allgemeinen ein hoher Grad des Interpolationspolynoms erforderlich. Dadurch weist die Interpolationsfunktion möglicherweise ein stark oszillierendes Verhalten auf. In diesem Fall kann man alternativ die lineare Interpolation oder die Spline-Interpolation verwenden. (Σ : 2 Punkte)
- g) Nein, es ist unmöglich.

Stichwortartige Erklärung:

Die bilineare Interpolation lässt sich als die gewichtete Mittelwertbildung der Stützstellenwerte in Abhängigkeit von ihrem Abstand zur Interpolationsstelle betrachten. Außerdem sind alle Gewichte positiv. Daher liegt die interpolierte Größe immer zwischen dem Wert des größten und des kleinsten Nachbarwertes.

Mathematischer Beweis:

Bei normierter Stützstellenweite gilt:

$$y(u, z) = y_{00}(1 - \Delta u)(1 - \Delta z) + y_{10}\Delta u(1 - \Delta z) + y_{01}(1 - \Delta u)\Delta z + y_{11}\Delta u\Delta z. \quad (\text{L13})$$

Es sei y_m der größte Wert unter den vier Nachbarn,

$$y_m = \max\{y_{00}, y_{10}, y_{01}, y_{11}\}. \quad (\text{L14})$$

Da $\Delta u, \Delta z \in [0, 1]$, gilt $(1 - \Delta u) > 0$ und $(1 - \Delta z) > 0$. Damit erhält man:

$$\begin{aligned} y(u, z) &\leq y_m(1 - \Delta u)(1 - \Delta z) + y_m\Delta u(1 - \Delta z) + y_m(1 - \Delta u)\Delta z + y_m\Delta u\Delta z \\ &= y_m(\Delta u - \Delta u\Delta z + \Delta z - \Delta u\Delta z + 1 + \Delta u\Delta z - \Delta u - \Delta z + \Delta u\Delta z) \\ &= y_m \cdot 1 \end{aligned} \quad (\text{L15})$$

(Σ : 2 Punkte)

Aufgabe 2: Messsysteme (15 Punkte)

Gegeben ist die Messkennlinie

$$y(u) = -u^4 + 9u^3 + 2u^2 + 2u$$

eines Fixpunkt-justierten Messsystems.

- a) Bestimmen Sie die Empfindlichkeit $S(u)$ der Kennlinie. (1 Punkt)
- b) Bestimmen Sie die ideale Kennlinie $y_i(u)$ im Messbereich $[0; 3]$. (2 Punkte)
- c) Bestimmen Sie den relativen Kennlinienfehler $F_r(u)$ **bezogen auf den Endwert** im Messbereich $[0; 3]$.
Hinweis: Sie müssen das Ergebnis hier nicht vereinfachen. (1 Punkt)
- d) Bestimmen Sie den günstigsten Messbereich $[u_a; u_a + 2]$ im Messbereich $[-2; 6]$. Es ist bekannt, dass zwei Wendepunkte im Bereich vorliegen. (5 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

- e) Wo liegt der günstigste Messbereich $[u_a; u_a + d]$ einer Kennlinie, wenn die beiden in der Vorlesung vorgestellten Kriterien im gesamten Messbereich $[u_0; u_1]$ nicht erfüllt sind?
Hinweis: Untersuchen Sie das verwendete Gütemaß auf Monotonie. (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

- f) Was ist die Voraussetzung, um Gegenkopplung zur Unterdrückung eines Kennlinienfehlers verwenden zu können? (1 Punkt)
- g) Kann man den Fehler in der Kennlinie $y(u, \mathbf{z}) = u^3 + e(\mathbf{z})u$ mithilfe der Differenzmethode unterdrücken? Die Funktion $e(\mathbf{z})$ hängt ausschließlich von den Störgrößen $\mathbf{z}$ ab. Begründen Sie Ihre Angabe. (1 Punkt)
- h) Zur Unterdrückung des Einflusses temperaturabhängiger Offsetschwankungen am Verstärkereingang wird häufig der Zerhackerverstärker genutzt. Welchen Vorteil bietet die Verwendung eines Rechtecksignals gegenüber einem Cosinussignal als Modulationssignal?

(2 Punkte)

Lösung

- a) Die Empfindlichkeit einer Messkennlinie ist allgemein definiert als

$$S(u) = \frac{\partial y(u)}{\partial u}. \quad (\text{L16})$$

Die Empfindlichkeit der gegebenen Kennlinie ergibt sich demnach zu

$$S(u) = -4u^3 + 27u^2 + 4u + 2. \quad (\text{L17})$$

(Σ : 1 Punkt)

- b) Die ideale Empfindlichkeit ergibt sich zu

$$S_i = \frac{y_e - y_a}{u_e - u_a} = \frac{y(3) - y(0)}{3 - 0} = \frac{186 - 0}{3} = 62. \quad (\text{L18})$$

Die ideale Kennlinie ist demnach gegeben durch

$$y_i(u) = S_i(u - u_a) + y_a = 62(u - 0) + 0 = 62u. \quad (\text{L19})$$

(Σ : 2 Punkte)

