

Übungen zur Messtechnik

9. Auflage, 2015

Aufgabe 1: Untersuchung der Radlast

Die Radlast F_L an einem Pkw-Reifen soll mittels eines einfachen Modells untersucht werden (Abb. 1). Die Felge und der Reifen seien masselos. Der luftgefüllte Reifen mit Radius r wird durch die vom Boden aufgebraute Gegenkraft zu F_L verformt. Der Reifenluftdruck p_0 wirke auf die Auflagefläche der Seitenlänge a und baue die Gegenkraft des Reifens auf. Der Reifengummi sei dabei kraftlos verformbar.

Die Geometriegrößen des Reifens seien die Reifenbreite b , die radiale Reifendicke d , der Einfederweg x des Reifens und der statische Reifenradius r bei $F_L = 0$ und $x = 0$.

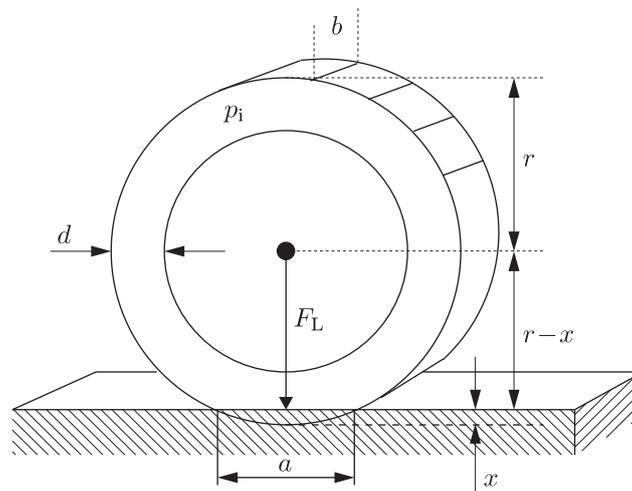


Abbildung 1: Modell zur Verformung eines Reifens.

Der Reifeninnendruck p_i mit dem Volumen V des Reifens ändert sich aufgrund der Verformung bzw. Belastung. Ausgehend von einer konstanten Reifentemperatur T gelte die allgemeine Gasgleichung,

$$p_i(x) \cdot V(x) = mRT$$

mit der Gasmasse m und der allgemeinen Gaskonstante R .

- a) Berechnen Sie die Radlast $F_L(x)$ unter Berücksichtigung des veränderlichen Druckes $p_i(x)$.

- b) Führen Sie eine Linearisierung von $p_i(x)$ um den Arbeitspunkt $x_0 = 0$ durch. Verwenden Sie dazu die Taylor-Entwicklung und brechen Sie nach dem linearen Term die Entwicklung ab. Berechnen Sie damit erneut die Radlast $\tilde{F}_L(x)$.

Hinweis: $\tilde{p}_i(x) = p_i(x_0) + \left. \frac{\partial p_i(x)}{\partial x} \right|_{x=x_0} (x - x_0)$

Es soll nun der Fehler gegenüber dem Druck $p_i(x)$ untersucht werden, der durch die Linearisierung entsteht.

- c) Geben Sie den relativen Fehler $F_r(x)$ der Radlast $\tilde{F}_L(x)$ bezogen auf $F_L(x)$ an.
 d) Skizzieren Sie $F_r(x)$ in einem Diagramm. Der Einfederweg x sei im Bereich $1 \text{ mm} \leq x \leq 25 \text{ mm}$, der Reifenradius r betrage 30 cm, die radiale Reifendicke d sei 20 cm und die Reifenbreite b sei 20 cm.

Lösung

- a) Gesucht ist $F_L(x)$. Es gilt

$$F_L(x) = p_i(x) A(x), \quad (\text{L1})$$

wobei die Auflagefläche $A(x)$ des Reifens sich zu

$$A(x) = a(x) b \quad (\text{L2})$$

berechnet. Nimmt man an, dass die Temperatur T konstant bleibt, ist auch $mRT = p_0 V_0$ konstant (R ist hierbei die Gaskonstante). Damit lässt sich die allgemeine Gasgleichung umformen zu:

$$p_i(x) = \frac{mRT}{V(x)} = \frac{p_0 V_0}{V(x)}. \quad (\text{L3})$$

Die bisher unbekanntenen Größen $a(x)$, V_0 und $V(x)$ müssen noch bestimmt werden.

$a(x)$:

Es gilt der Satz des Pythagoras:

$$\left(\frac{a(x)}{2} \right)^2 + (r - x)^2 = r^2. \quad (\text{L4})$$

Auflösen nach a liefert:

$$a(x) = 2\sqrt{2rx - x^2}. \quad (\text{L5})$$

V_0 :

Das Volumen des Reifens im Ausgangszustand V_0 , berechnet sich zu:

$$V_0 = V_{\text{außen}} - V_{\text{innen}} = b\pi r^2 - b\pi(r - d)^2 = b\pi d(2r - d). \quad (\text{L6})$$

$V(x)$:

Es gilt $V(x) = V_0 - V_a(x)$, wobei $V_a(x)$ den Teil des Reifens bezeichnet, der durch die Verformung entfernt wird.

$$V_a(x) = V_{\text{Sektor}} - V_{\Delta} = b \cdot (A_{\text{Kreisausschnitt}} - A_{\text{Dreieck}})$$

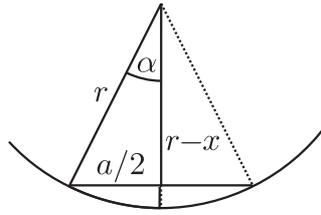


Abbildung L1: Reifengeometrie.

Mit den Berechnungsformeln für Kreisausschnitte (eventuell Umrechnung zwischen Bogenmaß und Gradmaß beachten) und Dreiecke erhält man:

$$V_a(x) = b \cdot \left(\alpha(x)r^2 - \frac{1}{2}(r-x)a(x) \right), \quad (L7)$$

wobei 2α der Winkel des Kreisausschnittes im Bogenmaß ist (vgl. Abb. L1). Aus der Geometrie des Reifens erkennt man, dass $\frac{r-x}{r} = \cos(\alpha(x))$ bzw. $\alpha(x) = \arccos\left(\frac{r-x}{r}\right)$ und somit

$$V(x) = b \left(\pi d(2r-d) - r^2 \arccos\left(\frac{r-x}{r}\right) + (r-x)\sqrt{2rx-x^2} \right) \quad (L8)$$

gilt.

