1. Übung Messtechnik

WS 2014/15

Organisatorisches

Theorie

Aufgaben

Betreuung der Vorlesung Messtechnik

Johannes Pallauf

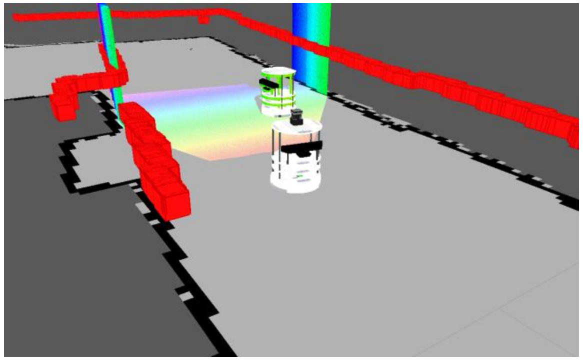
Geb. 6.35 (Westhochschule)

Zimmer 118

Email: pallauf@kit.edu

Sprechstunde: nach Vereinbarung

http://www.iiit.kit.edu/



Informationen - IIIT
Lehre

Bachelor

- Signale und Systeme
- Messtechnik
- ETIT Workshop

Master

- Verteilte ereignisdiskrete Systeme
- Methoden der Signalverarbeitung
- Integrierte Signalverarbeitungssysteme
- Automotive Control Systems
- Störresistente Informationsübertragung
- Praktikum digitale Signalverarbeitung in der Messtechnik
- Praktikum Mikrocontroller und digitale Signalprozessoren
- u. a.

KIT Karlsruher Institut für Technologie | IIIT

Forschung

- Bildverarbeitung
- Automotive
- Situationsanalyse and Wahrnehmung
- Powerline Communications

Auslandspraktikum USA

- **Praktikum** bei **Hitachi** in **Detroit, USA**
- Dauer: 6 Monate
- Beginn: **September 2015**
- Themengebiete: Signalverarbeitung, Systemmodellierung und Regelungstechnik in der Automobilindustrie

Bewerbung:

- Ansprechpartner: Sebastian Bauer (http://www.iiit.kit.edu/sbauer.php)
- Anschreiben und Lebenslauf inkl. Notenauszug an sebastian.bauer@kit.edu
- Bewerbungsfrist: **28.02.2015**
- Rückfragen: per Email oder telefonisch (0721 608-44515)

Allgemeine Informationen: Übung (1)

- Unterlagen
  - Übungsskript mit Lösung
  - Aufgabenblätter (+ Matlab-Übungen)
  - Übungsfolien
  - Matlabskripte
- Zugriff
  - http://www.iiit.kit.edu/mt
  - Benutzername: mthoerer
  - Passwort : wheatst0ne

Allgemeine Informationen: Übung (2)

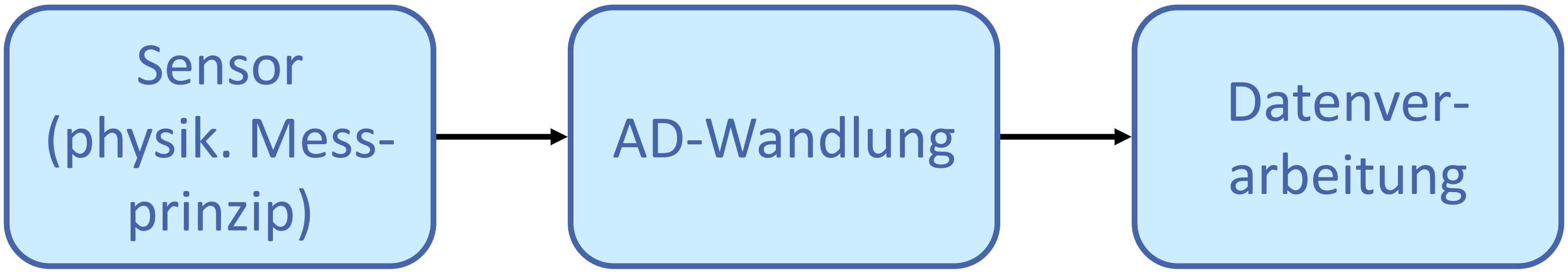
- **Voraussichtliche Termine**
  - **Donnerstags, 08:00 – 09:30, MTI**
  - **13.11., 20.11., 04.12., 18.12., 15.01., 29.01., 12.02.**