- c) Der relative Kennlinienfehler bezogen auf den Endwert berechnet sich zu

$$F_r(u) = \frac{y(u) - y_i(u)}{y_e} = \frac{-u^4 + 9u^3 + 2u^2 + 2u - 62u}{186} \\ \left(= -\frac{1}{186}u^4 + \frac{3}{62}u^3 + \frac{1}{93}u^2 + \frac{10}{31}u \right). \quad (\text{L20})$$

(Σ : 1 Punkt)

- d) Mithilfe der Empfindlichkeit erhält man

$$S(u_a + 2) = -4(u_a^3 + 6u_a^2 + 12u_a + 8) + 27(u_a^2 + 4u_a + 4) + 4(u_a + 2) + 2, \\ S(u_a) = -4u_a^3 + 27u_a^2 + 4u_a + 2, \\ S(u_a + 2) - S(u_a) = 12(-2u_a^2 + 5u + 7). \quad (\text{L21})$$

Laut dem Kriterium soll gelten

$$S(u_a + 2) - S(u_a) = 0. \quad (\text{L22})$$

Damit erhält man die Gleichung

$$0 = 2u_a^2 - 5u - 7 = (2u_a - 7)(u_a + 1) = 0. \quad (\text{L23})$$

Die zwei möglichen Lösungen ergeben sich zu

$$u_{a_1} = -1, \quad u_{a_2} = \frac{7}{2}. \quad (\text{L24})$$

Um den günstigsten Messbereich zu bestimmen, muss man die Empfindlichkeit in den beiden resultierenden Messbereichen vergleichen. Da die Kennlinie in den Messbereichen jeweils als annähernd linear angenommen wird, kann die Empfindlichkeit am Messanfang (oder einer anderen Stelle im Intervall $[u_a; u_a + 2]$) den zugehörigen Messbereich vertreten.

$$S(u_{a_1}) = S(-1) = 29, \quad (\text{L25})$$

$$S(u_{a_2}) = S(3,5) \approx 175,2 \gg 29. \quad (\text{L26})$$

Da die Kennlinie im Messbereich $[u_{a_2}; u_{a_2} + 2] = [3,5; 5,5]$ eine größere Empfindlichkeit hat, ist dieser Messbereich am günstigsten. (Σ : 5 Punkte)

- e) In diesem Fall liegt der günstigster Messbereich am Anfang oder am Ende des gesamten Messbereichs. Das gesuchte Intervall ist also $[u_0; u_0 + d]$ oder $[u_1 - d; u_1]$.

Die beiden in der Vorlesung behandelten Kriterien erhält man, indem man das Minimum des Gütemaßes Q untersucht:

$$Q = \int_{u_a}^{u_a+d} (S(u) - S_i)^2, \quad (\text{L27})$$

$$u_{a, \text{optimal}} = \arg \min_{u_a \in [u_0, u_1-d]} Q. \quad (\text{L28})$$

Wenn ein Kriterium von den beiden erfüllt ist, nimmt das Gütemaß das lokale Minimum oder Maximum an und die erste Ableitung ist gleich null:

$$0 = \frac{\partial Q}{\partial u_a}. \quad (\text{L29})$$

Falls die Kriterien im ganzen Messbereich nicht erfüllt sind, ist das Gütemaß streng monoton. Damit kann es nur am Anfang oder am Ende des Messbereichs das (im Messbereich globale) Minimum annehmen. (Σ: 2 Punkte)

- f) Es ist nötig, dass ein Übertragungsglied existiert, das ein Signal in der gleichen physikalischen Größe wie die Messgröße liefert. (Σ: 1 Punkt)
- g) Nein, der Fehler $e(\mathbf{z})u$ gehört zu den deformierenden Fehlern. Zur Kompensation deformierender Fehler ist die Differenzmethode nicht geeignet. Stattdessen kann man Gegenkopplung benutzen.

Oder:

Nein, der Fehler $e(\mathbf{z})u$ lässt sich als eine ungerade Funktion der Variablen u betrachten. Die Differenzmethode kann aber nur die geraden Anteile unterdrücken. (Σ: 1 Punkt)

- h) Beim Zerhackerverstärker wird das Eingangssignal bei der ersten und zweiten Modulation jeweils mit einem synchronisierten Rechtecksignal multipliziert. Da das Quadrat des Modulationssignals konstant gleich eins ist, wird das Eingangssignal unverzerrt übertragen.

