Karlsruher Institut für Technologie

2. Übung Messtechnik

WS 2014/15

Fragen zur letzten Übung?

Frage 1

$$y = ax + b$$

x	1	2
y	3	7

- Wie lautet b nach dem Lagrange-Verfahren?

$$y = 4x - 1$$

Inhalt der Übung

1. Messfehler
2. Kurvenanpassung
3. Stationäres Verhalten von Messsystemen
4. Zufällige Messfehler
5. Korrelationsmesstechnik
6. Erfassung amplituden-/frequenzanaloger Signale

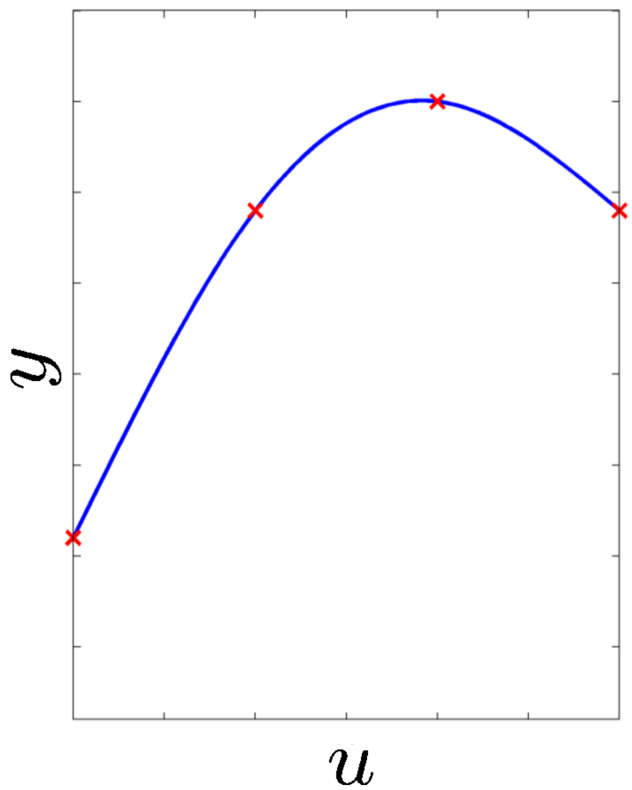
Organisatorisches

Theorie

Aufgaben

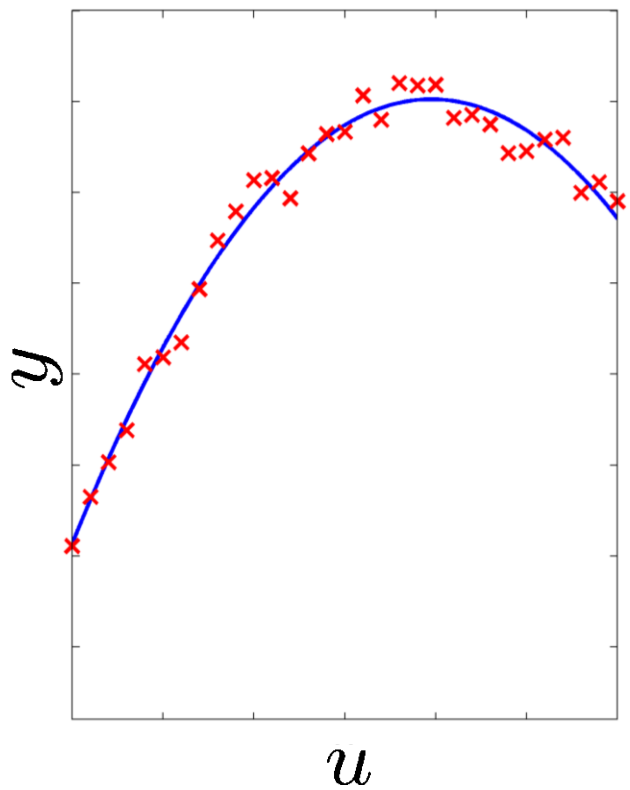
Theorie: Kurvenanpassung (Wdh.)

Interpolation



präzise Wertepaare

Approximation



verrauschte Wertepaare

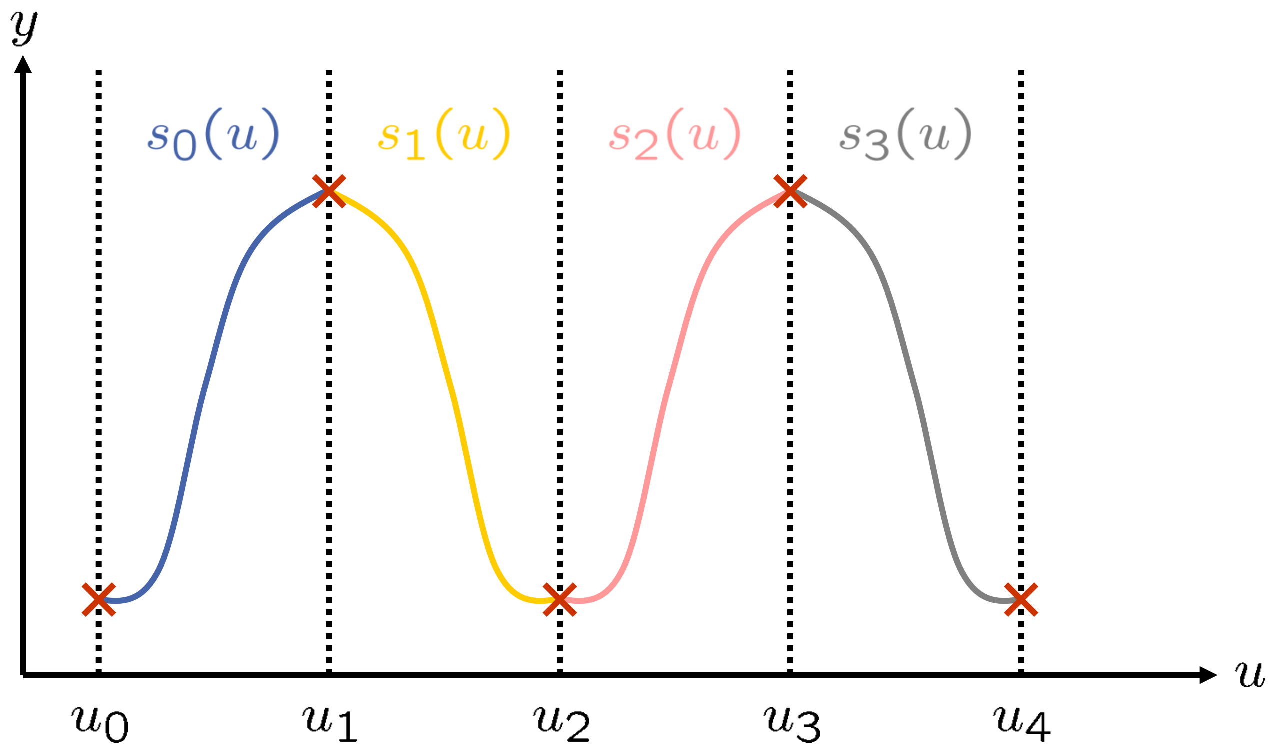
Theorie: Kurvenanpassung (Wdh.)

- Verfahren aus Vorlesung
  - Approximation
    - Least-Squares Schätzer (Übung 1)
  - Interpolation
    - Newton-/Lagrange-Verfahren (Übung 1)
    - Splines
    - Kennfeld-Interpolation (bilineare Interpolation)

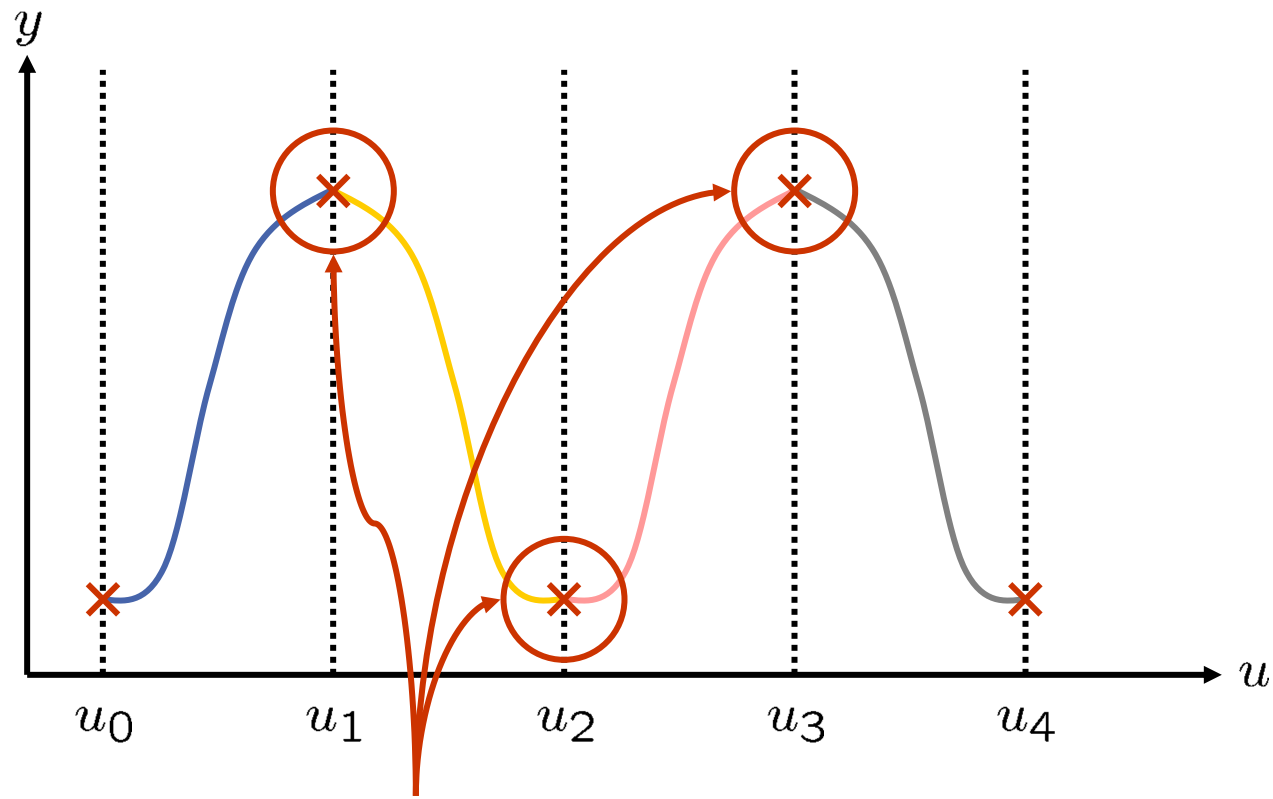
Theorie: Splines (1)

