Prof. Dr.-Ing. F. Puente León
Institut für Industrielle Informationstechnik
Karlsruher Institut für Technologie
www.iiit.kit.edu

1. Übung Messtechnik (13.11.14)

Aufgabe 1: Untersuchung der Radlast

Die Radlast F_L an einem Pkw-Reifen soll mittels eines einfachen Modells untersucht werden (Abb. 1). Die Felge und der Reifen seien masselos. Der luftgefüllte Reifen mit Radius r wird durch die vom Boden aufgebrachte Gegenkraft zu F_L verformt. Der Reifenluftdruck p_0 wirke auf die Auflagefläche der Seitenlänge a und baue die Gegenkraft des Reifens auf. Der Reifengummi sei dabei kraftlos verformbar.

Die Geometriegrößen des Reifens seien die Reifenbreite b, die radiale Reifendicke d, der Einfederweg x des Reifens und der statische Reifenradius r bei $F_\mathrm{L} = 0$ und $x = 0$.

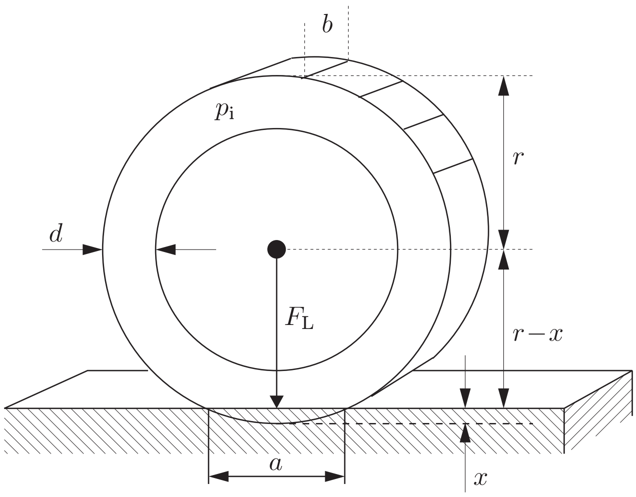

Abbildung 1: Modell zur Verformung eines Reifens.

Der Reifeninnendruck p_i mit dem Volumen V des Reifens ändert sich aufgrund der Verformung bzw. Belastung. Ausgehend von einer konstanten Reifentemperatur T gelte die allgemeine Gasgleichung,

$$p_\mathrm{i}(x) \cdot V(x) = mRT$$

mit der Gasmasse m und der allgemeinen Gaskonstante R.

a) Berechnen Sie die Radlast $F_\mathrm{L}(x)$ unter Berücksichtigung des veränderlichen Druckes $p_\mathrm{i}(x)$.

b) Führen Sie eine Linearisierung von $p_\mathrm{i}(x)$ um den Arbeitspunkt $x_0 = 0$ durch. Verwenden Sie dazu die Taylor-Entwicklung und brechen Sie nach dem linearen Term die Entwicklung ab. Berechnen Sie damit erneut die Radlast $\tilde{F}_\mathrm{L}(x)$.
Hinweis: $\tilde{p}_\mathrm{i}(x) = p_\mathrm{i}(x_0) + \left.\frac{\partial p_\mathrm{i}(x)}{\partial x}\right|_{x=x_0} (x - x_0)$

Es soll nun der Fehler gegenüber dem Druck $p_{\mathrm{i}}(x)$ untersucht werden, der durch die Linearisierung entsteht.

c) Geben Sie den relativen Fehler $F_{\mathrm{r}}(x)$ der Radlast $\tilde{F}_{\mathrm{L}}(x)$ bezogen auf $F_{\mathrm{L}}(x)$ an.

d) Skizzieren Sie $F_{\mathrm{r}}(x)$ in einem Diagramm. Der Einfederweg x sei im Bereich $1\,\mathrm{mm} \leq x \leq 25\,\mathrm{mm}$, der Reifenradius r betrage $30\,\mathrm{cm}$, die radiale Reifendicke d sei $20\,\mathrm{cm}$ und die Reifenbreite b sei $20\,\mathrm{cm}$.

Aufgabe 2: Least-Squares-Schätzer

Die Wurfbahn eines Balls nach Abb. 2 mit einer Anfangshöhe von $h(0) = 10\,\mathrm{m}$ sei gegeben. Die Höhenverteilung an weiteren Stellen folgt den Werten aus Tab. 1.

s in m	0	10	20
h in m	10	50	10

Tabelle 1: Höhenverteilung des Wurfes.

