

**Klausur im Fach  
Messtechnik  
31. März 2021**

**Musterlösung**

Aufgabe 1: 15

Aufgabe 2: 17

Aufgabe 3: 18

Aufgabe 4: 17

Gesamtpunkte: 67

## Aufgabe 1: Kurvenanpassung (15 Punkte)

Um die Messkennlinie eines Barometers zu untersuchen, wurde der Luftdruck  $p$  in Abhängigkeit der Höhe  $h$  und der Temperatur  $T$  gemessen. Die Messwerte sind in Tabelle 1 eingetragen.

Tabelle 1: Gemessener Luftdruck  $p$  in hPa in Abhängigkeit der Höhe  $h$  und der Temperatur  $T$ .

| $T$ in $^{\circ}\text{C}$ | $h$ in km |     |     |
|---------------------------|-----------|-----|-----|
|                           | 1         | 3   | 4   |
| 0                         | 889       | 685 | 601 |
| 20                        | 899       | 705 | 625 |

- Interpolieren Sie den gemessenen Luftdruck  $p$  für  $T = 20^{\circ}\text{C}$  aus Tabelle 1 durch Newton-Polynome. Geben Sie das Ergebnis auch in ausmultiplizierter Form an. (3 Punkte)
- Sie möchten den gemessenen Luftdruck  $p$  bei  $T = 0^{\circ}\text{C}$  aus Tabelle 1 durch Splines interpolieren. Wie viele Splines sind zur Interpolation dieser Messwerte notwendig? (1 Punkt)
- Berechnen Sie den zu erwartenden Luftdruck  $p$  in einer Höhe  $h = 3200\text{ m}$  und der Temperatur  $T = 15^{\circ}\text{C}$  mittels bilinearer Interpolation. (2 Punkte)
- Berechnen Sie den zu erwartenden Luftdruck  $p$  in einer Höhe  $h = 3200\text{ m}$  und der Temperatur  $T = 15^{\circ}\text{C}$  mittels nächster-Nachbar-Interpolation. (1 Punkt)

---

**Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.**

---

Für ein Messgerät mit linearer Abhängigkeit der Messwerte  $y_i$  von der Messgröße  $u_i$  wurden  $y_i$  und  $u_i$  laut Tabelle 2 aufgezeichnet. Es ist bekannt, dass die Messung fehlerbehaftet ist.

Tabelle 2: Messreihe mit Messgröße  $u_i$  und Messwerten  $y_i$ .

| $i$   | 0    | 1    | 2   | 3   | 4   | 5   |
|-------|------|------|-----|-----|-----|-----|
| $u_i$ | 1    | 2    | 3   | 4   | 5   | 6   |
| $y_i$ | 10,8 | 10,4 | 9,9 | 8,9 | 8,6 | 7,8 |

- Bestimmen Sie die Regressionsgerade mittels linearer Regression. Geben Sie das Ergebnis in der Form  $y(u) = a_0 + a_1 \cdot u$  an. (4 Punkte)
- Geben Sie die Matrix  $\Phi$  an, die zur Berechnung der Regression mithilfe des Least-Squares-Schätzers benötigt wird. (1 Punkt)

---

**Die Aufgaben werden auf der Rückseite fortgesetzt.**

---

---

**Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.**

---

- g) Sie erhalten einen Datensatz mit 6 fehlerbehafteten Messwerten. Würden Sie eine Kurvenanpassung mittels Approximation oder Interpolation durchführen? Begründen Sie Ihre Antwort. *(1 Punkt)*
- h) Welches Gütemaß wird beim Least-Squares-Schätzer minimiert? *(1 Punkt)*
- i) Welchen Vorteil hat die Lagrange-Interpolation gegenüber der Newton-Interpolation? *(1 Punkt)*

## Lösung

- a) Das Differenzschema des Newton-Verfahrens für nicht konstanten Stützstellenabstand ergibt:

| $h$ | $p$ | $\Delta p$ | $\Delta^2 p$                |
|-----|-----|------------|-----------------------------|
| 1   | 899 |            |                             |
|     |     | -97        |                             |
| 3   | 705 |            | $\frac{17}{3} \approx 5,67$ |
|     |     | -80        |                             |
| 4   | 625 |            |                             |

Einsetzen der Werte in den Newton-Ansatz ergibt:

$$\tilde{p}(h) = a_0 + a_1(h - h_0) + a_2(h - h_0)(h - h_1) \quad (\text{L1})$$

$$= 899 - 97(h - 1) + \frac{17}{3}(h - 1)(h - 3) \quad (\text{L2})$$

$$= 899 - 97h + 97 + \frac{17}{3}(h^2 - 4h + 3) \quad (\text{L3})$$

$$= \frac{17}{3}h^2 - \frac{359}{3}h + 1013 \quad (\text{L4})$$

$$= 5,67h^2 - 119,67h + 1013 \quad (\text{L5})$$

( $\Sigma$ : 3 Punkte)

- b) Es sind 3 Messwerte gegeben. Für eine Interpolation sind  $3 - 1 = 2$  Splines notwendig.  
( $\Sigma$ : 1 Punkt)