Setzt man zunächst (L8) in (L3) und (L5) in (L2) ein, kann man diese wiederum beide in (L1) einsetzen und erhält die Lösung:

$$F_L(x) = p_0 V_0 \cdot \frac{2\sqrt{2rx-x^2}}{\pi d(2r-d) - r^2 \arccos\left(\frac{r-x}{r}\right) + (r-x)\sqrt{2rx-x^2}}. \quad (L9)$$

- b) Gesucht sind $\tilde{F}_L(x)$ und $\tilde{p}_i(x)$. Macht man, wie angegeben, eine Taylor-Reihenentwicklung von p_i und bricht nach dem linearen Term ab, erhält man:

$$\tilde{p}_i(x) = p_i(x_0) + \left. \frac{\partial p_i(x)}{\partial x} \right|_{x=x_0} \cdot (x-x_0). \quad (L10)$$

Der Arbeitspunkt x_0 ist die Ruhelage $x=0$:

$$\tilde{p}_i(x) \approx \underbrace{p_i(0)}_{p_0} + \left. \frac{\partial p_i(x)}{\partial x} \right|_{x=0} \cdot x. \quad (L11)$$

Um die partielle Ableitung zu bilden, müsste $\frac{\partial p_i(x)}{\partial x} = \frac{\partial \left(\frac{mRT}{V(x)} \right)}{\partial x}$ gebildet werden, was auf direktem Weg sehr aufwändig ist, da $V(x)$ im Nenner steht. Als Trick wird die Gleichung zunächst logarithmiert. Dies ist möglich, da alle Größen ≥ 0 sind.

$$\frac{\partial \ln p_i(x)}{\partial x} = \frac{\partial [\ln(mRT) - \ln(V(x))]}{\partial x} \quad (L12)$$

Mit $\frac{\partial \ln(x)}{\partial x} = \frac{1}{x}$ folgt:

$$\frac{1}{p_i(x)} \frac{\partial p_i(x)}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial \ln(mRT)}{\partial x}}_{=0, \text{ da } mRT \text{ konstant}} - \frac{1}{V(x)} \frac{\partial V(x)}{\partial x} \quad (L13)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p_i(x)}{\partial x} = -\frac{p_i(x)}{V(x)} \frac{\partial V(x)}{\partial x}. \quad (\text{L14})$$

Dies ist einfacher zu berechnen, da $V(x)$ im Zähler steht. Es muss noch die partielle Ableitung von V nach x gebildet werden:

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[b \left(\pi \underbrace{d(2r-d)}_{\text{unabhängig von } x} - r^2 \arccos\left(\frac{r-x}{r}\right) + (r-x)\sqrt{2rx-x^2} \right) \right] \quad (\text{L15})$$

Mit Hilfe von $\frac{\partial}{\partial x} \arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ und $\frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ formt man um:

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} = -b \left[r^2 \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{r-x}{r}\right)^2}} \frac{1}{r} + \sqrt{2rx-x^2} - (r-x) \frac{1}{2\sqrt{2rx-x^2}} (2r-2x) \right] \quad (\text{L16})$$

$$= -b \left[\frac{r^2}{\underbrace{\sqrt{r^2-(r-x)^2}}_{=\sqrt{2rx-x^2}}} + \sqrt{2rx-x^2} - \frac{(r-x)^2}{\sqrt{2rx-x^2}} \right]. \quad (\text{L17})$$

Man bringt alles auf den Hauptnenner $\sqrt{2rx-x^2}$:

$$= -b \frac{r^2 + 2rx - x^2 - (r-x)^2}{\sqrt{2rx-x^2}} = -\frac{2b(2rx-x^2)}{\sqrt{2rx-x^2}} = -2b\sqrt{2rx-x^2} = \frac{\partial V(x)}{\partial x}. \quad (\text{L18})$$

Einsetzen in (L14) ergibt:

$$\frac{\partial p_i(x)}{\partial x} = \frac{p_i(x)}{V(x)} \cdot 2b\sqrt{2rx-x^2}. \quad (\text{L19})$$

In der Taylor-Reihe (L11) wird diese partielle Ableitung an der Stelle $x=0$ ausgewertet

$$\left. \frac{\partial p_i(x)}{\partial x} \right|_{x=x_0=0} = \frac{p_0}{V_0} \cdot 2b\sqrt{2r \cdot 0 - 0^2} = 0, \quad (\text{L20})$$

so dass (L11) zu

$$\tilde{p}_i(x) = p_0 + 0 \cdot x = p_0 \quad (\text{L21})$$

wird. D. h., die Linearisierung führt zu der Annahme, dass der Reifeninnendruck konstant ist. Die gesuchte Formel für die Radlast wird somit zu:

$$\tilde{F}_L(x) = \tilde{p}_i(x) \cdot A(x) = p_0 \cdot 2b \cdot \sqrt{2rx-x^2}. \quad (\text{L22})$$

- c) Der gesuchte relative Fehler ist definiert als die Differenz des als richtig angesehenen Wertes $F_L(x)$ und des als Näherung interpretierten $\tilde{F}_L(x)$, bezogen auf den „richtigen“ Wert:

$$F_R(x) := \frac{\tilde{F}_L(x) - F_L(x)}{F_L(x)}. \quad (\text{L23})$$

Auch hier ist ein direktes Einsetzen der Endergebnisse aus den Teilaufgaben a) und b) möglich, jedoch ist folgender Weg einfacher (mit $F_L(x) = p_i(x) \cdot A(x)$ aus a) und $\tilde{F}_L(x) = p_0 \cdot A(x)$ aus b)):

$$F_R(x) = \frac{p_0 A(x) - p_i(x) A(x)}{p_i(x) A(x)} \stackrel{\text{mit (L3)}}{=} \frac{p_0 - \frac{p_0 V_0}{V(x)}}{\frac{p_0 V_0}{V(x)}} = \frac{V(x) - V_0}{V_0} = -\frac{V_a(x)}{V_0} \tag{L24}$$

$$= -\frac{b}{V_0} \left[r^2 \arccos \frac{r-x}{r} - (r-x) \sqrt{2rx-x^2} \right]. \tag{L25}$$

d) Abbildung L2 zeigt den relativen Fehler.

