5. Übung zu Messtechnik

WS 2014/15

Evaluation

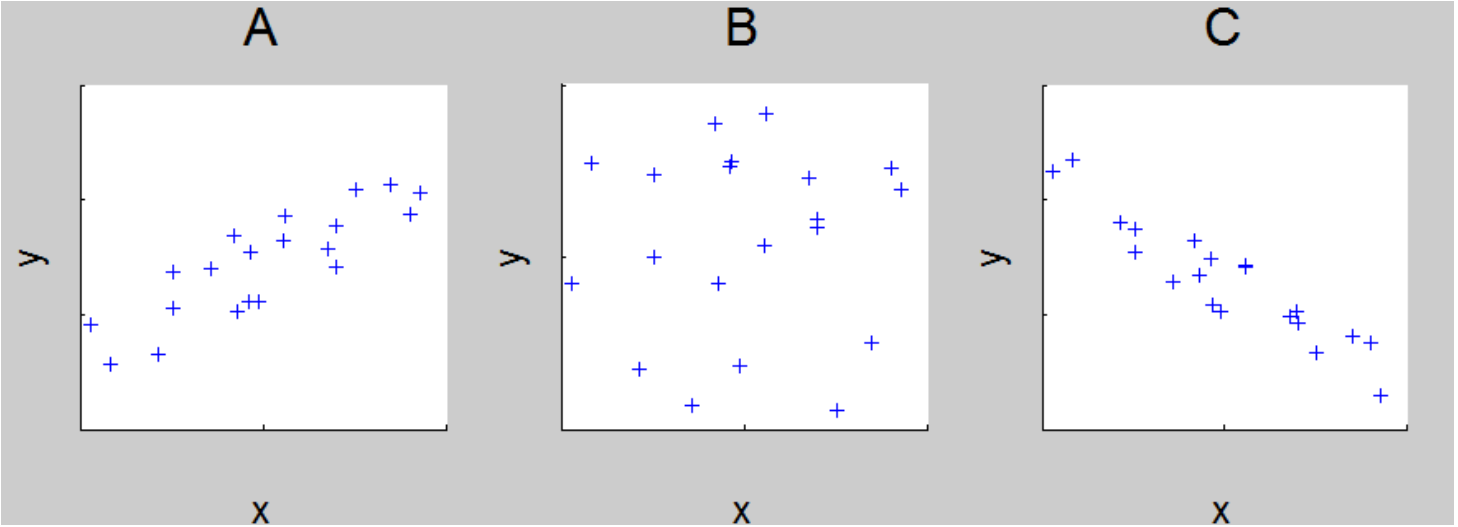
- Termin
- Schrift

Frage 1

- Welcher Korrelationskoeffizient gehört zu welchem Datensatz ?

I: -0,93

- II: 0,05
- III: 0,85



- Antwort
- A: III
- B: II
- C: I

Inhalt der Übung

1. Messfehler
2. Kurvenanpassung
3. Stationäres Verhalten von Messsystemen
4. Zufällige Messfehler
5. Korrelationsmesstechnik
6. Erfassung amplituden-/frequenzanaloger Signale

Organisatorisches

Theorie

Aufgaben

Theorie: Korrelationsmesstechnik

- Zufällige Verfälschung *einzelner* Messwerte
  - Zufallsvariablen

- Signalverläufe mit *zeitlich veränderlicher* zufälliger Verfälschung
  - Stochastische Prozesse

Theorie: Stochastische Prozesse (1)

- Ein stochastischer Prozess $\mathrm{Y}(t, \xi)$ ist eine Funktionenschar, die jedem Zufallsereignis ξ eine Zeitfunktion $y_\xi(t)$ zuordnet.