- Bisherige Ansätze global, d.h. **eine** Interpolationsfunktion für gesamten Wertebereich
- Splines lokal, d.h. Interpolationsfunktion ist abschnittsweise definiert
- Pro Abschnitt einfachere Funktion (Spline) ansetzbar (z.B. Polynom niedrigen Grades)
- Übergänge der Teilfunktionen
  - Interpolationsbedingung → stetige Interpolationsfunktion
  - Stetige Ableitungen → „glatte“ Interpolationsfunktion

Theorie: Splines (2)



Theorie: Splines (2)



Stetigkeitsforderungen in Übergangspunkten

Theorie: Splines (3)

- Kubische Spline-Interpolation (Polynome 3. Grades als Splines)

$$s_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$$

$$\Downarrow$$

$$s_i(x) = \tilde{a}_i x^3 + \tilde{b}_i x^2 + \tilde{c}_i x + \tilde{d}_i$$

Theorie: Splines (4)

$$s_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$$

- Koeffizienten :

$$\begin{aligned}
a_i &= \frac{1}{6h_i}\left(y''_{i+1} - y''_i\right),\\
b_i &= \frac{1}{2}\, y''_i\,,\\
c_i &= \frac{1}{h_i}\left(y_{i+1} - y_i\right) - \frac{1}{6}\, h_i\left(y''_{i+1} + 2y''_i\right)\\
d_i &= y_i\,.
\end{aligned}$$

- Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} 2(h_0{+}h_1) & h_1 & 0 & & \cdots & 0 \\ h_1 & 2(h_1{+}h_2) & h_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & h_{n-3} & 2(h_{n-3}{+}h_{n-2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y''_1 \\ y''_2 \\ \vdots \\ y''_{n-2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{6}{h_1}(y_2 - y_1) - \frac{6}{h_0}(y_1 - y_0) \\ \frac{6}{h_2}(y_3 - y_2) - \frac{6}{h_1}(y_2 - y_1) \\ \vdots \\ \frac{6}{h_{n-2}}(y_{n-1} - y_{n-2}) - \frac{6}{h_{n-3}}(y_{n-2} - y_{n-3}) \end{bmatrix}.$$

Organisatorisches

Theorie

Aufgaben

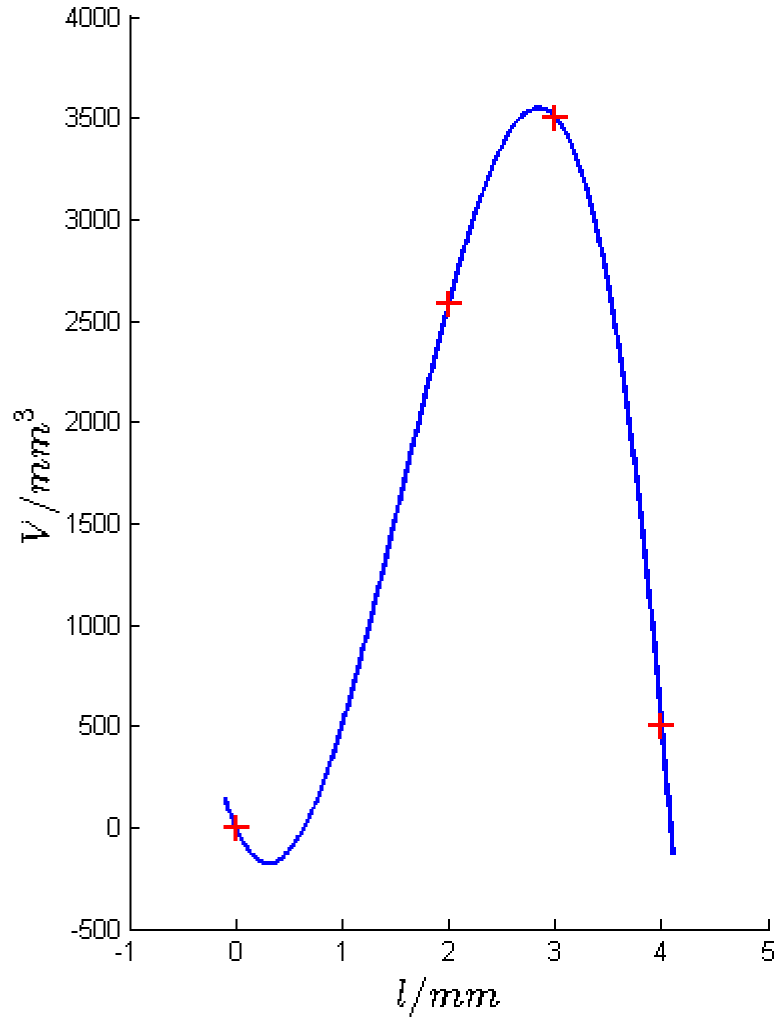
Aufgabe 4: Verifikation der Interpolationsfunktion

- Wertepaare eines Messgeräts:

l / mm	0	2	3	4
V / mm^3	0	2588	3503	497

- Kennlinie:

$$V(l) = -458{,}5417\, l^3 + 2166{,}3750\, l^2 - 1204{,}5833\, l$$



Aufgabe 5: Spline-Interpolation

- Wertepaare der Messgeräte:

Messgerät	y	1	2	3	3,5	4,5
1	x_1	1	-	2,5	5	-
1b	x_1	1	1,8	2,5	5	-
2	x_2	0,5	-	2,5	-	5

- Koeffizienten eines Splines:

$$a_i = -\frac{17}{180}, \qquad b_i = 0, \qquad c_i = \frac{371}{240} \qquad d_i = 1$$

- Welcher der 7 Splines?

Frage 2

- 2 Vorteile und 2 Nachteile vom Newton-Verfahren gegenüber Least-Squares?

- Vorteile
  - Kein Signalmodell nötig
  - Stützstellen werden exakt durchlaufen

- Nachteile
  - Ungeeignet für verrauschte Messwertpaare
  - Modellordnung steigt bei steigender Anzahl von Messwertpaaren