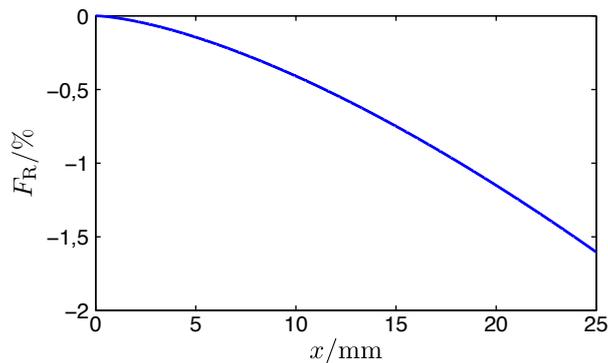


Abbildung L2: Relativer Fehler durch die Linearisierung.

Aufgabe 2: Least-Squares-Schätzer

Die Wurfbahn eines Balls nach Abb. 2 mit einer Anfangshöhe von $h(0) = 10$ m sei gegeben. Die Höhenverteilung an weiteren Stellen folgt den Werten aus Tab. 1.

s in m	0	10	20
h in m	10	50	10

Tabelle 1: Höhenverteilung des Wurfes.

a) Geben Sie allgemein den mathematischen Zusammenhang der Höhe h in Abhängigkeit des Weges s mit Hilfe allgemeiner Parameter a , b und c an!

Hinweis: Die explizite Berechnung der Parameter ist nicht erforderlich!

b) Führen Sie eine Approximation der Parameter aus a) mittels eines Least-Squares-Schätzers durch. Geben Sie das approximierte Polynom in der Form $\hat{h}(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots$ an.

Hinweis: Für

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} e & f & g \\ f & g & k \\ g & k & m \end{pmatrix}$$

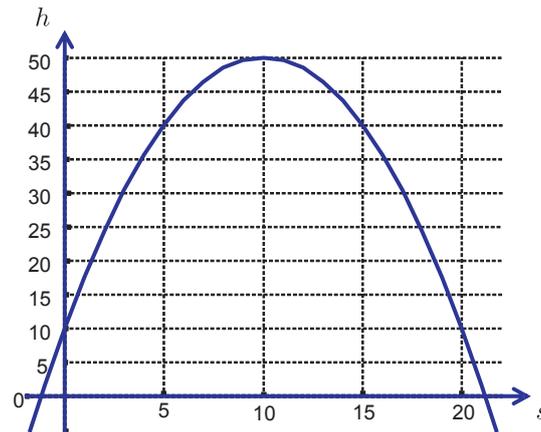


Abbildung 2: Wurfbahn eines Balls.

gilt:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} gm - k^2 & gk - fm & fk - g^2 \\ gk - fm & em - g^2 & fg - ek \\ fk - g^2 & fg - ek & eg - f^2 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante der zu invertierenden Matrix beträgt $\det(\Phi^T \Phi) = 4 \cdot 10^6$.

Lösung

- a) Die Wurfbahn lässt sich mathematisch durch eine Parabel, also

$$h(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

beschreiben.

- b) Die Messgleichung für eine LS-Schätzung setzt sich folgendermaßen zusammen:

$$\hat{\mathbf{h}} = \Phi \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & s_0 & s_0^2 \\ 1 & s_1 & s_1^2 \\ 1 & s_2 & s_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Die gesuchten Parameter ergeben sich aus der Formel

$$\mathbf{a} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{h}.$$

Die dafür benötigte Pseudoinverse berechnet man wie folgt:

$$(\Phi^T \Phi)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & 20 \\ 0 & 100 & 400 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 100 \\ 1 & 20 & 400 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 30 & 500 \\ 30 & 500 & 9000 \\ 500 & 9000 & 170000 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Mit Hilfe der Angabe im Hinweis lässt sich diese Inverse lösen zu

$$(\Phi^T \Phi)^{-1} = \frac{1}{4} \cdot 10^{-6} \begin{pmatrix} 4 \cdot 10^6 & -6 \cdot 10^5 & 2 \cdot 10^4 \\ -6 \cdot 10^5 & 26 \cdot 10^4 & -12 \cdot 10^3 \\ 2 \cdot 10^4 & -12 \cdot 10^3 & 6 \cdot 10^2 \end{pmatrix}.$$

Des Weiteren ist:

$$\Phi^T \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & 20 \\ 0 & 100 & 400 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 700 \\ 9000 \end{pmatrix}.$$

Daraus resultieren die gewünschten Parameter zu

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ -0,4 \end{pmatrix}.$$

Das gesuchte Polynom hat somit die Form

$$\hat{h}(s) = -0,4 s^2 + 8 s + 10.$$

Aufgabe 3: Interpolation

Zur Bestimmung der Kennline $y(u)$ eines Kraftsensors wurden folgende Werte bestimmt:

Index i	0	1	2
u_i	1	2	4
$y_i = y(u_i)$	0	10	20

- a) Berechnen Sie das Interpolationspolynom $\tilde{y}_N(u) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 u + \tilde{a}_2 u^2$ mit Hilfe des Newton-Interpolationsverfahrens. Wie lauten die Parameter \tilde{a}_0 , \tilde{a}_1 und \tilde{a}_2 ? Alle Zwischenergebnisse sind auf 3 Nachkommastellen zu runden.

Hinweis: Bei nicht-äquidistantem Stützstellenabstand ergeben sich die Werte im Differenzen-schema zu $\Delta^0 y_k = y_k$, $\Delta^{i+1} y_k = \frac{\Delta^i y_{k+1} - \Delta^i y_k}{u_{k+i+1} - u_k}$, $a_i = \Delta^i y_0$, $k = 0, 1, 2$.

- b) Berechnen Sie das Interpolationspolynom $\tilde{y}_L(u) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 u + \tilde{a}_2 u^2$ mit Hilfe des Lagrange-Interpolationsverfahrens. Wie lauten die Parameter \tilde{a}_0 , \tilde{a}_1 und \tilde{a}_2 ? Alle Zwischenergebnisse sind auf 3 Nachkommastellen zu runden.
- c) Die Kennline soll verbessert werden. Dazu wurde eine weitere Messung durchgeführt und man erhält $y(u_3 = 3) = 15$. Bestimmen Sie das neue Interpolationspolynom $\tilde{y}_2(u) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 u + \tilde{a}_2 u^2 + \tilde{a}_3 u^3$.