Das Quadrat des Cosinussignals ist dagegen nicht konstant eins. Daher wird das Eingangssignal durch die zwei Modulationen zu höheren Frequenzen moduliert. Durch die anschließende Tiefpassfilterung werden daher auch Anteile des Nutzsignals unterdrückt. Bei gleich gewählter Verstärkung erhält man also gegenüber dem Rechtecksignal ein schlechteres SNR. (Σ: 2 Punkte)

Aufgabe 3: Statistik, Stochastische Signale (17 Punkte)

Es seien x, y zwei unkorrelierte, mittelwertfreie, reelle, stationäre stochastische Prozesse mit bekannten Autokorrelationsfunktionen

$$r_{xx}(\tau) = e^{-|\tau|}, \quad r_{yy}(\tau) = a^2 \delta(\tau), \quad a > 0.$$

Weiterhin sei z ein (reeller, stationärer) stochastischer Prozess, gegeben durch

$$z = x + y + A, \quad A > 0.$$

- a) Unter welchen Namen ist y im Allgemeinen bekannt? (Begründung.) (1 Punkt)
- b) Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion $r_{zz}(\tau)$. (2 Punkte)
- c) Berechnen Sie das Autoleistungsdichtespektrum $S_{zz}(f)$. (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Aufgrund einer Störung im KIT-Netz rufen Sie den Service Desk des SCC an. Sie landen in einer Warteschleife mit der Verweildauer t . Das SCC behauptet, die Verweildauer t habe die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_t(t)$ nach Abbildung 1 mit zunächst unbekannter Breite und Höhe $w, h > 0$.

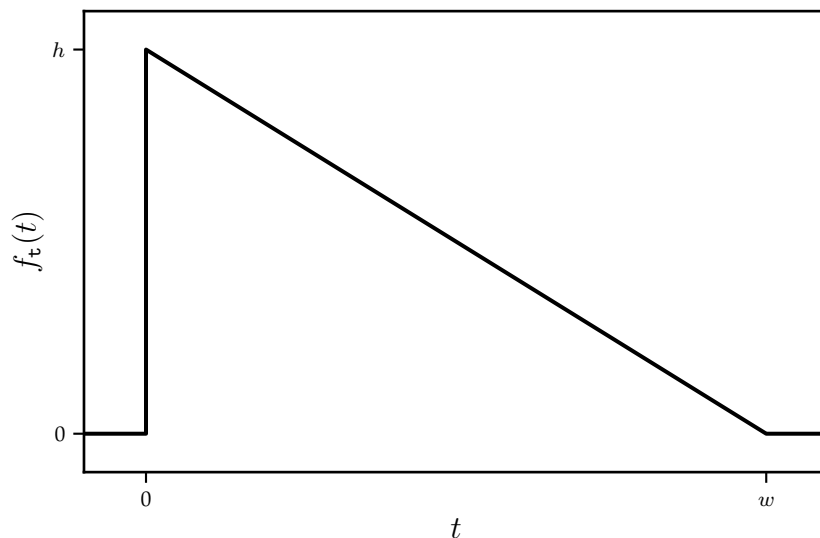


Abbildung 1: Wahrscheinlichkeitsdichte der Verweildauer t .

- d) Stellen Sie eine Bedingung an $h \cdot w$, damit $f_t(t)$ als Wahrscheinlichkeitsdichte gedeutet werden kann. (1 Punkt)
- e) Bestimmen Sie den Erwartungswert μ_t in Abhängigkeit der Breite w . Verwenden Sie hierzu die Bedingung aus Aufgabe d). (2 Punkte)
- f) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie länger als der Durchschnitt in der Warteschleife warten müssen? (2 Punkte)

Die Aufgaben werden auf der Rückseite fortgesetzt.

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Im Folgenden sei $w = 6 \text{ min}$ und $h = 1/3 \text{ min}^{-1}$.

Sie möchten nun die Behauptung des SCC mit Hilfe eines χ^2 -Anpassungstests überprüfen. Hierzu haben Sie die Wartezeiten nach Tabelle 3 gemessen.

Tabelle 3: Häufigkeit der gemessenen Wartezeiten.

Wartezeit t in min	$0 \leq t < 1$	$1 \leq t < 2$	$2 \leq t < 3$	$3 \leq t$
Anzahl	16	27	7	22

- g) Überprüfen Sie mit einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5 \%$, ob die Statistik der behaupteten Wahrscheinlichkeitsverteilung $f_t(t)$ entspricht. Welche Voraussetzungen müssen hierfür erfüllt sein? (5 Punkte)
- h) Führen Sie die Überprüfung erneut mit einem Signifikanzniveau von $\alpha = 1 \%$ durch. Interpretieren Sie das Ergebnis und das Ergebnis aus Aufgabenteil g) unter Berücksichtigung der statistischen Sicherheit und des Fehlers 2. Art. (2 Punkte)

Hinweis: Bei der Berechnung der Prüfgröße können Sie die auftretenden Brüche auf eine Nachkommastelle runden. Die Quantile der χ^2 -Verteilung für verschiedene Freiheitsgrade und Signifikanzniveaus sind in Tabelle 4 gegeben.