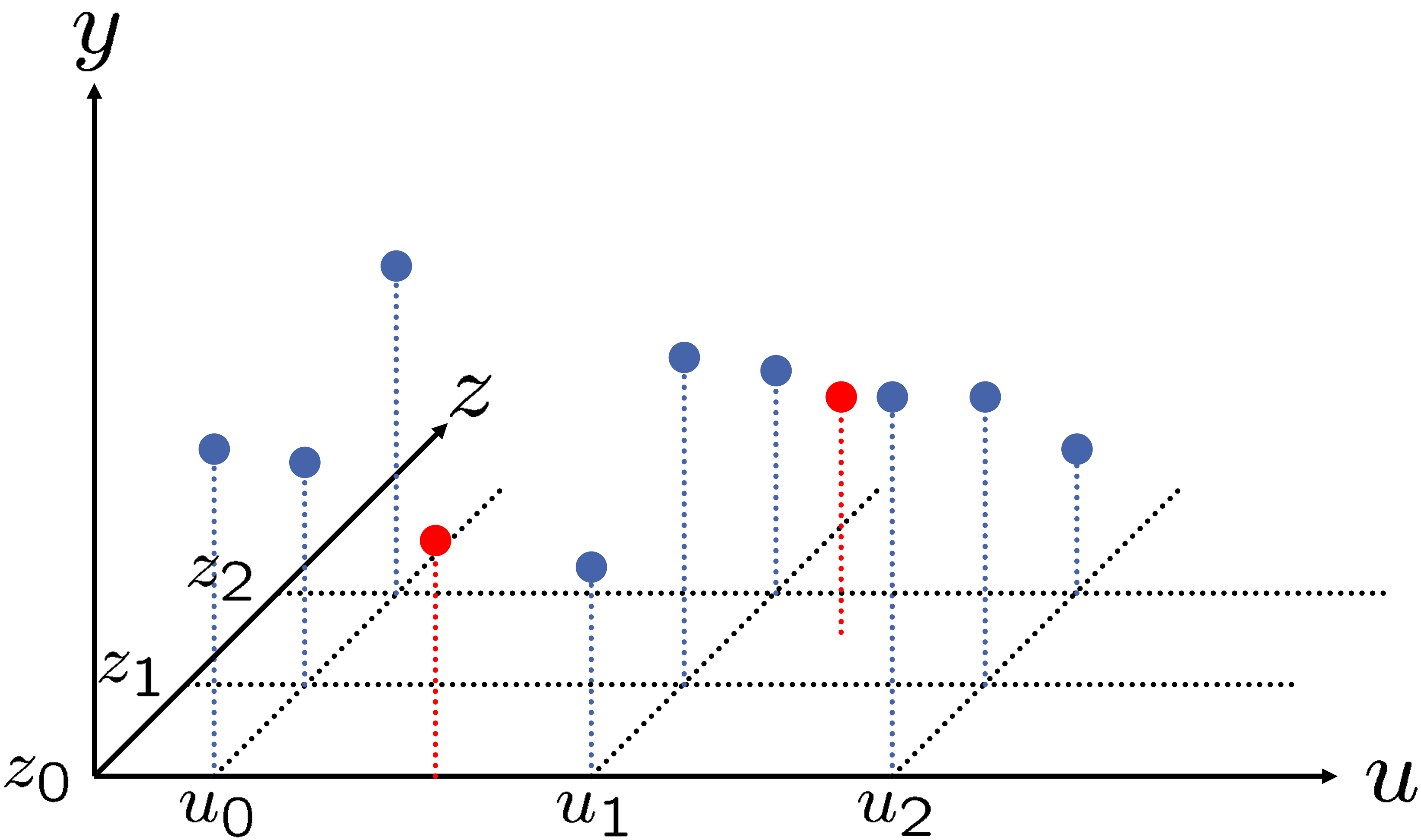
Organisatorisches

Theorie

Aufgaben

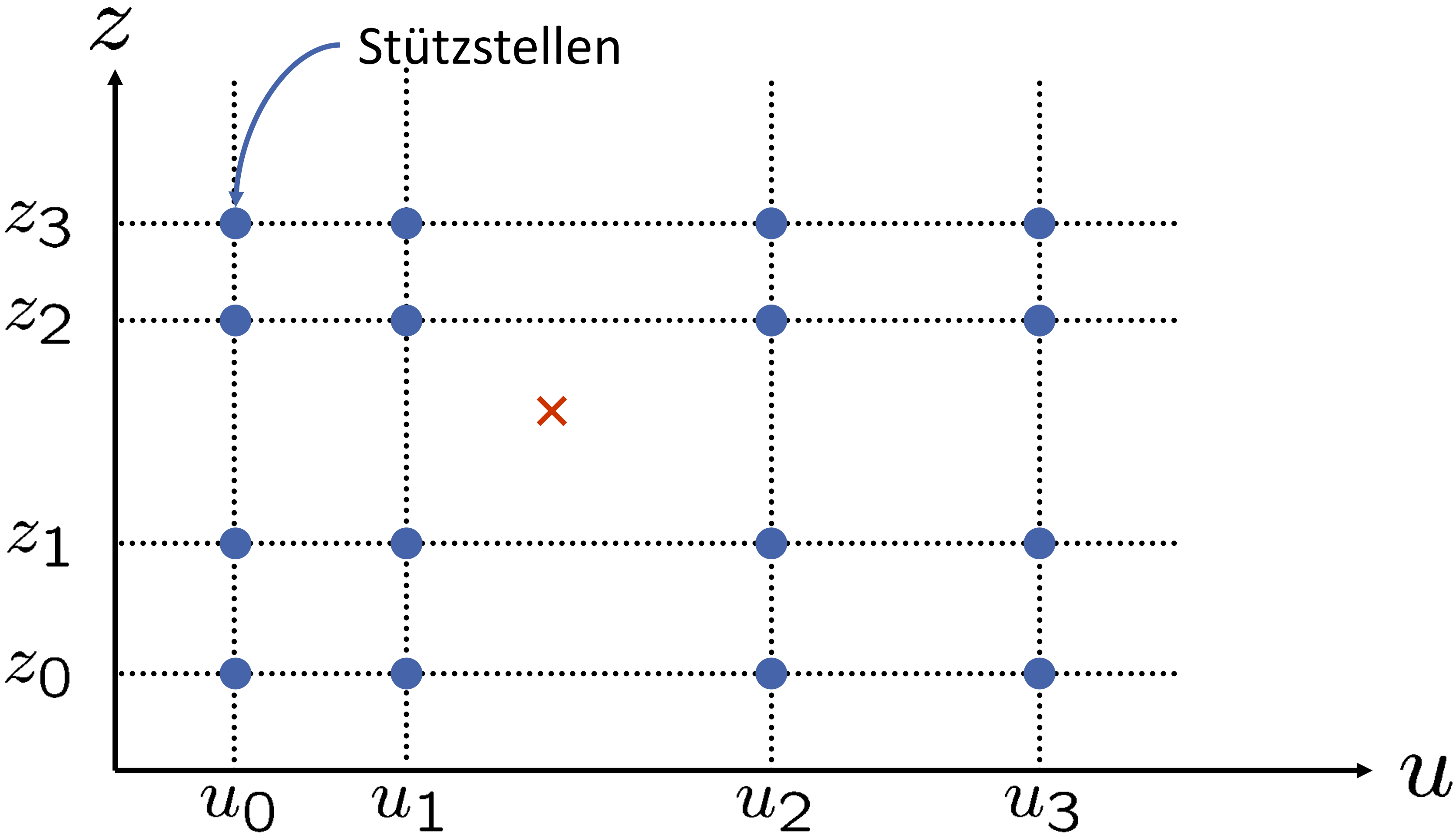
Theorie: Kennfeld-Interpolation (1)

- Mehrdimensionale Erweiterung des Interpolationsproblems



Theorie: Kennfeld-Interpolation (2)

- Mehrdimensionale Erweiterung des Interpolationsproblems



Theorie: Kennfeld-Interpolation (3)

- Gleiches Vorgehen wie in einer Dimension:
  - Ansatz für Interpolationsfunktion auswählen
  - Gleichungssystem aufstellen, um die freien Parameter der Interpolationsfunktion festzulegen
  - Gleichungssystem lösen

Theorie: Kennfeld-Interpolation (4)

- Beispiel: bilineare Interpolation
- Allgemeiner Polynomansatz vom Grad N:

$$\tilde{y}(u,z) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} a_{ij} \cdot u^i \cdot z^j$$

- Bilinear: $N = 1$

$$\tilde{y}(u,z) = a_{00} + a_{01}z + a_{10}u + a_{11} \cdot u \cdot z$$

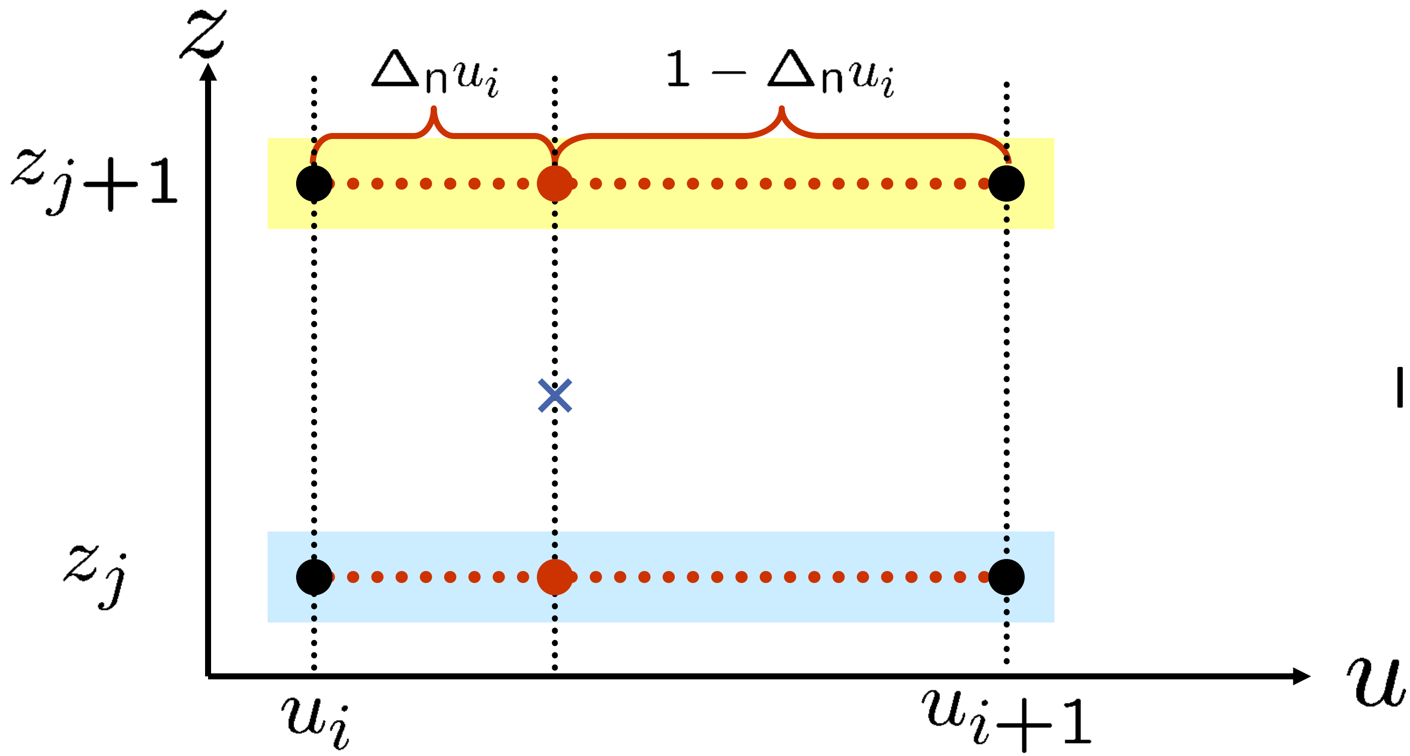
- Vier Unbekannte → vier Gleichungen nötig
  - Interpolationsbedingung in „umliegenden“ Stützstellen

$$\begin{array}{rcl|rcl} \tilde{y}(u_i, z_j) & = & y(u_i, z_j) & \tilde{y}(u_i, z_{j+1}) & = & y(u_i, z_{j+1}) \\ \tilde{y}(u_{i+1}, z_j) & = & y(u_{i+1}, z_j) & \tilde{y}(u_{i+1}, z_{j+1}) & = & y(u_{i+1,z_j+1}) \end{array}$$

Theorie: Kennfeld-Interpolation (8)

- Anschauliche Interpretation

$$\tilde{y}(u,z) = (1-\Delta_{\mathrm{n}} z_j)\left[\ (1-\Delta_{\mathrm{n}} u_i)\cdot y_{i,j} \ + \ \Delta_{\mathrm{n}} u_i \cdot y_{i+1,j}\ \right] +$$
$$\Delta_{\mathrm{n}} z_j \left[\ (1-\Delta_{\mathrm{n}} u_i)\cdot y_{i,j+1} \ + \ \Delta_{\mathrm{n}} u_i \cdot y_{i+1,j+1}\ \right]$$