$\mathrm{Y}(t, \xi)$	t fest	t variabel
ξ fest	Zahlenwert	Musterfunktion
ξ variabel	Zufallsvariable	stochastischer Prozess

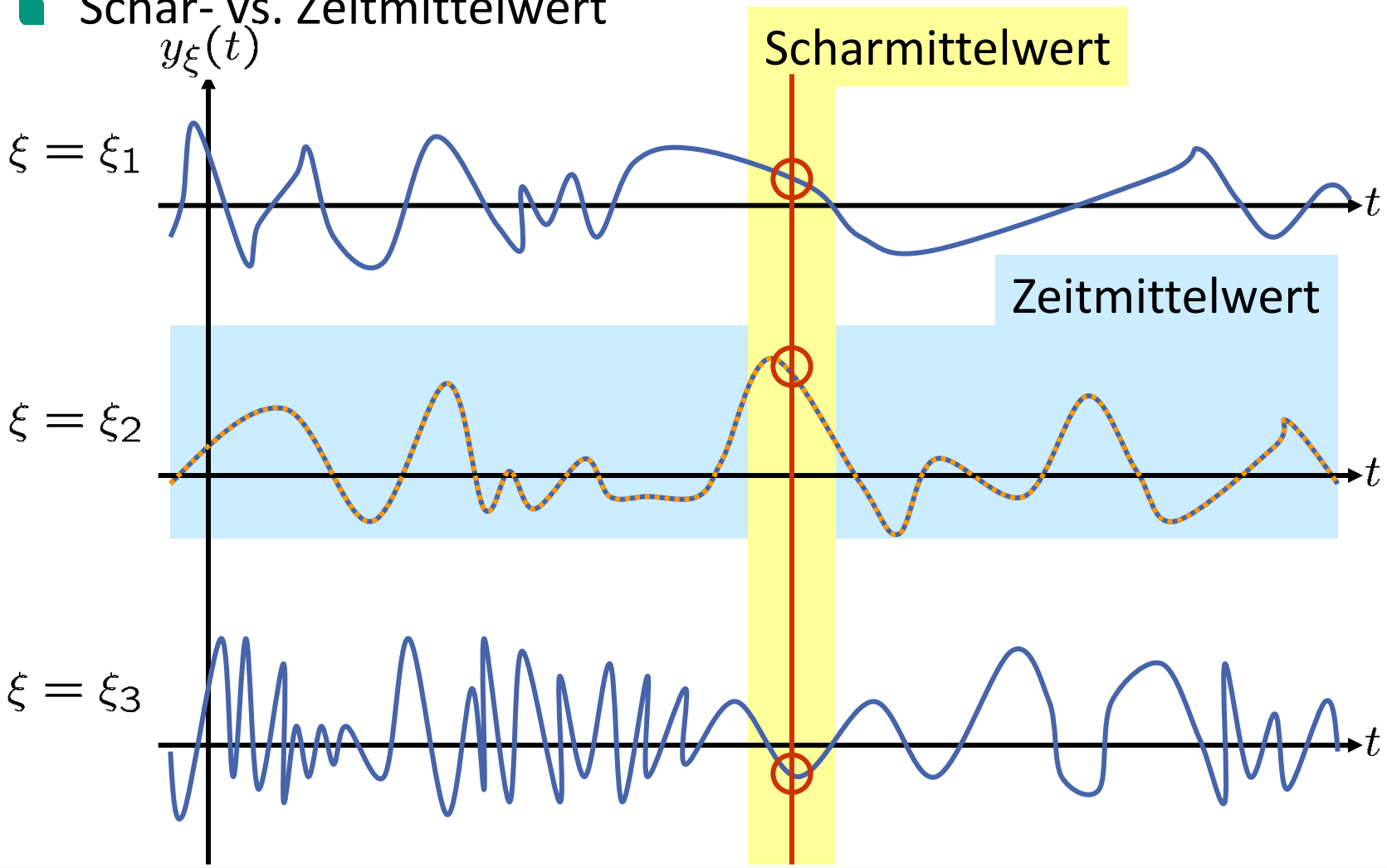
Theorie: Stochastische Prozesse (2)

- Momente (insbesondere Auto-/Kreuzkorrelation bzw. -kovarianz) analog zu normalen Zufallsvariablen

- Stationarität (stat. Eigenschaften sind zeitinvariant)
  - $f_{\mathrm{Y}}(y,t) = f_{\mathrm{Y}}(y,t+t_0) = f_{\mathrm{Y}}(y)$
  - $f_{\mathrm{YY}}(y,y,t_1,t_2) = f_{\mathrm{YY}}(y,y,\tau = t_2 - t_1)$
- Schwache Stationarität sobald
  - $E\{\mathrm{Y}(t)\} = \mu_y$
  - $r_{\mathrm{YY}}(t_1,t_2) = E\{\mathrm{Y}(t_1)\mathrm{Y}(t_2)\} = r_{\mathrm{YY}}(\tau)$

