

5. Übung Messtechnik (15.1.15)

Aufgabe 16: Statistische Ähnlichkeit, Eigenschaften der Korrelationsfunktion

Die statistische Ähnlichkeit zweier reeller, stationärer, stochastischer Signale $x(t)$ und $y(t)$ sei durch die Kreuzkorrelationsfunktion

$$r_{xy}(\tau) = \frac{6\tau^2 + 2\tau - 10}{2\tau - \tau^2}$$

beschrieben. Der Mittelwert von $x(t)$ sei $\mu_x = 2$.

- Berechnen Sie den Mittelwert μ_y von $y(t)$.
- Berechnen Sie die Kreuzkorrelationsfunktion $r_{yx}(\tau)$.
- Berechnen Sie die Kreuzkovarianzfunktionen $C_{xy}(\tau)$ und $C_{yx}(\tau)$.

Aufgabe 17: Korrelation und mittlere Leistung

Zwei stochastische, stationäre Signale $x(t)$ und $y(t)$ werden zu $z(t) = x(t) - y(t)$ subtrahiert.

- Geben Sie allgemein die resultierende Autokorrelationsfunktion $r_{zz}(\tau)$ des Signals $z(t)$ an. Dabei darf $r_{zz}(\tau)$ ausschließlich von den entsprechenden Auto- und Kreuzkorrelationsfunktionen der Eingangssignale $x(t)$ und $y(t)$ abhängen.

Die beiden Signale $x(t)$ und $y(t)$ werden nun gemäß

$$x(t) = A + e(t) \quad , \quad r_{ee}(\tau) = \sigma_e^2 \cdot e^{-|\tau|}$$

$$y(t) = B + n(t) \quad , \quad r_{nn}(\tau) = \sigma_n^2 \cdot e^{-|2\tau|}$$

belegt, wobei die Signale je einen deterministischen Gleichanteil A bzw. B besitzen. Die auftretenden Rauschanteile $e(t)$ und $n(t)$ seien mittelwertfrei und statistisch unabhängig vom jeweils anderen Signal.

- Geben Sie die Kreuzkorrelationsfunktionen $r_{en}(\tau)$ und $r_{ne}(\tau)$ an.
- Wie groß ist die mittlere Leistung $\overline{P}_z$ des resultierenden Differenzsignals $z(t) = x(t) - y(t)$?

Aufgabe 18: Fahrzeugortung mittels Korrelation

In Abb. 1 ist eine vereinfachte Anordnung zur Fahrzeugortung mittels Schall dargestellt. Die Sender an den Positionen (x_A, y_A) und (x_B, y_B) erzeugen jeweils eine harmonische Schwingung $s_A(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ und $s_B(t) = \sin(4\pi f_0 t)$ mit der bekannten Frequenz f_0 . Die Wellenlängen beider Schwingungen sind größer als die größere der beiden Längen a und b . Die Ausbreitung des Schalls erfolgt mit der Geschwindigkeit v_s und ohne Verluste und Dämpfung. Die Zeit in den Sendern und im Fahrzeug ist perfekt synchronisiert, so dass die Signale $s_A(t)$ und $s_B(t)$ im Fahrzeug bekannt sind.

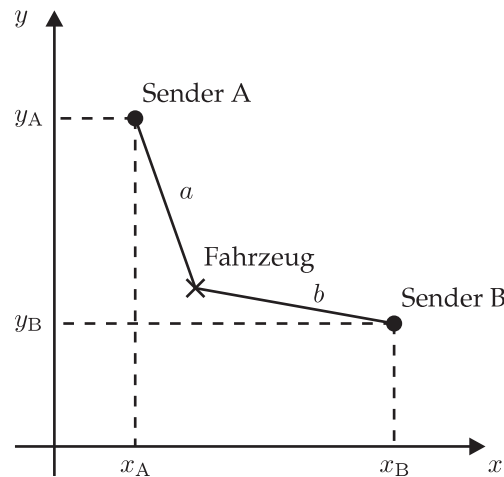


Abbildung 1: Anordnung zur Fahrzeugortung.

- Geben Sie das empfangene Signal $x(t)$ im Empfänger an.
- Zeigen Sie, dass $s_A(t)$ und $s_B(t)$ unkorrelierte Signale sind.
- Berechnen Sie die Kreuzkorrelationsfunktionen $r_{xs_A}(\tau)$ und $r_{xs_B}(\tau)$ und bestimmen Sie damit die Entfernungen a und b .
- Beschreiben Sie stichpunktartig ein Lokalisationsverfahren mit dieser Anordnung. Sind zwei Sender für eine eindeutige Lokalisation ausreichend?

Aufgabe 19: Korrelation und Leistungsdichte

- In Abb. 2 finden Sie Zeitfunktionen $x(t)$, deren Autokorrelationsfunktionen $r_{xx}(\tau)$ sowie die zugehörigen Leistungsdichten $S_{xx}(f)$. Die Bilder sind jedoch in ihrer Reihenfolge vertauscht. Ordnen Sie daher den Zeitfunktionen (A–H) die zugehörigen Autokorrelationen (1–8) und die entsprechenden Leistungsdichten (I–VIII) zu. Geben Sie für Ihre Zuordnung jeweils eine Begründung an.

Aufgabe 20: Identifikation von LTI-Systemen

Um ein System mit einer unbekannten Übertragungsfunktion $G(s)$ zu identifizieren, wird dem System ein Modell $G_M(s)$ parallel geschaltet und beide Übertragungsfunktionen mit dem gleichen Anregungssignal $x(t)$ gespeist. Durch Differenzbildung der beiden verschiedenen Ausgänge erhält man

ein Fehlersignal $e(t)$ für das modellierte System. Das so entstehende Gesamtsystem ist in Abb. 3 zu sehen.