- c) Der gesuchte Wert wird als gewichteter Mittelwert aus den Werten der nächsten Stützstellen berechnet:

$$p(h = 3,2 \text{ km}, T = 15^\circ\text{C}) \approx 0,8 \cdot \left( \frac{1}{4} \cdot 685 + \frac{3}{4} \cdot 705 \right) \text{ hPa} \quad (\text{L6})$$

$$+ 0,2 \cdot \left( \frac{1}{4} \cdot 601 + \frac{3}{4} \cdot 625 \right) \text{ hPa} \quad (\text{L7})$$

$$= 0,8 \cdot 700 \text{ hPa} + 0,2 \cdot 619 \text{ hPa}$$

$$= 683,8 \text{ hPa}$$

( $\Sigma$ : 2 Punkte)

- d) Der gesuchte Wert bei Nächster-Nachbar-Interpolation lautet:

$$p(h = 3,2 \text{ km}, T = 15^\circ\text{C}) = p(h = 3 \text{ km}, T = 20^\circ\text{C}) = 705 \text{ hPa} \quad (\text{L8})$$

( $\Sigma$ : 1 Punkt)

- e) Die Koeffizienten  $a_0$  und  $a_1$  sind gegeben durch:

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k - a_1 \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u_k, \quad (\text{L9})$$

$$a_1 = \frac{n \sum_{k=0}^{N-1} u_k y_k - \sum_{k=0}^{N-1} u_k \sum_{k=0}^{N-1} y_k}{n \cdot \sum_{k=0}^{N-1} u_k^2 - \left( \sum_{k=0}^{N-1} u_k \right)^2}. \quad (\text{L10})$$

Aus den einzelnen Summen

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} y_k &= 56,4, & \sum_{k=0}^{N-1} u_k &= 21, & \left( \sum_{k=0}^{N-1} u_k \right)^2 &= 441, \\ \sum_{k=0}^{N-1} u_k y_k &= 186,7, & \sum_{k=0}^{N-1} u_k^2 &= 91, \end{aligned}$$

ergibt sich:

$$a_1 = \frac{6 \cdot 186,7 - 21 \cdot 56,4}{6 \cdot 91 - 441} = \frac{-64,2}{105} \approx -0,6, \quad (\text{L11})$$

$$a_0 = \frac{1}{6} \cdot 56,4 + 0,6 \cdot \frac{1}{6} \cdot 21 = 11,5. \quad (\text{L12})$$

Die Messwerte werden also durch die Gerade  $y(u) = 11,5 - 0,6u$  approximiert.

( $\Sigma$ : 4 Punkte)

- f) Die Matrix  $\Phi$  ist für eine Geradengleichung gegeben durch:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & u_0 \\ 1 & u_1 \\ 1 & u_2 \\ 1 & u_3 \\ 1 & u_4 \\ 1 & u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \quad (\text{L13})$$

( $\Sigma$ : 1 Punkt)

- g) Da die Messwerte fehlerbehaftet sind, sollte eine Approximation zur Kurvenanpassung durchgeführt werden. ( $\Sigma$ : 1 Punkt)

- h) Als Gütemaß  $Q$  wird beim Least-Squares-Schätzer die Summe der Approximationsfehlerquadrate herangezogen. Dieses soll minimiert werden:

$$Q = \sum_{k=0}^{n-1} (y_k - \hat{y}_k)^2 = (\mathbf{y} - \Phi \mathbf{a})^T (\mathbf{y} - \Phi \mathbf{a}),$$

$$\frac{dQ}{d\mathbf{a}} = \mathbf{0}.$$

( $\Sigma$ : 1 Punkt)

- i) Ändern sich die Messwerte  $y_i$  und bleiben die Stützstellen  $u_i$  erhalten, so können die bereits berechneten Lagrange-Polynome  $l_i$  übernommen werden und müssen nicht neu berechnet werden. ( $\Sigma$ : 1 Punkt)

## Aufgabe 2: Messsysteme (17 Punkte)

Die Kennlinie eines Sensors ist im Messbereich  $0 \leq u \leq 2$  durch

$$y(u) = u + e^u + 5.$$

gegeben. **Hinweis:** Sie können die Konstante  $e$  in den Ergebnissen stehen lassen.

- a) Berechnen Sie die Empfindlichkeit der gegebenen Kennlinie. (1 Punkt)
- b) Bestimmen Sie die ideale Kennlinie im Messbereich. (1 Punkt)
- c) Bestimmen Sie den Kennlinienfehler der idealen Kennlinie. An welcher Stelle ist der Kennlinienfehler am größten? (2 Punkte)

---

**Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.**

---

Eine nichtlineare Kennlinie ist im Messbereich  $-4 \leq u \leq 4$  durch

$$y(u) = -\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{2}u^2 + 6u + 6$$

gegeben.