Theorie: Stochastische Prozesse

- Schar- vs. Zeitmittelwert



Theorie: Stochastische Prozesse

- Ergodizität
  - Beide Mittelungen liefern gleiche Ergebnisse

$$E\left\{\mathrm{x}_{t_0}(\xi)\right\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X_{\xi_0}(t)dt$$

  - Stationarität ist Vorraussetzung für Ergodizität
    - Energiesignale können keine Musterfunktionen von ergodischen Prozessen sein, da sie nicht stationär sind
  - i.A. nicht nachweisbar, wird aber häufig angenommen, da nur (Näherungen der) Zeitmittelwerte verfügbar sind

Theorie: Leistungssignale

- $x(t)$ ist Leistungssignal wenn

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)\mathrm{d}x$$

divergiert

aber

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)x^*(t)\mathrm{d}x$$

existiert

- beschränkte periodische Signale sind Leistungssignale
- Leistungssignale können Musterfunktionen ergodischer Prozesse sein
- Häufige Annahme zum Rechnen mit Leistungssignalen
  - Signal ist Musterfunktion eines ergodischen Prozesses
  - sämtliche stochastischen Erwartungswerte (Scharmittelwerte) können dann aus den entsprechenden Zeitmittelwerten dieser einzelnen Musterfunktion bestimmt werden

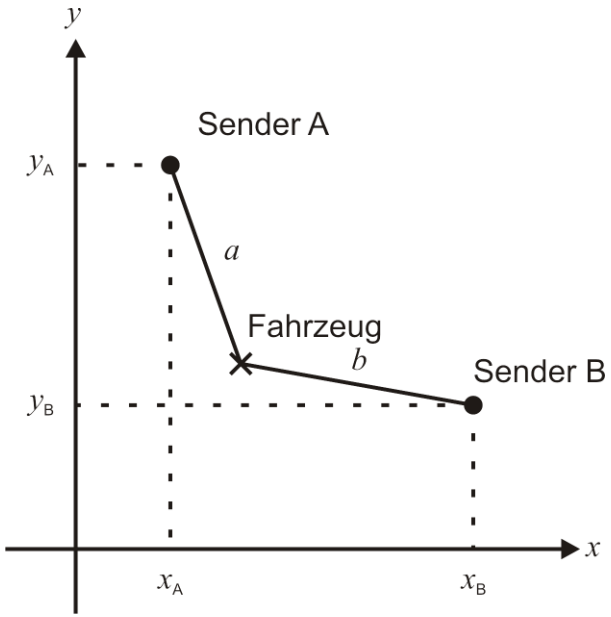
Fragen?

Organisatorisches

Theorie

Aufgaben

Aufgabe 18: Fahrzeugortung mittels Korrelation



$$s_A(t) = \sin(2\pi f_0 t)$$

$$s_B(t) = \sin(4\pi f_0 t)$$

- **a)** Geben Sie $x(t)$ an.
- **b)** Zeigen Sie, dass $s_A(t)$ und $s_B(t)$ unkorreliert sind.
- **c)** Bestimmen Sie a und b über die Kreuzkorrelationen zwischen Sende- und Empfangssignal.
- **d)** Skizzieren Sie damit ein Verfahren zur Fahrzeuglokalisation.

Aufgabe 18 d) Lokalisierung

- $s_{\mathrm{A/B}}(t)$ bekannt, $x(t)$ messen
- $R_{xs_{\mathrm{A/B}}}(\tau)$ annähern durch $R^{\mathrm{E}}_{xs_{\mathrm{A/B}}}(\tau)$
- Maxima im Bereich $\left[0, \frac{T_0}{2}\right]$ extrahieren $\Rightarrow a/b$
- Umkreise mit Radien a und b um Sender schneiden

MATLAB Fragen?

Frage 2

- Welcher stochastische Test wurde behandelt, um zu testen ob eine Verteilung beispielsweise eine Dreiecksverteilung besitzt?