http://www.iiit.kit.edu/mt

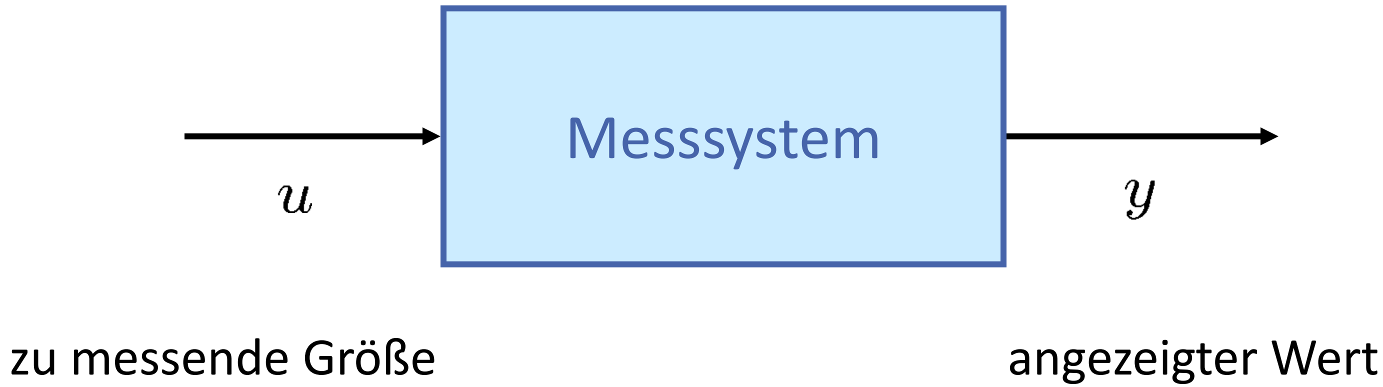
- **Ablauf der Übungen**
  - **Zusammenfassung der nötigen Theorie**
  - **Skizzieren der Lösung von Aufgaben / Beantworten von Fragen**

Messtechnik (1)

Allgemein: Messkette



Systemtheorie



Inhalt der Übung

1. Messfehler

2. Kurvenanpassung

3. Stationäres Verhalten von Messsystemen

4. Zufällige Messfehler

5. Korrelationsmesstechnik

6. Erfassung amplituden-/frequenzanaloger Signale

Organisatorisches

Theorie

Aufgaben

Theorie: Messfehler

Definition des Messfehlers

Absolute Fehler: $F = y_{\mathsf{Anzeige}} - y_{\mathsf{wahr}} = y_{\mathsf{A}} - y_{\mathsf{r}}$

Relativer Fehler: $F_{\mathsf{r}} = \frac{F}{\mathsf{Bezugswert}} = \frac{y_{\mathsf{A}} - y_{\mathsf{r}}}{y_{\mathsf{r}}}$

Fehlerursachen

Systematische Fehler

- Ursache des Fehlers und Art der Einwirkung bekannt
- Kompensation prinzipiell möglich

Zufällige Fehler

- nicht reproduzierbar, Ursache (häufig) unbekannt

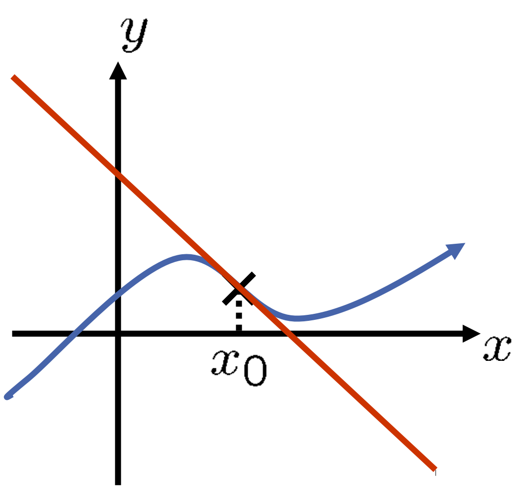
Theorie: Linearisierung

Vorgriff für Aufgabe 1:

- Einfache Möglichkeit:
  - Taylorreihenentwicklung um Arbeitspunkt
  - Abbruch nach dem linearen Term

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left. \frac{y^{(k)}(x)}{k!} \right|_{x=x_0} \cdot (x - x_0)^k \right]$$

$$\tilde{y}(x) \approx y(x_0) + \left. \frac{\partial y(x)}{\partial x} \right|_{x=x_0} \cdot (x - x_0)$$



