4. Übung Messtechnik

WS 2014/15

Evaluation

- Kurz durchzählen damit Teilnehmerzahl bekannt ist
- Bögen wenn ausgefüllt bitte am Rand stapeln

Aufgabe 12 b)

Frage 1

$$F_{\text{def}} = b \cdot (z - z_0)(u - u_0) = b \cdot \Delta z \Delta u$$

Längenänderung in mm	0	10
Referenz in V bei 300K (Normalbedingungen)	4	15
Messwert in V bei 310K	5	26

- Wie groß ist der deformierende Fehler bei einer Temperatur von 330K und einer Längenänderung von 5mm?

$$F_{\text{def}}(u = 5\,\text{mm}, z = 330\,\text{K}) = b(5\,\text{mm})(30\,\text{K}) = 15\,\text{V}$$

$$\text{mit } b = \frac{(26 - \overset{F_{\text{sup}}}{1} - 15)\,\text{V}}{10\,\text{K} \cdot 10\,\text{mm}} = 0{,}1 \frac{\text{V}}{\text{K} \cdot \text{mm}}$$

Inhalt der Übung

1. Messfehler
2. Kurvenanpassung
3. Stationäres Verhalten von Messsystemen
4. Zufällige Messfehler
5. Korrelationsmesstechnik
6. Erfassung amplituden-/frequenzanaloger Signale

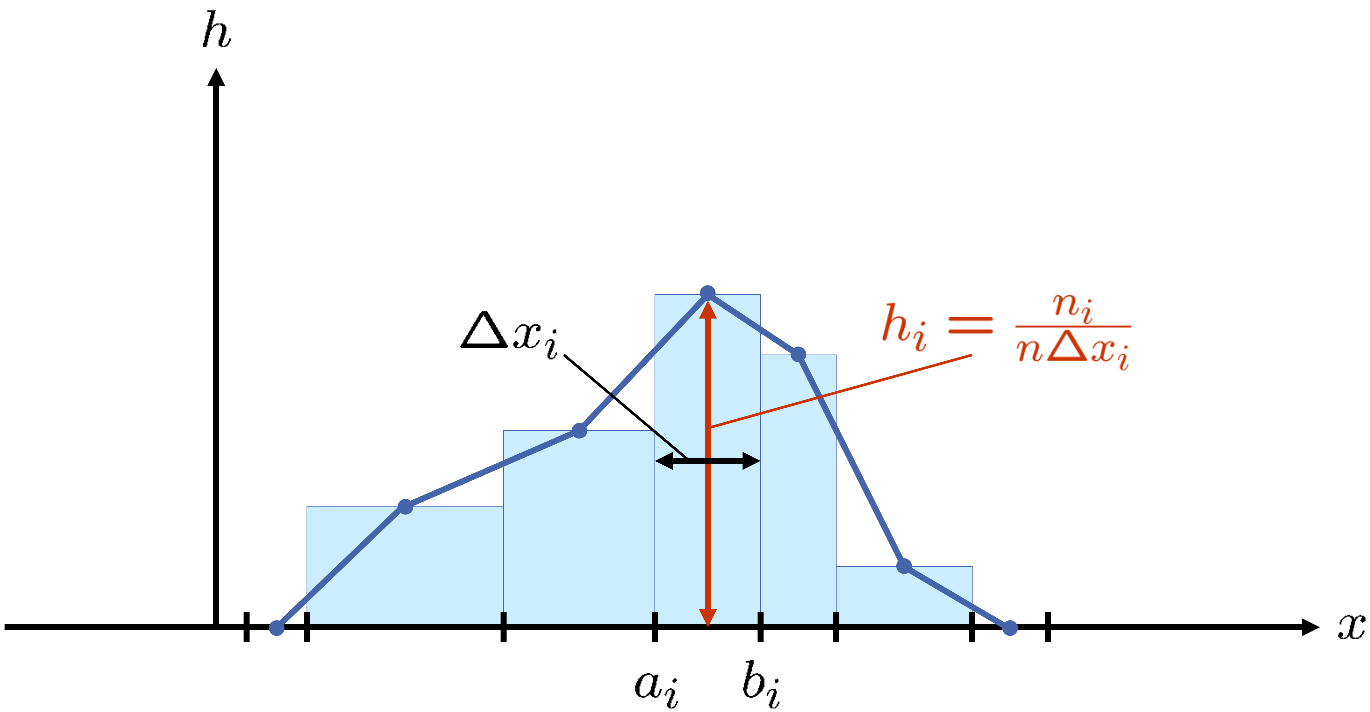
Organisatorisches

Theorie

Aufgaben

Theorie: Stichproben – Histogramm

- Tatsächliche W-Dichten in Praxis meist nicht verfügbar
- → Analyse von/mit Stichproben
- Histogramm:



Theorie: Stichproben – Mittelwert

- Stichprobenmittelwert
  - $\hat{\mathrm{x}} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$
  - erwartungstreu

$$E\{\hat{\mathrm{x}}\} = E\{\mathrm{x}\}$$

  - für voneinander unabhängige Einzelmessungen konsistent

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_{\hat{\mathrm{x}}} = \lim_{N\to\infty} \frac{\sigma_{\mathrm{x}}}{\sqrt{N}} = 0$$

