

Messabweichung $\Delta F = F - F_w = \frac{Y_a - Y_w}{Y_w}$

absolut: $\Delta F = F - F_w$
relativ: $\Delta F = \frac{F - F_w}{F_w}$
Approximation: $\Delta F \approx \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y + \dots$

Approximation: $\Delta F \approx \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y + \dots$
Leistung: $P = U \cdot I$
Vorgehen: 1. Aufstellen des Signalmodells der Ordnung m

2. Approximation: $\hat{y} = \hat{\Phi} \cdot \hat{a}$
3. Minimierung: $\hat{a} = (\hat{\Phi}^T \hat{\Phi})^{-1} \hat{\Phi}^T \hat{y}$
4. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$

5. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$
6. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$
7. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$

8. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$
9. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$
10. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$

11. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$
12. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$
13. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$

14. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$
15. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$
16. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$

17. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$
18. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$
19. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$

20. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$
21. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$
22. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$

23. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$
24. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$
25. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$

26. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$
27. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$
28. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$

29. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$
30. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$
31. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$

32. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$
33. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$
34. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$

35. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$
36. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$
37. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$

38. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$
39. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$
40. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$

41. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$
42. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$
43. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$

44. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$
45. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$
46. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$

47. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$
48. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$
49. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$

50. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$
51. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$
52. Fehler: $\hat{e} = \hat{y} - \hat{y}_w$

Superponierende Störgröße (Additiv) $\rightarrow$ Eigenschaft:

1. Abweichung über gesamten Messbereich $\rightarrow$ Betrachtung des Kennwertes
2. Nullpunktfehler entsteht $\rightarrow$ relative Fehler

3. Empfindlichkeit ändert sich mit $S(x) = \frac{dF}{dx}$
4. relative Fehler auf Kennwert bezogen $F = \frac{y - y_w}{y_w}$

5. Unterdrückbar nur mit Differenzmethode
6. Deformierende Störgröße (Multiplikativ) $\rightarrow$ Eigenschaften

1. Empfindlichkeit S ändert sich in Abhängigkeit vom Störgrößenvektor
2. $S(x, z) = S(x, z_0) \cdot f(z)$ $\rightarrow$ hängt auch von Störgröße ab

3. Nullpunktfehler ändert sich (bei nicht deformierend) nicht
4. rel. deformierende Fehler $F = \frac{y - y_w}{y_w}$

5. rel. deformierende Fehler $F = \frac{y - y_w}{y_w}$
6. rel. deformierende Fehler $F = \frac{y - y_w}{y_w}$

7. rel. deformierende Fehler $F = \frac{y - y_w}{y_w}$
8. rel. deformierende Fehler $F = \frac{y - y_w}{y_w}$

9. rel. deformierende Fehler $F = \frac{y - y_w}{y_w}$
10. rel. deformierende Fehler $F = \frac{y - y_w}{y_w}$

11. rel. deformierende Fehler $F = \frac{y - y_w}{y_w}$
12. rel. deformierende Fehler $F = \frac{y - y_w}{y_w}$

13. rel. deformierende Fehler $F = \frac{y - y_w}{y_w}$
14. rel. deformierende Fehler $F = \frac{y - y_w}{y_w}$

15. rel. deformierende Fehler $F = \frac{y - y_w}{y_w}$
16. rel. deformierende Fehler $F = \frac{y - y_w}{y_w}$

17. rel. deformierende Fehler $F = \frac{y - y_w}{y_w}$
18. rel. deformierende Fehler $F = \frac{y - y_w}{y_w}$

19. rel. deformierende Fehler $F = \frac{y - y_w}{y_w}$
20. rel. deformierende Fehler $F = \frac{y - y_w}{y_w}$

21. rel. deformierende Fehler $F = \frac{y - y_w}{y_w}$
22. rel. deformierende Fehler $F = \frac{y - y_w}{y_w}$

23. rel. deformierende Fehler $F = \frac{y - y_w}{y_w}$
24. rel. deformierende Fehler $F = \frac{y - y_w}{y_w}$

25. rel. deformierende Fehler $F = \frac{y - y_w}{y_w}$
26. rel. deformierende Fehler $F = \frac{y - y_w}{y_w}$

