Prof. Dr.-Ing. F. Puente León
Institut für Industrielle Informationstechnik
Karlsruher Institut für Technologie
www.iiit.kit.edu

4. Übung Messtechnik (18.12.14)

Aufgabe 13: Stichprobe und statistische Sicherheit

Die konstante Spannung U einer Batterie werde $N = 6$ mal gemessen. Man erhält die fehlerbehafteten Messwerte $\mathsf{y} = U + \mathsf{e}$ (Tab. 1).

i	1	2	3	4	5	6
y_i /V	4,520	4,475	4,490	4,511	4,486	4,518

Tabelle 1: Messwerte einer Batterie.

a) Berechnen Sie den Stichprobenmittelwert $\hat{\mathsf{y}}$ als Schätzwert für die konstante Spannung U.

b) Berechnen Sie die Stichprobenvarianz s_{y}^2 als Schätzwert für die Varianz des Messrauschens e.

c) Nehmen Sie an, das Messrauschen e sei normalverteilt. Geben Sie die Unsicherheit $u_{\hat{\mathsf{y}}}$ des Stichprobenmittelwertes mit einer statistischen Sicherheit von 90 % an.

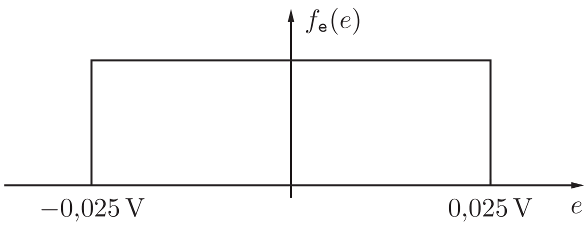


Abbildung 1: Wahrscheinlichkeitsdichte des gleichverteilten Messfehlers.

Für die folgenden Teilaufgaben seien die Messfehler e innerhalb des Intervalls zwischen den Grenzen $\pm 0{,}025\,\mathrm{V}$ gleichverteilt (siehe Abb. 1).

d) Berechnen Sie die Varianz σ_{y}^2 einer Einzelmessung und die Varianz $\sigma_{\hat{\mathsf{y}}}^2$ des Schätzwertes $\hat{\mathsf{y}}$.

e) Mit welcher statistischen Sicherheit weicht eine Einzelmessung um nicht mehr als $\pm 0{,}020\,\mathrm{V}$ vom tatsächlichen Wert von U ab?

Aufgabe 14: χ^2-Anpassungstest auf Normalverteilung

Ein Computerhersteller führt Untersuchungen zur Lebensdauer (in $10^3\,\mathrm{h}$) seiner LCD-Bildschirme durch. Bei den Messungen erhalte man als statistische Kennwerte einen Stichprobenmittelwert von

$\hat{\mathrm{x}} = 5{,}15$ und eine Stichprobenvarianz von $s_\mathrm{x}^2 = 0{,}59$. Dabei wurde folgende (als disjunkt angenommene) Häufigkeitsverteilung ermittelt (Tab. 2).

Intervall i	Lebensdauer$/10^3$ h	Anzahl der Geräte n_i
1	3,0 – 3,6	2
2	3,6 – 4,2	8
3	4,2 – 4,8	35
4	4,8 – 5,4	43
5	5,4 – 6,0	22
6	6,0 – 6,6	15
7	6,6 – 7,2	5
	Gesamtanzahl n	130

Tabelle 2: Häufigkeitsverteilung einer Lebensdauer.

Prüfen Sie, ob die Lebensdauer der Bildschirme einer Normalverteilung folgt. Die Parameter der Normalverteilung seien die zuvor ermittelten, statistischen Kennwerte $\mu_\mathrm{x} = \hat{\mathrm{x}}$ und $\sigma_\mathrm{x}^2 = s_\mathrm{x}^2$. Die statistische Sicherheit soll dabei $96\,\%$ betragen. Überprüfen Sie auch, ob die Voraussetzungen für einen χ^2-Test gegeben sind.
Hinweis: Da zur Beschreibung der Normalverteilung zwei Schätzwerte verwendet werden, reduziert sich die Anzahl der Freiheitsgrade für den χ^2-Anpassungstest zusätzlich um zwei, also $m = k - 2 - 1$. Die Quantile für den Anpassungstest finden Sie in Abb. 2.

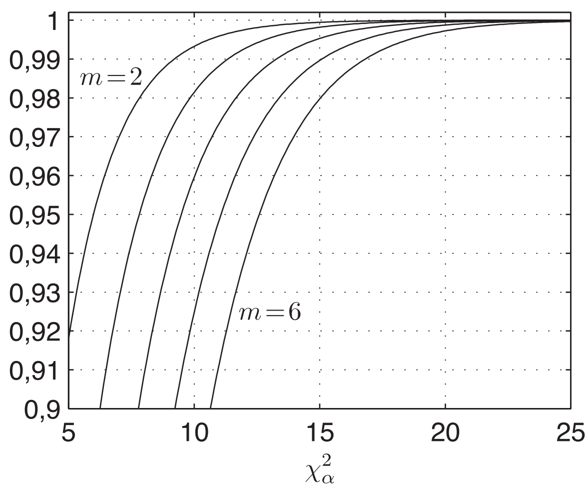
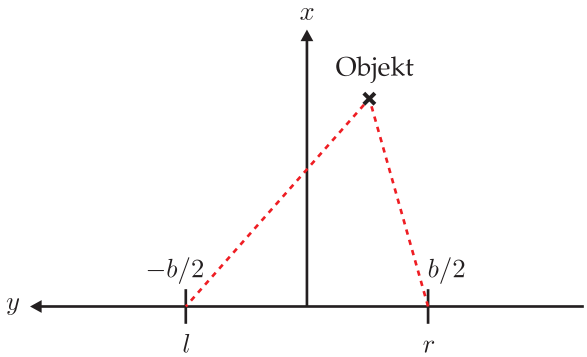