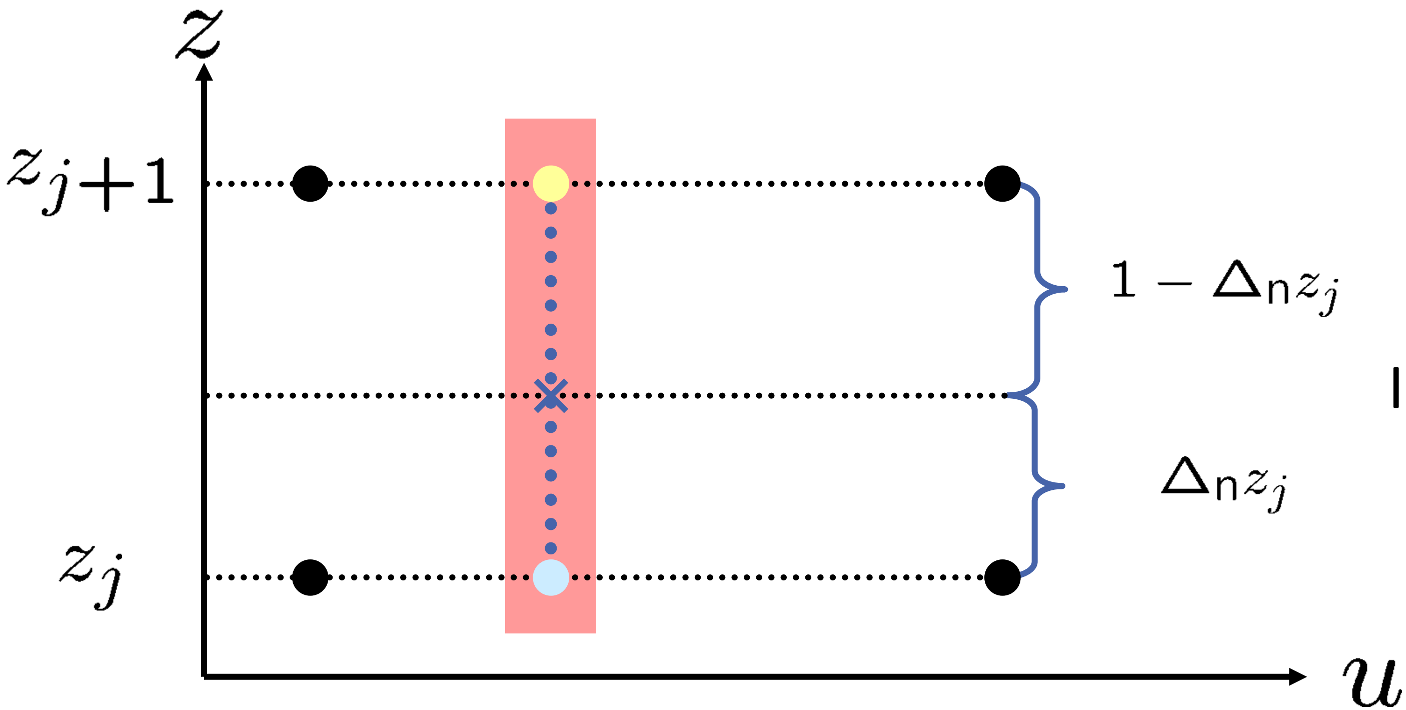


horizontale Interpolation

Theorie: Kennfeld-Interpolation (8)

- Anschauliche Interpretation

$$= (1-\Delta_\mathrm{n} z_j)\,\left[\,(1-\Delta_\mathrm{n} u_i)\cdot y_{i,j} + \Delta_\mathrm{n} u_i \cdot y_{i+1,j}\,\right] + \Delta_\mathrm{n} z_j\,\left[\,(1-\Delta_\mathrm{n} u_i)\cdot y_{i,j+1} + \Delta_\mathrm{n} u_i \cdot y_{i+1,j+1}\,\right]$$



vertikale Interpolation

Fragen?

Organisatorisches

Theorie

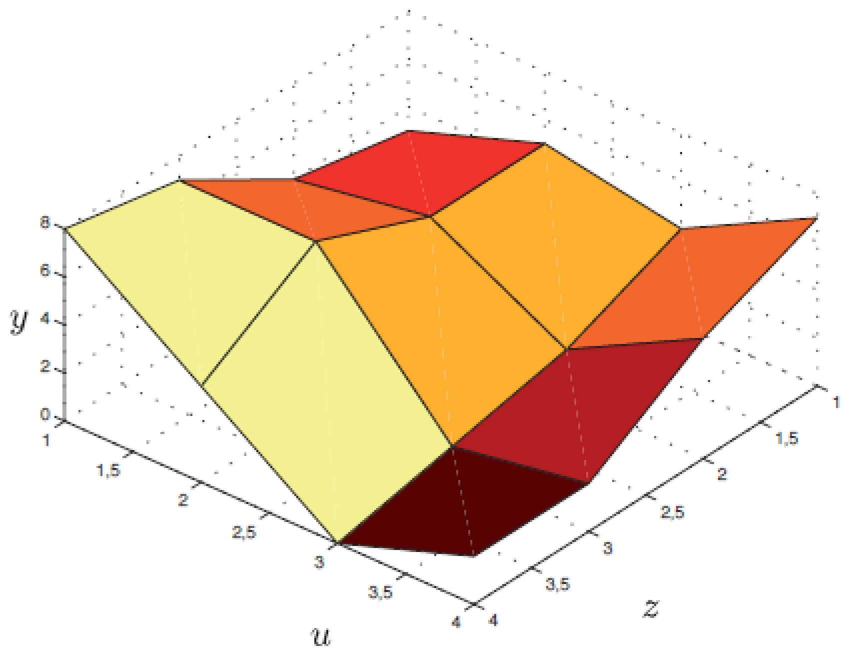
Aufgaben

Aufgabe 6: Kennfeld-Interpolation

a) Bilineare Interpolation anwenden

b) Ergebnis aus biquadratischer Interpolation verwenden

c) Relativen Fehler berechnen



$y(u_i, z_i)$	$u_1 = 1$	$u_2 = 2$	$u_3 = 3$	$u_4 = 4$
$z_1 = 1$	3	4	7	8
$z_2 = 2$	5	5	7	4
$z_3 = 3$	4	2	1	0
$z_4 = 4$	7	5	2	2

$$\tilde{y}_{\mathrm{b}}(\Delta_{\mathrm{n},2}u, \Delta_{\mathrm{n},2}z) = \sum_{k=0}^{2}\sum_{l=0}^{2} a_{kl}(\Delta_{\mathrm{n},2}u)^k(\Delta_{\mathrm{n},2}z)^l$$

$$\mathbf{A} = (a_{kl}) = \begin{bmatrix} 5 & 4{,}5 & -2{,}5 \\ -6 & -6{,}5 & 3 \\ 3 & 1 & -0{,}5 \end{bmatrix}$$

Fragen? MATLAB

Frage 3

- Wie viele Polynome sind zur Newton-Interpolation und zur Spline-Interpolation nötig?

x	1	2	4	8
y	3	7	3	1

- 1 globales Newton-Polynom oder 3 lokale Splines

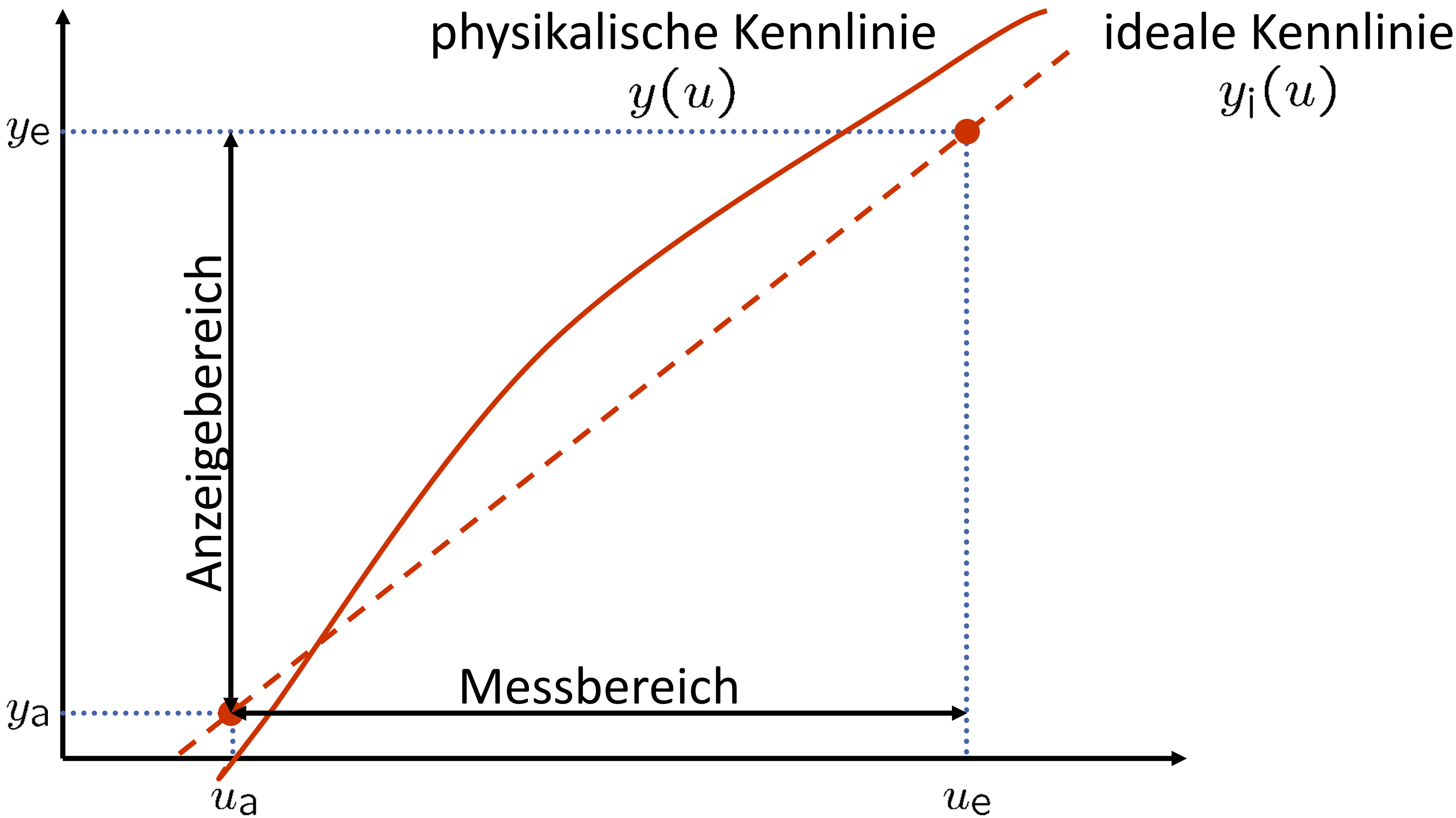
Inhalt der Übung

1. Messfehler
2. Kurvenanpassung
3. Stationäres Verhalten von Messsystemen
4. Zufällige Messfehler
5. Korrelationsmesstechnik
6. Erfassung amplituden-/frequenzanaloger Signale