27. rel. deformierende Fehler $F = \frac{y - y_w}{y_w}$
28. rel. deformierende Fehler $F = \frac{y - y_w}{y_w}$

29. rel. deformierende Fehler $F = \frac{y - y_w}{y_w}$
30. rel. deformierende Fehler $F = \frac{y - y_w}{y_w}$

31. rel. deformierende Fehler $F = \frac{y - y_w}{y_w}$
32. rel. deformierende Fehler $F = \frac{y - y_w}{y_w}$

Stichprobenmittelwert $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

Stichprobenvarianz $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$
Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{s^2}$

Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{s^2}$
Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{s^2}$

Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{s^2}$
Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{s^2}$

Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{s^2}$
Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{s^2}$

Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{s^2}$
Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{s^2}$

Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{s^2}$
Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{s^2}$

Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{s^2}$
Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{s^2}$

Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{s^2}$
Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{s^2}$

Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{s^2}$
Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{s^2}$

Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{s^2}$
Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{s^2}$

Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{s^2}$
Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{s^2}$

Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{s^2}$
Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{s^2}$

Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{s^2}$
Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{s^2}$

Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{s^2}$
Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{s^2}$

Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{s^2}$
Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{s^2}$

Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{s^2}$
Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{s^2}$

Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{s^2}$
Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{s^2}$

Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{s^2}$
Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{s^2}$

Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{s^2}$
Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{s^2}$

Signifikanztest Prüft ob erhaltener Stichwert $(\bar{x}, s^2)$ repräsentativ für angenommene Verteilung ist. Also z.B. liegt $\bar{x}$ noch genau an μ der Verteilung. **Annahme** meist Normalverteilung mit $N(\mu, \sigma^2)$ **Vorgehen**

- Voraussetzungen prüfen, d.h. $\rightarrow$ 1) Normalverteilung mit μ
- Ermitteln von $\bar{x}$ & falls σ^2 unbekannt auch s^2
- Aufstellen der Hypothesen (z.B. $H_0: \bar{x} = \mu_0, H_1: \bar{x} \neq \mu_0$)
- Bestimmen der Prüfgröße C (berechnen von C)

a) σ^2 bekannt: $\rightarrow Z = (\bar{x} - \mu_0) / \sigma / \sqrt{n} = C$

b) σ^2 unbekannt: $\rightarrow t = (\bar{x} - \mu_0) / s / \sqrt{n} = C$

Bestimmen der Signifikanzniveau α (oft in Aufgabe gegeben)

Stochastische Sicherheit $1 - \alpha$ mit der H_0 beibehalten wird

Bestimmen der Wahrscheinlichkeit

a) σ^2 bekannt: $P(C) < c$ von C in Normalverteilung

b) σ^2 unbekannt: $P(t) < c$ von t in t -Verteilung bei $(n-1)$ Freiheitsgraden

Testentscheidung: Annahme der Nullhypothese, falls gilt $P(C) \leq 1 - \alpha$, Ablehnung der Nullhypothese, falls $P(C) > 1 - \alpha$

χ^2 -Anpassungstest Prüft ob erhaltene Stichprobe einem bestimmten Verteilungsmodell entspricht. Also geamte Verteilung

Annahme: Eine Normalverteilung liegt für $N(\mu, \sigma^2)$ **Vorgehen**

- Voraussetzung prüfen: 1) Normalverteilung 2) großer Stichprobenumfang
- Bestimmen des Programms: Festlegen der k Klassen Δ_i mit $\Delta_i \geq 1$ & $\Delta_i \geq 1$ Erstellen absolute Häufigkeit n_i für Klassen
- Aufstellen Hypothesen: $H_0: f(x) = f_0(x)$ & $H_1: f(x) \neq f_0(x)$
- Bestimmen Signifikanzniveau α & stochastische Sicherheit $1 - \alpha$
- Bestimmen der Prüfgröße $\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}$ mit $n_i = \#$ Elemente in der Klasse Δ_i & n Stichprobenumfang
- p_i = Wahrscheinlichkeit des ein Element in der Klasse Δ_i liegt für die Hypothesen Wahrscheinlichkeitsdichte $f_0(x) = N(\mu, \sigma^2)$
- Bestimmen der Freiheitsgrade $m = k - 1$ (Anzahl geschätzte Parameter) verwendet
- Bestimmen der Wahrscheinlichkeit der Prüfgröße