- χ^2-Anpassungstest

Organisatorisches

Theorie

Aufgaben

Theorie: Korrelation (1)

- Summe unkorrelierte Signale $\mathrm{z}(t) = \mathrm{x}(t) + \mathrm{y}(t)$

$$R_{\mathrm{zz}}(t_1, t_2) = E\left\{\left(\mathrm{x}(t_1) + \mathrm{y}(t_1)\right)\left(\mathrm{x}(t_2) + \mathrm{y}(t_2)\right)\right\}$$
$$= R_{\mathrm{xx}}(t_1, t_2) + \mu_{\mathrm{x}}(t_1)\mu_{\mathrm{y}}(t_2) + \mu_{\mathrm{y}}(t_1)\mu_{\mathrm{x}}(t_2) + R_{\mathrm{yy}}(t_1, t_2)$$

- Sobald eines der beiden mittelwertfrei ist

$$= R_{\mathrm{xx}}(t_1, t_2) + R_{\mathrm{yy}}(t_1, t_2)$$

Theorie: Korrelation (2)

- Signal zerlegbar in Zeitmittelwert und mittelwertfreies Signal

$$x(t) = \tilde{x}(t) + \bar{x}$$

- Auswirkung auf die Korrelation

$$\begin{aligned} R_{xx}(t_1, t_2) &= E\left\{\left(\tilde{x}(t_1) + \bar{x}\right)\left(\tilde{x}(t_2) + \bar{x}\right)\right\} \\ &= R_{\tilde{x}\tilde{x}}(t_1, t_2) + \bar{x} \cdot \left(E\left\{\tilde{x}(t_1)\right\} + E\left\{\tilde{x}(t_2)\right\}\right) + \bar{x}^2 \\ &= R_{\tilde{x}\tilde{x}}(t_1, t_2) + \bar{x}^2 \end{aligned}$$

- $\Rightarrow$ Offset im Zeitbereich $\Leftrightarrow$ quadrierter Offset bei AKF

Theorie: Korrelation (3)

- Multiplikation mit einer Konstanten

$$z(t) = A \cdot x(t)$$

$$R_{zz}(t_1, t_2) = E\left\{A^2 x(t_1) \cdot x(t_2)\right\} = A^2 \cdot R_{xx}(t_1, t_2)$$

- Periodische Funktion → AKF hat gleiche Periodendauer

$$x(t + T_0) = x(t)$$

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau + T_0) &= E\{x(t + \tau + T_0)x(t)\} \\ &= E\{x(t + \tau)x(t)\} = R_{xx}(\tau) \end{aligned}$$

Theorie: Leistungsdichtespektrum

- Definition über Fourier-Transformation der Korrelationsfunktion (sonst Schwierigkeiten mit Produkten von δ-Impulsen möglich)