- d) Bestimmen Sie den günstigsten Messbereich  $[u_a; u_a + 3]$ . (3 Punkte)

---

**Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.**

---

Die Kennlinie eines Sensors wird durch

$$y(u) = K(u - u_0) + (u - u_0)^2 e(\mathbf{z}).$$

beschrieben. Dabei ist  $K \in \mathbb{R}$  eine Konstante und  $u_0 \in \mathbb{R}$  bezeichnet den Arbeitspunkt. Die Funktion  $e(\mathbf{z})$  ist nur von der Störgröße  $\mathbf{z}$  abhängig.

- e) Ist die Justierung eine geeignete Maßnahme, um den durch  $\mathbf{z}$  verursachten Fehler zu reduzieren? (1 Punkt)
- f) Lässt sich der durch  $\mathbf{z}$  verursachte Fehler mithilfe der Differenzmethode reduzieren? (1 Punkt)
- g) Lässt sich der durch  $\mathbf{z}$  verursachte Fehler durch Gegenkopplung reduzieren? (1 Punkt)

---

**Die Aufgaben werden auf der Rückseite fortgesetzt.**

---

---

**Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.**

---

Um ein Spannungssignal zu verstärken, werden zwei Verstärker A und B hintereinander geschaltet. Ihre Verstärkungen sind jeweils  $S_A = 10$  und  $S_B = 100$ . Außerdem weisen die Verstärker eine Nullpunktdrift von jeweils  $z_A = 0,2 \text{ mV}$  und  $z_B = 1 \text{ mV}$  auf.

- h) Welche Reihenfolge der Verstärker sollte verwendet werden, um den Einfluss der Nullpunktdrift zu minimieren? (2 Punkte)

---

**Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.**

---

- i) Was versteht man unter superponierenden Störgrößen? (1 Punkt)
- j) Um eine nichtlineare Kennlinie  $S(u)$  zu linearisieren, kann man den Messbereich herabsetzen. Zeichnen Sie das Schaltbild des Verfahrens und erklären Sie kurz, wozu jede Komponente dient. (2 Punkte)
- k) Durch den Abgriff einer Messgröße kann ein Energiefluss zwischen dem Prozess und dem Messsystem stattfinden. Dadurch kann die ursprüngliche Messgröße verfälscht werden. Geben Sie ein Beispiel der Rückwirkung des Messsystems und erklären Sie kurz, wie die Messgröße verfälscht wird. (2 Punkte)

## Lösung

- a) Die Empfindlichkeit der Kennlinie ergibt sich durch:

$$S(u) = y'(u) = 1 + e^u. \quad (\text{L14})$$

( $\Sigma$ : 1 Punkt)

- b) Die ideale Kennlinie ist eine Gerade und geht durch den Messanfang und das Messende. Die ideale Empfindlichkeit ergibt sich durch

$$S_i = \frac{y_e - y_a}{u_e - u_a} = \frac{y(2) - y(0)}{2 - 0} = \frac{2 + e^2 + 5 - 0 - e^0 - 5}{2} = \frac{e^2 + 1}{2}. \quad (\text{L15})$$

Damit erhält man die ideale Kennlinie

$$y_i(u) = S_i(u - u_a) + y_a = \frac{e^2 + 1}{2}u + 6. \quad (\text{L16})$$

( $\Sigma$ : 1 Punkt)

- c) Der Kennlinienfehler wird durch die Differenz zwischen der realen und idealen Kennlinie definiert:

$$F(u) = y(u) - y_i(u) = u + e^u + 5 - \frac{e^2 + 1}{2}u - 6 = e^u - \frac{e^2 - 1}{2}u - 1. \quad (\text{L17})$$

Die erste Ableitung des Fehlers ergibt sich durch:

$$F'(u) = e^u - \frac{e^2 - 1}{2} \stackrel{!}{=} 0. \quad (\text{L18})$$

Damit erhält man  $u = \ln\left(\frac{e^2 - 1}{2}\right) \approx 1,16 \in [0; 2]$ . ( $\Sigma$ : 2 Punkte)

- d) Um den günstigsten Messbereich zu finden, muss zunächst untersucht werden, ob sich ein Wendepunkt im vorgegebenen Messbereich befindet:

$$y'(u) = -u^2 - u + 6 \quad (\text{L19})$$

$$y''(u) = -2u - 1 \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{L20})$$

$$y'''(u) = -2 \neq 0. \quad (\text{L21})$$

Damit erhält man den Wendepunkt  $u_{\text{WP}} = -0,5 \in [-4; 4]$ . Da der Wendepunkt existiert, wird das Kriterium I aus der Vorlesung verwendet:

$$S(u_a + d) = S(u_a). \quad (\text{L22})$$

Jetzt werden die Stellen  $u_a$  und  $u_a + 3$  eingesetzt:

$$-(u_a + 3)^2 - (u_a + 3) + 6 = -u_a^2 - u_a + 6. \quad (\text{L23})$$

Auflösen nach  $u_a$  ergibt  $u_a = -2$ . Damit wird der entsprechende Messbereich bestimmt:  $u \in [-2; 1] \subset [-4; 4]$ . ( $\Sigma$ : 3 Punkte)