Tabelle 4: Quantile der χ^2 -Verteilung für verschiedene Freiheitsgrade m mit jeweiligem Signifikanzniveau α .

m	$1 - \alpha$			
	0,950	0,990	0,995	0,999
1	3,84	6,63	7,88	10,83
2	5,99	9,21	10,60	13,82
3	7,82	11,34	12,84	16,27
4	9,45	13,28	14,86	18,47
5	11,10	15,09	16,75	20,25

Lösung

- a) Es handelt sich bei y um weißes Rauschen, da der Prozess ein konstantes Leistungsdichtespektrum aufweist. (Σ: 1 Punkt)
- b) Die Autokorrelationsfunktion der Summe zweier unkorrelierter stochastischer Prozesse ist gleich der Summe der jeweiligen Autokorrelationsfunktionen, sofern mindestens einer der beiden Prozesse mittelwertfrei ist. Da sowohl x als auch y mittelwertfrei sind, gilt

$$r_{x+y, x+y}(\tau) = r_{xx}(\tau) + r_{yy}(\tau). \quad (\text{L30})$$

Darüber hinaus ist auch $x + y$ mittelwertfrei. Somit gilt

$$\begin{aligned} r_{zz}(\tau) &= r_{x+y, x+y}(\tau) + r_{AA}(\tau) \\ &= r_{xx}(\tau) + r_{yy}(\tau) + r_{AA}(\tau) \\ &= e^{-|\tau|} + a^2 \delta(\tau) + A^2. \end{aligned} \quad (\text{L31})$$

(Σ: 2 Punkte)

- c) Da die Fourier-Transformation linear ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} S_{zz}(f) &= \mathcal{F}\{r_{zz}(\tau)\} \\ &= \mathcal{F}\{r_{xx}(\tau)\} + \mathcal{F}\{r_{yy}(\tau)\} + \mathcal{F}\{r_{AA}(\tau)\} \\ &= \mathcal{F}\{e^{-|\tau|}\} + \mathcal{F}\{a^2 \delta(\tau)\} + \mathcal{F}\{A^2\} \\ &= \frac{2}{1 + (2\pi f)^2} + a^2 + A^2 \delta(f). \end{aligned} \quad (\text{L32})$$

(Σ: 2 Punkte)

- d) Da $h, w > 0$ ist $f_t(t) > 0$ bereits erfüllt. Zu erfüllen ist darüber hinaus die Bedingung

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_t(t) dt = \frac{1}{2}hw \iff 2 = hw. \quad (\text{L33})$$

(Σ: 1 Punkt)

- e) Es ist

$$f_t(t) = \begin{cases} -\frac{h}{w}(t - 0) + h = h - \frac{h}{w}t, & 0 \leq t \leq w \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{L34})$$

und somit

$$\begin{aligned} \mu_t &= \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_t(t) dt \\ &= \int_0^w t \cdot \left(h - \frac{h}{w}t\right) dt \\ &= \left[\frac{h}{2}t^2 - \frac{h}{3w}t^3\right]_0^w = \frac{hw}{2} - \frac{hw}{3w}w^2 = w - \frac{2}{3}w = \frac{1}{3}w, \end{aligned} \quad (\text{L35})$$

wobei im letzten Schritt die Bedingung $hw = 2$ aus **d)** verwendet wurde.

(Σ: 2 Punkte)

f) Wir berechnen mit dem vorigen Ergebnis

$$\begin{aligned}
 P(\tau \geq \mu_\tau) &= \int_{\mu_\tau}^{\infty} f_\tau(t) dt \\
 &= \int_{\frac{w}{3}}^w \left(h - \frac{h}{w}t \right) dt \\
 &= \left[ht - \frac{h}{2w}t^2 \right]_{\frac{w}{3}}^w \\
 &= \left(hw - \frac{hw}{2} \right) - \left(\frac{hw}{3} - \frac{hw}{2 \cdot 9} \right) \\
 &= (2 - 1) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{9} \right) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} \approx 44\% .
 \end{aligned} \tag{L36}$$

(Σ: 2 Punkte)

g) Voraussetzungen:

- unabhängige Messwerte
- ausreichend große Stichprobe

Das Histogramm wurde in der Aufgabe in Form von Tabelle 3 vorgegeben. Folgende Bedingungen müssen erfüllt sein:

- $n_i \geq 5$
- $n_{i,\text{Rand}} \geq 1$

Beide Bedingungen sind im vorgegebenen Fall erfüllt.

Die Nullhypothese H_0 lautet: Die Wartezeit τ in der Warteschleife ist verteilt nach $f_\tau(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{18}t$ (entsprechend Abbildung 1 mit $w = 6$ min und $h = \frac{1}{3}$).

Die Größe der Stichprobe ist $N = 72$. Es sind 4 Klassen gegeben, deren Klassenwahrscheinlichkeit p_i zu berechnen ist. Es ergibt sich für die erste Klasse:

$$p_0 = \int_0^1 f_\tau(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{3} - \frac{t}{18} dt = \left[\frac{t}{3} - \frac{t^2}{36} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36} . \tag{L37}$$

Aufgrund der konstanten Steigung $m = -\frac{1}{18}$ der Wahrscheinlichkeitsdichte ergibt sich

$$p_1 = p_0 - m = \frac{11}{36} - \frac{1}{18} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \tag{L38}$$

$$p_2 = p_1 - m = \frac{9}{36} - \frac{1}{18} = \frac{7}{36} . \tag{L39}$$

Für die Klassenwahrscheinlichkeit der letzten Klasse finden wir also

$$p_3 = 1 - (p_0 + p_1 + p_2) = 1 - \left(\frac{11}{36} + \frac{9}{36} + \frac{7}{36} \right) = 1 - \frac{27}{36} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \tag{L40}$$