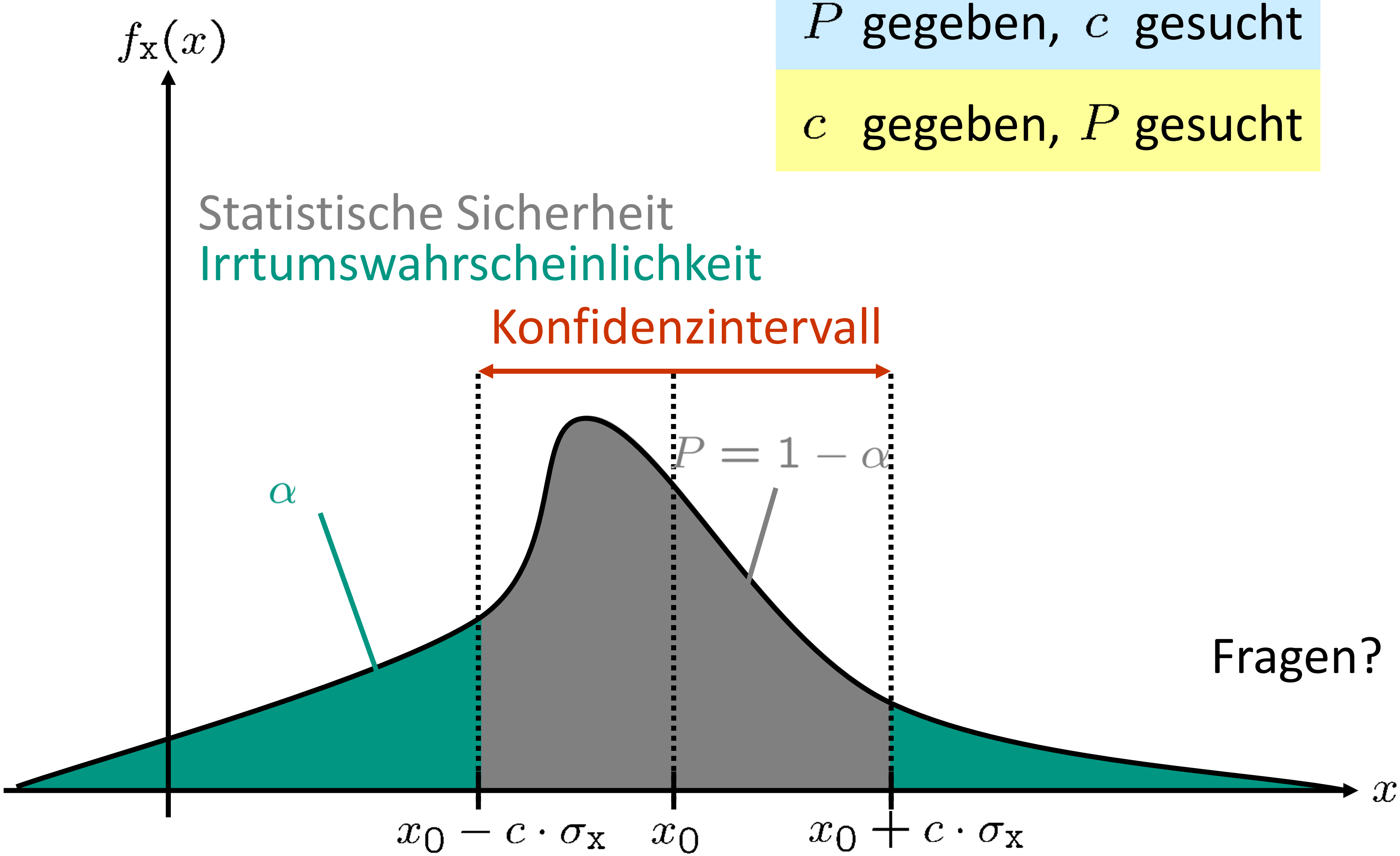
Theorie: Stichproben – Varianz

- Stichprobenvarianz
  - $$S_{\mathrm{x}}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \hat{\mathrm{x}})^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}x_i^2 - \frac{N}{N-1}\hat{\mathrm{x}}^2$$
  - für voneinander unabhängige Einzelmessungen Erwartungstreu

$$E\left\{S_{\mathrm{x}}^2\right\} = \sigma_{\mathrm{x}}^2$$

Theorie: Statistische Sicherheit / Konfidenzintervall

P gegeben, c gesucht
c gegeben, P gesucht



Fragen?