- e) Nein. Eine Justierung kann ausschließlich den Kennlinienfehler unter Normalbedingungen unterdrücken. Da der Fehler von der Störgröße abhängt, ist eine Justierung nicht geeignet. ( $\Sigma$ : 1 Punkt)

- f) Ja. Da der Fehler  $(u - u_0)^2 e(z)$  eine gerade Funktion bezüglich des Arbeitspunkts ist, lässt er sich durch die Differenzmethode unterdrücken. ( $\Sigma$ : 1 Punkt)
- g) Ja. Bei  $(u - u_0)^2 e(z)$  handelt es sich um eine deformierende Störgröße, welche sich mithilfe der Gegenkopplung unterdrücken lässt. ( $\Sigma$ : 1 Punkt)

- h) Die Nullpunktdrift des ersten Verstärkers wird durch den zweiten verstärkt. Bei der Anordnung A-B ergibt sich der gesamte Fehler zu

$$F_{AB} = z_B + S_B z_A = 1 \text{ mV} + 100 \cdot 0,2 \text{ mV} = 21 \text{ mV} . \quad (\text{L24})$$

Analog erhält man den Fehler in der Anordnung B-A:

$$F_{BA} = z_A + S_A z_B = 0,2 \text{ mV} + 10 \cdot 1 \text{ mV} = 10,2 \text{ mV} < F_{AB} . \quad (\text{L25})$$

Deswegen sollte die Anordnung B-A eingesetzt werden. ( $\Sigma$ : 2 Punkte)

- i) Bei einer superponierten Störgröße ist die Abweichung von der Kennlinie unter Normalbedingungen über den gesamten Messbereich konstant. ( $\Sigma$ : 1 Punkt)
- j) Das Blockschaltbild ist in Abbildung L1 dargestellt.

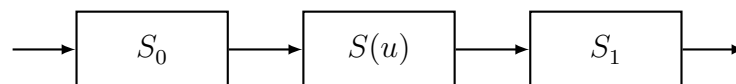


Abbildung L1: Blockschaltbild zum Herabsetzen des Messbereichs.

Das lineare Glied  $S_0 \ll 1$  verkleinert die Eingangsgröße, sodass das nichtlineare Glied  $S(u)$  nur in einem kleinen Intervall um den Arbeitspunkt arbeitet. Das lineare Glied  $S_1 = \frac{1}{S_0}$  verstärkt das verkleinerte Signal und kompensiert das Glied  $S_0$ . ( $\Sigma$ : 2 Punkte)

- k) Hier werden als Beispiel zwei Lösungen gegeben. Weitere plausible Antworten werden auch gewertet.
- (a) Bei der Temperaturmessung entsteht möglicherweise eine Wärmeübertragung zwischen dem Thermometer und dem Messobjekt. Dadurch verändert sich die Temperatur des Objekts und die Messgröße wird verfälscht.
- (b) Bei der Messung des elektrischen Stroms ist der Widerstand des Strommessers nicht null. Das Messgerät kann deswegen nicht als ideale Leitung betrachtet werden. Der Strom verändert sich, wenn der Strommesser eingeschaltet wird.

( $\Sigma$ : 2 Punkte)

### Aufgabe 3: Statistik, Stochastische Signale (18 Punkte)

- a) Erläutern Sie den Vorteil des Korrelationskoeffizienten  $\rho_{xy}$  als Vergleichsmaß gegenüber der Kovarianz  $C_{xy}$  zweier Zufallsgrößen  $x, y$ . (1 Punkt)
- b) Was besagt der Zentrale Grenzwertsatz? Erläutern Sie kurz seine Bedeutung im Kontext der Messtechnik. (2 Punkte)
- c) Wozu dient das Matched-Filter? Bezüglich welcher Größe ist das Filter optimal? (1 Punkt)

---

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

---

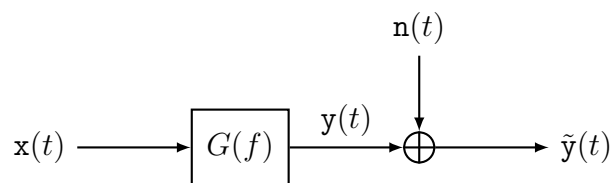


Abbildung 1: Gegebener Signalflussplan.

Sie haben den Signalflussplan nach Abbildung 1 gegeben. Hierbei sei  $x(t)$  mittelwertfreies weißes Rauschen mit Autoleistungsdichtespektrum

$$S_{xx}(f) = a^2,$$

mit  $a = 1/\sqrt{2\pi}$ , und  $n(t)$  ein unbekannter stationärer Rauschprozess mit Leistung

$$P_n = \frac{1}{100},$$

welcher als zu  $x$  unabhängig angenommen wird. Die Kreuzkorrelationsfunktion

$$r_{yx}(\tau) = \sigma(\tau)e^{-2\pi\tau}$$

sei bekannt, wobei  $\sigma(\tau)$  den Einheitssprung bezeichnet. Es sei  $G(f)$  die Übertragungsfunktion eines unbekannten LTI-Systems.