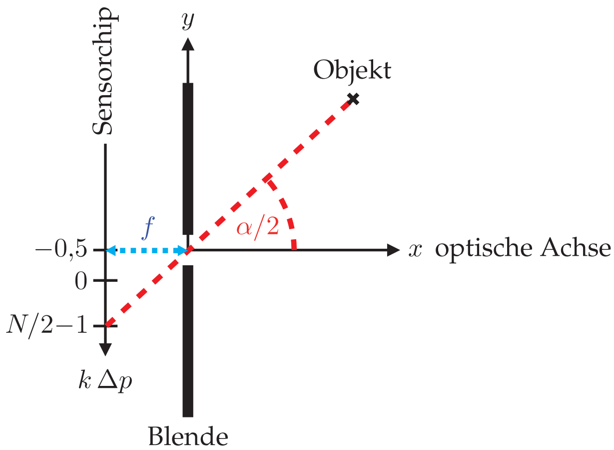
Abbildung 2: Quantile für den χ^2-Test.

Aufgabe 15: Fehlerfortpflanzung

Mit zwei baugleichen Digitalkameras wurde eine Stereoanordnung gemäß Abb. 3 (a) erstellt. Für die einzelnen Kameras wird ein einfaches Lochkameramodell wie in Abb. 3 (b) verwendet. Zur Vereinfachung vernachlässigen wir die Höhenachse in den folgenden Betrachtungen. Für beide Kameras



(a) Stereoanordnung (Draufsicht)



(b) Lochkameramodell (Draufsicht)

Abbildung 3: Einfaches Stereokameramodell.

wird nun unabhängig voneinander ein Objekt in den aufgenommenen Bildern detektiert und diesem als Position der Schwerpunkt $\mathtt{k}_\mathrm{l}$ bzw. $\mathtt{k}_\mathrm{r}$ zugeordnet. Eine Rekonstruktion der Position des Objektes in der zweidimensionalen Ebene ist mit folgenden Formeln möglich:

$$
\begin{aligned}
\mathtt{x} &= f_1(\mathtt{k}_\mathrm{l}, \mathtt{k}_\mathrm{r}) = \frac{f}{\Delta p} \frac{b}{\mathtt{k}_\mathrm{r} - \mathtt{k}_\mathrm{l}}\,, \\
\mathtt{y} &= f_2(\mathtt{k}_\mathrm{l}, \mathtt{k}_\mathrm{r}) = \frac{x}{2} \frac{\Delta p}{f} (\mathtt{k}_\mathrm{r} + \mathtt{k}_\mathrm{l} + 1) = \frac{b}{2} \frac{\mathtt{k}_\mathrm{r} + \mathtt{k}_\mathrm{l} + 1}{\mathtt{k}_\mathrm{r} - \mathtt{k}_\mathrm{l}}\,.
\end{aligned}
$$

Die Kameraparameter Brennweite f und Breite Δp eines Pixels auf der Sensorfläche seien bekannt sowie identisch für beide Kameras. Die Basisbreite der Stereoanordnung b sei ebenfalls bekannt.

a) Schätzen Sie die Streuungen $\Delta\mathrm{x}^2$, $\Delta\mathrm{y}^2$ und $\Delta\mathrm{x}\,\Delta\mathrm{y}$ für das gegebene Modell mit Hilfe des Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetzes ab, wenn die Varianzen $\sigma^2_{\mathtt{k}_\mathrm{l}}$ und $\sigma^2_{\mathtt{k}_\mathrm{r}}$ bekannt sind.

Nun wird vor der Objektdetektion eine Tiefenkarte geschätzt und in dieser dann das Objekt detektiert. Diesem werden die Koordinaten Mittenwert $\mathtt{m}$ und Disparität $\mathtt{d}$ zugeordnet, wobei folgende Zusammenhänge gelten:

$$
\mathtt{m} = \frac{\mathtt{k}_\mathrm{r} + \mathtt{k}_\mathrm{l}}{2}\,, \qquad \mathtt{d} = \mathtt{k}_\mathrm{r} - \mathtt{k}_\mathrm{l}\,.
$$

b) Schätzen Sie erneut die Streuungen $\Delta\mathrm{x}^2$, $\Delta\mathrm{y}^2$ und $\Delta\mathrm{x}\,\Delta\mathrm{y}$ für das gegebene Modell mit Hilfe des Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetzes ab, wenn die Varianzen $\sigma^2_{\mathtt{d}}$ und $\sigma^2_{\mathtt{m}}$ bekannt sind.