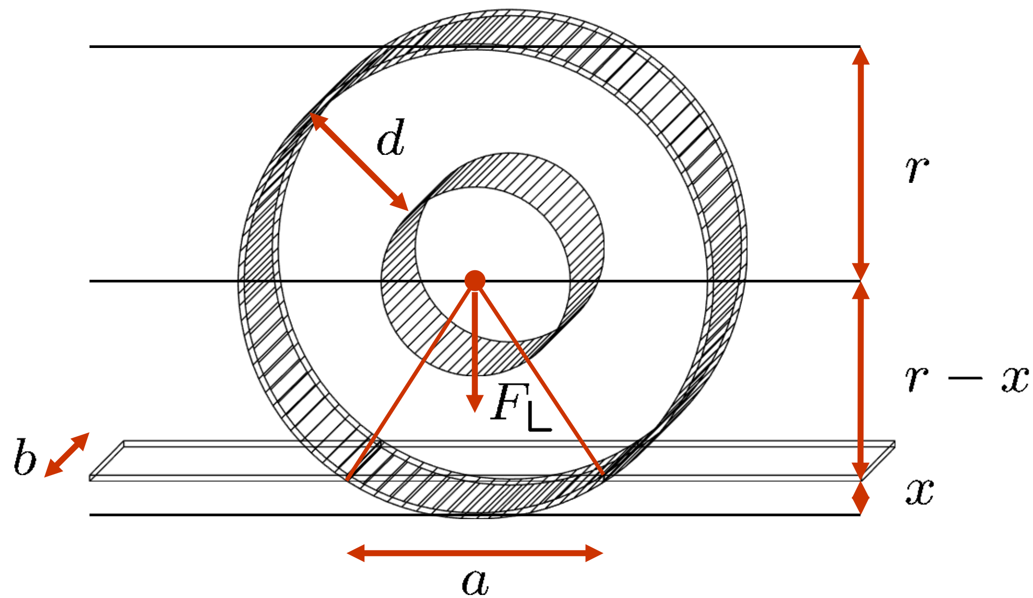
Organisatorisches

Theorie

Aufgaben

Aufgabe 1: Untersuchung der Radlast

- Gesucht: $F_{\mathsf{L}}(x)$



Aufgabe 1: Untersuchung der Radlast

a) Berechnen Sie die Radlast $F_\mathrm{L}(x)$ unter Berücksichtigung des veränderlichen Druckes $p_\mathrm{i}(x)$.

b) Führen Sie eine Linearisierung von $p_\mathrm{i}(x)$ um den Arbeitspunkt $x_0 = 0$ durch. Verwenden Sie dazu die Taylor-Entwicklung und brechen Sie nach dem linearen Term die Entwicklung ab. Berechnen Sie damit erneut die Radlast $\tilde{F}_\mathrm{L}(x)$

Hinweis: $\tilde{p}_\mathrm{i}(x) \approx p_\mathrm{i}(x_0) + \left.\frac{\partial p_\mathrm{i}(x)}{\partial x}\right|_{x=x_0} (x - x_0)$

c) Geben Sie den relativen Fehler $F_\mathrm{r}(x)$ der Radlast gegenüber $\tilde{F}_\mathrm{L}(x)$, bezogen auf $F_\mathrm{L}(x)$ an.

d) Skizzieren Sie $F_\mathrm{r}(x)$ in einem Diagramm, für

$$1\mathrm{mm} \leq x \leq 25\mathrm{mm}, r = 30\mathrm{cm}, d = 20\mathrm{cm}, b = 20\mathrm{cm}$$