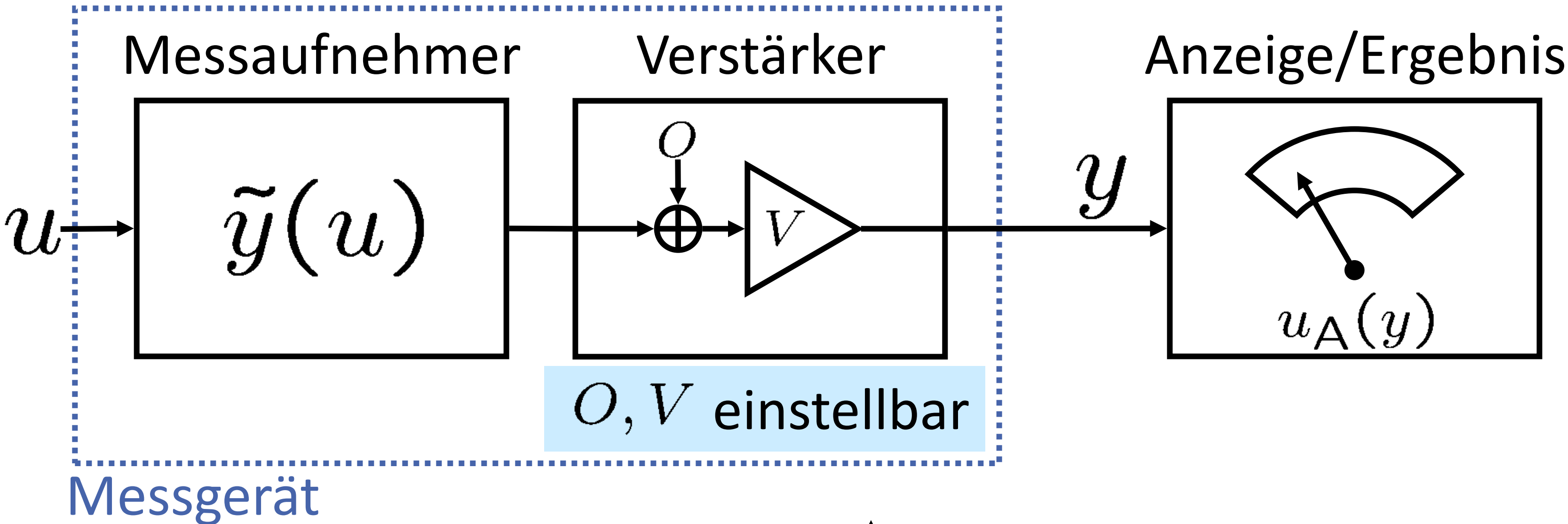
Theorie: Kennlinienfehler und Justierung

- Stationärer Fall
  - Einschwingvorgänge abgeschlossen
  - stabiler Anzeigewert bei konstanter Eingangsgröße
  - Systemverhalten wird durch Kennlinie beschrieben
- Ziel / Ideale Kennlinie
  - konstante Empfindlichkeit, $\Delta u \quad \widehat{=} \quad \Delta y$
  - → lineare Kennlinie
- Abgleich / Justierung
  - **physikalischer** Eingriff in das Messsystem, um den gewünschten Eingangsbereich der physikalischen Kennlinie auf den gewünschten Ausgangsbereich abzubilden
  - multiplikative Drehung / additive Verschiebung