$\chi^2 = \chi^2_{1-\alpha}$ $\rightarrow$ χ^2 ablesen aus χ^2 -Tabelle mit Freiheitsgrad m

Testentscheidung: Annahme der Nullhypothese, falls gilt $\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha}$ & Ablehnung der Nullhypothese, falls $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}$

Ausfallrate Wahrscheinlichkeit, dass in der Stichprobe mit n Exemplaren k der Ausfallwahrscheinlichkeit p zwischen k_1 & k_2 Exemplare ausgefallen sind (Binomialverteilung) $P(k_1 \leq k \leq k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

für $n \rightarrow \infty$ & $np \rightarrow \text{const.}$ $\rightarrow$ Übergang in Poisson-Verteilung, d.h. $P(k_1 \leq k \leq k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{n!}{k! (n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \rightarrow \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$ mit $\lambda = np$ = Ausfallrate

$\hat{p}$ = Prüfzeit t Beobachtungsstunden n & t & $n \cdot t = n \cdot p$

Leistungsfaktor ρ = Bezeichnung des Ausfalls von F (Ausfall) **Fehlerfortpflanzung** Wenn Messergebnis aus mehreren Messungen besteht, dann ist die Fehlerfortpflanzung die Fehlerfortpflanzung der Einzelmessungen

Beispiel: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $\rightarrow$ Einzelne Messergebnisse x_i in der Ableitung $\Delta x_i = x_i - x_{i0}$ vom richtigen Messwert x_{i0}

Fehlerfortpflanzung = Ermittlung der Abweichung des Messergebnisses aus den Einzelabweichungen Δx_i **Ansatz: Taylorentwicklung**

$y(x_1, x_2, \dots, x_n) = y(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i + \dots$

hierbei $\frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i$ = Empfindlichkeit $\rightarrow$ III. Falls maximale Abweichungen bekannt (vereinfacht, Abweichung $\Delta x_i = \pm \frac{\Delta x_i}{2}$)

Sonderfall: Linearkombination, d.h. $y = f(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$, dann $\Delta y = \sum_{i=1}^n a_i \Delta x_i$ $\Delta x_i = a_i \Delta x_1 + a_2 \Delta x_2 + \dots + a_n \Delta x_n$

Sonderfall: Multiplikativ, d.h. $y = f(x) = a_1 x_1^{p_1} \cdot a_2 x_2^{p_2} \cdot \dots \cdot a_n x_n^{p_n}$, dann $\Delta y = \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{y} \Delta x_i$ $\Delta x_i = y \cdot \frac{\Delta x_i}{x_i}$ $\Delta x_i = \frac{\Delta x_i}{x_i} \cdot x_i$ $(x_i = x_{i0} \pm \Delta x_i)$

VARIANZ $\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i}^2 \sigma_{x_i}^2$ $\sigma_{x_i}^2 = \frac{\Delta x_i^2}{n}$ $\sigma_{x_i}^2 = \frac{\Delta x_i^2}{n}$ $\sigma_{x_i}^2 = \frac{\Delta x_i^2}{n}$ $\sigma_{x_i}^2 = \frac{\Delta x_i^2}{n}$

Falls n gleich $\rightarrow \sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i}^2 \sigma_{x_i}^2$ $\sigma_{x_i}^2 = \frac{\Delta x_i^2}{n}$ $\sigma_{x_i}^2 = \frac{\Delta x_i^2}{n}$ $\sigma_{x_i}^2 = \frac{\Delta x_i^2}{n}$

Stochastischer Prozess besteht aus Zufallsexperimenten ξ & Bezeichnung von deterministischen Funktionen $y(t, \xi)$ = **MUSTERFUNKTIONEN**

mit ξ = Elementarereignisse des Zufalls experimentes $\rightarrow$ für jeden festen Zeitpunkt $t = t_0$ geht der stochastische Prozess $y(t, \xi)$ in eine Zufallsvariable $Y(t_0, \xi)$ über