Entsprechend ergeben sich folgende Summanden für die Prüfgröße χ^2 :

i	n_i	p_i	Np_i	$(n_i - Np_i)^2$	$(n_i - Np_i)^2/(Np_i)$
0	16	11/36	22	$(22 - 16)^2 = 36$	$18/11 \approx 1,8$
1	27	1/4	18	$(18 - 27)^2 = 81$	$9/2 = 4,5$
2	7	7/36	14	$(14 - 7)^2 = 49$	$7/2 = 3,5$
3	22	1/4	18	$(18 - 22)^2 = 16$	$8/9 \approx 0,8$

Die Prüfgröße χ^2 ergibt sich demnach zu:

$$\chi^2 \approx \sum_{i=0}^3 \frac{(n_i - Np_i)^2}{Np_i} = 1,8 + 4,5 + 3,5 + 0,8 = 10,6.$$

Bei der Bestimmung der Freiheitsgrade muss berücksichtigt werden, dass $k = 4$ Klassen verwendet werden. Somit ergibt sich die Anzahl der Freiheitsgrade m zu

$$m = k - 1 = 4 - 1 = 3.$$

Der Wert χ_α^2 für drei Freiheitsgrade kann aus Tabelle 4 abgelesen werden und ergibt sich mit $1 - \alpha = 0,95$ zu $\chi_\alpha^2 \approx 7,82$.

Die Hypothese H_0 wird also abgelehnt, da $\chi_\alpha^2 < \chi^2$. (Σ : 5 Punkte)

- h)** Bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,01$ ergibt sich $\chi_\alpha^2 \approx 11,34$. Hier gilt nun $\chi_\alpha^2 \geq \chi^2$ und die Hypothese H_0 wird angenommen. Bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$ wurde die Hypothese H_0 abgelehnt, bei $\alpha = 1\%$ jedoch angenommen. Die statistische Sicherheit $P = 1 - \alpha$ (die Wahrscheinlichkeit, dass die Hypothese H_0 zutrifft und sie angenommen wird) ist im zweiten Fall also größer. Der Fehler 2. Art (die Wahrscheinlichkeit die Hypothese zu akzeptieren, wenn sie *nicht* zutrifft) nimmt jedoch auch zu. Es ist also, wie in jedem statistischen Testverfahren, zwischen diesen beiden Wahrscheinlichkeiten abzuwägen. (Σ : 2 Punkte)

Aufgabe 4: Digitalisierung, Drehzahlmessung (21 Punkte)

- a) Nennen Sie zwei Eigenschaften des Quantisierungsrauschens im linearen Quantisierungsmodell. (1 Punkt)
- b) Welche Voraussetzung muss erfüllt sein, damit das lineare Quantisierungsmodell angewandt werden kann? (1 Punkt)
- c) Was versteht man unter Jitter? Bei welchen Signalen tritt es verstärkt auf? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Gegeben ist das periodische Signal $x(t)$ entsprechend Abbildung L1.

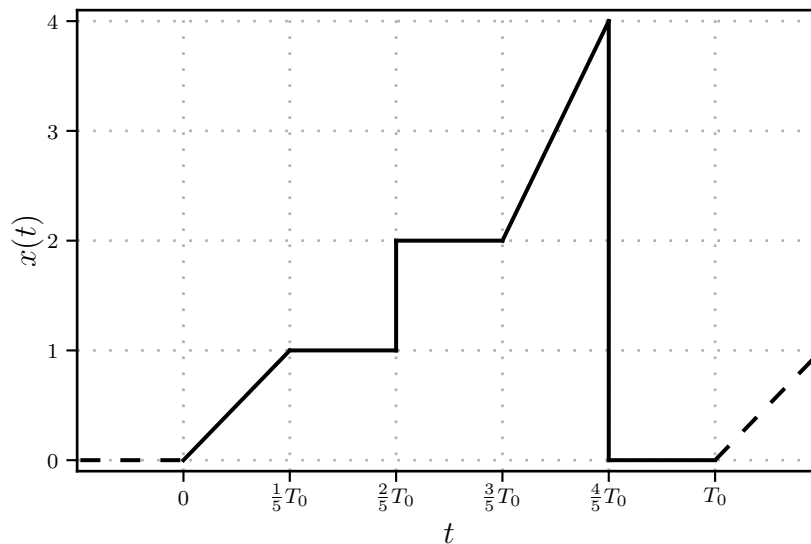


Abbildung 2: Signal $x(t)$ mit Periode T_0 .

- d) Zeichnen Sie die Amplitudendichte $f_x(x)$ des Signals. (2 Punkte)

Das Signal wird nun im Bereich $[0; 4)$ mit 2 Bit äquidistant quantisiert. Der maximale Quantisierungsfehler soll 0,5 nicht überschreiten.