Die Bestimmung der Kennline soll nun mittels der Spline-Interpolation erfolgen. Es stehen folgende Werte zur Verfügung:

Index i	0	1	2	3
u_i	1	2	3	4
$y_i \approx y(u_i)$	0	10	15	20

- d) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem zur Berechnung der Werte \hat{y}_j'' , $j = 1, 2$ auf, welche zur Berechnung der Spline-Polynome $s_j(u) = a_j(u - u_j)^3 + b_j(u - u_j)^2 + c_j(u - u_j) + d_j$ benötigt werden. Welche Werte besitzen y_0'' und y_3'' ? Berechnen Sie anschließend für $j = 0, 1$ die Werte a_j, b_j, c_j, d_j und daraus $s_j(u)$, $j = 0, 1$.

- e) Was ergibt ein Vergleich der 2. Ableitungen von $s_0(u)$ und $s_1(u)$ an der Stelle $u_1 = 2$? Des Weiteren sei die physikalische Kennlinie des Kraftsensors über die Werte y_i fehlerfrei abgetastet worden, $y_i = y(u_i)$. Stimmt unter dieser Annahme die 1. Ableitung der physikalischen Kennlinie mit den 1. Ableitungen der Spline-Polynome an den Stützstellen u_0, u_1, u_2, u_3 überein?
- f) Es wird ein Vergleich der Spline-Interpolation mit der Newton-Interpolation vorgenommen. Stimmen die beiden Kurven überein? Was ergibt sich speziell für die Funktionswerte und die ersten beiden Ableitungen an den Stützstellen?

Lösung

- a) Der Ansatz für die Newton-Interpolation lautet bei N Messpunkten allgemein:

$$\tilde{y}_N = a_0 + a_1(u - u_0) + a_2(u - u_0)(u - u_1) + \dots + a_{N-1}(u - u_0)(u - u_1) \cdot \dots \cdot (u - u_{N-2}). \quad (\text{L26})$$

Die Koeffizienten a_i werden aus dem Differenzenschema bestimmt. Da wir keine äquidistanten Stützstellen haben, verwenden wir den Hinweis aus der Aufgabenstellung.

u	$\Delta^0 y = y$	Δy	$\Delta^2 y$
1	0		
2	10	$\frac{10-0}{2-1} = 10$	$\frac{5-10}{4-1} = -\frac{5}{3}$
4	20	$\frac{20-10}{4-2} = 5$	

Somit gilt $a_0 = 0$, $a_1 = 10$ und $a_2 = -\frac{5}{3}$. Wir setzen die ermittelten Koeffizienten a_i und die gegebenen Stützstellen u_i in den Ansatz (L26) ein und multiplizieren diesen aus:

$$\tilde{y}_N = 0 + 10(u - 1) - \frac{5}{3}(u - 1)(u - 2) = 10u - 10 - \frac{5}{3}(u^2 - 3u + 2) = -\frac{5}{3}u^2 + 15u - \frac{40}{3}.$$

- b) Der Ansatz für die Lagrange-Interpolation lautet bei N Messpunkten allgemein:

$$\tilde{y}_L = \sum_{i=0}^{N-1} y_i \cdot L_i(u), \quad (\text{L27})$$

wobei $L_i(u)$ zu bestimmende Lagrange-Polynome sind. Da hier $y_0 = 0$ muss $L_0(u)$ nicht berechnet werden. Die fehlenden Lagrange-Polynome ergeben sich zu:

$$L_1(u) = \frac{(u - u_0)(u - u_2)}{(u_1 - u_0)(u_1 - u_2)} = \frac{(u - 1)(u - 4)}{(2 - 1)(2 - 4)} = -\frac{1}{2}u^2 + \frac{5}{2}u - 2,$$

$$L_2(u) = \frac{(u - u_0)(u - u_1)}{(u_2 - u_0)(u_2 - u_1)} = \frac{(u - 1)(u - 2)}{(4 - 1)(4 - 2)} = \frac{1}{6}u^2 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{3}.$$

Einsetzen in den Ansatz (L27) liefert:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_L &= \underbrace{y_0 \cdot L_0(u)}_{=0} + y_1 \cdot L_1(u) + y_2 \cdot L_2(u) \\ &= 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}u^2 + \frac{5}{2}u - 2 \right) + 20 \cdot \left(\frac{1}{6}u^2 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{3} \right) \\ &= -\frac{5}{3}u^2 + 15u - \frac{40}{3}. \end{aligned}$$

Wie erwartet, ergibt die Lagrange-Interpolation dasselbe Polynom wie die Newton-Interpolation.

- c) Da beim Lagrange-Verfahren alle Lagrange-Polynome neu berechnet werden müssen, sobald ein weiterer Messwert eingefügt werden soll, verwenden wir das Newton-Verfahren und erkennen:

$$\tilde{y}_2(u) = \tilde{y}_N(u) + a_3 \cdot (u - u_0)(u - u_1)(u - u_2). \tag{L28}$$

Um den benötigten Koeffizienten a_3 zu bestimmen, gibt es zwei Wege.

Möglicher Weg 1: Erweiterung des Differenzenschemas für die Newton-Interpolation

u	$\Delta^0 y = y$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	0			
2	10	$\frac{10-0}{2-1} = 10$		
4	20	$\frac{20-10}{4-2} = 5$	$\frac{5-10}{4-1} = -\frac{5}{3}$	
3	15	$\frac{15-20}{3-4} = 5$	$\frac{5-5}{3-2} = 0$	$\frac{0 - (-\frac{5}{3})}{3-1} = \frac{5}{6}$

Den gesuchten Koeffizienten liest man als $a_3 = \frac{5}{6}$ ab.

Möglicher Weg 2: Rekursiver Ansatz der Newton-Interpolation

Auflösen des Ansatzes (L28) nach a_3 an der Stelle u_3 liefert:

$$a_3 = \frac{\tilde{y}_2(u_3) - \tilde{y}_N(u_3)}{(u_3 - u_0)(u_3 - u_1)(u_3 - u_2)}.$$

Da die interpolierte Funktion exakt durch die Messpunkte geht, gilt $\tilde{y}_2(u_3) = y_3$. Die Berechnung von $\tilde{y}_N(u_3)$ liefert den Wert $\frac{50}{3}$, so dass

$$a_3 = \frac{15 - \frac{50}{3}}{(3 - 1)(3 - 2)(3 - 4)} = \frac{5}{6}$$

ist.