Organisatorisches

Theorie

Aufgaben

Aufgabe 13 a) Stichprobenmittelwert

- Konstante Batteriespannung

i	1	2	3	4	5	6
y_i/V	4,520	4,475	4,490	4,511	4,486	4,518

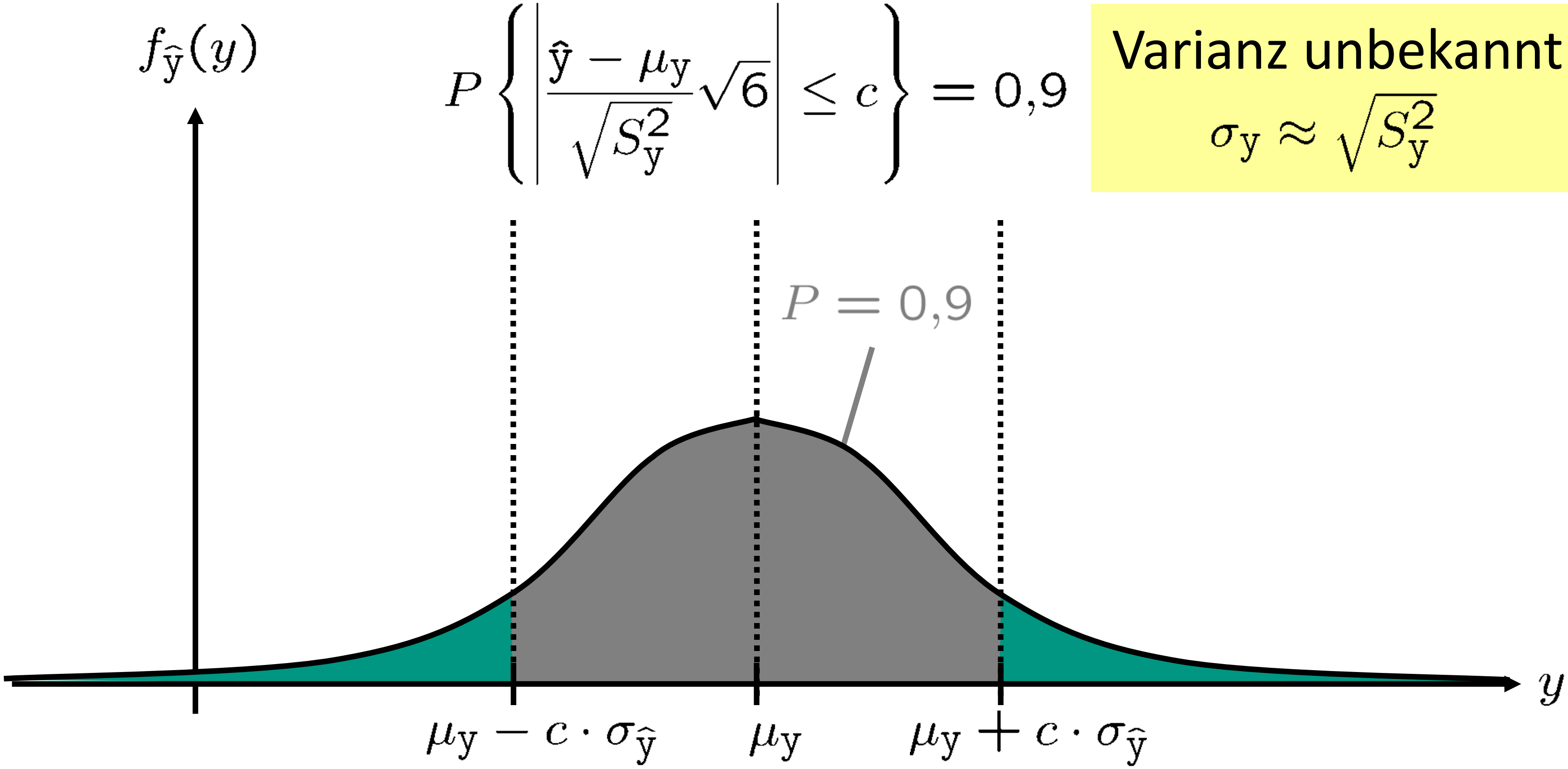
Aufgabe 13 c) Unsicherheit des SP-MW für $P = 0{,}9$

P gegeben, c gesucht

$$P\left\{\left|\hat{\mathrm{y}} - \mu_{\mathrm{y}}\right| \leq c \cdot \sigma_{\hat{\mathrm{y}}}\right\} = 0{,}9$$

$$P\left\{\left|\frac{\hat{\mathrm{y}} - \mu_{\mathrm{y}}}{\sqrt{S_{\mathrm{y}}^2}}\sqrt{6}\right| \leq c\right\} = 0{,}9$$

Varianz unbekannt:
$\sigma_{\mathrm{y}} \approx \sqrt{S_{\mathrm{y}}^2}$



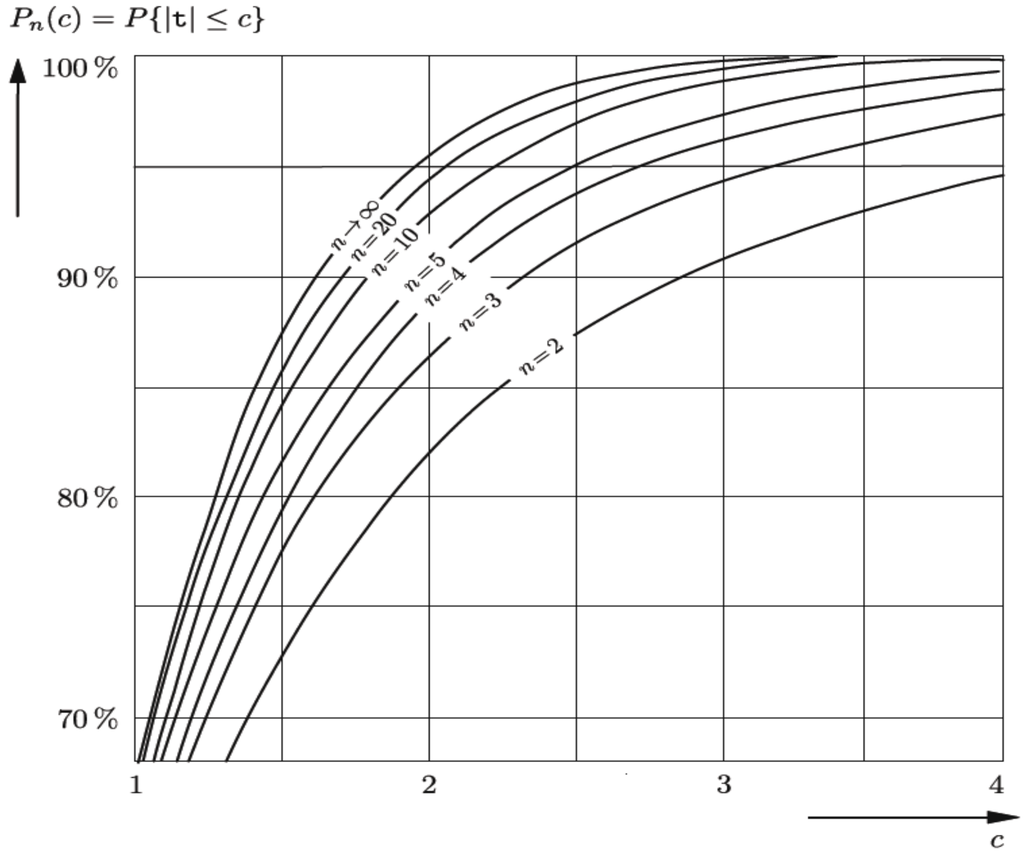
Aufgabe 13 c) Unsicherheit des SP-MW für $P = 0{,}9$

$$P\left\{\left|\frac{\hat{y}-\mu_y}{\sqrt{S_y^2}}\sqrt{6}\right| \le c\right\} = 0{,}9$$