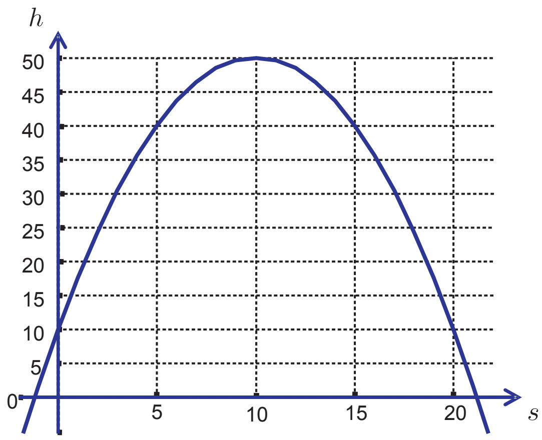

Abbildung 2: Wurfbahn eines Balls.

a) Geben Sie allgemein den mathematischen Zusammenhang der Höhe h in Abhängigkeit des Weges s mit Hilfe allgemeiner Parameter a, b und c an!
Hinweis: Die explizite Berechnung der Parameter ist nicht erforderlich!

b) Führen Sie eine Approximation der Parameter aus **a)** mittels eines Least-Squares-Schätzers durch. Geben Sie das approximierte Polynom in der Form $\hat{h}(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots$ an.
Hinweis: Für

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} e & f & g \\ f & g & k \\ g & k & m \end{pmatrix}$$

gilt:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} gm - k^2 & gk - fm & fk - g^2 \\ gk - fm & em - g^2 & fg - ek \\ fk - g^2 & fg - ek & eg - f^2 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante der zu invertierenden Matrix beträgt $\det(\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}) = 4 \cdot 10^6$.

Aufgabe 3: Interpolation

Zur Bestimmung der Kennline $y(u)$ eines Kraftsensors wurden folgende Werte bestimmt:

Index i	0	1	2
u_i	1	2	4
$y_i = y(u_i)$	0	10	20

a) Berechnen Sie das Interpolationspolynom $\tilde{y}_{\mathrm{N}}(u) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1\, u + \tilde{a}_2\, u^2$ mit Hilfe des Newton-Interpolationsverfahrens. Wie lauten die Parameter $\tilde{a}_0$, $\tilde{a}_1$ und $\tilde{a}_2$? Alle Zwischenergebnisse sind auf 3 Nachkommastellen zu runden.

Hinweis: Bei nicht-äquidistantem Stützstellenabstand ergeben sich die Werte im Differenzenschema zu $\Delta^0 y_k = y_k,\ \Delta^{i+1} y_k = \frac{\Delta^i y_{k+1} - \Delta^i y_k}{u_{k+i+1} - u_k},\ a_i = \Delta^i y_0,\ k = 0, 1, 2.$

b) Berechnen Sie das Interpolationspolynom $\tilde{y}_{\mathrm{L}}(u) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1\, u + \tilde{a}_2\, u^2$ mit Hilfe des Lagrange-Interpolationsverfahrens. Wie lauten die Parameter $\tilde{a}_0$, $\tilde{a}_1$ und $\tilde{a}_2$? Alle Zwischenergebnisse sind auf 3 Nachkommastellen zu runden.

c) Die Kennline soll verbessert werden. Dazu wurde eine weitere Messung durchgeführt und man erhält $y(u_3 = 3) = 15$. Bestimmen Sie das neue Interpolationspolynom $\tilde{y}_2(u) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1\, u + \tilde{a}_2\, u^2 + \tilde{a}_3\, u^3$.

Die Bestimmung der Kennline soll nun mittels der Spline-Interpolation erfolgen. Es stehen folgende Werte zur Verfügung:

Index i	0	1	2	3
u_i	1	2	3	4
$y_i \approx y(u_i)$	0	10	15	20

d) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem zur Berechnung der Werte $\hat{y}_j^{''}$, $j = 1, 2$ auf, welche zur Berechnung der Spline-Polynome $s_j(u) = a_j(u - u_j)^3 + b_j(u - u_j)^2 + c_j(u - u_j) + d_j$ benötigt werden. Welche Werte besitzen $y_0^{''}$ und $y_3^{''}$? Berechnen Sie anschließend für $j = 0, 1$ die Werte a_j, b_j, c_j, d_j und daraus $s_j(u)$, $j = 0, 1$.

e) Was ergibt ein Vergleich der 2. Ableitungen von $s_0(u)$ und $s_1(u)$ an der Stelle $u_1 = 2$? Des Weiteren sei die physikalische Kennlinie des Kraftsensors über die Werte y_i fehlerfrei abgetastet worden, $y_i = y(u_i)$. Stimmt unter dieser Annahme die 1. Ableitung der physikalischen Kennlinie mit den 1. Ableitungen der Spline-Polynome an den Stützstellen u_0, u_1, u_2, u_3 überein?

f) Es wird ein Vergleich der Spline-Interpolation mit der Newton-Interpolation vorgenommen. Stimmen die beiden Kurven überein? Was ergibt sich speziell für die Funktionswerte und die ersten beiden Ableitungen an den Stützstellen?