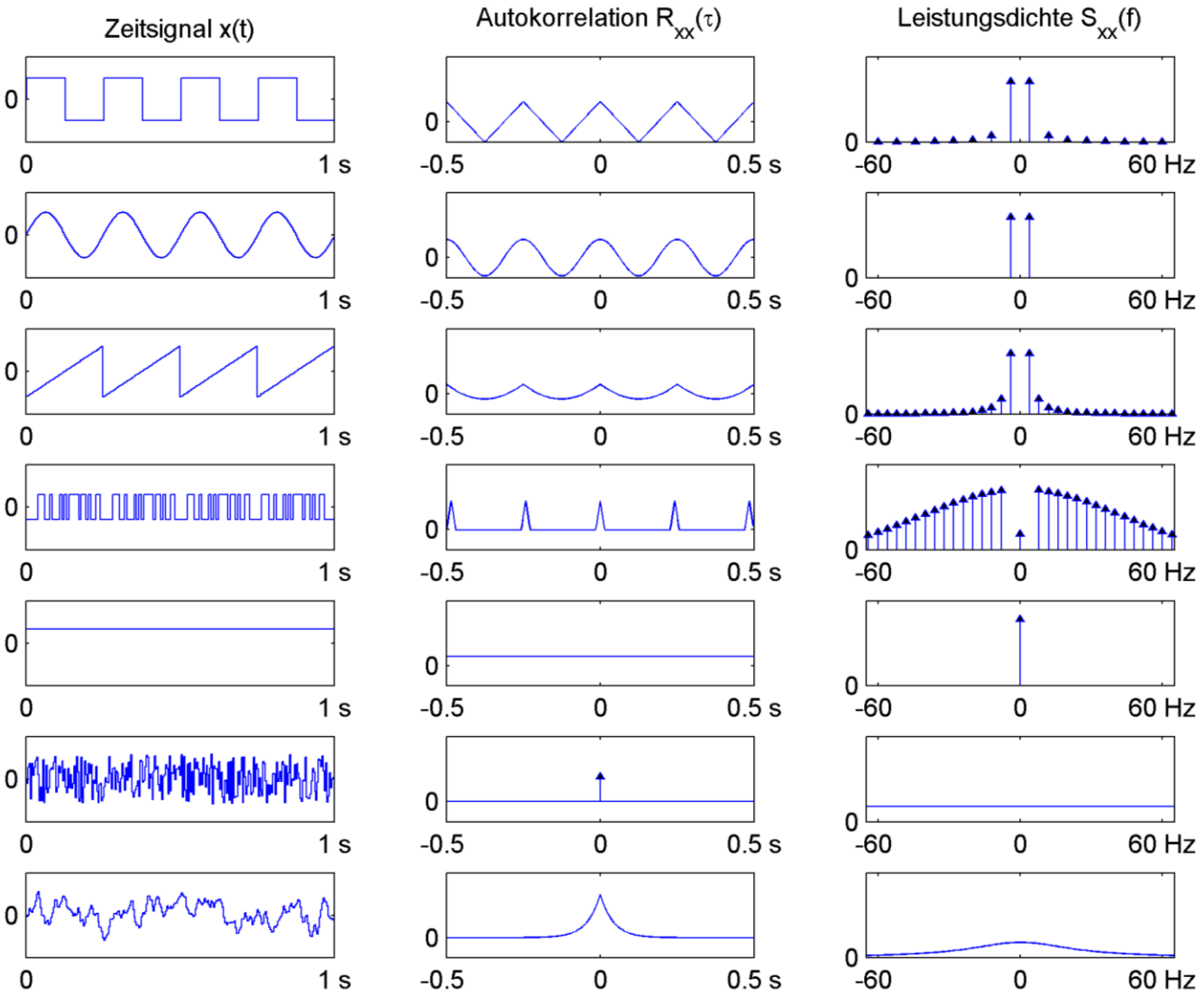
$$S_{\mathrm{xy}}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\mathrm{xy}}(\tau)\mathrm{e}^{-j2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau$$

  - Verteilung der Leistung des Signals über die Frequenzen

- Mittlere Leistung des Signals

$$\overline{P}_{\mathrm{x}} = E\left\{\mathrm{x}^2(t)\right\} = R_{\mathrm{xx}}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathrm{xx}}(f)\mathrm{d}f$$

Theorie: Übersicht



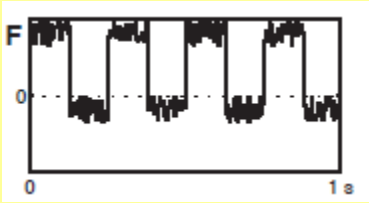
Organisatorisches

Theorie

Aufgaben

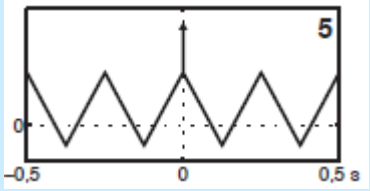
Aufgabe 19 F) Exemplarisch

- Zeitbereich: Signal in unkorrelierte Bestandteile zerlegen
  - Rechtecksignal $f_0 = 4\mathrm{Hz}, A$
  - Offset B
  - weißes Rauschen mit Varianz C



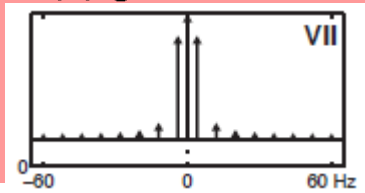
F

- AKF der Summe = Summe der AKFs
  - Dreiecksignal $f_0 = 4\mathrm{Hz}, A^2$
  - Offset B^2
  - Dirac-Impuls $C^2 \cdot \delta(\tau)$