Egal wie a_3 bestimmt wurde, wird es jetzt in den Ansatz (L28) eingesetzt:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_2(u) &= \tilde{y}_N(u) + \frac{5}{6} (u - 1)(u - 2)(u - 4) = -\frac{5}{3}u^2 + 15u - \frac{40}{3} + \frac{5}{6} (u^3 - 7u^2 + 14u - 8) \\ &= \frac{5}{6}u^3 - \frac{15}{2}u^2 + \frac{80}{3}u - 20. \end{aligned}$$

- d) Per Definition gilt $y_0'' = 0$ und $y_3'' = 0$. Das LGS zur Bestimmung der restlichen y_i'' lautet:

$$\begin{bmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{h_1}(y_2 - y_1) - \frac{6}{h_0}(y_1 - y_0) \\ \frac{6}{h_2}(y_3 - y_2) - \frac{6}{h_1}(y_2 - y_1) \end{bmatrix}.$$

Einsetzen der gegebenen Werte y_i und der Intervallbreiten $h_i = 1$ liefert:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Auflösen nach den gesuchten zweiten Ableitungen führt auf:

$$\begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -30 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\frac{1}{15} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Die Koeffizienten des ersten Splines berechnen sich mit den Formeln aus dem Messtechnik-Buch zu:

$$a_0 = \frac{1}{6h_0}(y_1'' - y_0'') = \frac{1}{6}(-8 - 0) = -\frac{4}{3}$$

$$b_0 = \frac{1}{2}y_0'' = 0$$

$$c_0 = \frac{1}{h_0}(y_1 - y_0) - \frac{h_0}{6}(y_1'' + 2y_0'') = 10 - \frac{1}{6} \cdot (-8) = \frac{34}{3}$$

$$d_0 = y_0 = 0$$

Analog erhält man $a_1 = \frac{5}{3}$, $b_1 = -4$, $c_1 = \frac{22}{3}$ und $d_1 = 10$, so dass die gesuchten Splines

$$s_0(u) = -\frac{4}{3}(u-1)^3 + \frac{34}{3}(u-1)$$

und

$$s_1(u) = \frac{5}{3}(u-2)^3 - 4(u-2)^2 + \frac{22}{3}(u-2) + 10$$

sind.

- e) Da beim Entwurf der Spline-Funktionen die Stetigkeit der zweiten Ableitung festgestellt wurde, erwarten wir dass $s_0''(u_1) = s_1''(u_1)$ gilt. Wir berechnen die Ableitungen der in a) ermittelten Splines:

$$\begin{aligned} s_0'(u) &= -4(u-1)^2 + \frac{34}{3} & s_1'(u) &= 5(u-2)^2 - 8(u-2) + \frac{2}{3} \\ s_0''(u) &= -8(u-1) & s_1''(u) &= 10(u-2) - 8 \\ s_0''(2) &= -8 & s_1''(2) &= -8 \end{aligned}$$

Wie erwartet sind $s_0''(u_1) = -8$ und $s_1''(u_1) = -8$ identisch. Die Ableitungen der Spline-Polynome sind jedoch i.A. **nicht** identisch mit den Ableitungen der physikalischen Funktion.

- f) Bis auf die Werte in den Stützstellen sind Newton-/Lagrange-Interpolation und Spline-Interpolation i.A. nicht identisch. Die Ableitungen sind i.A. nicht einmal in den Stützstellen identisch.

Aufgabe 4: Verifikation der Interpolationsfunktion

Bei einem neuartigen Messgerät ist die Eingangsgröße l eine Länge und die eigentliche Messgröße V ein Volumen. Aus den gemessenen Wertepaaren

l / mm	0	2	3	4
V / mm^3	0	2588	3503	497

wurde folgendes Interpolationspolynom als Kennlinie ermittelt:

$$V(l) = -458,5417 l^3 + 2166,3750 l^2 - 1204,5833 l. \quad (1)$$

Ist dieses Ergebnis physikalisch plausibel? Untersuchen Sie die Extrem- und Wendepunkte der Interpolationsfunktion.

Lösung

Die Interpolationsfunktion und Ihre Ableitungen haben die Form:

$$\begin{aligned} y &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ y' &= 3ax^2 + 2bx + c \\ y'' &= 6ax + 2b. \end{aligned}$$

Für einen Extremwert muss $y' = 0$ gelten, was auf

$$x_{1/2} = -\frac{b}{3a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 3ac}{9a^2}}$$

führt. Die in der Aufgabenstellung gegebenen Werte liefern:

$$l_{1/2} = 1,5748 \pm \sqrt{\frac{3036125,6181}{1892344,4157}} = 1,5748 \pm 1,2667 \quad (\text{L29})$$

$$l_1 = 0,3082 \qquad V''(l_1) = 3484,9 \qquad V(l_1) = -178,9 \quad (\text{L30})$$

$$l_2 = 2,8415 \qquad V''(l_2) = -3484,9 \qquad V(l_2) = 3548,6 \quad (\text{L31})$$

Somit ist $V(2,8415) = 3548,6 \text{ mm}^3$ ein Maximum und $V(0,3082) = -178,9 \text{ mm}^3$ ein Minimum.

Da die Messgröße ein Volumen ist, sind negative Werte aber physikalisch unmöglich und das Interpolationsergebnis ist somit nicht plausibel.

Aufgabe 5: Spline-Interpolation

In einem Versuch wurden zwei Messgeräte vermessen, wobei Messgerät 1 in einer Variante mit einem zusätzlichen Messpunkt vermessen wurde (siehe Messgerät 1b). In Tab. 2 sind die aufgezeichneten Daten zusammengefasst; y entspricht dabei dem Anzeigewert und x dem Messwert.

In einer Auswertung wurde unter Anderem eine Spline-Interpolation für alle drei Messkurven (Messgerät 1 ohne $y = 2$, Messgerät 1 mit $y = 2$ (entspricht 1b) und Messgerät 2) durchgeführt, was zu 7 verschiedenen Splines führte. Die Koeffizienten eines Splines lauten dabei

$$a_i = -\frac{17}{180}, \quad b_i = 0, \quad c_i = \frac{371}{240} \quad d_i = 1.$$

Zu welchem der 7 Splines gehören diese Koeffizienten? Begründen Sie, ohne eine Spline-Interpolation durchzuführen.

Messgerät	y	1	2	3	3,5	4,5
1	x_1	1	-	2,5	5	-
1b	x_1	1	1,8	2,5	5	-
2	x_2	0,5	-	2,5	-	5

Tabelle 2: Zuvor aufgezeichnete Messdaten der zwei Messgeräte.