Abb. 4.19, MT-Buch

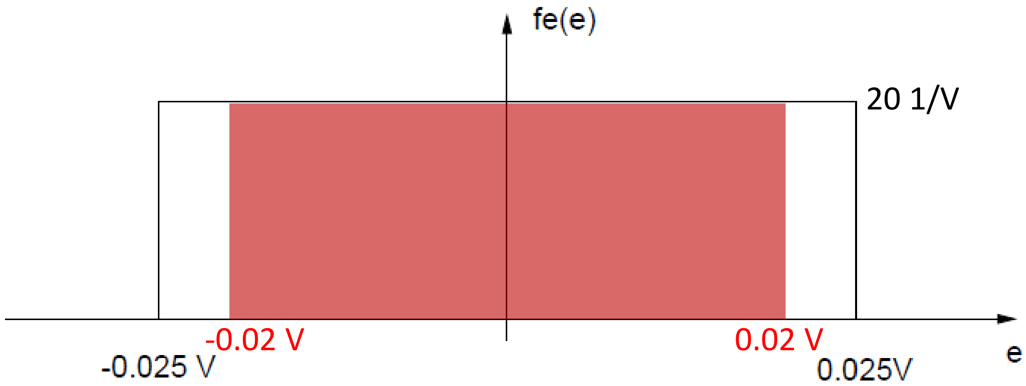
falls y normalverteilt

$$\frac{\hat{y}-\mu_y}{\sqrt{S_y^2}}\sqrt{N} = t_{N-1}$$



Aufgabe 13: Stichprobe und statistische Sicherheit

- **d)**
  - Varianz einer Einzelmessung = Varianz der Zufallsvariable
  - Varianz des Stichprobenmittelwertes $\sigma_{\hat{\mathrm{x}}}^2 = \frac{\sigma_{\mathrm{x}}^2}{N}$
- **e)** c gegeben, P gesucht
  - $|y_i - U| = |e_i|$



$$P\{|\mathrm{e}| \leq 20\,\mathrm{mV}\} = \int_{-0{,}02}^{0{,}02} f_{\mathrm{e}}(e)de = 0{,}8$$

Fragen?

Frage 2

- Welche beiden Eigenschaften werden bei der Wahl des günstigsten Messbereichs um einen Wendepunkt gewünscht?

- Linearer Verlauf
- Hohe Empfindlichkeit

Organisatorisches

Theorie

Aufgaben

Theorie: Statistische Tests

- Aussagen mit bestimmter Wahrscheinlichkeit

- Signifikanztest für Stichprobenmittelwert
  - Wenn Stichprobenmittelwert zu stark vom wahren Mittelwert abweicht, wird die Stichprobe als nicht repräsentativ eingestuft und abgelehnt

- χ^2-Anpassungstest
  - Überprüfen ob Stichprobe eine vermutete Wahrscheinlichkeits-dichte haben könnte

Theorie: Signifikanztest für Stichprobenmittelwert

- Voraussetzungen prüfen (normalverteilte Grundgesamtheit, unabhängige Messwerte)
- Signifikanzniveau α festlegen
- Nullhypothese aufstellen $H_0 : \hat{\mathrm{x}} = \mu_{\mathrm{x}}$
- Prüfgröße bestimmen (Normalverteilung / t-Verteilung)
  - $\mathrm{z} = \frac{|\hat{\mathrm{x}} - \mu|}{\sigma_{\mathrm{x}}} \sqrt{N}$ bzw. $\mathrm{t}_{N-1} = \frac{|\hat{\mathrm{x}} - \mu|}{S_{\mathrm{x}}} \sqrt{N}$
- Wahrscheinlichkeit der Prüfgröße bestimmen (z.B. Tabellen)
  - $P(\mathrm{z})$ bzw. $P(\mathrm{t}_{N-1})$
- Entscheidung: Annahme von H_0 wenn $P(\mathrm{z}/\mathrm{t}_{N-1}) \leq 1 - \alpha$

Fragen?

Theorie: χ^2-Anpassungstest

- Voraussetzungen prüfen (Unabhäng. Messwerte, großer Stichprobenumfang)
- Signifikanzniveau α festlegen
- Nullhypothese aufstellen $H_0 : f_\mathrm{x}(x) = f_0(x)$
- Prüfgröße bestimmen
  - Histogramm mit k Klassen erstellen (ggf. Klassen zusammenlegen)
  - Klassenwahrscheinlichkeiten $p_i = \int_{a_i}^{b_i} f_0(x)dx$ bestimmen
  - $\chi^2 \approx \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$ berechnen
- Erwarteten Wert der Prüfgröße bestimmen (z.B. Tabelle/Grafik)
  - $\chi_\alpha^2 = P_{\chi^2,m}^{-1}(1-\alpha)$
- Entscheidung: Annahme von H_0 wenn $\chi^2 \leq \chi_\alpha^2$