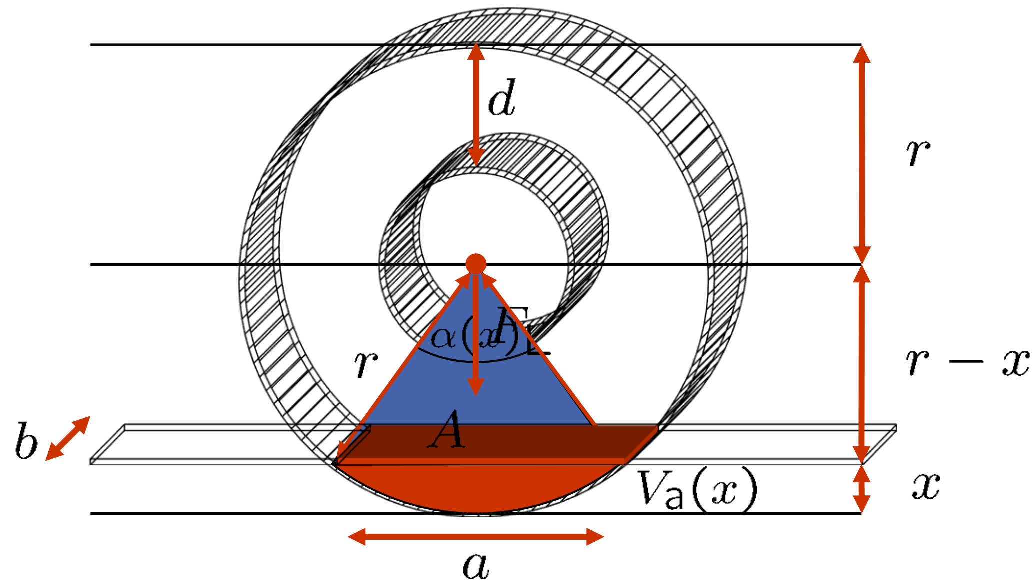
Aufgabe 1 a) $F_{\mathrm{L}}(x)$

$$F_{\mathrm{L}}(x) = \boxed{p_{\mathrm{i}}(x)}\boxed{A(x)}$$

$$\boxed{A(x)} = \boxed{a(x)}\boxed{b}$$

$$\boxed{p_{\mathrm{i}}(x)} = \frac{mRT}{V(x)} = \frac{p_0 V_0}{\boxed{V(x)}}$$

$$\boxed{V(x)} = \boxed{V_0} - \boxed{V_{\mathrm{a}}(x)}$$

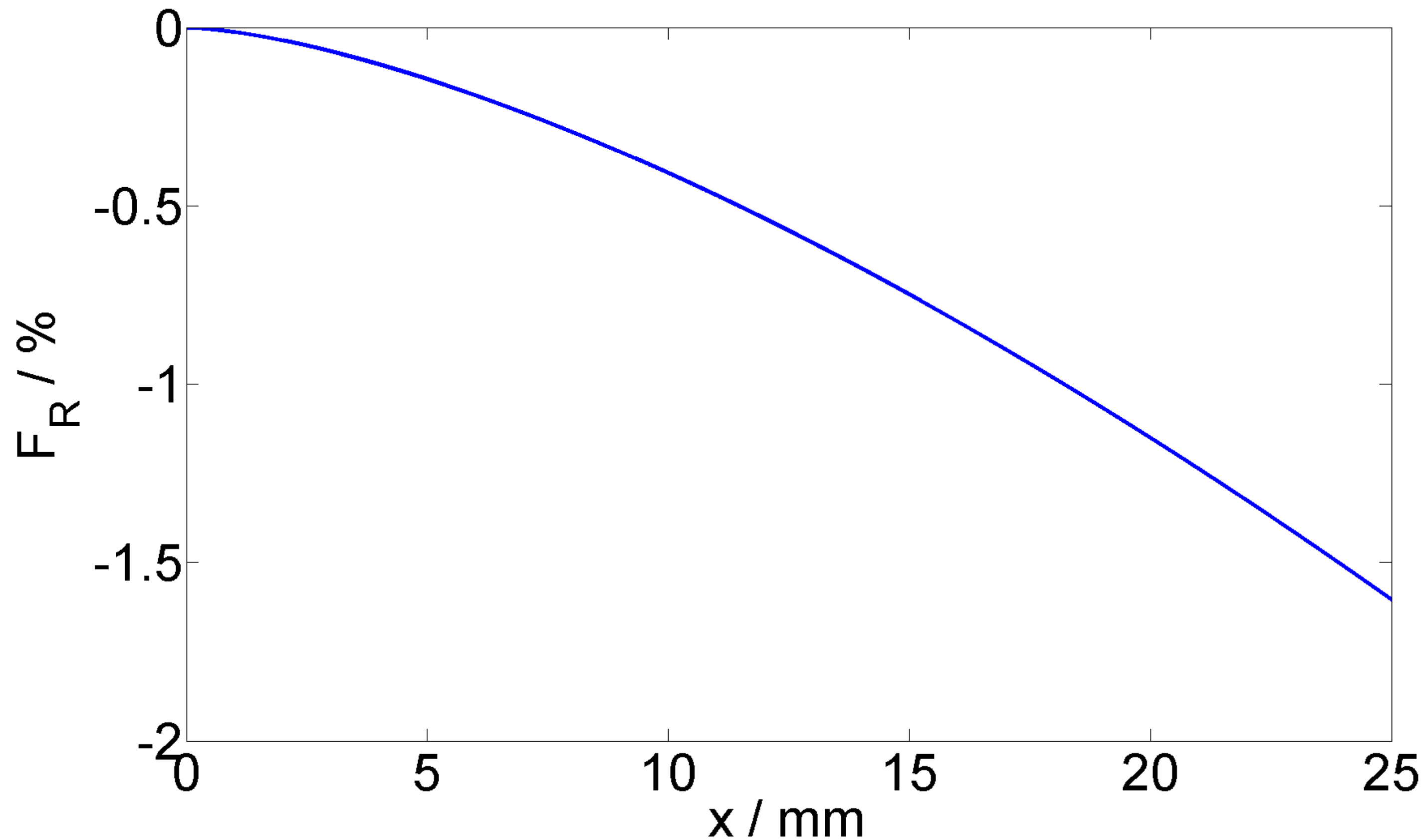


$$F_{\mathrm{L}}(x) = p_0 V_0 \cdot \frac{2\sqrt{2rx - x^2}}{\pi d(2r-d) - r^2 \arccos\frac{r-x}{r} + (r-x)\sqrt{2rx - x^2}}$$