Lösung

Da $d_i = y_i = 1$, folgern wir, dass nur die Anfangssplines der drei Kurven in Frage kommen. Wir formen die Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten eines Splines aus dem Messtechnik-Buch [1] um und beachten, dass $y_0'' = 0$ sowie $y_0 = 1$ gilt:

$$a_0 = \frac{1}{6h_0}(y_1'' - y_0'') = \frac{y_1''}{6h_0} \Rightarrow y_1'' = 6h_0 a_0, \quad (\text{L32})$$

$$c_0 = \frac{1}{h_0}(y_1 - y_0) - \frac{1}{6}h_0((y_1'' + 2y_0'')) = \frac{y_1 - 1}{h_0} - \frac{h_0}{6} \cdot y_1'' = \frac{(y_1 - 1)}{h_0} - h_0^2 a_0. \quad (\text{L33})$$

Wir multiplizieren mit h_0 , bringen alle Terme auf eine Seite der Gleichung und definieren so ein $g(h_0; y_1)$:

$$g(h_0, y_1) = h_0^3 a_0 + h_0 c_0 - (y_1 - 1) = 0. \quad (\text{L34})$$

In der Aufgabenstellung sind a_0 und c_0 gegeben. Wir werten g für alle Messkurven aus:

Gerät	h_0	y_1	$g(h_0; y_1)$
1	1,5	3	0
1b	0,8	2	0,188
2	2	3	0,366

Da für den in der Aufgabe gegebenen Spline $g = 0$ gilt, muss es sich um den Spline s_0 der Messkurve des Messgerätes 1 handeln.

Aufgabe 6: Kennfeld-Interpolation

Für ein Motorkennfeld (Abb. 3) wurden 16 Stützstellen durch Messung am Motorenprüfstand ermittelt. Zur Motorsteuerung sollen nun weitere Zwischenwerte durch Interpolation bestimmt werden.

$y(u_i, z_i)$	$u_1 = 1$	$u_2 = 2$	$u_3 = 3$	$u_4 = 4$
$z_1 = 1$	3	4	7	8
$z_2 = 2$	5	5	7	4
$z_3 = 3$	4	2	1	0
$z_4 = 4$	7	5	2	2

Tabelle 3: Messwerte des Kennfeldes.

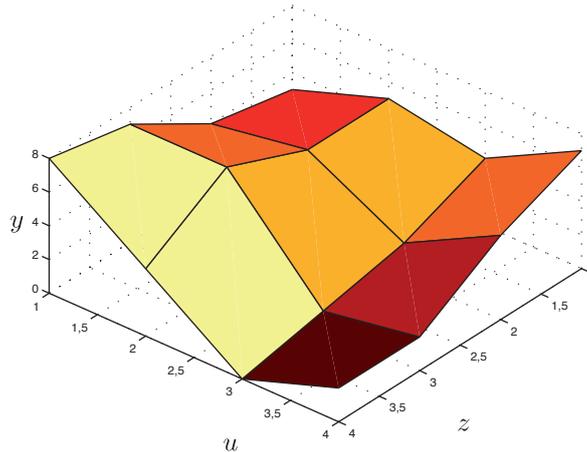


Abbildung 3: Gemessenes Motorkennfeld.

- a) Berechnen Sie durch bilineare Interpolation den Zwischenwert $y(u_5, z_5)$ des Kennfeldes für $u_5 = 2,5$ und $z_5 = 2,7$. Benutzen Sie hierbei die Variablentransformationen $\Delta_{n,i}u = \frac{u-u_i}{u_{i+1}-u_i}$ und $\Delta_{n,j}z = \frac{z-z_j}{z_{j+1}-z_j}$ im Intervall $u \in [u_i, u_{i+1}]$, $z \in [z_j, z_{j+1}]$.

Eine biquadratische Interpolation ergab für das Interpolationspolynom

$$\tilde{y}_b(\Delta_{n,2}u, \Delta_{n,2}z) = \sum_{k=0}^2 \sum_{l=0}^2 a_{kl} (\Delta_{n,2}u)^k (\Delta_{n,2}z)^l$$

folgende Koeffizienten:

$$\mathbf{A} = (a_{kl}) = \begin{bmatrix} 5 & 4,5 & -2,5 \\ -6 & -6,5 & 3 \\ 3 & 1 & -0,5 \end{bmatrix}$$

- b) Interpolieren Sie hiermit den Zwischenwert $y(2,5; 2,7)$
- c) Aufgrund der höheren Ordnung wird \tilde{y}_b als korrekter Wert angesehen. Wie groß ist der relative Fehler $F_R(u, z)$, wenn die Berechnung der Zwischenwerte im Bereich $u \in [2, 3]$, $z \in [2, 3]$ gemäß Teilaufgabe a) durchgeführt und auf die Berechnung \tilde{y}_b in Teilaufgabe b) bezogen wird, im Interpolationspunkt $y(2,5; 2,7)$?

Lösung

- a) Der Punkt $(2,5, 2,7)$ liegt im Intervall $u \in [u_2, u_3]$, $z \in [z_2, z_3]$, also benutzen wir

$$\Delta_{n,2}u = \frac{u - u_2}{u_3 - u_2}, \tag{L35}$$

$$\Delta_{n,2}z = \frac{z - z_2}{z_3 - z_2}. \tag{L36}$$

Ansatz für die bilineare Interpolation (d. h. Interpolationsfunktion ist ein Polynom 1. Grades):

$$\tilde{y}_a(\Delta_{n,2}u, \Delta_{n,2}z) = a_{00} + a_{01} \cdot \Delta_{n,2}z + a_{10} \cdot \Delta_{n,2}u + a_{11} \cdot \Delta_{n,2}u \cdot \Delta_{n,2}z. \tag{L37}$$