Organisatorisches

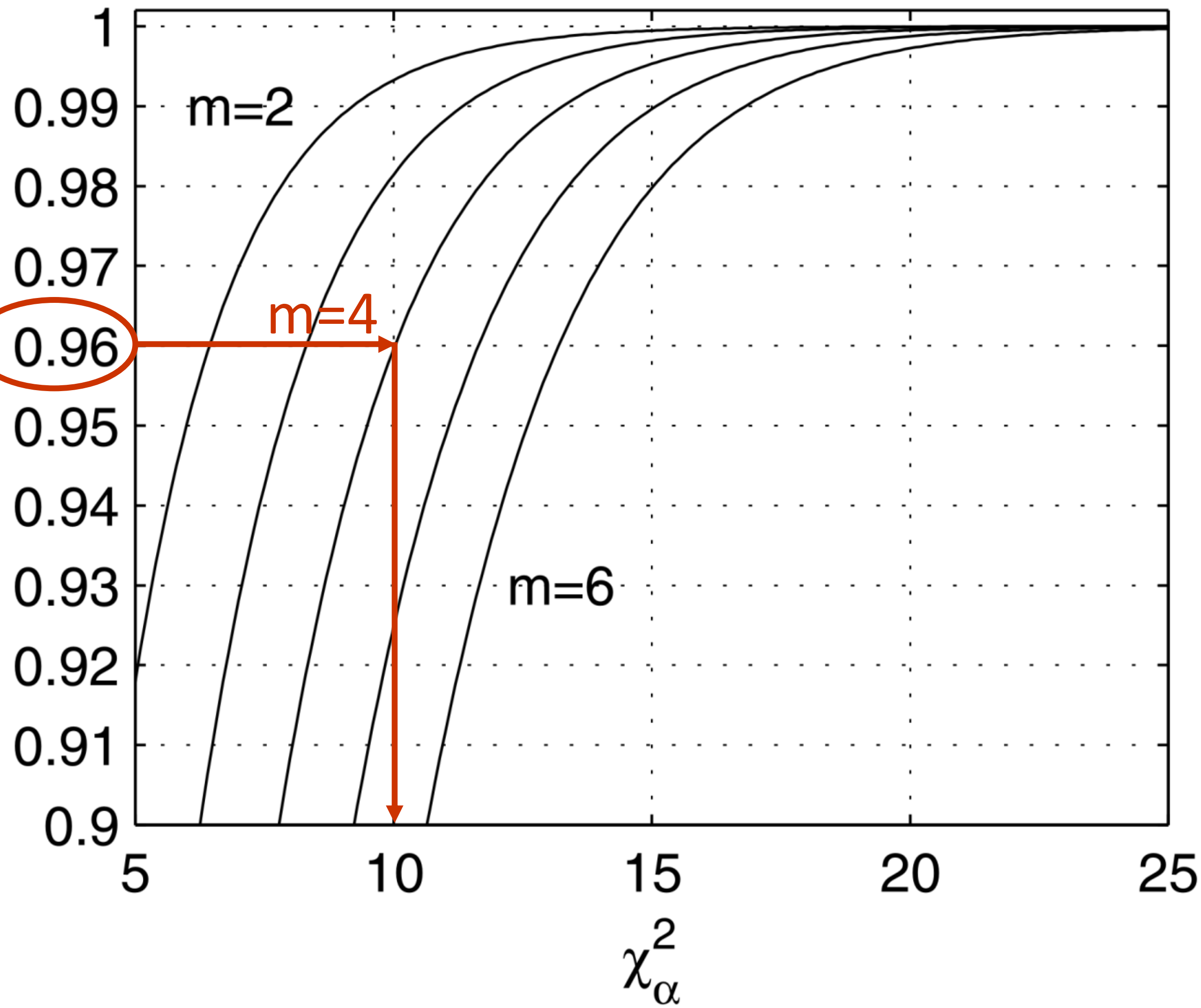
Theorie

Aufgaben

Aufgabe 14: χ^2-Anpassungstest

- Histogramm bereits gegeben → keine Klassen müssen zusammengelegt werden
- Prüfen auf Normalverteilung, deren Parameter aus der Stichprobe selbst geschätzt wurde: zwei Freiheitsgrade weniger

Aufgabe 14: χ^2-Anpassungstest: $\chi_a^{\,2}$ ermitteln



Fragen?

Organisatorisches

Theorie

Aufgaben

Theorie: Fehlerfortpflanzung

- Messwert hängt von mehreren fehlerbehafteten Eingangsgrößen ab:

$$\mathrm{y} = g(\mathrm{u}_0, \mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n)$$

- Abweichung vom wahren Wert mit Taylorreihe abschätzbar

$$\mathbf{u} = [\mathrm{u}_0, \mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n]^\mathsf{T}$$

$$\mathrm{y} \approx \mathrm{y}_0 + \textstyle\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial g(\mu_\mathbf{u})}{\partial \mathrm{u}_i}(\mathrm{u}_i - \mu_{\mathrm{u}_i}) \qquad \frac{\partial g(\mu_\mathbf{u})}{\partial \mathrm{u}_i} = \left.\frac{\partial g(\mathbf{u})}{\partial \mathrm{u}_i}\right|_{\mathbf{u}=\mu_\mathbf{u}}$$

$$E\left\{(\mathrm{y} - \mathrm{y}_0)^2\right\} \approx \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial g(\mu_\mathbf{u})}{\partial \mathrm{u}_i}\frac{\partial g(\mu_\mathbf{u})}{\partial \mathrm{u}_j} C_{\mathrm{u}_i\mathrm{u}_j} \qquad C_{\mathrm{u}_i\mathrm{u}_j} = \rho_{\mathrm{u}_i\mathrm{u}_j}\sigma_{\mathrm{u}_i}\sigma_{\mathrm{u}_j}$$

Theorie: Fehlerfortpflanzung

- wenn u_i paarweise unkorreliert $r_{\mathrm{u}_i\mathrm{u}_j} = 0$

$$E\left\{(\mathrm{y}-\mathrm{y}_0)^2\right\} \approx \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\partial g(\mu_{\mathbf{u}})}{\partial \mathrm{u}_i}\right)^2 \sigma_{\mathrm{u}_i}^2$$