Aufgabe 1 c) Fehleruntersuchung

- Annahme: $F_{\mathsf{L}}(x)$ entspricht wahrem Wert
- Vereinfachung durch Betrachtung der angenäherten Kennlinie führt zu Fehlern
- →Fehlerabschätzung

Aufgabe 1 d) Skizze des Fehlers



Fragen?

Inhalt der Übung

1. Messfehler
2. Kurvenanpassung
3. Stationäres Verhalten von Messsystemen
4. Zufällige Messfehler
5. Korrelationsmesstechnik
6. Erfassung amplituden-/frequenzanaloger Signale

Organisatorisches

Theorie

Aufgaben

Theorie: Kurvenanpassung (1)

- Modellbildung des Systems $\Rightarrow$ analytische Kennlinie
- In der Realität bei komplexen Systemen oftmals nicht möglich

Aufzeichnung von Paaren aus Eingangs- und Ausgangsgröße

$$u \longrightarrow \boxed{\text{Messsystem}} \longrightarrow y$$

$$\begin{array}{cc} u_1 & y_1 \\ u_2 & y_2 \\ u_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

$\Downarrow$

Ziel: Erzeugung einer Kennlinie, die entweder

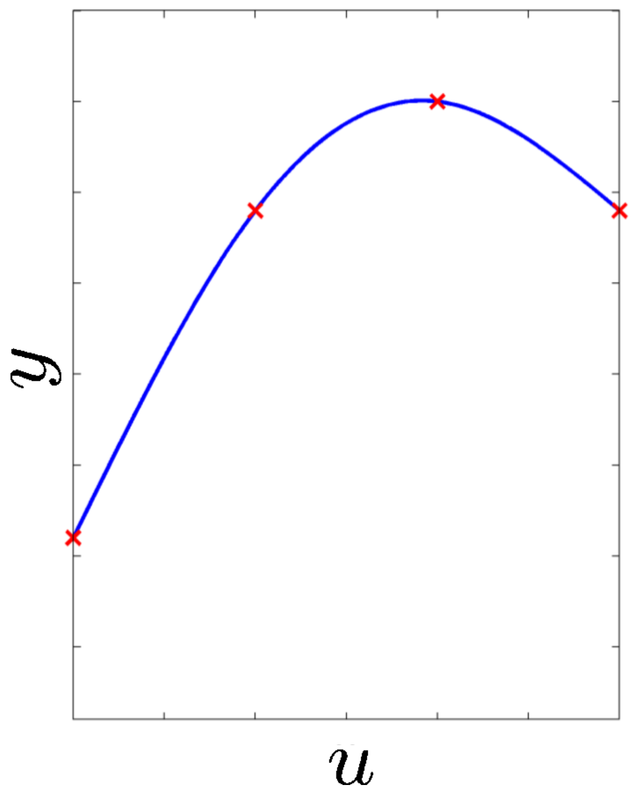
a) exakt durch die Stützstellen geht (Interpolation)

oder

b) „möglichst nah um die Stützstellen herum läuft“ (Approximation)

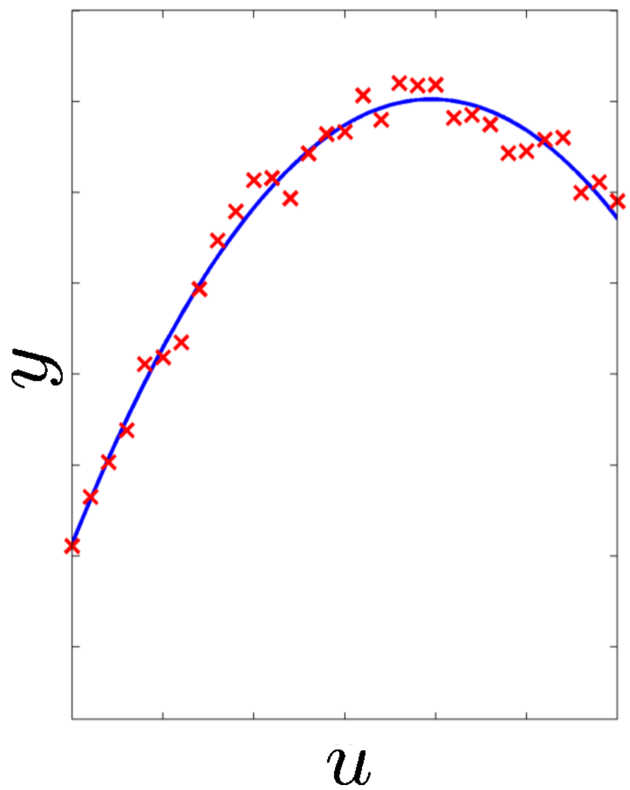
Theorie: Kurvenanpassung (2)