Da die Interpolationsbedingung in den Stützstellen erfüllt sein soll, erhält man ein exakt bestimmtes lineares Gleichungssystem

$$y(u_2, z_2) = \tilde{y}_a(0, 0) = a_{00} \quad (\text{L38})$$

$$y(u_2, z_3) = \tilde{y}_a(0, 1) = a_{00} + a_{01} \quad (\text{L39})$$

$$y(u_3, z_2) = \tilde{y}_a(1, 0) = a_{00} + a_{10} \quad (\text{L40})$$

$$y(u_3, z_3) = \tilde{y}_a(1, 1) = a_{00} + a_{01} + a_{10} + a_{11} \quad (\text{L41})$$

mit der Lösung:

$$a_{00} = y(u_2, z_2) = 5 \quad (\text{L42})$$

$$a_{01} = y(u_2, z_3) - y(u_2, z_2) = -3 \quad (\text{L43})$$

$$a_{10} = y(u_3, z_2) - y(u_2, z_2) = 2 \quad (\text{L44})$$

$$a_{11} = y(u_3, z_3) - y(u_3, z_2) - y(u_2, z_3) + y(u_2, z_2) = -3. \quad (\text{L45})$$

Mit den gegebenen Werten für $y(u_i, z_j)$, erhält man also:

$$\tilde{y}_a(\Delta_{n,2}u, \Delta_{n,2}z) = 5 + 2\Delta_{n,2}u - 3\Delta_{n,2}z - 3\Delta_{n,2}u\Delta_{n,2}z. \quad (\text{L46})$$

Da $u = 2,5 \Leftrightarrow \Delta_{n,2}u = 0,5$ und $z = 2,7 \Leftrightarrow \Delta_{n,2}z = 0,7$ gilt, erhalten wir:

$$\tilde{y}_a(0,5; 0,7) = 2,85. \quad (\text{L47})$$

b) Mit $u = 2,5 \Leftrightarrow \Delta_{n,2}u = 0,5$ und $z = 2,7 \Leftrightarrow \Delta_{n,2}z = 0,7$ erhält man:

$$\tilde{y}_b(0,5; 0,7) = 5 \quad (\text{L48})$$

$$- 6 \cdot 0,5 + 4,5 \cdot 0,7 - 6,5 \cdot 0,5 \cdot 0,7 \quad (\text{L49})$$

$$+ 3 \cdot 0,5^2 - 2,5 \cdot 0,7^2 + 1 \cdot 0,5^2 \cdot 0,7 + 3 \cdot 0,5 \cdot 0,7^2 - 0,5 \cdot 0,5^2 \cdot 0,7^2 \quad (\text{L50})$$

$$\approx 3,2488. \quad (\text{L51})$$

c) Da \tilde{y}_b als richtiger Wert angesehen wird, gilt für den absoluten Fehler

$$F_A(u, z) = \tilde{y}_a - \tilde{y}_b. \quad (\text{L52})$$

Der relative Fehler $F_R(u, z)$, bezogen auf \tilde{y}_b ist damit:

$$F_R(u, z) = \frac{\tilde{y}_a - \tilde{y}_b}{\tilde{y}_b}. \quad (\text{L53})$$

Mit den Ergebnissen aus **a)** und **b)**:

$$F_R(2,7, 2,5) = \frac{2,85 - 3,2488}{3,2488} = -0,1228. \quad (\text{L54})$$

Dies entspricht $-12,28\%$.

Aufgabe 7: Kennlinienfehler und Justierung

Die nichtlineare Kennlinie eines Beschleunigungssensors

$$y(u) = 0,4u^2 + 2$$

sei gegeben. Der spezifizierte Messbereich erstreckt sich von $u_a = 0$ bis $u_e = 4$.

- Berechnen Sie die ideale Kennlinie $y_i(u)$ bei Fixpunktjustierung.
- Bestimmen Sie den relativen Kennlinienfehler bezogen auf die Anzeigespanne $F_r(u)$.
- Berechnen Sie das Maximum des Betrages des absoluten Fehlers $|F_A(u)| = |y(u) - y_i(u)|$.
- Durch welches Justierverfahren kann der Maximalwert des absoluten Kennlinienfehlers $F_{A,\max}$ bei unveränderter idealer Empfindlichkeit S_i verringert werden? Wie lautet die resultierende ideale Kennlinie und wie groß wird der daraus resultierende absolute Kennlinienfehler $\tilde{F}_{A,\max}$? Führt dieses Vorgehen immer zum Ziel?

Lösung

- a) Gesucht: $y_i(u)$ bei Fixpunktjustierung. Gegeben:

$$y_a = y(u_a) = 2, \tag{L55}$$

$$y_e = y(u_e) = 8,4. \tag{L56}$$

Die ideale Empfindlichkeit ist:

$$S_i = \frac{y_e - y_a}{u_e - u_a} = 1,6 \tag{L57}$$

und somit

$$y_{i,\text{fix}}(u) = S_i \cdot (u - u_a) + y_a = 1,6u + 2. \tag{L58}$$

- b) Das Messgerät zeigt uns die ideale Anzeigespanne, daher gilt:

$$F_r(u) = \frac{y(u) - y_i(u)}{y_i(u) - y_a} = \frac{0,4u^2 + 2 - 1,6u - 2}{1,6u + 2 - 2} = 0,25u - 1. \tag{L59}$$

- c) Gesucht ist $F_{A,\max} = \max \{|y(u) - y_i(u)|\}$.

Zunächst betrachten wir $|F_A(u)| = |y(u) - y_i(u)| = |0,4 \cdot u \cdot (u - 4)|$. Da F_A nur bei $u = 0$ und $u = 4$, also am Rand des Messbereiches, Nullstellen hat, ist das Vorzeichen innerhalb des Betrages im Messbereich konstant. Eine Probe liefert, dass im Messbereich $0,4 \cdot u \cdot (u - 4) \leq 0$ gilt und somit:

$$|F_A(u)| = -0,4u^2 + 1,6u \quad \text{für} \quad u \in [0, 4]. \tag{L60}$$

Da wir das Maximum von $|F_A|$ suchen, bilden wir die ersten beiden Ableitungen und erhalten:

$$F'_A(u) = -0,8u + 1,6 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 2, \tag{L61}$$

$$F''_A(u) = -0,8 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{tatsächlich Maximum.} \tag{L62}$$

Somit gilt $F_{A,\max} = |F_A(2)| = 1,6$.