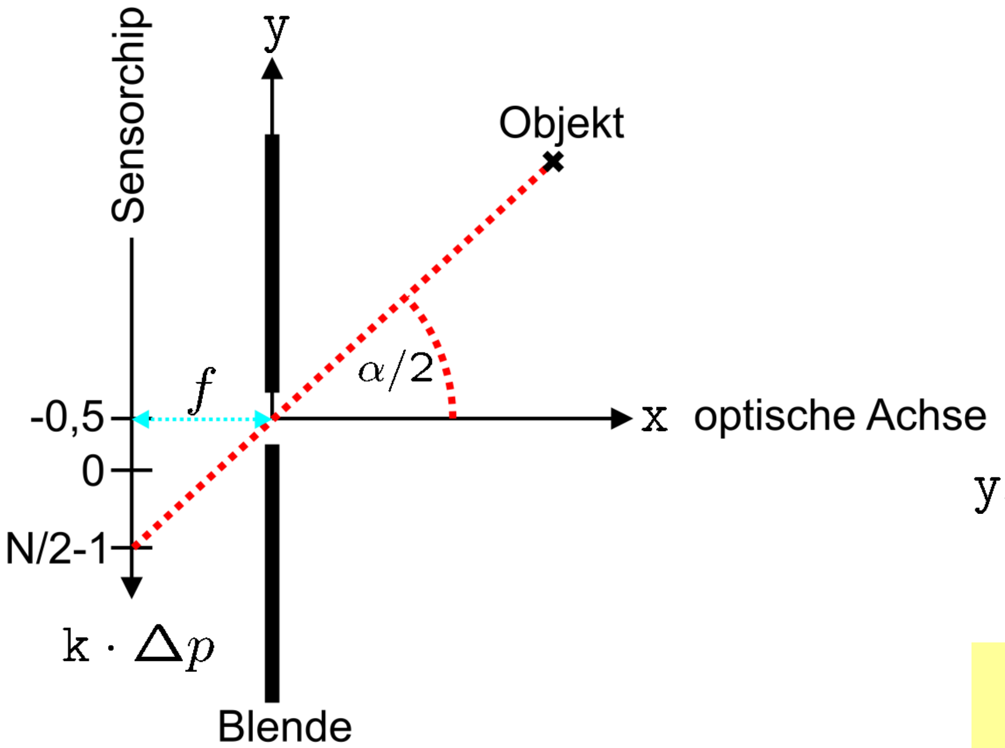
Fragen?

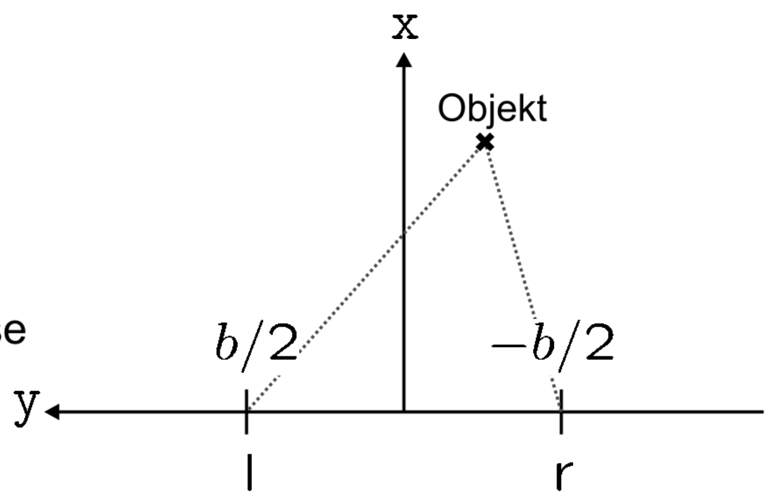
Organisatorisches

Theorie

Aufgaben

Aufgabe 15: Fehlerfortpflanzung





$$x = f_1(k_l, k_r) = \frac{f}{\Delta p}\frac{b}{k_r - k_l}$$

$$y = f_2(k_l, k_r) = \frac{b}{2}\frac{k_r + k_l + 1}{k_r - k_l}$$

Aufgabe 15 a) unabhängige Detektion

k_l

k_r

$$f_{i,j} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial k_j}\right|_{k=k_0}$$

(skalarer Wert)

$$x \approx x_0 + f_{1,l}(k_l - k_{l,0}) + f_{1,r}(k_r - k_{r,0})$$

$$y \approx y_0 + f_{2,l}(k_l - k_{l,0}) + f_{2,r}(k_r - k_{r,0})$$

Bilder:
H. Hirschmüller and D. Scharstein. „Evaluation of cost functions for stereo matching“
In *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR 2007),* Minneapolis, MN, June 2007