- e) Zeichnen Sie die Kennlinie des Quantisierers. (1 Punkt)
- f) Zeichnen Sie das quantisierte Signal $x_q(t)$. (2 Punkte)
- g) Zeichnen Sie die Amplitudendichte $f_{x_q}(x)$ des quantisierten Signals. (2 Punkte)

Die Aufgaben werden auf der Rückseite fortgesetzt.

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Sie haben einen $\Delta\Sigma$ -Umsetzer mit einem $\Delta\Sigma$ -Modulator 1. Ordnung gegeben. Als Digitalfilter verwendet der Umsetzer ein Moving-Average-Filter (MA-Filter) der Länge $N = 512$. Das MA-Filter gibt (nach der Mittelung) nur jeden N -ten Wert aus. Die Taktfrequenz des Modulators beträgt $f_M = 2,048$ MHz.

- h) Wozu dient das Digitalfilter am Ausgang des $\Delta\Sigma$ -Umsetzers? Welche Eigenschaft des $\Delta\Sigma$ -Modulators wird hierbei ausgenutzt? (2 Punkte)
- i) Berechnen Sie die effektive Abtastfrequenz des $\Delta\Sigma$ -Umsetzers. (1 Punkt)
- j) Berechnen Sie die Auflösung des $\Delta\Sigma$ -Umsetzers in Bit. (2 Punkte)

Ein Signal $x(t)$ sei mit f_g bandbegrenzt, d. h. $X(f) = 0$ für $f \geq f_g$.

- k) Wie groß darf die Grenzfrequenz f_g sein, damit die Auflösung des verwendeten $\Delta\Sigma$ -Umsetzers voll ausgeschöpft wird? (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

Gegeben ist die Frequenzverteilungsfunktion $f_x(f)$ des frequenzanalogen Leistungssignals $x(t)$ nach Abbildung 3.

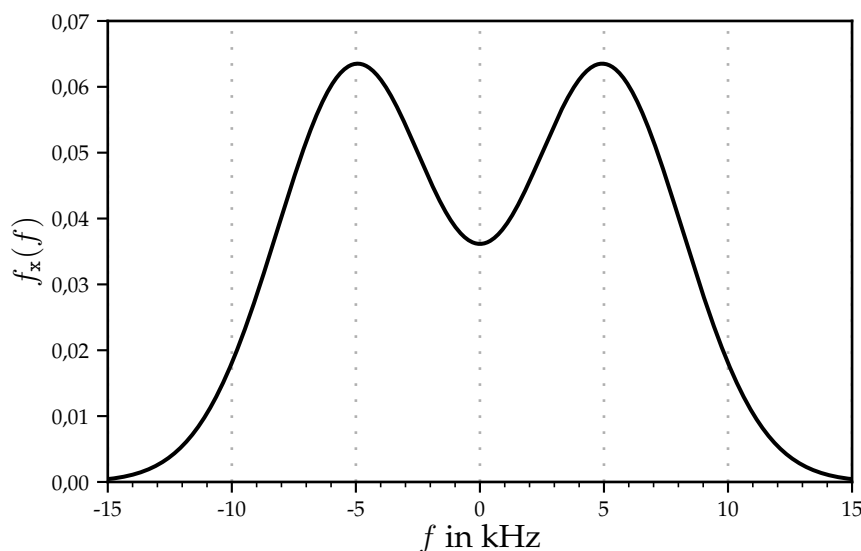


Abbildung 3: Frequenzverteilungsfunktion $f_x(f)$ des Signals $x(t)$.

- l) Wie messen Sie die Frequenzverteilungsfunktion des Signals $x(t)$ in der Praxis? (2 Punkte)
- m) Ist das Signal $x(t)$ reellwertig oder analytisch? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 Punkt)
- n) Wie ist die mittlere Frequenz $\bar{f}$ des Signals $x(t)$ definiert? (1 Punkt)

Lösung

a) Zwei aus folgenden Eigenschaften: Das Quantisierungsrauschen

- wirkt additiv.
- wird als weißes Rauschen angenommen.
- ist innerhalb einer Quantisierungsstufe gleichverteilt.
- ist unabhängig vom Eingangssignal.
- ist mittelwertfrei.

(Σ : 1 Punkt)

b) Das Quantisierungstheorem muss erfüllt sein.

(Σ : 1 Punkt)

c) Unter Jitter versteht man den Abtastfehler, der durch die Abweichung der zeitlichen Abtastung eines Signals von einer idealen äquidistanten Abtastung entsteht. Je höher die Signalfrequenz ist, desto größer ist der Jitter-Fehler, da sich hochfrequente Anteile innerhalb des Zeitfehlers stärker verändern als niederfrequente. (Σ : 2 Punkte)

d) Die Amplitudendichte $f_x(x)$ des Signals ist in Abbildung L1 gegeben. (Σ : 2 Punkte)

e) Damit der Quantisierungsfehler 0,5 nicht überschreitet, müssen die Quantisierungsstufen bei $1/2, 3/2, 5/2$ und $7/2$ gewählt werden. Die entsprechende Quantisierungskennlinie ist in Abbildung L2 gezeigt.