- d) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion  $G(f)$ . (2 Punkte)
- e) Berechnen Sie das Autoleistungsdichtespektrum  $S_{yy}(f)$ . (1 Punkt)
- f) Berechnen Sie die Leistung  $P_y$  von  $y$ . (2 Punkte)
- g) Berechnen Sie den Mittelwert  $\mu_y$  von  $y$ . (1 Punkt)
- h) Berechnen Sie das Signal-zu-Rausch Verhältnis  $P_{\tilde{y}}/P_n$  in dB. (1 Punkt)

---

Die Aufgaben werden auf der Rückseite fortgesetzt.

---

---

**Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.**

---

Es ist

$$\hat{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (1)$$

der Stichprobenmittelwert der  $N$  unabhängig und identisch verteilten Zufallsgrößen  $x_i$ .

- i) Nennen Sie die zwei wichtigsten Eigenschaften des Schätzers  $\hat{x}$  und erklären Sie diese kurz. (3 Punkte)
- j) Wie lautet die Varianz  $\sigma_{\hat{x}}^2$  des Schätzers (ohne Rechnung)? (1 Punkt)
- k) Berechnen Sie Varianz  $\sigma_{\hat{x}}^2$  des Schätzers näherungsweise aus Gleichung (1) mittels Gauß'scher Fehlerfortpflanzung. (2 Punkte)
- l) Wieso stimmt das Ergebnis der Näherung aus **k)** mit dem exakten Ergebnis aus **j)** überein? Begründen Sie mit einer kurzen Rechnung. (1 Punkt)

## Lösung

- a) Die Kovarianz ist nicht invariant gegenüber multiplikativen Skalierungen der Größen. Der Korrelationskoeffizient jedoch ist normiert auf das Intervall  $[-1, 1]$  und eignet sich als skalierungsinvariantes Vergleichsmaß. ( $\Sigma$ : 1 Punkt)
- b) Seien  $x_i, i = 1, \dots, N$  unabhängige Zufallsgrößen (mit beschränktem Mittelwert und Standardabweichung). Dann geht die Verteilung der Summe  $\sum_{i=1}^N x_i$  mit  $N \rightarrow \infty$  in einer Normalverteilung über.

Im Kontext der Mestechnik sind insbesondere zwei Anwendungen wichtig (eine Nennung ausreichend):

- Aus dem Satz folgt, dass der Stichprobenmittelwert  $\hat{x}$  näherungsweise normalverteilt ist.
- Entsteht ein Messfehler durch die Überlagerung mehrerer unabhängiger Zufallseignisse, so kann für den Fehler eine Normalverteilung angenommen werden.

( $\Sigma$ : 2 Punkte)

- c) Das Matched-Filter dient zur Detektion bekannter Muster in verrauschten Signalen. Das Matched-Filter maximiert das Signal-zu-Rausch Verhältnis der Schätzung. ( $\Sigma$ : 1 Punkt)
- d) Zunächst berechnen wir das Kreuzleistungsdichtespektrum  $S_{yx}(f) \bullet \circ r_{yx}(\tau)$  wobei wir die Fourier-Transformation der Korrespondenztabelle entnehmen:

$$r_{yx}(\tau) = \sigma(\tau)e^{-2\pi\tau} \bullet \circ \frac{1}{2\pi + j2\pi f} = S_{yx}(f). \quad (\text{L26})$$

Mit  $S_{yx}(f) = S_{xx}(f)G(f)$  und der gegebenen Autoleistungsdichte  $S_{xx}(f)$  erhält man

$$G(f) = 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi + j2\pi f} = \frac{1}{1 + jf}. \quad (\text{L27})$$

( $\Sigma$ : 2 Punkte)

- e) Es gilt  $S_{yy}(f) = S_{xx}(f)|G(f)|^2$ . Damit erhält man

$$S_{yy}(f) = \frac{1}{2\pi(1 + f^2)}. \quad (\text{L28})$$

( $\Sigma$ : 1 Punkt)

- f) Mittels des Leistungsdichtespektrums  $S_{yy}(f)$  berechnen wir

$$S_{yy}(f) = \frac{1}{2\pi(1 + f^2)} = \frac{2\pi}{(2\pi)^2 + (2\pi f)^2} \bullet \circ = \frac{1}{2}e^{-2\pi|\tau|} = r_{yy}(\tau). \quad (\text{L29})$$

Damit erhält man die Leistung

$$P_y = r_{yy}(0) = \frac{1}{2}. \quad (\text{L30})$$

( $\Sigma$ : 2 Punkte)

g) Es gilt

$$\mu_y^2 = \lim_{|\tau| \rightarrow \infty} r_{yy}(\tau) = \lim_{|\tau| \rightarrow \infty} \frac{1}{2} e^{-2\pi|\tau|} = 0 \quad (\text{L31})$$

und damit  $\mu_y = 0$ . (Σ: 1 Punkt)

h) Da  $y$  mittelwertfrei ist und  $y$  und  $n$  unabhängig sind, folgt

$$r_{\tilde{y}\tilde{y}}(\tau) = r_{yy}(\tau) + r_{nn}(\tau) \quad (\text{L32})$$

und somit

$$P_{\tilde{y}} = r_{\tilde{y}\tilde{y}}(0) = r_{yy}(0) + r_{nn}(0) = P_y + P_n. \quad (\text{L33})$$

Damit erhält man das Signal-zu-Rausch Verhältnis

$$\text{SNR} = \frac{P_{\tilde{y}}}{P_n} = \frac{1/2 + 1/100}{1/100} = 51 \quad (\text{L34})$$

womit sich ergibt

$$\text{SNR}|_{\text{dB}} = 10 \lg \text{SNR} = 10 \lg 51 \approx 17,07 \text{ dB}.$$

(Σ: 1 Punkt)

i) Der Schätzer des Stichprobenmittelwerts ist **erwartungstreu** und **konsistent**.