Theorie: Kennlinie – Begriffsdefinitionen

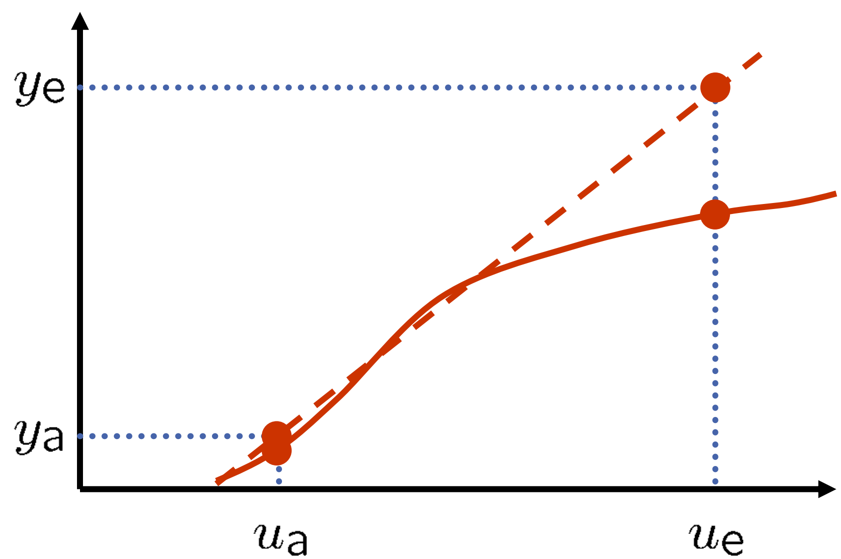


Theorie: Beispiel Justierung

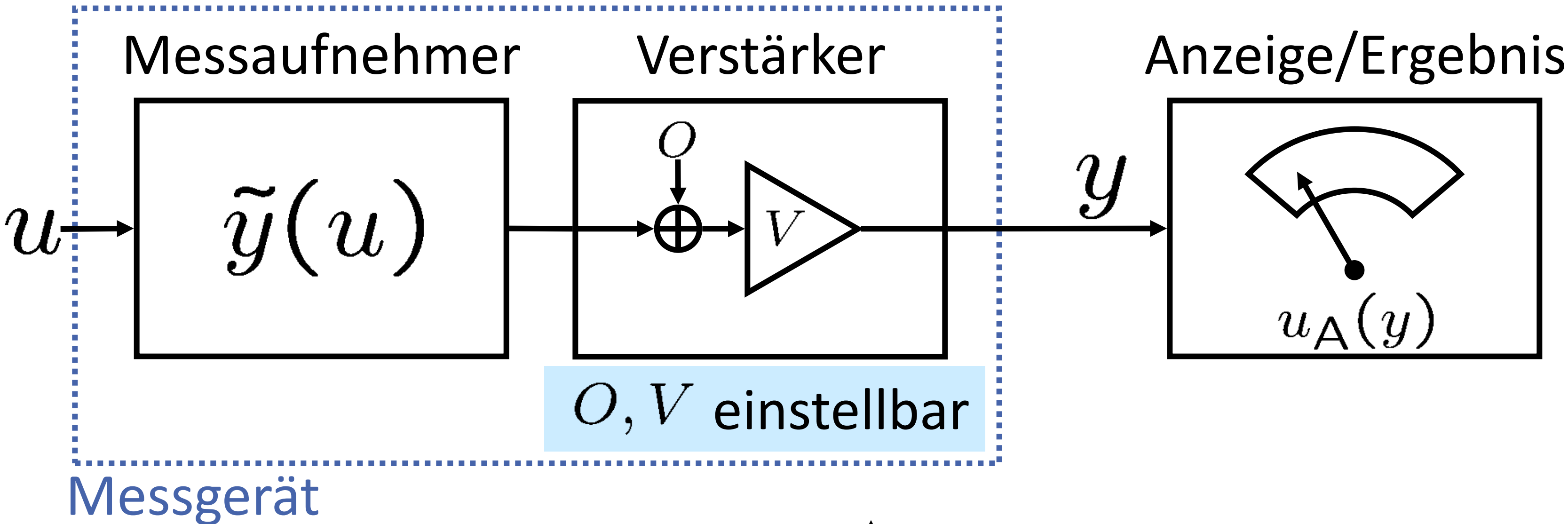


Kennlinie ohne Justierung

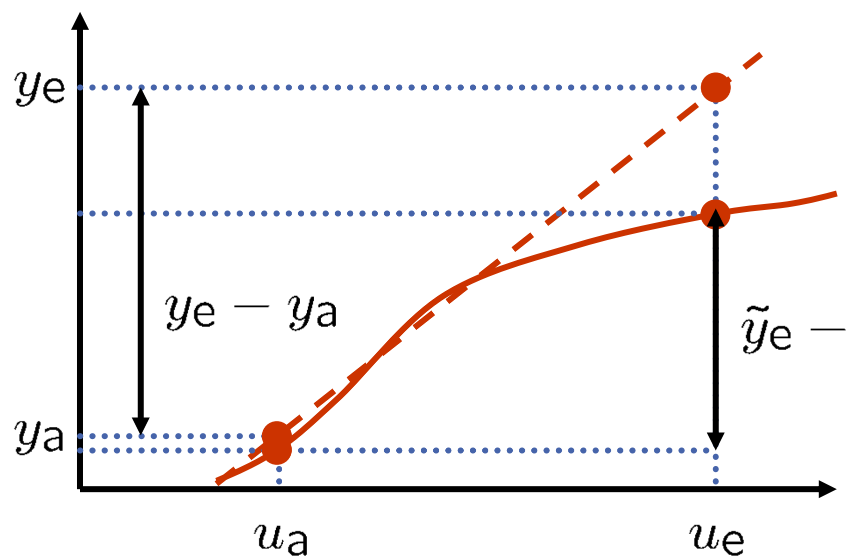
$O = 0, V = 1$



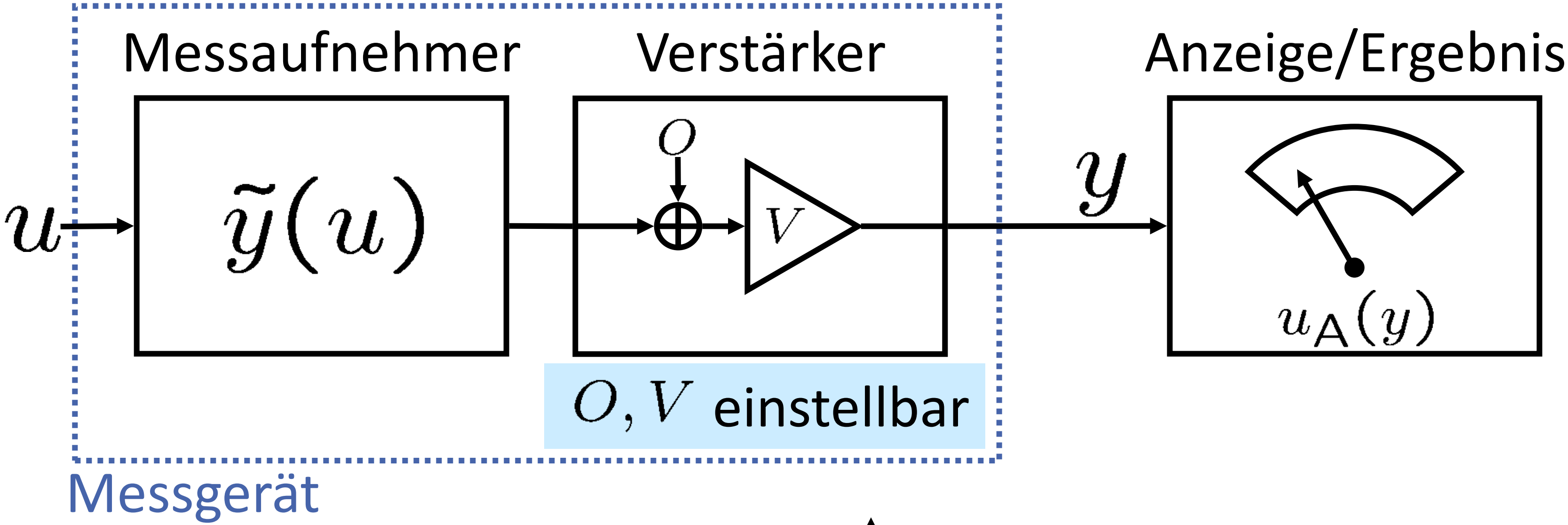
Theorie: Beispiel Justierung



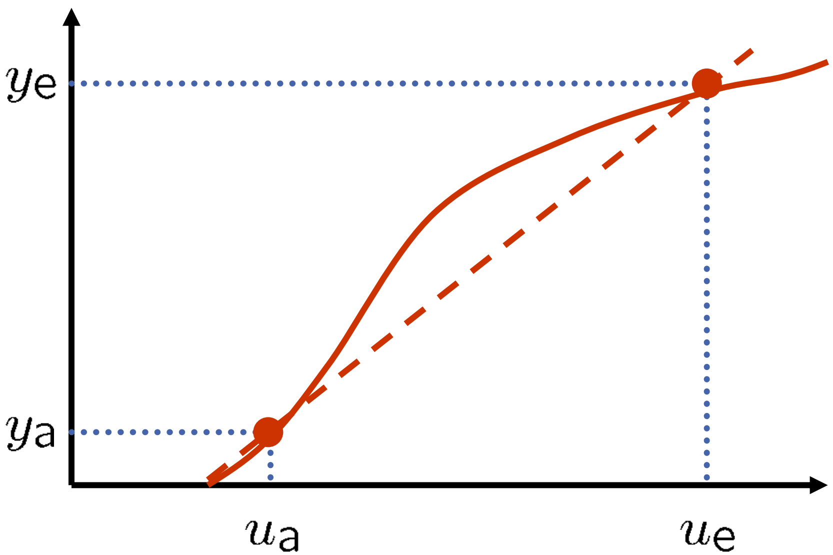
$$y_{\mathrm{e}} - y_{\mathrm{a}} \stackrel{!}{=} V \cdot (\tilde{y}_{\mathrm{e}} - \tilde{y}_{\mathrm{a}})$$



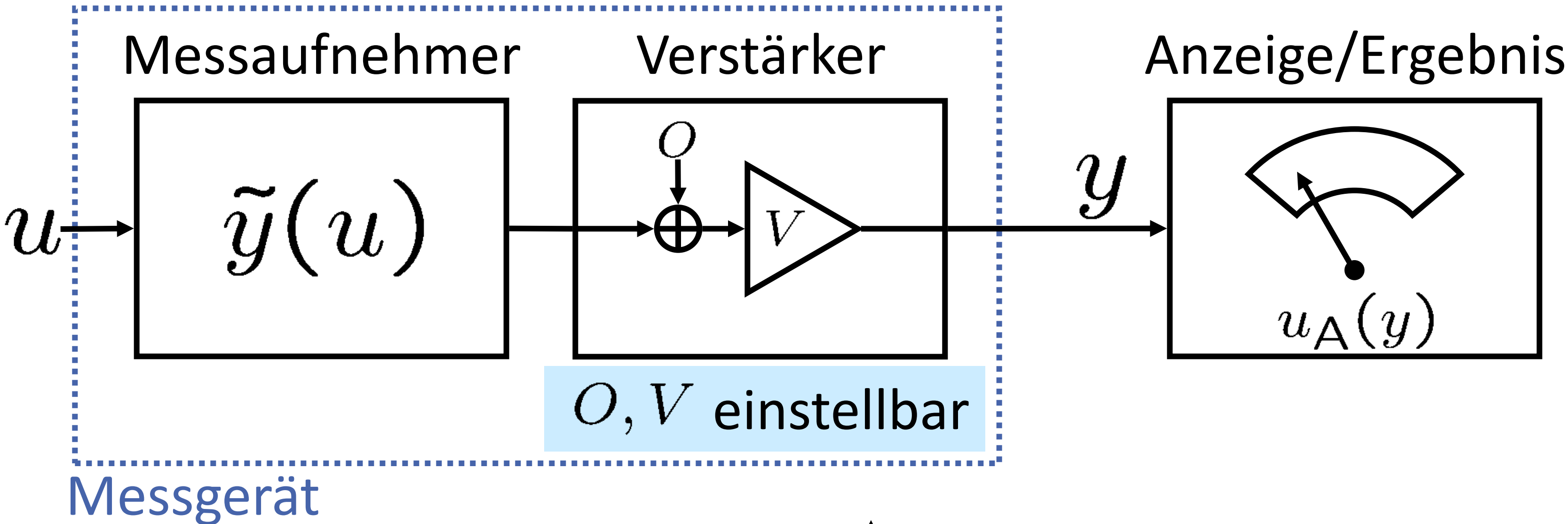
Theorie: Beispiel Justierung



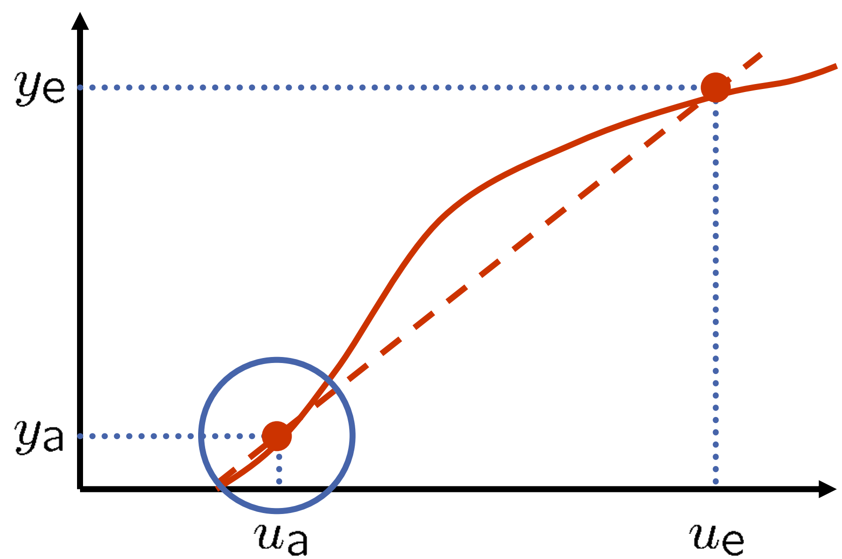
$$V = \frac{y_\mathrm{e} - y_\mathrm{a}}{\tilde{y}_\mathrm{e} - \tilde{y}_\mathrm{a}}$$