Interpolation



präzise Wertepaare

Approximation



verrauschte Wertepaare

Fragen?

Theorie: Kurvenanpassung (Approximation)

Karlsruher Institut für Technologie

- Kurve nähert Messpunkte an
- In Vorlesung behandelt:
  - Least-Squares Schätzer
- Vorteile :
  - Mittelwertfreie Fehler werden unterdrückt
  - Beliebige Basisfunktionen verwendbar
    (solange linear unabhängig voneinander)
  - Modellordnung unabhängig von Stützstellenanzahl

Theorie: Least-Squares Schätzer (1)

- **Vorgehen:**
  - **Aufstellen des Signalmodells**

$$y(u) = \Phi_0(u) \cdot a_0 + \Phi_1(u) \cdot a_1 + \ldots \Phi_n(u) \cdot a_n$$

$\Phi_i(u)$: Beliebige Basisfunktionen

  - **Aufstellen des Approximationsansatzes**

gleiche Basisfunktion

gleiches Mess-wertepaar

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{y}_0 \\ \vdots \\ \hat{y}_{n-1} \end{bmatrix}}_{\text{Mess-vektor } \mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi_0(u_0) & \cdots & \Phi_{m-1}(u_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_0(u_{n-1}) & \cdots & \Phi_{m-1}(u_{n-1}) \end{bmatrix}}_{\text{Beobachtungsmatrix } \Psi} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ \cdots \\ a_{m-1} \end{bmatrix}}_{\text{Parameter-vektor } \mathbf{a}}$$

Theorie: Least-Squares Schätzer (2)

- **Vorgehen:**
  - **Aufstellen des Signalmodells**
  - **Aufstellen des Approximationsansatzes**
  - **Lösen nach dem Parametervektor**

$$\mathbf{a} = \underbrace{\left(\Psi^\top \Psi\right)^{-1} \Psi^\top}_{\text{Moore Penrose Inverse}} \mathbf{y}$$

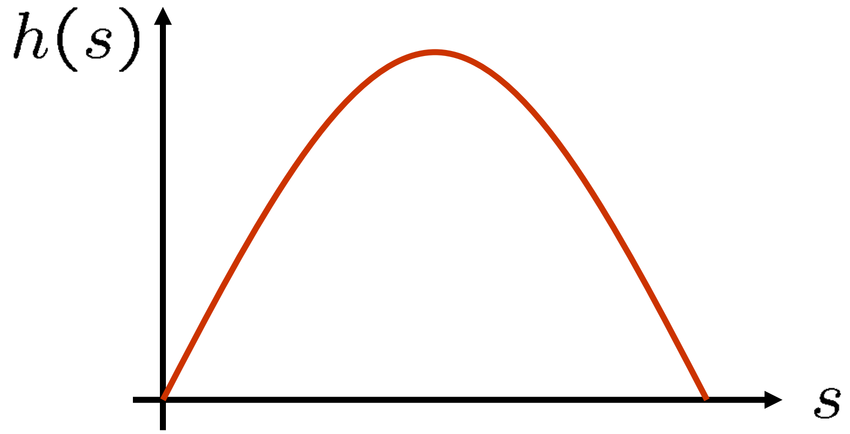
Fragen?

Organisatorisches

Theorie

Aufgaben

Aufgabe 2: Least-Squares Schätzer



a) Geben Sie allgemein den mathematischen Zusammenhang der Höhe h in Abhängigkeit des Weges s mit Hilfe allgemeiner Parameter a, b und c an!

b) Führen Sie eine Approximation der Parameter aus a) mittels eines Least-Squares Schätzers durch. Geben Sie das approximierte Polynom in der Form $\hat{h}(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots$ an.

Aufgabe 2

- Matlab-Demo
- Fragen?