Erwartungstreue bedeutet, dass der Erwartungswert des Schätzers mit dem wahren zu schätzenden Wert übereinstimmt, d. h.  $E\{\hat{x}\} = \mu_x$ .

Konsistenz bedeutet, dass die der Schätzers mit größer werdenden Stichprobenumfang den Schätzwert immer genauer schätzt, d. h.  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_{\hat{x}}^2 = 0$ . (Σ: 3 Punkte)

j) Die Varianz des Stichprobenmittelwerts ist

$$\sigma_{\hat{x}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{N}. \quad (\text{L35})$$

(Σ: 1 Punkt)

k) Da die  $x_i$  unabhängig sind, gilt  $C_{x_i x_j} = \delta_{ij} \sigma_{x_i}^2 = \delta_{ij} \sigma_x^2$ . Mithilfe der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnet man

$$\sigma_y^2 \approx \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j \right) \right]^2 \cdot \sigma_{x_i}^2 \quad (\text{L36})$$

$$= \sum_{i=1}^N \left[ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{ij} \right]^2 \cdot \sigma_{x_i}^2 = \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_{x_i}^2}{N^2} = \frac{\sigma_x^2}{N} \quad (\text{L37})$$

(Σ: 2 Punkte)

l) Tatsächlich ist die Näherung in diesem Fall exakt, da die höheren Ableitungen

$$\frac{\partial^k}{\partial x_i^k} \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j \right) = \frac{\partial^{k-1}}{\partial x_i^{k-1}} \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{ij} \right) = \frac{\partial^{k-1}}{\partial x_i^{k-1}} \left( \frac{1}{N} \right) = 0 \quad (\text{L38})$$

verschwinden. Damit ist die Taylor-Entwicklung, auf der die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung basiert, exakt. (Σ: 1 Punkt)

#### Aufgabe 4: Digitalisierung (17 Punkte)

- a) Zeichnen Sie den Amplitudengang des idealen Anti-Aliasing-Filters mit der vorgegebenen Abtastfrequenz  $f_A$ . Erklären Sie, wie Aliasing mithilfe des Filters vermieden wird. (2 Punkte)
- b) Nennen Sie außer Aliasing zwei weitere Fehlerquellen bei der Abtastung in der Praxis. (1 Punkt)
- c) Wann gilt das lineare Quantisierungsmodell näherungsweise in der Praxis? (1 Punkt)

---

**Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.**

---

Wie in Abbildung 2 dargestellt, werden zur optimalen Quantisierung zwei Transformationen  $\mathcal{T}_1\{\cdot\}$  und  $\mathcal{T}_2\{\cdot\}$  jeweils vor und nach einem äquidistanten Quantisierer  $\mathcal{Q}\{\cdot\}$  eingesetzt.

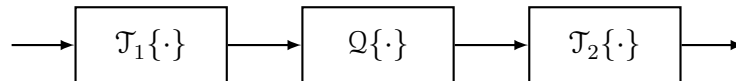


Abbildung 2: Schaltbild der optimalen Quantisierung.

- d) Erklären Sie die Funktion der zwei Transformationen  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ . (1 Punkt)
- e) Eignet die Transformation  $\mathcal{T}\{x(t)\} = a \cdot x(t) + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , zur Verwendung von  $\mathcal{T}_1\{\cdot\}$  für ein beliebiges Eingangssignal  $x(t)$ ? Begründen Sie Ihre Angabe. (1 Punkt)

---

**Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.**

---

Bei Dithering wird zur Quantisierung eines langsam veränderlichen Signals das Signal mit einem Dithersignal additiv überlagert.

- f) Nennen Sie zwei erforderliche Eigenschaften des Dithersignals. (1 Punkt)
- g) Wie wird aus dem mit Dithering quantisierten Signal das Nutzsinal rekonstruiert? (1 Punkt)

---

**Die Aufgaben werden auf der Rückseite fortgesetzt.**

---

---

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

---

Gegeben ist das periodisches Signal  $x(t) \in [-\frac{A}{2}; \frac{A}{2}]$ ,  $A > 0$ , mit der Periode  $T$  entsprechend Abbildung 3. Jetzt soll das Signal äquidistant im Intervall  $[-\frac{A}{2}; \frac{A}{2}]$  quantisiert werden.