DETERMINISTISCH

Elementarereignis	fest	variabel
Fest	Zahlenwert $y(t_0, \xi_0)$	Musterfunktion $y(t, \xi_0)$
Variabel	Zufallsvariable $y(t_0, \xi)$	Zufallsprozess $y(t, \xi)$

Wahrscheinlichkeitsverteilung $F_Y(y) = P(Y \leq y)$

Wahrscheinlichkeitsdichte $f_Y(y) = dF_Y(y)/dy$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) dy = 1$

Verbundwahrscheinlichkeitsverteilung

$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ 2D-Prozesse

$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ 2D-Prozesse

Verbundwahrscheinlichkeitsdichte

$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$ 2D-Prozesse

$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$ 2D-Prozesse

Stochastische Unabhängigkeit $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$ bzw. $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

Schmittelfunktion Mittel über alle Musterfunktionen $y(t, \xi_1), y(t, \xi_2), \dots$ bei festem t (hängt i.A. von t ab) $\rightarrow$ i.d.R. verschieden

Zeitmittelwert Mittelung über den Parameter t einer einzigen Musterfunktion $y(t, \xi_0) \rightarrow$ verschiedene ξ_0

m-tes Moment $\mu_{Y,m}(t) = E[y^m(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} y^m(t) \cdot f_Y(y) dy$

1. Moment = zeitabhängiger Mittelwert (Schwermittel) $\mu_{Y,1}(t) = \mu_Y(t)$

m-tes zentraler Moment $E[(y(t) - \mu_Y(t))^m] = \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mu_Y(t))^m \cdot f_Y(y) dy$

2. zentraler Moment = $\sigma_Y^2(t)$ = zeitabhängige Varianz

Autokorrelationsfunktion $r_{YY}(t_1, t_2) = E[y(t_1) \cdot y(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y_1 y_2 \cdot f_{Y,Y}(y_1, y_2) dy_1 dy_2$

Autokorrelationsfunktion $C_{YY}(t_1, t_2) = E[(y(t_1) - \mu_Y(t_1)) \cdot (y(t_2) - \mu_Y(t_2))]$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y_1 - \mu_Y(t_1)) \cdot (y_2 - \mu_Y(t_2)) \cdot f_{Y,Y}(y_1, y_2) dy_1 dy_2$

$= r_{YY}(t_1, t_2) - \mu_Y(t_1) \mu_Y(t_2)$

Kreuzkorrelationsfunktion $r_{XY}(t_1, t_2) = E[x(t_1) \cdot y(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x y \cdot f_{X,Y}(x, y) dx dy$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X(t_1)) \cdot (y - \mu_Y(t_2)) \cdot f_{X,Y}(x, y) dx dy$

$= r_{XY}(t_1, t_2) - \mu_X(t_1) \mu_Y(t_2)$

Kreuzkovarianzfunktion $C_{XY}(t_1, t_2) = E[(x(t_1) - \mu_X(t_1)) \cdot (y(t_2) - \mu_Y(t_2))]$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X(t_1)) \cdot (y - \mu_Y(t_2)) \cdot f_{X,Y}(x, y) dx dy$

$= r_{XY}(t_1, t_2) - \mu_X(t_1) \mu_Y(t_2)$

Unkorreliertheit $C_{XY}(t_1, t_2) = 0$ $\rightarrow$ $r_{XY}(t_1, t_2) = \mu_X(t_1) \mu_Y(t_2)$

Orthogonalität falls $r_{XY}(t_1, t_2) = 0$ $\rightarrow$ $r_{XY}(t_1, t_2) = 0$

STRENGTH **Stationarität** = stochastische Eigenschaften sind invariant gegenüber der Zeit $\rightarrow$ VERBUNDENE Stationarität zweier Prozesse, wenn beide Prozesse stationär & gemeinsame stochastische Eigenschaften invariant gegenüber der Zeitverschiebung $\rightarrow$ **POLE**

① $F_Y(t) = F_Y(t + \tau)$ $\rightarrow$ $F_Y(t) = F_Y(t)$ $\rightarrow$ $F_Y(t) = F_Y(t)$