Organisatorisches

Theorie

Aufgaben

Theorie: Kurvenanpassung (Interpolation)

- Kurve geht exakt durch Messpunkte durch
- In Vorlesung behandelt:
  - Lagrange-/Newton (globale Polynome)
  - Spline-Interpolation (lokale Polynome)
  - Kennfeld-Interpolation (mehrdimensionale Erweiterung)
- Vorteile:
  - Kein direktes Signalmodell erforderlich
  - Interpolierte Funktion geht durch Stützstellen
- Nachteile:
  - Bei globalen Polynomansätzen steigt Modellordnung mit der Anzahl der Stützstellen

Theorie: Globale Polynomansätze

- Gesucht $\tilde{y} = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 u + \tilde{a}_2 u^2 + ... + \tilde{a}_{N-1} u^{N-1}$
  - Mit N Stützstellen kann ein exakt bestimmtes LGS aufgestellt werden, um die Koeffizienten eindeutig zu bestimmen.
  - Lagrange-Verfahren
    - Hinzunahme weiterer Stützstelle → Neuberechnung aller Lagrange-Polynome und somit aller Koeffizienten
  - Newton-Verfahren
    - Hinzunahme weiterer Stützstelle → Rekursiver Ansatz möglich, weniger rechenintensiv als bei Lagrange-Verfahren

Theorie: Newton-Interpolation (1)

- Gesucht: $\tilde{y}_\mathrm{N} = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 u + \tilde{a}_2 u^2 + \ldots + \tilde{a}_{N-1} u^{N-1}$

- Ansatz: $\tilde{y}_\mathrm{N} = a_0 + a_1(u - u_0) + a_2(u - u_0)(u - u_1) \ldots + a_{N-1}(u - u_0) \ldots (u - u_{N-2})$

Theorie: Newton-Interpolation (2)

- Ansatz: $\tilde{y}_\mathrm{N} = a_0 + a_1(u-u_0) + a_2(u-u_0)(u-u_1)\ldots$
  $$+ a_{N-1}(u-u_0)\ldots(u-u_{N-2})$$
- Differenzenschema

$$\Delta^0 y_k = y_k \qquad \Delta^{i+1} y_k = \frac{\Delta^i y_{k+1} - \Delta^i y_k}{u_{k+i+1} - u_k}, \quad a_i = \Delta^i y_0$$

$$\begin{array}{c|ccccccc}
u & y & & \Delta y & & \Delta^2 y & & \Delta^3 y \\
\hline
u_0 & \Delta^0 y_0 = y_0 & & & & & & \\
 & & \rangle & \Delta y_0 = \frac{y_1 - y_0}{u_1 - u_0} & & & & \\
u_1 & \Delta^0 y_1 = y_1 & & & \rangle & \Delta^2 y_0 = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{u_2 - u_0} & & \\
 & & \rangle & \Delta y_1 = \frac{y_2 - y_1}{u_2 - u_1} & & & \rangle & \Delta^3 y_0 = \frac{\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0}{u_3 - u_0} \\
u_2 & \Delta^0 y_2 = y_2 & & & \rangle & \Delta^2 y_1 = \frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{u_3 - u_1} & & \\
 & & \rangle & \Delta y_2 = \frac{y_3 - y_2}{u_3 - u_2} & & & & \\
u_3 & \Delta^0 y_3 = y_3 & & & & & &
\end{array}$$

Theorie: Newton-Interpolation (2)

Karlsruher Institut für Technologie

- Ansatz: $$\tilde{y}_\mathrm{N} = a_0 + a_1(u-u_0) + a_2(u-u_0)(u-u_1)\ldots + a_{N-1}(u-u_0)\ldots(u-u_{N-1})$$
- Differenzenschema

$$\Delta^0 y_k = y_k \qquad \Delta^{i+1} y_k = \frac{\Delta^i y_{k+1} - \Delta^i y_k}{u_{k+i+1} - u_k}, \quad a_i = \Delta^i y_0$$

$$\begin{array}{c|llll}
u & y & \Delta y & \Delta^2 y & \Delta^3 y \\
\hline
u_0 & \Delta^0 y_0 = y_0 & & & \\
 & & \rangle\, \Delta y_0 = \frac{y_1 - y_0}{u_1 - u_0} & & \\
u_1 & \Delta^0 y_1 = y_1 & & \rangle\, \Delta^2 y_0 = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{u_2 - u_0} & \\
 & & \rangle\, \Delta y_1 = \frac{y_2 - y_1}{u_2 - u_1} & & \rangle\, \Delta^3 y_0 = \frac{\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0}{u_3 - u_0} \\
u_2 & \Delta^0 y_2 = y_2 & & \rangle\, \Delta^2 y_1 = \frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{u_3 - u_1} & \\
 & & \rangle\, \Delta y_2 = \frac{y_3 - y_2}{u_3 - u_2} & & \\
u_3 & \Delta^0 y_3 = y_3 & & &
\end{array}$$