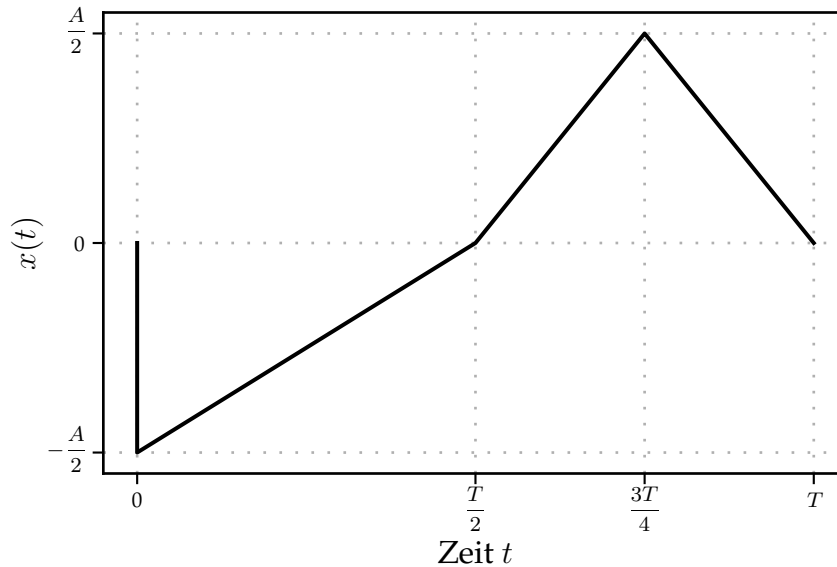


Abbildung 3: Eine Periode des periodischen Signals  $x(t)$ .

- h) Zeichnen die Amplitudendichte des Signals. (1 Punkt)
- i) Mit wie vielen Bits muss das Signal quantisiert werden, damit das Signal-Rausch-Verhältnis nicht kleiner als 30 dB ist? Wie groß ist die Quantisierungsstufe in diesem Fall? Sie können vom linearen Quantisierungsmodell ausgehen. (2 Punkte)

---

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den bisherigen.

---

Ein Delta-Sigma-Umsetzer besteht aus einem Modulator und einem Digitalfilter und wird als AD-Umsetzer in der Praxis häufig eingesetzt. Sie haben einen Delta-Sigma-Umsetzer 1. Ordnung gegeben.

- j) Erklären Sie die Funktion des Modulators und des Digitalfilters. (2 Punkte)
- k) Beschreiben Sie die Auswirkung des Modulators auf das Nutzsignal und auf das Quantisierungsrauschen. (2 Punkte)
- l) Welcher Überabtastfaktor wird benötigt, um ein Signal-Rausch-Verhältnis von 20 dB zu erhalten? (2 Punkte)

## Lösung

- a) Der Amplitudengang des idealen Anti-Aliasing-Filters ist in Abbildung L2 dargestellt. Das Filter entfernt die Frequenzanteile außerhalb des Nyquist-Bands und vermeidet damit die Bandüberlappung bei der Abtastung. ( $\Sigma$ : 2 Punkte)

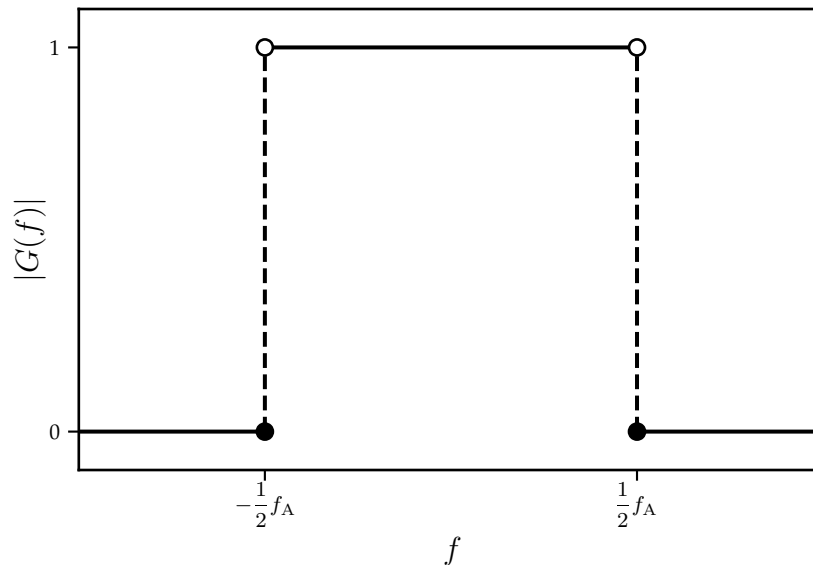


Abbildung L2: Amplitudengang des idealen Anti-Aliasing-Filters.