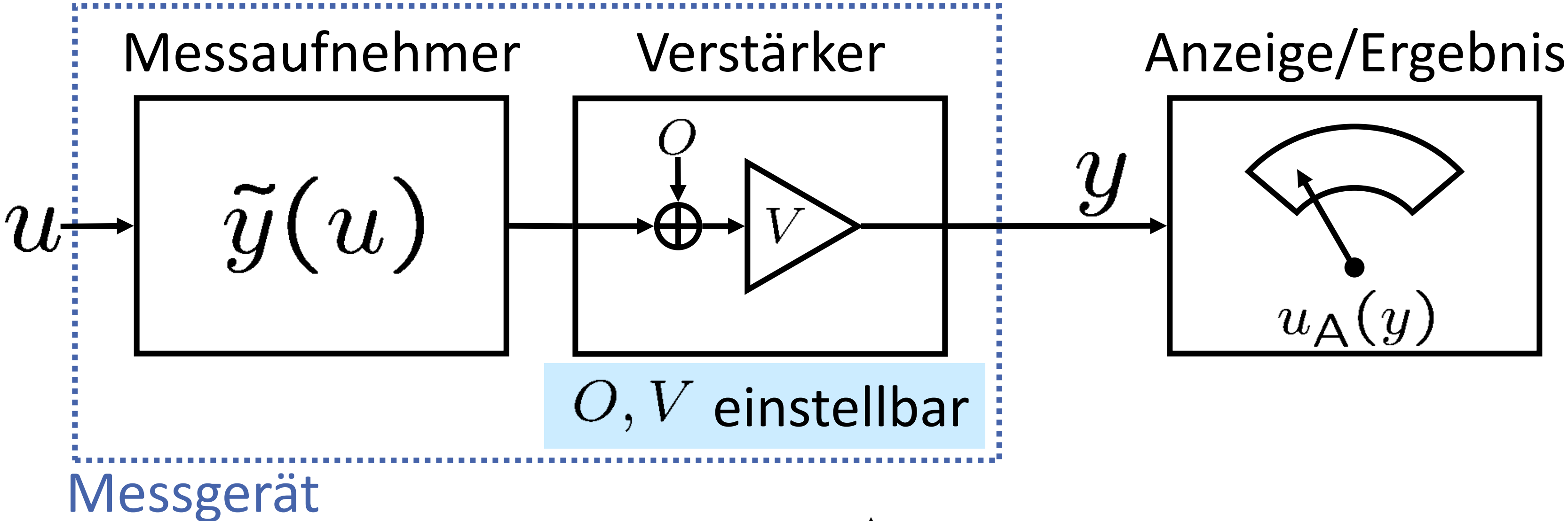
Theorie: Beispiel Justierung



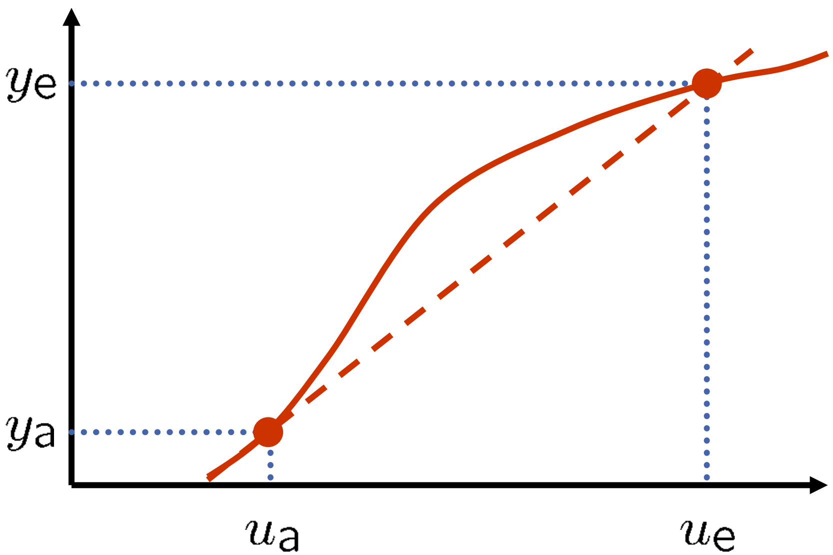
$$y_\mathrm{a} \stackrel{!}{=} V \cdot (\tilde{y}_\mathrm{a} + O)$$



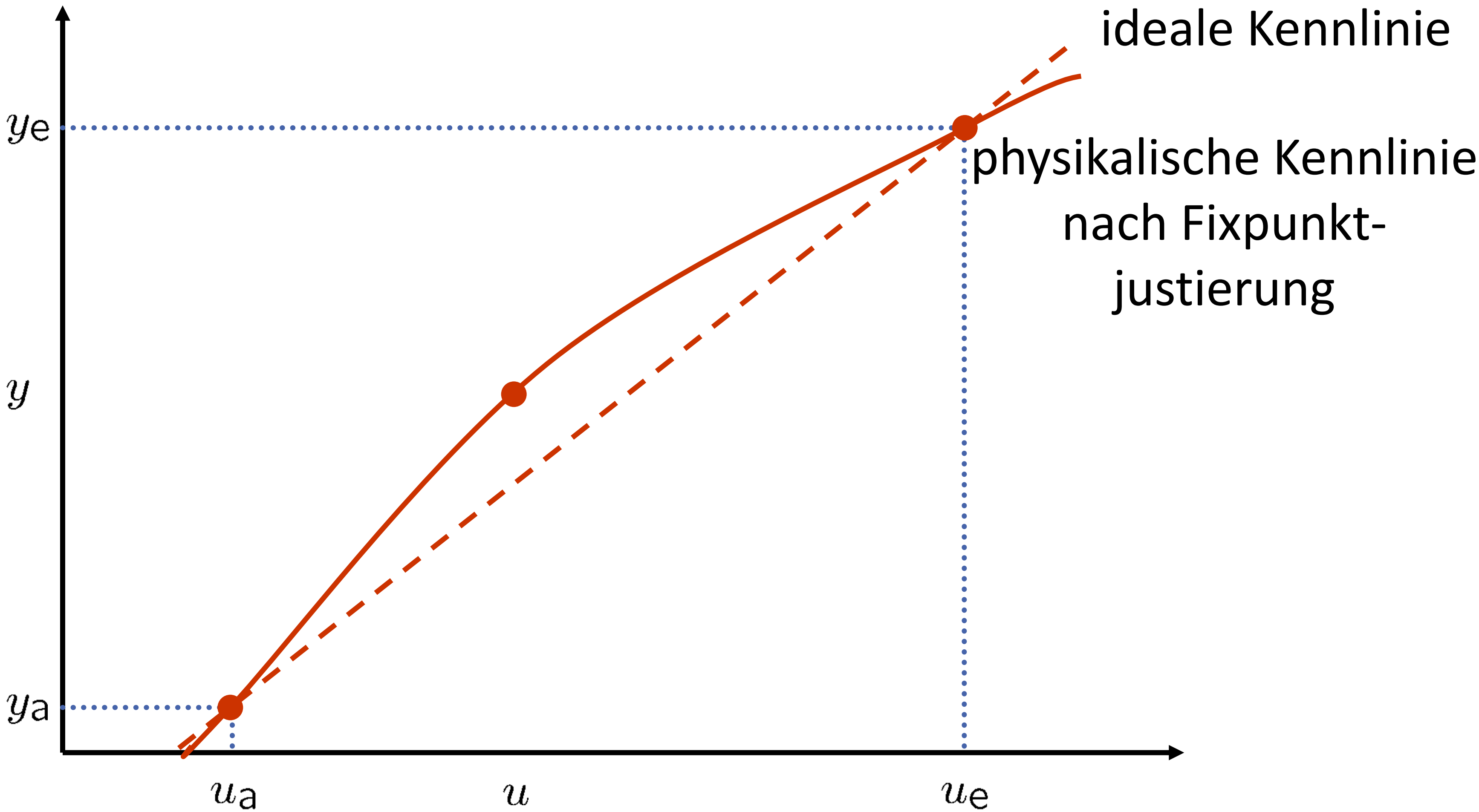
Theorie: Beispiel Justierung



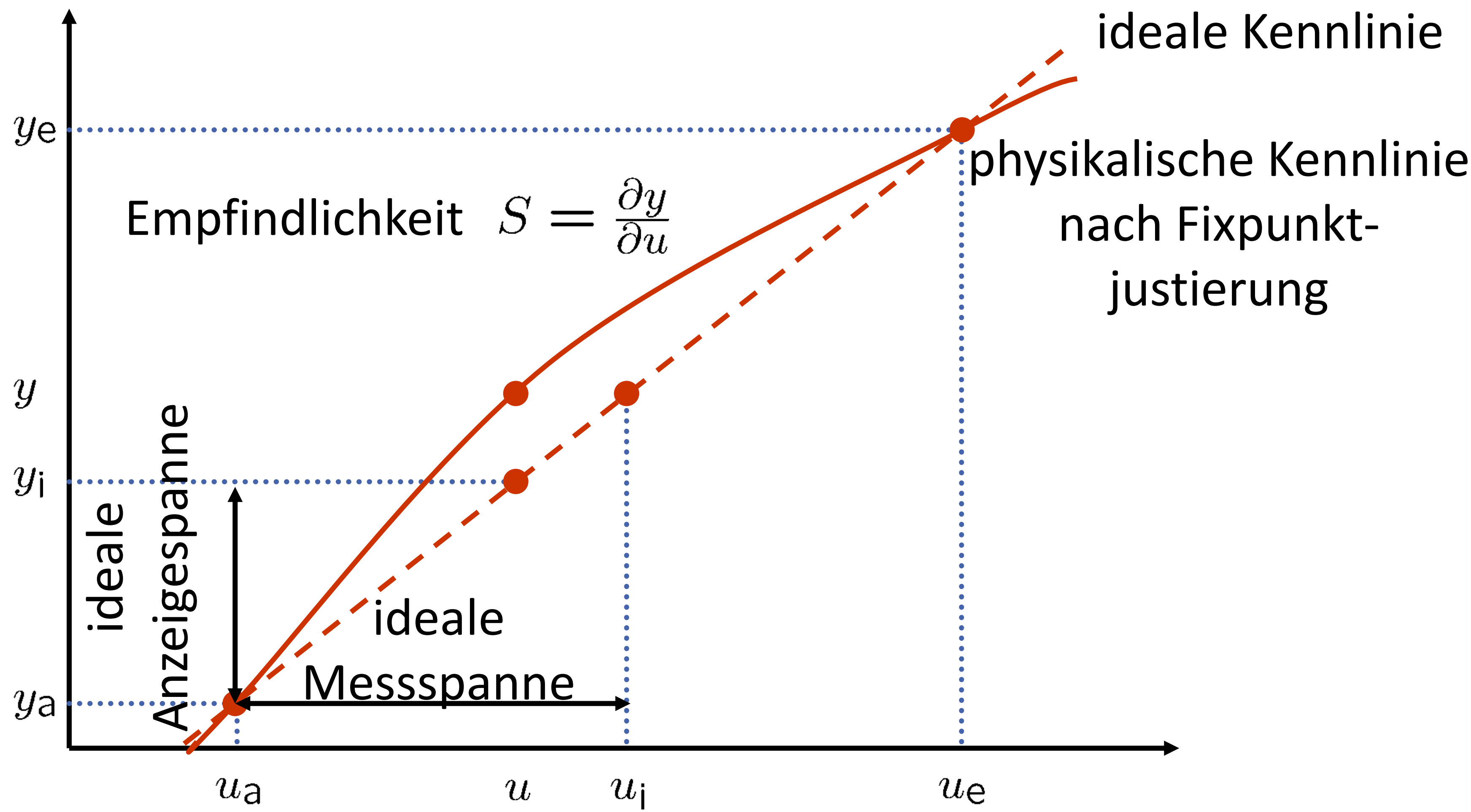
$$O = \frac{y_{\mathrm{a}}}{V} - \tilde{y}_{\mathrm{a}}$$