Aufgabe 15 a) unabhängige Detektion

Karlsruher Institut für Technologie

$$x = f_1(k_l, k_r) = \frac{f}{\Delta p}\frac{b}{k_r - k_l}$$

$$y = f_2(k_l, k_r) = \frac{b}{2}\frac{k_r + k_l + 1}{k_r - k_l}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial k_l} = \frac{f}{\Delta p}\frac{b}{(k_r - k_l)^2}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial k_r} = -\frac{f}{\Delta p}\frac{b}{(k_r - k_l)^2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial k_l} = \frac{b}{2}\frac{1 + 2k_r}{(k_r - k_l)^2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial k_r} = -\frac{b}{2}\frac{1 + 2k_l}{(k_r - k_l)^2}$$

$$f_{1,l} = -f_{1,r} = \frac{x_0}{k_{r,0} - k_{l,0}}$$

$$f_{2,l} + f_{2,r} = \frac{b}{k_{r,0} - k_{l,0}}$$

$$f_{2,l} - f_{2,r} = \frac{2y_0}{k_{r,0} - k_{l,0}}$$

Aufgabe 15 a) unabhängige Detektion

$$\mathrm{x} \approx \mathrm{x}_0 + f_{1,\mathrm{l}}(\mathrm{k}_\mathrm{l} - \mathrm{k}_{\mathrm{l},0}) + f_{1,\mathrm{r}}(\mathrm{k}_\mathrm{r} - \mathrm{k}_{\mathrm{r},0})$$

$$\mathrm{y} \approx \mathrm{y}_0 + f_{2,\mathrm{l}}(\mathrm{k}_\mathrm{l} - \mathrm{k}_{\mathrm{l},0}) + f_{2,\mathrm{r}}(\mathrm{k}_\mathrm{r} - \mathrm{k}_{\mathrm{r},0})$$

$$C_{\mathrm{k}_\mathrm{l}\mathrm{k}_\mathrm{r}} = 0$$

$$E\left\{\Delta\mathrm{x}^2\right\} = E\left\{(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)^2\right\} \approx E\left\{\left[f_{1,\mathrm{l}}\cdot(\mathrm{k}_\mathrm{l} - \mathrm{k}_{\mathrm{l},0}) + f_{1,\mathrm{r}}\cdot(\mathrm{k}_\mathrm{r} - \mathrm{k}_{\mathrm{r},0})\right]^2\right\}$$

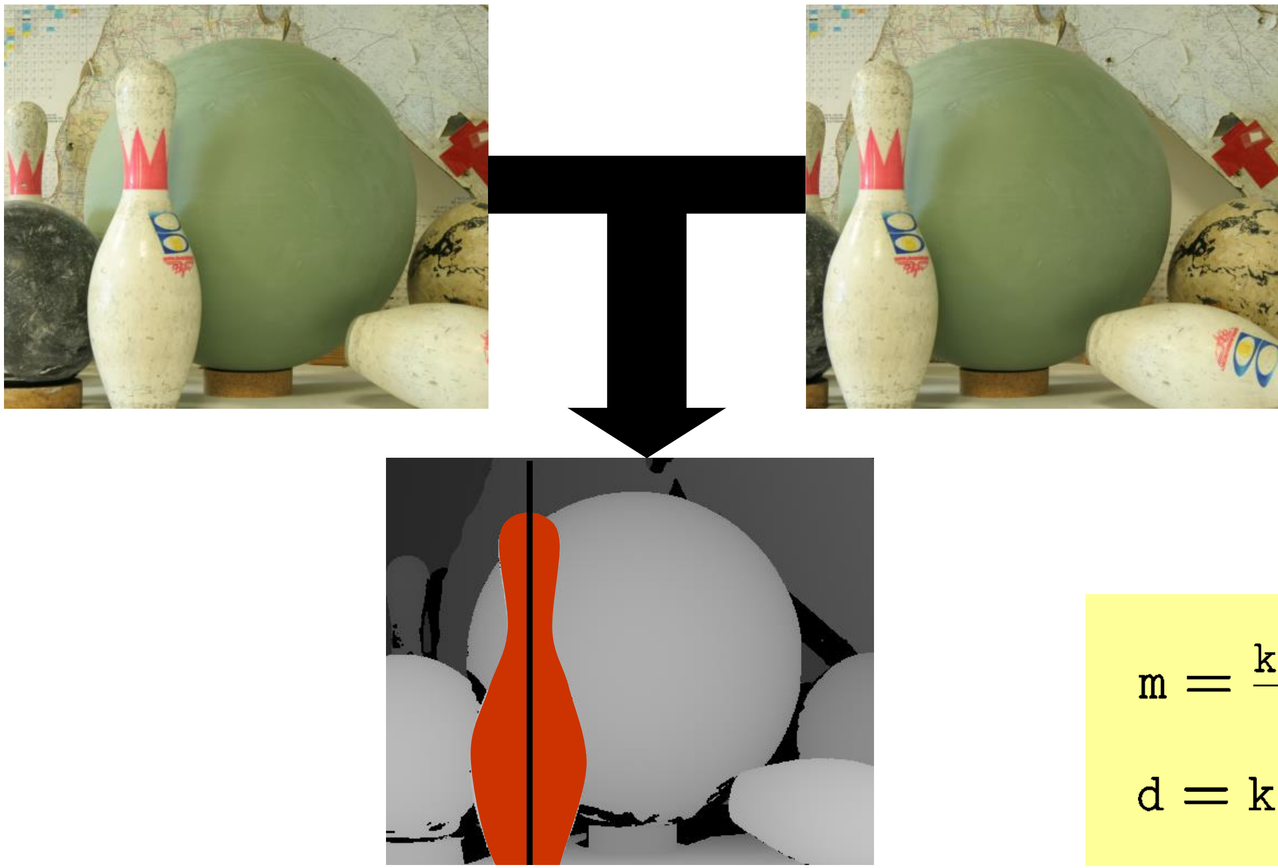
$$= f_{1,\mathrm{l}}^2\cdot\left(\sigma_{\mathrm{k}_\mathrm{l}}^2 - 2C_{\mathrm{k}_\mathrm{l}\mathrm{k}_\mathrm{r}} + \sigma_{\mathrm{k}_\mathrm{r}}^2\right) = \frac{\mathrm{x}_0^2}{\left(\mathrm{k}_{\mathrm{r},0} - \mathrm{k}_{\mathrm{l},0}\right)^2}\left(\sigma_{\mathrm{k}_\mathrm{r}}^2 + \sigma_{\mathrm{k}_\mathrm{l}}^2\right)$$

$$E\left\{\Delta\mathrm{y}^2\right\} = f_{2,\mathrm{l}}^2\sigma_{\mathrm{k}_\mathrm{l}}^2 + f_{2,\mathrm{r}}^2\sigma_{\mathrm{k}_\mathrm{r}}^2$$

$$E\left\{\Delta\mathrm{x}\Delta\mathrm{y}\right\} = f_{1,\mathrm{l}}f_{2,\mathrm{l}}\sigma_{\mathrm{k}_\mathrm{l}}^2 - f_{1,\mathrm{l}}f_{2,\mathrm{r}}\sigma_{\mathrm{k}_\mathrm{r}}^2$$