- b) Jitter, Leckeffekt, kein ideales Abtastsignal (keine Dirac-Impulse). ( $\Sigma$ : 1 Punkt)
- c) Das lineare Quantisierungsmodell gilt näherungsweise, wenn die Amplitude des Eingangssignals mehrere Quantisierungsstufen umfasst (das Signal wird mit hinreichend vielen Stufen quantisiert). ( $\Sigma$ : 1 Punkt)
- d)  $\mathcal{T}_1\{\cdot\}$  erzeugt aus dem Eingangssignal ein möglichst gleichverteiltes Signal.  $\mathcal{T}_2\{\cdot\}$  dient zur Rücktransformation nach der Quantisierung und ist die Inverse zu  $\mathcal{T}_1\{\cdot\}$ . ( $\Sigma$ : 1 Punkt)
- e) Nein. Die Transformation ist nicht geeignet, denn sie ist linear und kann die Amplitudendichte des Eingangssignals nur skalieren und verschieben. An der Stelle wird eine nicht-lineare Transformation benötigt. ( $\Sigma$ : 1 Punkt)
- f) Bandbegrenzte Amplitudendichte, hochfrequent, mit hinreichender Signalleistung/Amplitude, mittelwertfrei. ( $\Sigma$ : 1 Punkt)
- g) Man benötigt noch eine Tiefpassfilterung (z. B. durch Moving-Average-Filterung oder Mittelwertbildung), um das Dithersignal zu entfernen und das originale Signal zu rekonstruieren. ( $\Sigma$ : 1 Punkt)
- h) Wie es in der Abbildung L3 dargestellt wird, ist die Amplitude des Signals gleichverteilt. ( $\Sigma$ : 1 Punkt)
- i) Da die Amplitude des Signals  $x(t)$  gleichverteilt ist und wir vom linearen Quantisierungsmodell ausgehen, folgt für das SNR

$$\text{SNR}|_{\text{dB}} = 6,02 \cdot N \quad (\text{L39})$$

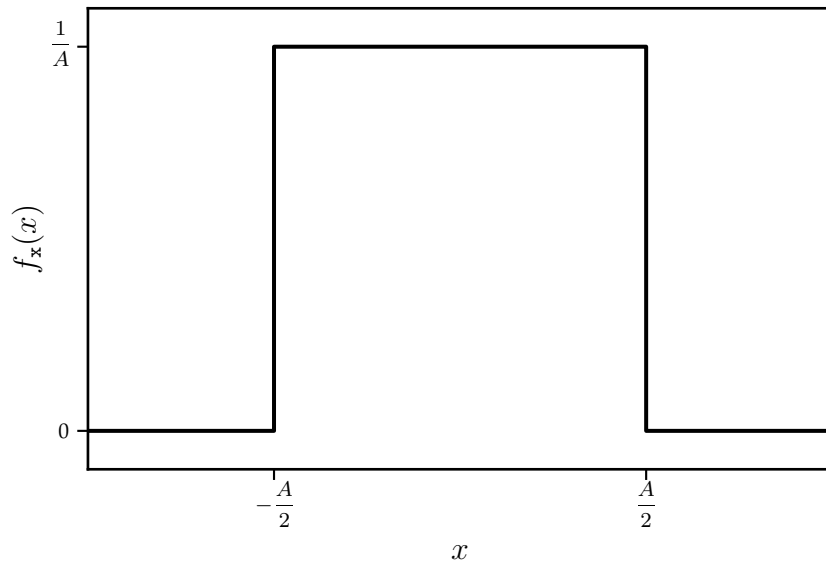


Abbildung L3: Amplitudendichte des periodischen Signals.

Damit erhält man:

$$N_{\min} = \left\lceil \frac{30}{6,02} \right\rceil = 5 \text{ bit} . \quad (\text{L40})$$

$$q_{\max} = \frac{A}{2^{N_{\min}}} = \frac{A}{32} . \quad (\text{L41})$$

D.h. das Signal muss mit mindestens 5 bit quantisiert werden. Die resultierende maximale Quantisierungsstufe ist  $\frac{A}{32}$ . (Σ: 2 Punkte)

j) Der Modulator setzt das Eingangssignal in eine binäre Impulsfolge um, bei der die Häufigkeit des hohen Spannungspegels proportional zur Eingangsspannung ist. Das Digitalfilter setzt die binäre Impulsfolge in einen digitalen Zahlwert um, der dem abgetasteten und quantisierten Eingangssignal entspricht. (Σ: 2 Punkte)

k) Das Nutzsignal wird ungestört übertragen und lediglich um eine Abtastperiode verzögert. Das Quantisierungsrauschen wird mit einer Hochpassfilterung übertragen. Die Leistung des Rauschens verschiebt sich zu hohen Frequenzen (noise shaping). (Σ: 2 Punkte)

l) Das SNR des Delta-Sigma-Umsetzers 1. Ordnung ergibt sich zu:

$$\text{SNR} = \frac{1}{4 \sin^2\left(\frac{\pi f_g}{f_A}\right)} = \frac{1}{4 \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)} \geq 10^{\frac{\text{SNR}_{\text{dB, min}}}{10}} = 10^2 = 100 . \quad (\text{L42})$$

Damit erhält man den minimalen Überabtastfaktor:

$$M \geq \frac{\pi}{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{4 \cdot \text{SNR}}}\right)} = \frac{\pi}{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{400}}\right)} \approx 62,8 . \quad (\text{L43})$$

(Σ: 2 Punkte)