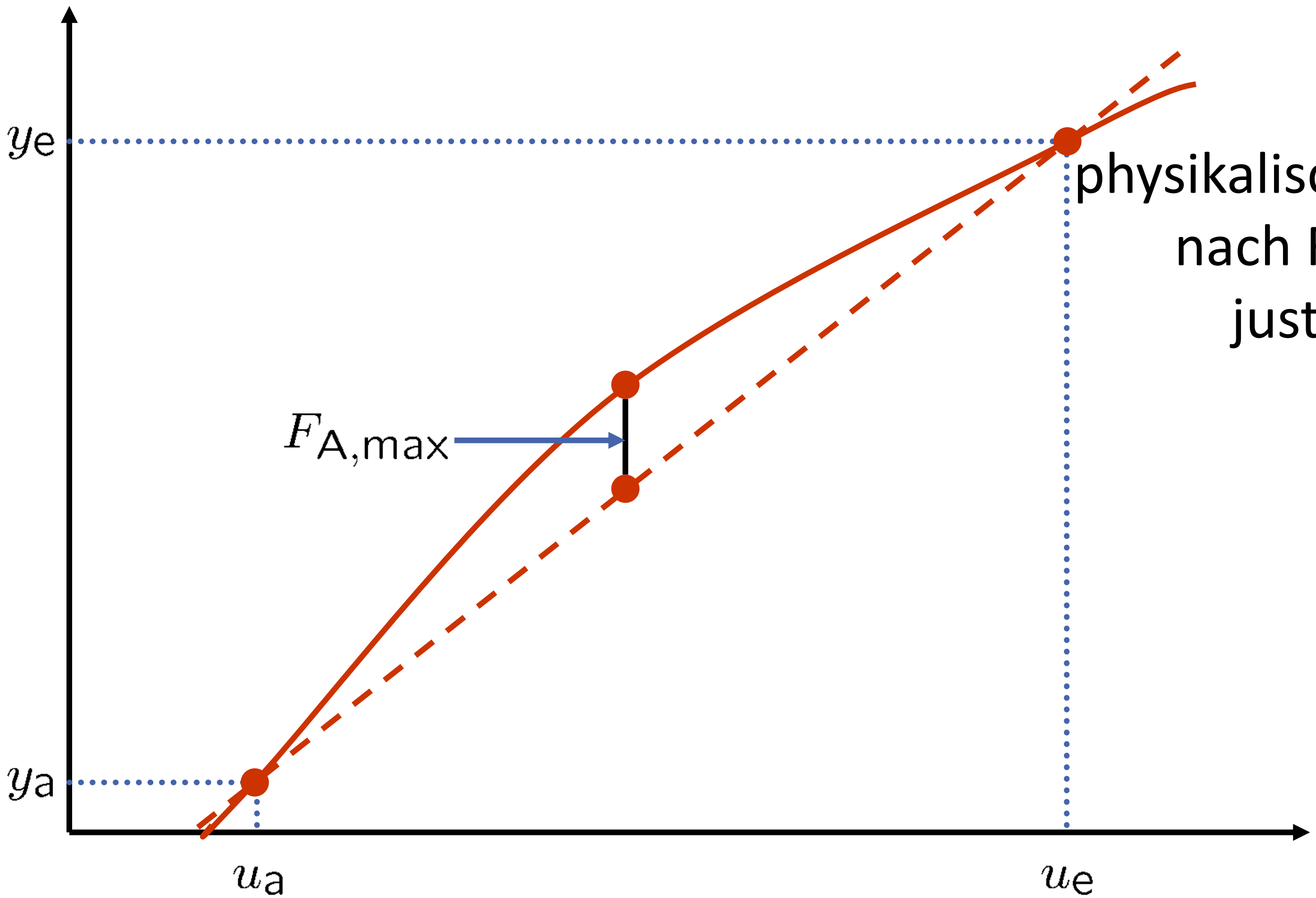
Theorie: Kennlinie



Theorie: Kennlinie

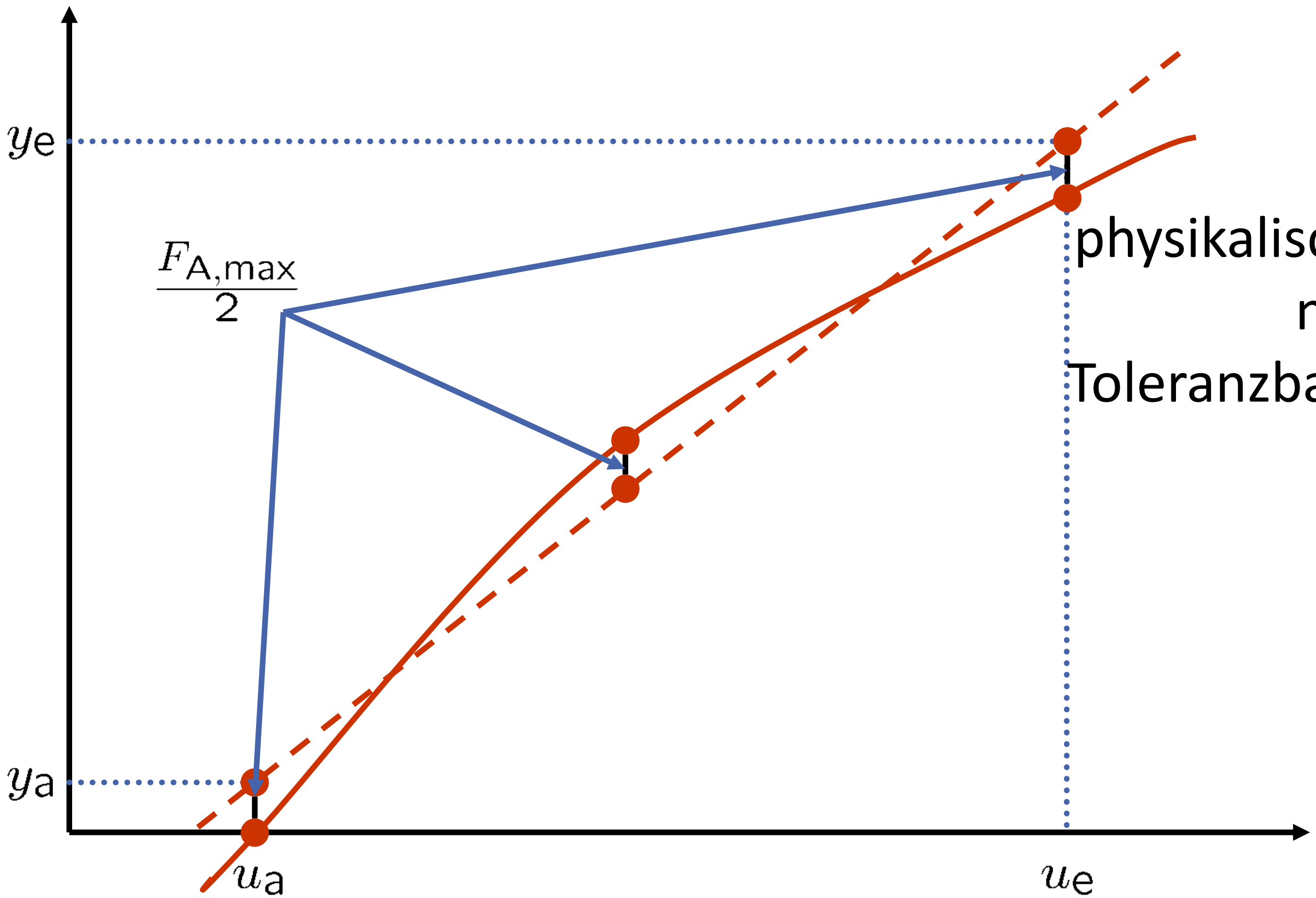


Theorie: Kennlinie – Begriffsdefinitionen



physikalische Kennlinie nach Fixpunkt-justierung

Theorie: Kennlinie – Begriffsdefinitionen



physikalische Kennlinie
nach
Toleranzbandjustierung

Fragen?

Theorie: Ideale Kennlinie

- Empfindlichkeit

$$S = \frac{\partial y}{\partial u}$$

- Ideale Empfindlichkeit

$$S_\mathrm{i} = \frac{y_\mathrm{e} - y_\mathrm{a}}{u_\mathrm{e} - u_\mathrm{a}}$$

- Ideale Kennlinie

$$y_\mathrm{i} = S_\mathrm{i} \cdot (u - u_\mathrm{a}) + y_\mathrm{a}$$

- Kennlinienfehler

absolut: $F = y - y_\mathrm{i}$ relativ: $F_r = \dfrac{y - y_\mathrm{i}}{y_\mathrm{i} - y_\mathrm{a}}$

Organisatorisches

Theorie

Aufgaben

Aufgabe 7: Kennlinienfehler und Justierung

Kennlinie: $y(u) = 0{,}4u^2 + 2; \quad u_\mathrm{a} = 0, u_\mathrm{e} = 4$

a) Ideale Kennlinie $y_\mathrm{i}(u)$ bei Fixpunktjustierung berechnen

b) Relativer Kennlinienfehler bezogen auf die Anzeigespanne

c) Maximum $F_{\mathrm{A,max}}$ des absoluten Fehlers bestimmen

d) Durch welches Justierverfahren kann $F_{\mathrm{A,max}}$ halbiert werden? Welche ideale Kennlinie und welcher maximale Kennlinienfehler $\tilde{F}_{\mathrm{A,max}}$ resultieren daraus? Ist dieses Verfahren immer anwendbar?

Aufgabe 7 a) + b)

- **a)** Ideale Kennlinie bei Fixpunktjustierung

$$y_{\mathrm{a}} = y(u_{\mathrm{a}}) = 2$$
$$y_{\mathrm{e}} = y(u_{\mathrm{e}}) = 8{,}4$$

$$S_{\mathrm{i}} = \frac{y_{\mathrm{e}} - y_{\mathrm{a}}}{u_{\mathrm{e}} - u_{\mathrm{a}}} = 1{,}6$$

$$y_{\mathrm{i,fix}}(u) = S_{\mathrm{i}} \cdot (u - u_{\mathrm{a}}) + y_{\mathrm{a}} = 1{,}6u + 2$$

- **b)** Relativer Fehler bezogen auf Anzeigespanne

$$F_{\mathrm{r}}(u) = \frac{y(u) - y_{\mathrm{i}}(u)}{y_{\mathrm{i}}(u) - y_{\mathrm{a}}} = \frac{0{,}4u^2+2-1{,}6u-2}{1{,}6u+2-2} = 0{,}25u - 1$$

Fragen? MATLAB

Matlab Übung Online

Viel Spaß in der Vorlesung!

Nächste Übung:

04.12.2014