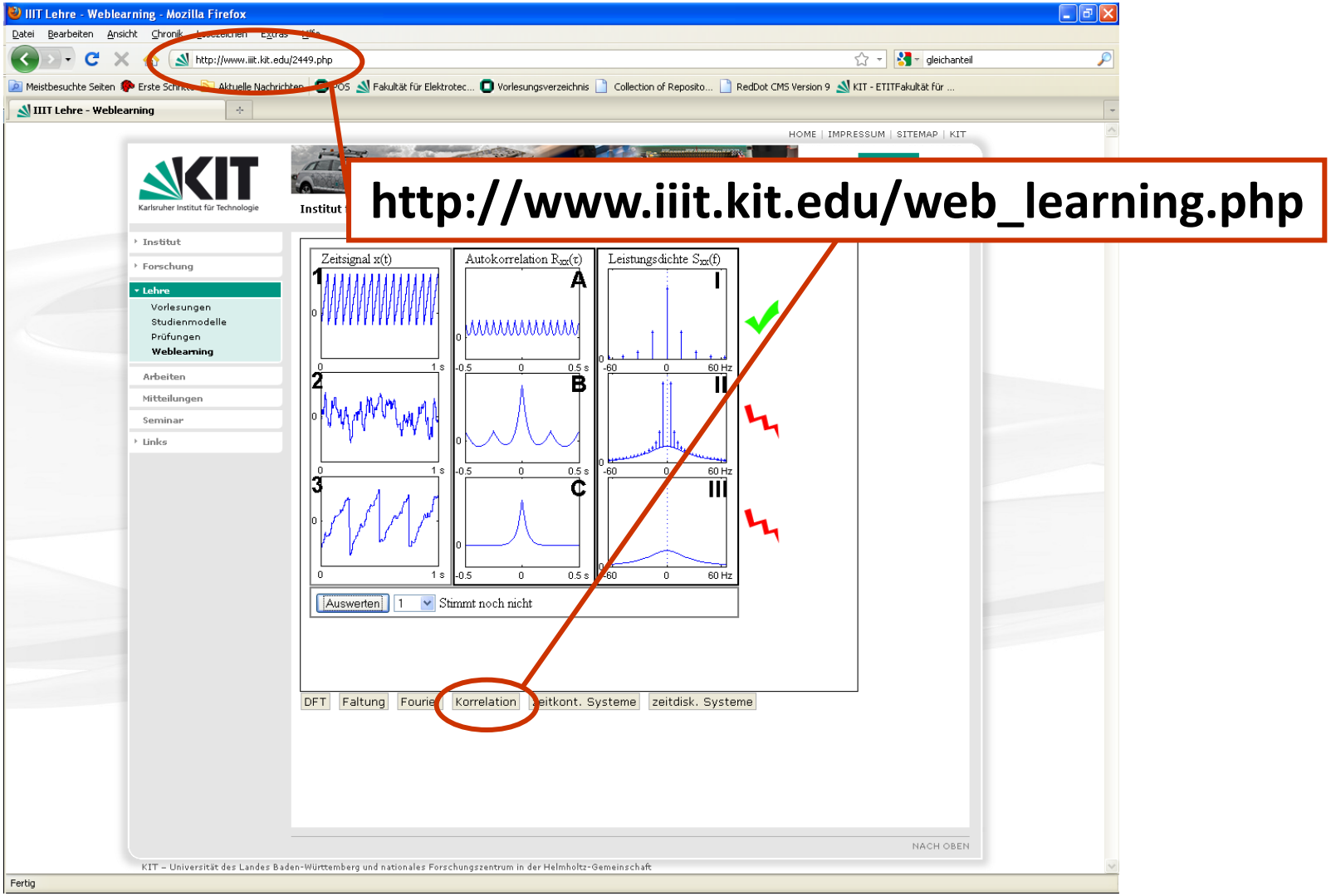
5

- LDS = Fourier-Transformierte der AKF
  - abklingende Impulse bei $f = (2k+1)f_0, \quad k \in \mathbb{Z}$
  - Dirac-Impuls $B^2 \cdot \delta(f)$
  - Offset C^2



