Prof. Dr.-Ing. F. Puente León
Institut für Industrielle Informationstechnik
Karlsruher Institut für Technologie
www.iiit.kit.edu

2. Übung Messtechnik (20.11.14)

Aufgabe 3: Interpolation

Zur Bestimmung der Kennline $y(u)$ eines Kraftsensors wurden folgende Werte bestimmt:

Index i	0	1	2
u_i	1	2	4
$y_i = y(u_i)$	0	10	20

a) Berechnen Sie das Interpolationspolynom $\tilde{y}_{\mathrm{N}}(u) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1\,u + \tilde{a}_2\,u^2$ mit Hilfe des Newton-Interpolationsverfahrens. Wie lauten die Parameter $\tilde{a}_0$, $\tilde{a}_1$ und $\tilde{a}_2$? Alle Zwischenergebnisse sind auf 3 Nachkommastellen zu runden.

Hinweis: Bei nicht-äquidistantem Stützstellenabstand ergeben sich die Werte im Differenzenschema zu $\Delta^0 y_k = y_k,\ \Delta^{i+1} y_k = \frac{\Delta^i y_{k+1} - \Delta^i y_k}{u_{k+i+1} - u_k},\ a_i = \Delta^i y_0,\ k = 0, 1, 2.$

b) Berechnen Sie das Interpolationspolynom $\tilde{y}_{\mathrm{L}}(u) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1\,u + \tilde{a}_2\,u^2$ mit Hilfe des Lagrange-Interpolationsverfahrens. Wie lauten die Parameter $\tilde{a}_0$, $\tilde{a}_1$ und $\tilde{a}_2$? Alle Zwischenergebnisse sind auf 3 Nachkommastellen zu runden.

c) Die Kennline soll verbessert werden. Dazu wurde eine weitere Messung durchgeführt und man erhält $y(u_3 = 3) = 15$. Bestimmen Sie das neue Interpolationspolynom $\tilde{y}_2(u) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1\,u + \tilde{a}_2\,u^2 + \tilde{a}_3\,u^3$.

Die Bestimmung der Kennline soll nun mittels der Spline-Interpolation erfolgen. Es stehen folgende Werte zur Verfügung:

Index i	0	1	2	3
u_i	1	2	3	4
$y_i \approx y(u_i)$	0	10	15	20

d) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem zur Berechnung der Werte $\hat{y}_j''$, $j = 1, 2$ auf, welche zur Berechnung der Spline-Polynome $s_j(u) = a_j(u - u_j)^3 + b_j(u - u_j)^2 + c_j(u - u_j) + d_j$ benötigt werden. Welche Werte besitzen y_0'' und y_3''? Berechnen Sie anschließend für $j = 0, 1$ die Werte a_j, b_j, c_j, d_j und daraus $s_j(u)$, $j = 0, 1$.

e) Was ergibt ein Vergleich der 2. Ableitungen von $s_0(u)$ und $s_1(u)$ an der Stelle $u_1 = 2$? Des Weiteren sei die physikalische Kennlinie des Kraftsensors über die Werte y_i fehlerfrei abgetastet worden, $y_i = y(u_i)$. Stimmt unter dieser Annahme die 1. Ableitung der physikalischen Kennlinie mit den 1. Ableitungen der Spline-Polynome an den Stützstellen u_0, u_1, u_2, u_3 überein?

f) Es wird ein Vergleich der Spline-Interpolation mit der Newton-Interpolation vorgenommen. Stimmen die beiden Kurven überein? Was ergibt sich speziell für die Funktionswerte und die ersten beiden Ableitungen an den Stützstellen?

Aufgabe 4: Verifikation der Interpolationsfunktion

Bei einem neuartigen Messgerät ist die Eingangsgröße l eine Länge und die eigentliche Messgröße V ein Volumen. Aus den gemessenen Wertepaaren

l / mm	0	2	3	4
V / mm^3	0	2588	3503	497

wurde folgendes Interpolationspolynom als Kennlinie ermittelt:

$$V(l) = -458{,}5417\, l^3 + 2166{,}3750\, l^2 - 1204{,}5833\, l\,. \tag{1}$$

Ist dieses Ergebnis physikalisch plausibel? Untersuchen Sie die Extrem- und Wendepunkte der Interpolationsfunktion.

Aufgabe 5: Spline-Interpolation

In einem Versuch wurden zwei Messgeräte vermessen, wobei Messgerät 1 in einer Variante mit einem zusätzlichen Messpunkt vermessen wurde (siehe Messgerät 1b). In Tab. 1 sind die aufgezeichneten Daten zusammengefasst; y entspricht dabei dem Anzeigewert und x dem Messwert.

Messgerät	y	1	2	3	3,5	4,5
1	x_1	1	-	2,5	5	-
1b	x_1	1	1,8	2,5	5	-
2	x_2	0,5	-	2,5	-	5

Tabelle 1: Zuvor aufgezeichnete Messdaten der zwei Messgeräte.