Beide Systeme seien durch einen Rauschgenerator RG mit Gauß'schem weißen Rauschen mit einer Leistungsdichte von $S_{nn}(f) = \sigma_n^2$ angeregt. Die Autokorrelationsfunktion am Ausgang des eigentli-

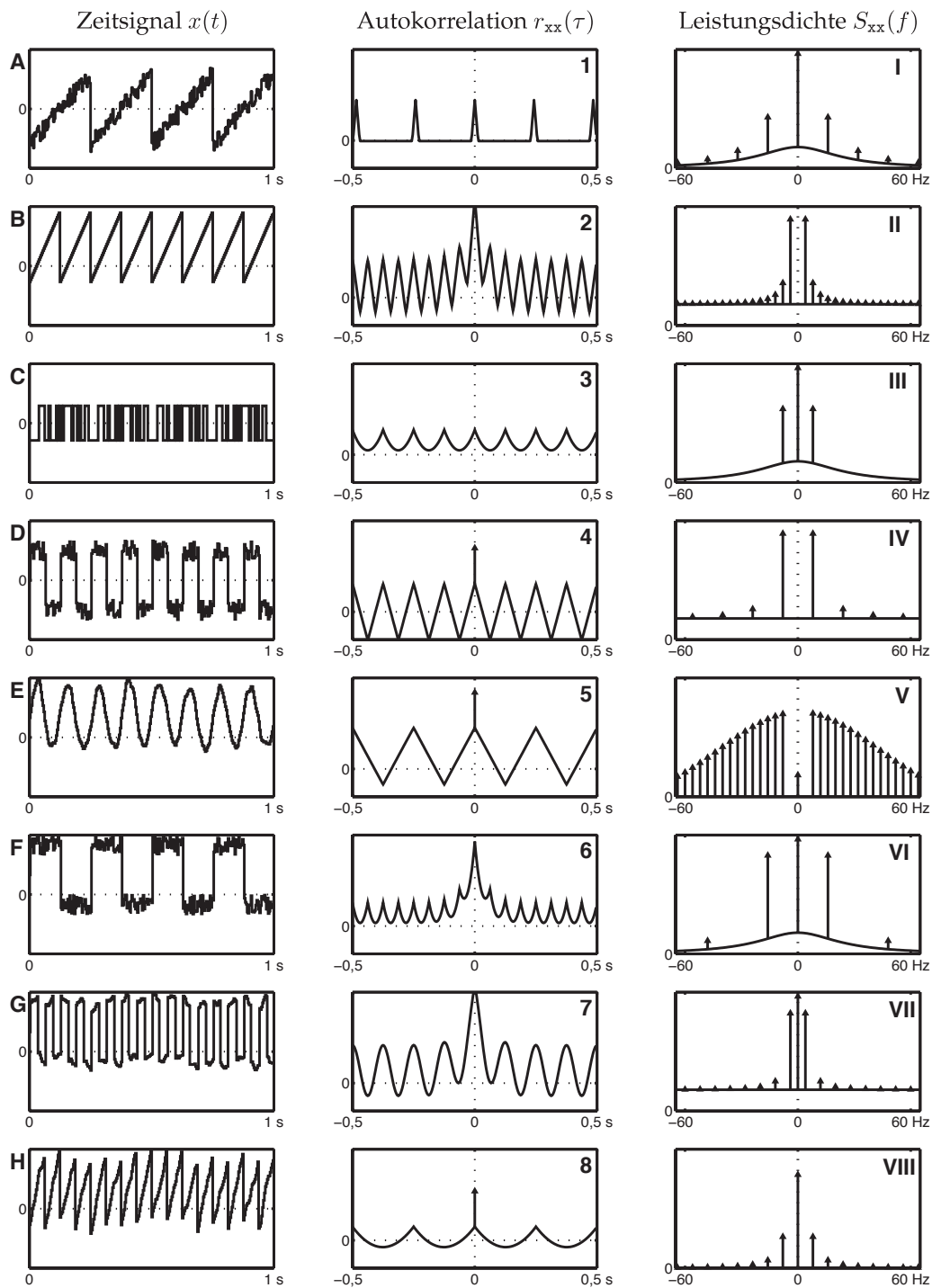


Abbildung 2: Zeitsignale, Autokorrelationsfunktionen und Leistungsdichten.

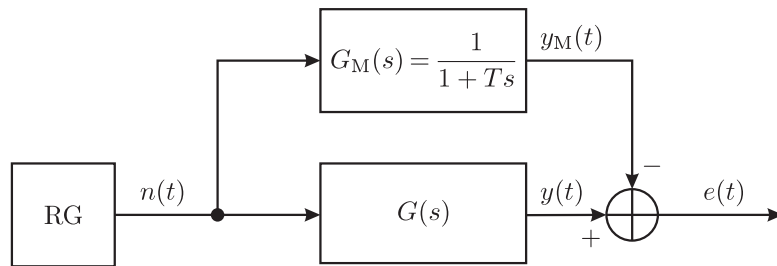


Abbildung 3: Gesamtsystem.

chen Systems beträgt

$$r_{yy}(\tau) = \frac{a}{2} e^{-b|\tau|}, \quad b > 0.$$

- Bestimmen Sie die Leistungsdichte $S_{yy}(f)$ des Ausgangssignals.
- Geben Sie mit Hilfe der in **a)** berechneten Leistungsdichte das Betragsquadrat der Übertragungsfunktion $|G(f)|^2$ an.
- Berechnen Sie die Leistungsdichte $S_{ee}(f)$ des Fehlersignals, wenn die Übertragungsfunktion des Systems als

$$G(f) = \frac{\sqrt{ab}}{\sigma_n(b + j2\pi f)}$$

bekannt ist.