Theorie: Newton-Interpolation (2)

- Ansatz: $\tilde{y}_\mathrm{N} = a_0 + a_1(u-u_0) + a_2(u-u_0)(u-u_1)\ldots + a_{N-1}(u-u_0)\ldots(u-u_{N-2})$
- Differenzenschema

$$\Delta^0 y_k = y_k \qquad \Delta^{i+1} y_k = \frac{\Delta^i y_{k+1} - \Delta^i y_k}{u_{k+i+1} - u_k}, \quad a_i = \Delta^i y_0$$

u	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
u_0	$\Delta^0 y_0 = y_0$			
		$\rangle\ \Delta y_0 = \frac{y_1 - y_0}{u_1 - u_0}$		
u_1	$\Delta^0 y_1 = y_1$		$\rangle\ \Delta^2 y_0 = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{u_2 - u_0}$	
		$\rangle\ \Delta y_1 = \frac{y_2 - y_1}{u_2 - u_1}$		$\rangle\ \Delta^3 y_0 = \frac{\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0}{u_3 - u_0}$
u_2	$\Delta^0 y_2 = y_2$		$\rangle\ \Delta^2 y_1 = \frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{u_3 - u_1}$	
		$\rangle\ \Delta y_2 = \frac{y_3 - y_2}{u_3 - u_2}$		
u_3	$\Delta^0 y_3 = y_3$			

Theorie: Newton-Interpolation (3)

Karlsruher Institut für Technologie

- Gesucht: $\tilde{y}_\mathrm{N} = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 u + \tilde{a}_2 u^2 + \ldots + \tilde{a}_{N-1} u^{N-1}$

- Ansatz: $$\tilde{y}_\mathrm{N} = a_0 + a_1(u - u_0) + a_2(u - u_0)(u - u_1)\ldots + a_{N-1}(u - u_0)\ldots(u - u_{N-2})$$

- Koeffizienten a_i aus Differenzenschema
- Koeffizienzen $\tilde{a}_i$ durch Ausmultiplizieren des Ansatzes

Theorie: Newton-Interpolation (4)

- Hinzunahme weiterer Stützstelle:
  - a) Erweitern des Differenzenschemas
  - b) Rekursiver Ansatz (z.B. wenn vorher Lagrange verwendet)

Neues Polynom — Zusätzlicher Koeffizient

$$\underbrace{\tilde{y}_{\mathrm{N},N}(u)}_{\text{Neues Polynom}} = \underbrace{\tilde{y}_{\mathrm{N},N-1}(u)}_{\text{Vorgänger Polynom}} + \underbrace{a_{N-1}}_{\text{Zusätzlicher Koeffizient}}(u-u_0)(u-u_1)\dots(u-u_{N-2})$$

Vorgänger Polynom

$$u = u_N$$

Neuer Stützstellenwert — Wert des alten Polynoms an Stützstelle

$$a_{N-1} = \frac{y_N(u_N) - \tilde{y}_{\mathrm{N},N-1}(u_N)}{(u_N-u_0)(u_N-u_1)\dots(u_N-u_{N-2})}$$

Neue Stützstelle

Theorie: Lagrange-Interpolation

- Gesucht: $\tilde{y}_\mathsf{L} = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 u + \tilde{a}_2 u^2 + \ldots + \tilde{a}_{N-1} u^{N-1}$

- Ansatz: $\tilde{y}_\mathsf{L} = y_0 L_0(u) + y_1 L_1(u) + \ldots + y_{N-1} L_{N-1}(u)$

- Lagrange Polynome:

$$L_i(u) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(u-u_j)}{(u_i-u_j)}$$

Organisatorisches

Theorie

Aufgaben

Aufgabe 3

Index	0	1	2
u_i	1	2	4
y_i	0	10	20

a) Berechnen Sie das Interpolationspolynom $y_{\mathrm{N}}(u)$ mit Hilfe des Newton-Interpolationsverfahrens.

b) Berechnen Sie das Interpolationspolynom $y_{\mathrm{L}}(u)$ mit Hilfe des Lagrange-Interpolationsverfahrens.

c) Die Kennlinie soll verbessert werden. Dazu wurde eine weitere Messung durchgeführt und man erhält $y(u_3 = 3) = 15$. Bestimmen Sie das neue Interpolationspolynom.

Aufgabe 3

- Fragen?
- MATLAB

Viel Spaß in der Vorlesung!

Nächste Übung:

20.11.2014, 08.00 Uhr, MTI