Aufgabe 15: Fehlerfortpflanzung

- **b)**



$$m = \frac{k_r + k_l}{2}$$

$$d = k_r - k_l$$

Aufgabe 15 b) Detektion in Tiefenkarte

$$E\left\{\mathrm{x}^2\right\} = \sigma_\mathrm{x}^2 + \mu_\mathrm{x}^2$$

$$\mathrm{k_l} = \mathrm{m} - \frac{\mathrm{d}}{2} \Rightarrow \mu_{\mathrm{k_l}} = \mu_\mathrm{m} - \frac{\mu_\mathrm{d}}{2}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\mathrm{k_l}}^2 = E\left\{\mathrm{k_l}^2\right\} - \mu_{\mathrm{k_l}}^2 = E\left\{\mathrm{m}^2 - \mathrm{md} + \frac{\mathrm{d}^2}{4}\right\} - \left(\mu_\mathrm{m}^2 - \mu_\mathrm{m}\mu_\mathrm{d} + \frac{\mu_\mathrm{d}^2}{4}\right)$$

$$= \sigma_\mathrm{m}^2 + \frac{\sigma_\mathrm{d}^2}{4}$$

analog: $\mathrm{k_r} = \mathrm{m} + \frac{\mathrm{d}}{2} \Rightarrow \sigma_{\mathrm{k_r}}^2 = \sigma_\mathrm{m}^2 + \frac{\sigma_\mathrm{d}^2}{4}$

$$C_{\mathrm{k_l k_r}} = E\left\{\mathrm{k_l k_r}\right\} - \mu_{\mathrm{k_l}}\mu_{\mathrm{k_r}} = E\left\{\mathrm{m}^2 - \frac{\mathrm{d}^2}{4}\right\} - \left(\mu_\mathrm{m}^2 - \frac{\mu_\mathrm{d}^2}{4}\right)$$

$$= \sigma_\mathrm{m}^2 - \frac{\sigma_\mathrm{d}^2}{4}$$

Aufgabe 15 b) Detektion in Tiefenkarte

$$\frac{E\left\{\Delta x^2\right\}}{\mathrm{x}_0^2} = \frac{\sigma_{\mathrm{d}}^2}{\mathrm{d}_0^2}$$

$$\frac{E\left\{\Delta y^2\right\}}{\mathrm{y}_0^2} = \left(\frac{b}{\mathrm{y}_0}\right)^2 \frac{\sigma_{\mathrm{m}}^2}{\mathrm{d}_0^2} + \frac{\sigma_{\mathrm{d}}^2}{\mathrm{d}_0^2}$$

$$\frac{E\left\{\Delta x \Delta y\right\}}{\mathrm{x}_0 \mathrm{y}_0} = \frac{\sigma_{\mathrm{d}}^2}{\mathrm{d}_0^2}$$

MATLAB Fragen?

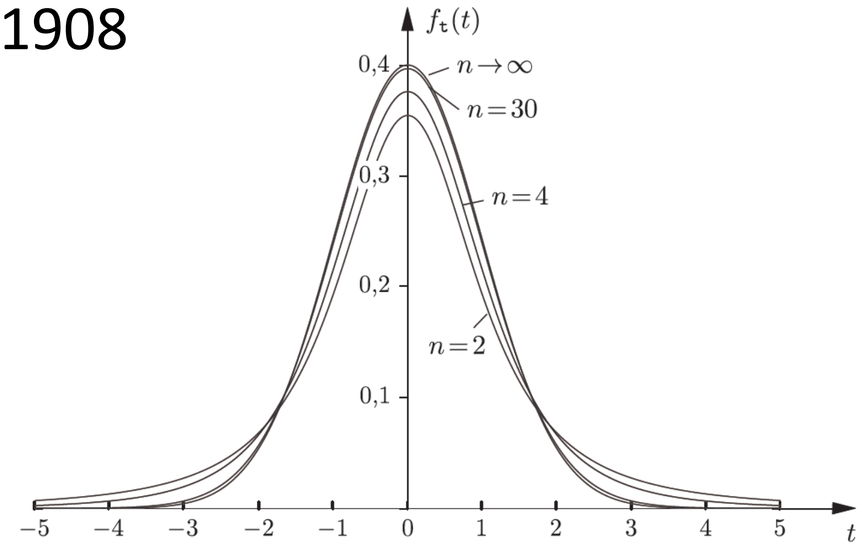
Inhalt der Übung

1. Messfehler
2. Kurvenanpassung
3. Stationäres Verhalten von Messsystemen
4. Zufällige Messfehler
5. Korrelationsmesstechnik
6. Erfassung amplituden-/frequenzanaloger Signale

Frage 3

- Wann unterscheiden sich t-Verteilung und Standardnormalverteilung?

- Bei kleinen Stichprobenumfängen etwa n<30
- William Sealy Gosset im Jahr 1908



Evaluation

- Kurz durchzählen damit Teilnehmerzahl bekannt ist
- Bögen wenn ausgefüllt bitte am Rand stapeln

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

Nächste Übung: 15.01.2015