In einer Auswertung wurde unter Anderem eine Spline-Interpolation für alle drei Messkurven (Messgerät 1 ohne $y = 2$, Messgerät 1 mit $y = 2$ (entspricht 1b) und Messgerät 2) durchgeführt, was zu 7 verschiedenen Splines führte. Die Koeffizienten eines Splines lauten dabei

$$a_i = -\frac{17}{180}\,, \qquad b_i = 0\,, \qquad c_i = \frac{371}{240} \qquad d_i = 1\,.$$

Zu welchem der 7 Splines gehören diese Koeffizienten? Begründen Sie, ohne eine Spline-Interpolation durchzuführen.

Aufgabe 6: Kennfeld-Interpolation

Für ein Motorkennfeld (Abb. 1) wurden 16 Stützstellen durch Messung am Motorenprüfstand ermittelt. Zur Motorsteuerung sollen nun weitere Zwischenwerte durch Interpolation bestimmt werden.

a) Berechnen Sie durch bilineare Interpolation den Zwischenwert $y(u_5, z_5)$ des Kennfeldes für $u_5 = 2{,}5$ und $z_5 = 2{,}7$. Benutzen Sie hierbei die Variablentransformationen $\Delta_{\mathrm{n},i} u = \frac{u-u_i}{u_{i+1}-u_i}$ und $\Delta_{\mathrm{n},j} z = \frac{z-z_j}{z_{j+1}-z_j}$ im Intervall $u \in [u_i, u_{i+1}]$, $z \in [z_j, z_{j+1}]$.

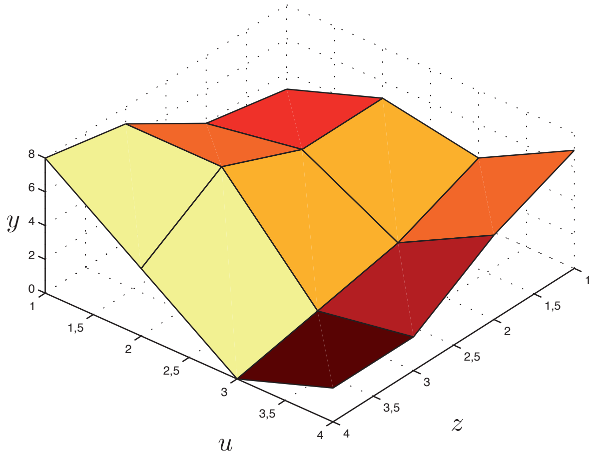

Abbildung 1: Gemessenes Motorkennfeld.

$y(u_i, z_i)$	$u_1 = 1$	$u_2 = 2$	$u_3 = 3$	$u_4 = 4$
$z_1 = 1$	3	4	7	8
$z_2 = 2$	5	5	7	4
$z_3 = 3$	4	2	1	0
$z_4 = 4$	7	5	2	2

Tabelle 2: Messwerte des Kennfeldes.

Eine biquadratische Interpolation ergab für das Interpolationspolynom

$$\tilde{y}_{\mathrm{b}}(\Delta_{\mathrm{n},2}u, \Delta_{\mathrm{n},2}z) = \sum_{k=0}^{2}\sum_{l=0}^{2} a_{kl}(\Delta_{\mathrm{n},2}u)^k(\Delta_{\mathrm{n},2}z)^l$$

folgende Koeffizienten:

$$\mathbf{A} = (a_{kl}) = \begin{bmatrix} 5 & 4{,}5 & -2{,}5 \\ -6 & -6{,}5 & 3 \\ 3 & 1 & -0{,}5 \end{bmatrix}$$

b) Interpolieren Sie hiermit den Zwischenwert $y(2{,}5; 2{,}7)$

c) Aufgrund der höheren Ordnung wird $\tilde{y}_{\mathrm{b}}$ als korrekter Wert angesehen. Wie groß ist der relative Fehler $F_{\mathrm{R}}(u, z)$, wenn die Berechnung der Zwischenwerte im Bereich $u \in [2, 3]$, $z \in [2, 3]$ gemäß Teilaufgabe **a)** durchgeführt und auf die Berechnung $\tilde{y}_{\mathrm{b}}$ in Teilaufgabe **b)** bezogen wird, im Interpolationspunkt $y(2{,}5; 2{,}7)$?

Aufgabe 7: Kennlinienfehler und Justierung

Die nichtlineare Kennlinie eines Beschleunigungssensors

$$y(u) = 0{,}4\,u^2 + 2$$

sei gegeben. Der spezifizierte Messbereich erstreckt sich von $u_{\mathrm{a}} = 0$ bis $u_{\mathrm{e}} = 4$.

a) Berechnen Sie die ideale Kennlinie $y_{\mathrm{i}}(u)$ bei Fixpunktjustierung.

b) Bestimmen Sie den relativen Kennlinienfehler bezogen auf die Anzeigespanne $F_{\mathrm{r}}(u)$.

c) Berechnen Sie das Maximum des Betrages des absoluten Fehlers $|F_{\mathrm{A}}(u)| = |y(u) - y_{\mathrm{i}}(u)|$.

d) Durch welches Justierverfahren kann der Maximalwert des absoluten Kennlinienfehlers $F_{\mathrm{A,max}}$ bei unveränderter idealer Empfindlichkeit S_{i} verringert werden? Wie lautet die resultierende ideale Kennlinie und wie groß wird der daraus resultierende absolute Kennlinienfehler $\tilde{F}_{\mathrm{A,max}}$? Führt dieses Vorgehen immer zum Ziel?