② $F_Y(t_1, t_2) = F_Y(t_1 + \tau, t_2 + \tau)$ $\rightarrow$ $F_Y(t_1, t_2) = F_Y(t_1, t_2)$

③ $\mu_{Y,m}(t) = \mu_{Y,m}(t + \tau)$ $\rightarrow$ $\mu_{Y,m}(t) = \mu_{Y,m}(t)$ $\rightarrow$ $\mu_{Y,m}(t) = \mu_{Y,m}(t)$

Schwache Stationarität = wenn Erwartungswert $\mu_Y(t)$ & Autokorrelationsfunktion $r_{YY}(t_1, t_2)$ invariant gegenüber Verschiebung der Zeit $\rightarrow$ $\mu_Y(t) = \mu_Y$ & $r_{YY}(t_1, t_2) = r_{YY}(\tau)$

Leistung für $F_Y(t)$ & $F_Y(t)$ nicht gelten

Folger: Autokorrelation & Varianz ebenfalls invariant gegenüber Zeitverschiebung, d.h. ① μ_Y & σ_Y^2 sind gerade

$r_{YY}(\tau) = r_{YY}(-\tau)$ ② $C_{YY}(t_1, t_2) = C_{YY}(t_1 + \tau, t_2 + \tau)$ $\rightarrow$ $C_{YY}(t_1, t_2) = C_{YY}(t_1, t_2)$

$\rightarrow$ Streng Stat. $\rightarrow$ Schwach Stat. $\rightarrow$ Anordnen nur für $N(\mu, \sigma^2)$

Ergodizität Ein Zufallsprozess (Streu) ergodisch, wenn die Zeitmittelwerte aller Momente einer beliebigen Musterfunktion $y(t, \xi_0)$ mit den Schmittelfunktionen der Prozesse übereinstimmen $\rightarrow$ **stoch. Stationarität**

Schwache Ergodizität Ein Zufallsprozess heißt schwach ergodisch, wenn die Mittelwerte für das erste Moment und für die AKF mit dem entsprechenden Schmittelfunktion μ_Y & r_{YY} der Prozesse übereinstimmen

$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y(t, \xi_0) dt = \mu_Y$ i.d.R. jede Musterfunktion kann gemittelt werden bez. i.d.R. Momente verteilten

Energiesignal Ein beschränktes, stückweise stetiges Signal $x(t)$ heißt Energiesignal, wenn $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$ $\rightarrow$ $E_{\text{Energie}} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$

Leistungssignal $\rightarrow$ $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt = P < \infty$

$\rightarrow$ P = mittlere plausiblere Leistung i.d.R. periodische Signale

sonstige Signale Wenn kein Energie-/Leistungssignal, z.B. $x(t) = e^t$

NORM **Energiesignal** $\|x(t)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}$ $< \infty$

Leistungssignal $\|x(t)\| = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt}$ $< \infty$

Innenprodukt **Energiesignal** $\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y(t) dt$

Leistungssignal $\langle x(t), y(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot y(t) dt$

Schwarzsche Ungleichung $|\langle x(t), y(t) \rangle| \leq \|x(t)\| \cdot \|y(t)\|$

Falls $x(t)$ Leistungssignal $\rightarrow$ $\langle x(t), y(t) \rangle \leq P_x \cdot P_y < \infty$

Leistung $P_x = r_{xx}(0) = \langle x(t), x(t) \rangle = \|x(t)\|^2$

Energie $E_x = r_{xx}(0) = \|x(t)\|^2$ mit $\langle x(t), y(t) \rangle \leq E_x \cdot E_y < \infty$

Korrelationsenergiesignal $r_{xy}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y(t) dt$

AKF Energiesignal $r_{xx}(t) = \langle x(t), x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot x(t) dt$

Energiedichte $S_{xx}(f) = x(t) \cdot x(t) = |x(t)|^2$ für $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt = P$

Parasitäre Beziehung $\rho = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T S_{xx}(f) = 0$

① 1) Maximalwert $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T S_{xx}(f) = P_x$ $\rightarrow$ $P_x = \mu_x^2$