VII

IIIT-Homepage: Weblearning und Frage 3



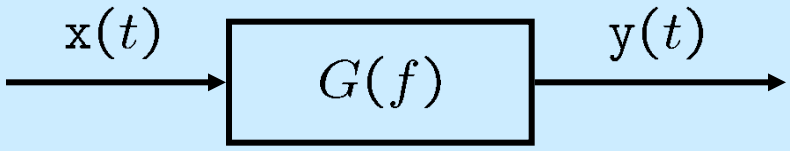
Organisatorisches

Theorie

Aufgaben

Theorie: Leistungsdichtespektrum und LTI-Systeme

- Satz 6.6 Ergodische Prozesse in LTI-Systemen



$$S_{xy}(f) = S_{xx}(f) \cdot G^*(f)$$
$$S_{yy}(f) = S_{xy}(f) \cdot G(f)$$
$$= S_{xx}(f) \cdot |G(f)|^2$$

Theorie: Periodogramm

- In Praxis nur endliche Beobachtungsdauern möglich
  - Fourier-Transformierte des Messsignals existiert sicher
  - Autoleistungsdichte abschätzbar über Periodogramm

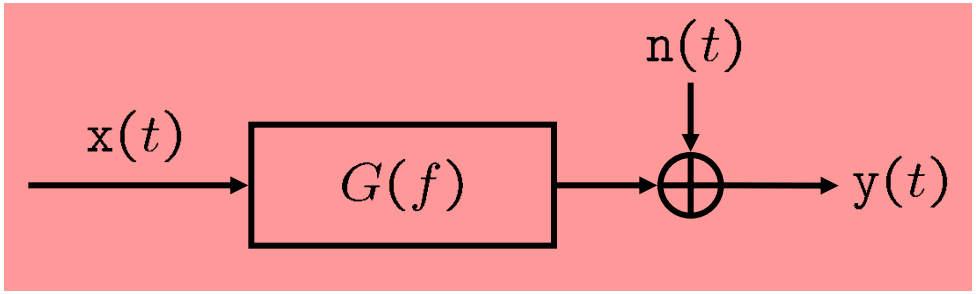
$$S_{xx}(f) \approx \widehat{S}_{xx}(f) = X(f)X^*(f)$$

  - Häufig noch Mittelung zur Verbesserung der Schätzung

$$\overline{\widehat{S}_{xx}(f)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \widehat{S}_{xx,i}(f)$$

Theorie: Systemidentifikation

- Beschalten des Systems mit breitbandigem Signal $\mathrm{x}(t)$
- Messen des Ausgangssignals $\mathrm{y}(t)$



- Möglichkeit 1:
  - kein Phasengang rekonstruierbar
  - großer Einfluss der Störung $\mathrm{n}(t)$

$$\left|\widehat{G}(f)\right|^2 = \frac{\overline{\widehat{S}_{yy}(f)}}{\overline{\widehat{S}_{xx}(f)}}$$

- Möglichkeit 2:
  - Phasengang rekonstruierbar
  - Einfluss der Störung $\mathrm{n}(t)$ geringer

$$\widehat{G}(f) = \frac{\overline{\widehat{S}_{yx}(f)}}{\overline{\widehat{S}_{xx}(f)}}$$

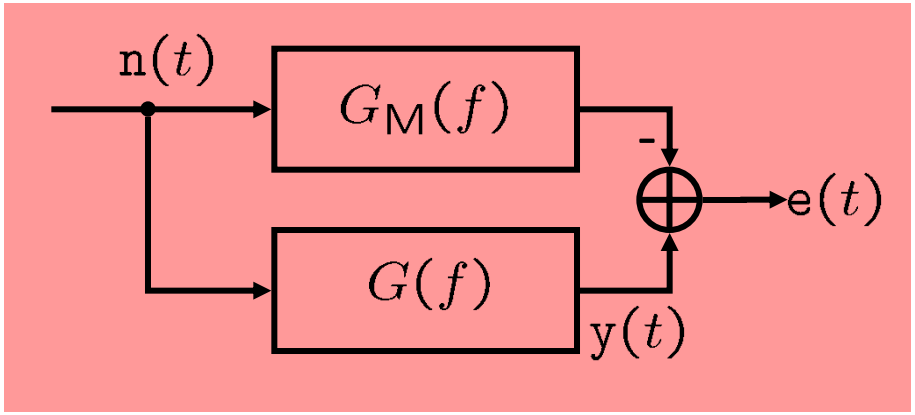
Organisatorisches

Theorie

Aufgaben

Aufgabe 20: Systemidentifikation von LTI-Systemen

- Bekannt: $R_{\mathrm{yy}}(\tau)$, $S_{\mathrm{nn}}(f)$ und $G_{\mathrm{M}}(f)$.