f) Mit dem Quantisierer nach Abbildung L2 ergibt sich das quantisierte Signal $x_q(t)$ entsprechend Abbildung L3. (Σ : 2 Punkte)

g) Die Amplitudendichte $f_{x_q}(x)$ des quantisierten Signals ist in Abbildung L4 dargestellt. (Σ : 2 Punkte)

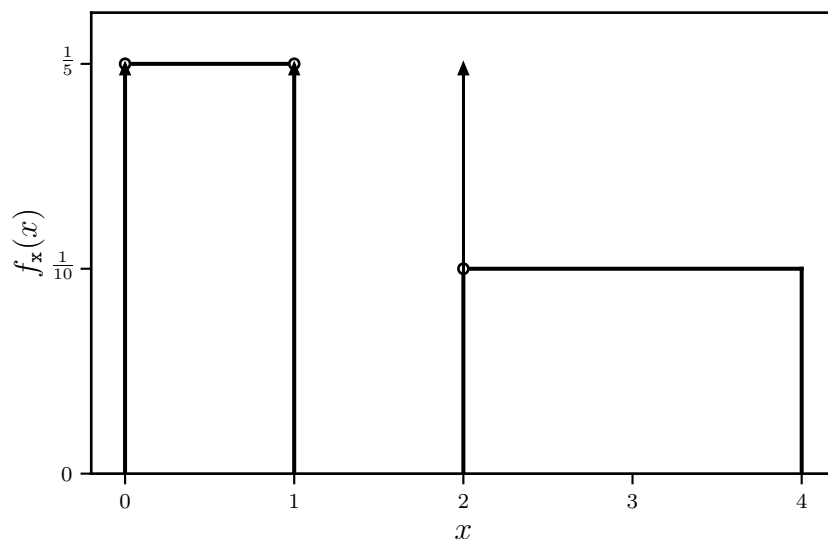


Abbildung L1: Amplitudendichte $f_x(x)$ des Signals $x(t)$.

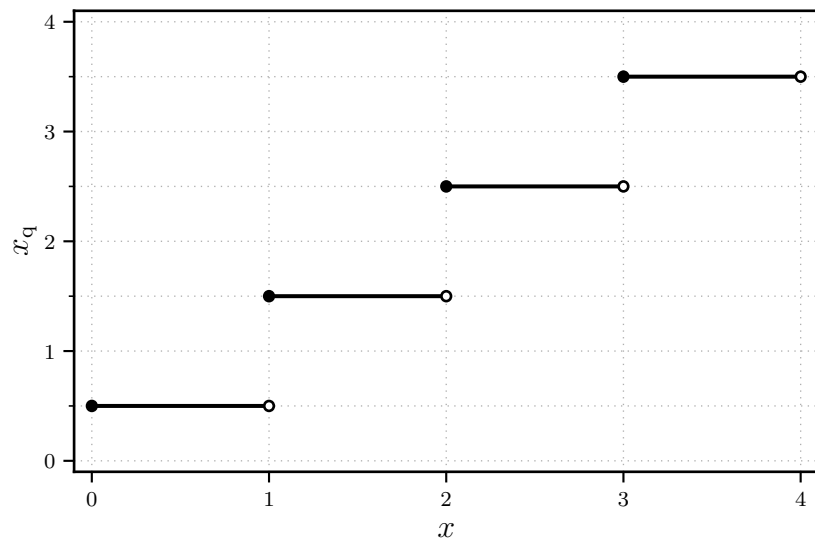


Abbildung L2: Kennlinie des verwendeten Quantisierers.

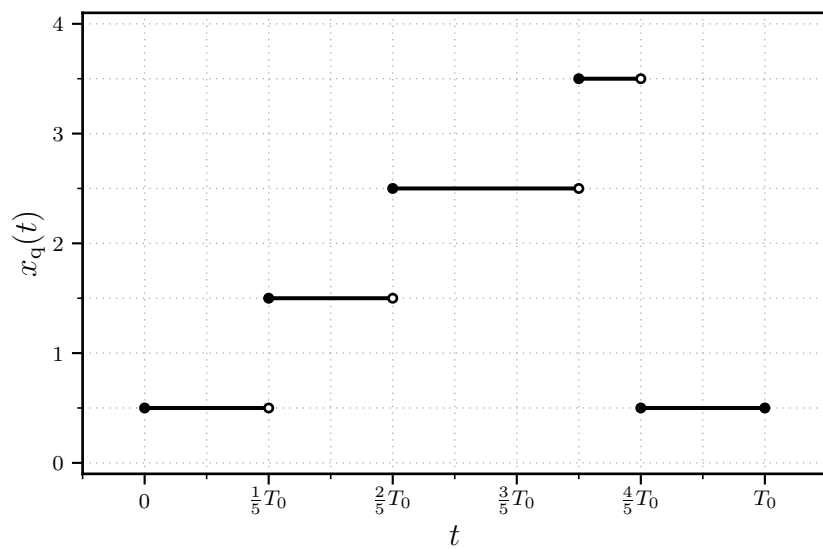


Abbildung L3: Quantisiertes Signal $x_q(t)$.