2) Symmetrie $r_{xx}(\tau) = r_{xx}(-\tau)$

3) Unkorreliertheit für $t \rightarrow \infty$ $\rightarrow$ $\lim_{t \rightarrow \infty} r_{xx}(t) = \mu_x^2$

4) Periodische Funktionen $r_{xx}(t) = r_{xx}(t + T)$

② 1) Maximalwert $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T S_{xx}(f) = P_x$ $\rightarrow$ $P_x = \mu_x^2$

2) Symmetrie $r_{xx}(\tau) = r_{xx}(-\tau)$ $\rightarrow$ $r_{xx}(\tau) = \mu_x^2$

3) Unkorreliertheit für $t \rightarrow \infty$ $\rightarrow$ $\lim_{t \rightarrow \infty} r_{xx}(t) = \mu_x^2$

Closed Loop Korrelation Verfahren zur Bestimmung der numerischen Aufwands und kleiner als bei VLF

Ansatz: Interpretation der Laufzeitkennlinie als Identifizierungsproblem der unbekannten Laufzeit T_{max} **Vorgehen** 1) Wähle Laufzeit T_{max} 2) Verstellen des Meßwertes T_{max} so lange bis optimale Anpassung durch Minimierung (steigend) & Regelabweichung

Multiplikation **Integration** **Polen** **Korrelation**

Multiplikation $x(t) \cdot y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y(t) dt$

Integration $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y(t) dt$

Polen $\rightarrow$ bildet immerhin 1. Ordnung (aufwendig) $\rightarrow$ **Korrelation**

Korrelation $\rightarrow$ große Auswertung von $x(t)$ mit 1 Bit $\rightarrow$ Erstes Nachvollziehen durch geschaltete Logikschaltungen (kleinere) $\rightarrow$ **Korrelation**

Ähnlichkeit (von Spektrum) $\rightarrow$ AKF im Frequenzbereich $S_{xy}(f) = \langle x(t) + y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y(t) dt$

Leistungsdichtespektrum = AKF im Frequenzbereich, also die selbstähnliche Leistung des Spektrums **Autokorrelationsdichtespektrum**

Für stationäre stochastische Prozesse $S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(\tau) \cdot e^{-j2\pi f \tau} d\tau$

$\rightarrow$ analog $r_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) \cdot e^{j2\pi f \tau} df$

$\rightarrow$ gibt an welche Frequenz wie stark im stochastischen Mittel zur Leistung der Musterfunktion beiträgt (Leistungsdichte) über f

$\rightarrow$ $r_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) df = \sigma_x^2$ $\rightarrow$ $\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) df$ $\rightarrow$ mittlere Leistung

Kreuzleistungsdichtespektrum $\rightarrow$ x, y stochastisch stationär $S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xy}(\tau) \cdot e^{-j2\pi f \tau} d\tau$ analog $r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(f) \cdot e^{j2\pi f \tau} df$

LDS für Energiesignale $S_{xx}(f) = X(f) \cdot X^*(f) = |X(f)|^2$

best. x(t) die Impulsantwort eines stationären LTI Systems, dann $S_{xx}(f) = |X(f)|^2$

Eigenschaften Leistungsdichtespektrum ① $S_{xx}(f) \geq 0$ $\forall f$

② für reelle Prozesse $S_{xx}(f) = S_{xx}^*(f) = S_{xx}(-f) \rightarrow S_{xx}(f) = S_{xx}(-f)$

③ $S_{xx}(f)$ ist im Allgemeinen nicht reellwertig

Weißes Rauschen Ein Zufallsprozess heißt weißes Rauschen, wenn LDS für alle Frequenzen konst. $\rightarrow$ $S_{xx}(f) = \sigma^2 = \text{const.}$ $\forall f$

$\rightarrow$ σ^2 ist die Leistungsdichte des Rauschens $\rightarrow$ $\sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T r_{xx}(\tau) d\tau$

weißes Gaußsches Rauschen ist weißes Rauschen mit normalverteilten Signalwerten. Damit folgt aus Unkorreliertheit auch stochastische Unabhängigkeit **farbiges Rauschen** = weißes Rauschen das zu hohen Frequenzen gedämpft ist $\rightarrow$ $S_{xx}(f) = \sigma^2 \cdot \text{Bandpass}$