- **a)** Bestimmen Sie $S_{\mathrm{yy}}(f)$.
- **b)** Bestimmen Sie $|G(f)|^2$.
- **c)** Bestimmen Sie $S_{\mathrm{ee}}(f)$ wenn $G(f) = \dfrac{\sqrt{ab}}{\sigma_{\mathrm{n}}(b + j2\pi f)}$.

Aufgabe 20 a) Leistungsdichte des Ausgangssignals

$$S_{yy}(f) = \mathfrak{F}\{R_{yy}(\tau)\}$$

Definition

$$= \frac{a}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b|\tau|} e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Einsetzen

$$= \frac{a}{2} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{\tau(b-j2\pi f)} d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-\tau(b+j2\pi f)} d\tau \right]$$

Betrag auflösen

$$= \frac{a}{2} \left[\frac{e^{\tau(b-j2\pi f)}}{b-j2\pi f}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{e^{-\tau(b+j2\pi f)}}{b+j2\pi f}\Big|_{0}^{\infty} \right]$$

Stammfunktionen bilden

$$= \frac{a}{2} \left[\frac{1}{b-j2\pi f} + \frac{1}{b+j2\pi f} \right]$$

Grenzen einsetzen

$$= \frac{ab}{b^2 + (2\pi f)^2}$$

Aufgabe 20 b) $|G(f)|^2$

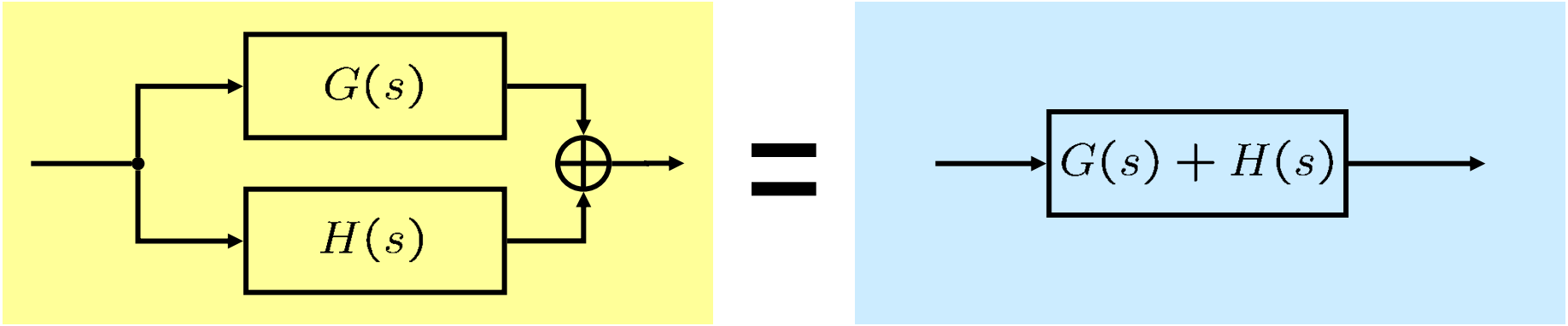
- vgl. Theorieteil

$$|G(f)|^2 = \frac{S_{\mathrm{yy}}(f)}{S_{\mathrm{nn}}(f)} = \frac{ab}{b^2 + (2\pi f)^2} \cdot \frac{1}{\sigma_{\mathrm{n}}^2}$$

- $S_{\mathrm{ny}}(f)$ laut Aufgabenstellung nicht bekannt, d.h. kein Phasengang rekonstruierbar

Aufgabe 20 c) Leistungsdichte des Fehlersignals

- LTI-Systeme



- Anwenden und Einsetzen

$$S_{\mathrm{ee}}(f) = S_{\mathrm{nn}}(f) \cdot |G(f) - G_{\mathrm{M}}(f)|^2$$

$$= \sigma_{\mathrm{n}}^2 \left| \frac{\sqrt{ab}}{\sigma_{\mathrm{n}}(b + \mathrm{j}2\pi f)} - \frac{1}{1 + \mathrm{j}2\pi f T} \right|^2$$

Fragen?

Viel Spaß in der Vorlesung!

Nächste Übung:

29.01.2015