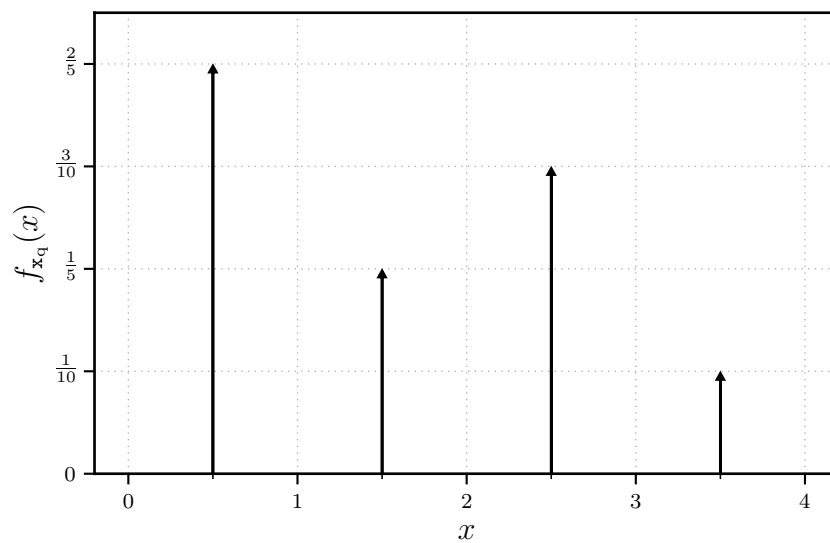


Abbildung L4: Amplitudendichte $f_{x_q}(x)$ des quantisierten Signals $x_q(t)$.

- h) Das Digitalfilter dient einerseits als Tiefpassfilter, um das Nutzsignal vom Quantisierungsrauschen zu trennen, und andererseits zur Datenreduktion, d. h. Unterabtastung und Verkleinerung der effektiven Abtastrate. Durch das *Noise-Shaping* des Modulators werden große Teile der Quantisierungsrauschleistung zu hohen Frequenzen verschoben, wodurch das SNR (bzw. die effektive Auflösung) mithilfe des Tiefpassfilters erhöht wird. (Σ: 2 Punkte)

- i) Da das MA-Filter nur jeden N -ten Wert ausgibt, verringert sich die Abtastrate f_A auf

$$f_A = f_M/512 = 4 \text{ kHz} . \quad (\text{L41})$$

(Σ: 1 Punkt)

- j) Das MA-Filter mittelt jeweils $N = 512$ aufeinanderfolgende Werte der binären Impulsfolge, welche der Modulator ausgibt. Die Quantisierungsstufe beträgt demnach $1/512$ der Amplitude der binären Impulsfolge. Entsprechend ergeben sich 512 wertediskrete Stufen, was 9 Bit entspricht ($2^9 = 512$). (Σ: 2 Punkte)

- k) Um die Auflösung des Umsetzers voll ausnutzen zu können, darf es bei der Unterabtastung des MA-Filters nicht zu Aliasing kommen. (Alternativ: das Signal muss durch den Modulator $M = 2 \cdot 512$ -fach überabgetastet werden). Entsprechend muss für die Grenzfrequenz gelten:

$$f_g < \frac{4 \text{ kHz}}{2} = 2 \text{ kHz} . \quad (\text{L42})$$

- l) Es gilt allgemein $f_x(f) = S_{xx}(f)/P_x$ mit $P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) df$. Es muss also das Leistungsdichtespektrum gemessen werden. Da x ein Leistungssignal ist und in der Praxis nur endliche Beobachtungsfenster realisiert werden können, steht nur das entsprechende Energiesignal zur Verfügung. Dessen Energiedichtespektrum kann über Periodogramme $\hat{S}_{xx}^E = |X(f)|^2$ geschätzt bzw. gemessen werden. Aus dem geschätzten Leistungsdichtespektrum kann dann auch die Leistung P_x bzw. Energie des Signals geschätzt werden und man erhält eine Schätzung der Frequenzverteilungsfunktion $\hat{f}_x(f) = \hat{S}_{xx}(f)/\hat{P}_x$. (Σ: 2 Punkte)

- m) Da $f_x(f)$, und somit auch $S_{xx}(f)$, offensichtlich gerade Funktionen sind, ist x ein reelles Signal. (Σ: 1 Punkt)

- n) Da die Frequenzverteilungsfunktion gerade ist, müssen wir die folgende Definition ansetzen:

$$\bar{f} = 2 \cdot \int_0^{\infty} f \cdot f_x(f) df . \quad (\text{L43})$$

Alternative Lösung: Da x reellwertig ist, muss die mittlere Frequenz

$$\bar{f} = \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot f_{x_a}(f) df . \quad (\text{L44})$$

für das entsprechende analytische Signal

$$x_a(t) = x(t) + j \mathcal{H}\{x(t)\} \quad (\text{L45})$$

berechnet werden, welches keine negativen Frequenzanteile besitzt. Hierbei bezeichnet $\mathcal{H}\{\cdot\}$ die Hilbert-Transformation. (Σ: 1 Punkt)