Korrelationslänge $T_c = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(\tau) d\tau$

Realisierung weißes Rauschen ① thermisches Rauschen (Widerstand) ② elektronisches Rauschen (Widerstand) ③ mechanisches Rauschen (Widerstand)

Additive Überlagerung zufälliger Störgrößen $y(t) = x(t) + n(t)$

$r_{yy}(\tau) = r_{xx}(\tau) + r_{nn}(\tau) + r_{xn}(\tau) + r_{nx}(\tau)$

$S_{yy}(f) = S_{xx}(f) + S_{nn}(f) + 2 \cdot \text{Re}\{S_{xn}(f)\}$

$\rightarrow$ falls $x(t)$ unkorreliert & $n(t)$ unkorreliert $\rightarrow$ $S_{xx}(f) = S_{nn}(f)$ $\rightarrow$ $S_{yy}(f) = S_{xx}(f) + S_{nn}(f)$

Übertragung durch LTI-Systeme $\rightarrow$ vollständige Beschreibung durch Impulsantwort $g(t)$ bzw. Übertragungsfunktion $G(f)$

$\rightarrow$ $y(t) = g(t) * x(t) \rightarrow Y(f) = G(f) \cdot X(f)$

$\rightarrow$ falls $x(t)$ Energiesignal $\rightarrow$ $S_{yy}(f) = |G(f)|^2 \cdot S_{xx}(f)$ & $S_{yy}(f) = G^*(f) \cdot S_{xx}(f) \cdot G(f)$

$\rightarrow$ falls $x(t)$ Leistungssignal & ergodisches Zufallsprozess: 1) $r_{xy}(\tau) = r_{xx}(\tau) * g^*(\tau) \rightarrow S_{xy}(f) = S_{xx}(f) \cdot G^*(f)$ 2) $r_{yy}(\tau) = r_{xx}(\tau) * g(\tau) \rightarrow S_{yy}(f) = S_{xx}(f) \cdot |G(f)|^2$ 3) $r_{yy}(\tau) = r_{xx}(\tau) * g(\tau) \rightarrow S_{yy}(f) = S_{xx}(f) \cdot |G(f)|^2$

Systemidentifikation **Rauschquelle** $G(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$ $\rightarrow$ $G(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$

Falls $n(t) = 0$ & $\sigma_x^2 = 1$ $\rightarrow$ $G(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$

Quelle weiß ist $(S_{xx}(f) = 1)$ $\rightarrow$ $G(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$

dann gilt: $G(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$ $\rightarrow$ $G(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$

Möglichkeit ① Schätzung $S_{xy} = X(f) \cdot Y^*(f)$ & $S_{xx} = X(f) \cdot X^*(f)$ $\rightarrow$ $G(f) = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$

man $\rightarrow$ Veranschaulichung durch Mittelung über viele Schätzungen, d.h. $S_{xy}(f) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i(f) \cdot Y_i^*(f)$

Möglichkeit ② Nur PERIODENRAHM $S_{xy}(f) = Y(f) \cdot X^*(f)$ schätzen, dann $G(f) = \frac{S_{xy}(f)}{S_{xx}(f)}$ $\rightarrow$ $G(f) = \frac{S_{xy}(f)}{S_{xx}(f)}$

$\rightarrow$ Möglichkeit ① $G(f) = S_{xy}(f) / S_{xx}(f)$

$\rightarrow$ Vorteil: Schätzung für Betrag & Phase, sowie geringer Einfluss der überlagerten Störung $n(t)$

dynamische Systemidentifikation $G(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$ $\rightarrow$ $G(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$

$\rightarrow$ falls $n(t) = 0$ & $\sigma_x^2 = 1$ $\rightarrow$ $G(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$

dynamischen Betriebs ohne Messen des Geräts, kein Einfluss von $n(t)$, der Betriebszustand, solange $x(t)$ & $n(t)$ unkorreliert.

Kreuzkorrelationskoeffizient $r_{xy}, \text{norm}(\tau) = \frac{r_{xy}(\tau)}{\sigma_x \sigma_y}$