- d) Der maximale Wert des absoluten Kennlinienfehlers kann bei gleichbleibender Empfindlichkeit durch Toleranzbandjustierung verringert werden. Die Toleranzbandjustierung ist eine additive Verschiebung der idealen Kennlinie um die Hälfte des maximalen Kennlinienfehlers. Sie führt zum Ziel, wenn innerhalb des Messbereichs kein Wendepunkt der Kennlinie liegt. Es gilt also:

$$y_{i,\text{Tol}}(u) = y_{i,\text{Fix}}(u) \pm \frac{F_{A,\text{max}}}{2}. \quad (\text{L63})$$

Aus Aufgabenteil c) wissen wir, dass innerhalb des Messbereichs der absolute Fehler $y(u) - y_{i,\text{Fix}}(u)$ negativ ist, und dass somit $\frac{F_{A,\text{max}}}{2}$ von $y_{i,\text{Fix}}(u)$ abgezogen werden muss, um den Betrag des resultierenden Fehlers zu verringern. D. h.:

$$y_{i,\text{Tol}}(u) = y_{i,\text{Fix}}(u) - \frac{F_{A,\text{max}}}{2} = 1,6u + 2 - 0,8 = 1,6u + 1,2. \quad (\text{L64})$$

Der resultierende maximale Fehler ist damit $F_{A,\text{max,Tol}} = \frac{F_{A,\text{max,Fix}}}{2} = 0,8$.

Aufgabe 8: Wahl des günstigsten Messbereichs

Die Kennlinie eines Sensors sei im Bereich $0 \leq u \leq 4$ durch

$$y(u) = 2u - \frac{1}{10}u^2 + \frac{1}{48}u^3$$

gegeben.

Legen Sie den günstigsten Messbereich $u_a \leq u \leq u_e$ der Kennlinie fest, wenn $u_e = u_a + 2$ gilt.

Lösung

Um den günstigsten Messbereich zu finden, untersuchen wir zunächst, ob sich ein Wendepunkt im vorgegebenen Messbereich befindet:

$$y'(u) = \frac{1}{16}u^2 - \frac{1}{5}u + 2 \quad (\text{L65})$$

$$y''(u) = \frac{1}{8}u - \frac{1}{5} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{\text{WP}} = 1,6 \in [0, 4] \quad (\text{L66})$$

$$y'''(u) = \frac{1}{8} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad u_{\text{WP}} \text{ ist Wendepunkt.} \quad (\text{L67})$$

Da wir also einen Wendepunkt haben, um den wir den günstigsten Messbereich legen können, verwenden wir Kriterium I aus dem Messtechnik-Buch [1]:

$$S(u_a + d) - S(u_a) = 0. \quad (\text{L68})$$

Da die Empfindlichkeit $S(u)$ gleich der Ableitung $y'(u)$ der Kennlinie ist, setzen wir die bereits bestimmte Ableitung an den Stellen u_a und $u_a + d$ ein:

$$\left[\frac{1}{16}(u_a + d)^2 - \frac{1}{5}(u_a + d) + 2 \right] - \left[\frac{1}{16}(u_a)^2 - \frac{1}{5}u_a + 2 \right] = 0. \quad (\text{L69})$$

Auflösen nach u_a ergibt $u_a = \frac{3}{5}$ und somit liegt der Messbereich, in dem die Abweichung von einer linearen Kennlinie am kleinsten ist, im Intervall $u \in \left[\frac{3}{5}, \frac{13}{5} \right]$.

Überprüft man aber die Ableitung der Empfindlichkeit, so zeigt sich, dass $S'(u_a) = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{5} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{8}$ und $S'(u_e) = \frac{1}{8} \cdot \frac{13}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{8}$ gilt. Somit wurde der Messbereich um ein Minimum der Empfindlichkeit gelegt.

Aufgabe 9: Differenzmethode

Zwei baugleiche Sensoren mit identischen Kennlinien

$$y(u) = -\frac{1}{32}u^3 + \frac{1}{4}u^2 + \frac{5}{8}u - 2$$

sollen zu einem Messsystem verschaltet werden.

- Wie müssen diese beiden Sensoren verschaltet werden, damit eine linearisierte Kennlinie um den Arbeitspunkt u_0 erzeugt wird? Zeichnen Sie die Schaltung.
- Berechnen Sie die Kennlinie des Messsystems (Arbeitspunkt: $u_0 = 4$).
- Begründen Sie, warum diese Schaltung eine linearisierende Wirkung hat. Nennen Sie einen Fehlertyp, der mit der Schaltung wirkungsvoll unterdrückt werden kann.

Lösung

- Eine Linearisierung durch Verschalten zweier identischer Messglieder um einen Arbeitspunkt u_0 ist mit der Differenzmethode möglich.

Das Verfahren verdeutlicht man sich am besten graphisch anhand der Kennlinie. Die gegebene Kennlinie des Systems wird um 180 Grad um den Arbeitspunkt gedreht, und dann zu sich selbst addiert. Diese Drehung lässt sich auch durch eine Spiegelung an der y -Achse, Verschiebung um $2u_0$ nach rechts und anschließende Spiegelung an der u -Achse erreichen. Die Spiegelung an der y -Achse ist mathematisch die Negierung des Arguments von y :

$$y(u) \rightarrow y(-u). \quad (\text{L70})$$

Die Verschiebung um $2u_0$ nach rechts entspricht einer Addition von $2u_0$ zum Argument von y :

$$y(-u) \rightarrow y(-u + 2u_0). \quad (\text{L71})$$

Die Spiegelung an der u -Achse ist mathematisch die Negierung von y :

$$y(-u + 2u_0) \rightarrow -y(-u + 2u_0). \quad (\text{L72})$$

Die resultierende Differenzkennlinie $y_D(u)$ des Systems berechnet sich also zu:

$$y_D(u) = y(u) - y(-u + 2u_0), \quad (\text{L73})$$

das daraus resultierende Blockschaltbild ist in Abb. L3 zu sehen.

- Wir setzen den Arbeitspunkt $u_0 = 4$ und die gegebene Funktion $y(u)$ in unser Ergebnis aus a) ein:

$$y_D(u) = y(u) - y(8 - u) \quad (\text{L74})$$

$$= \left(-\frac{1}{32}u^3 + \frac{1}{4}u^2 + \frac{5}{8}u - 2 \right) - \left(-\frac{1}{32}(8 - u)^3 + \frac{1}{4}(8 - u)^2 + \frac{5}{8}(8 - u) - 2 \right). \quad (\text{L75})$$

Wir vereinfachen zunächst $y(8 - u)$:

$$y(8 - u) = -\frac{1}{32}(8 - u)^3 + \frac{1}{4}(8 - u)^2 + \frac{5}{8}(8 - u) - 2 \quad (\text{L76})$$

$$= -\frac{1}{32}(64 - 16u + u^2)(8 - u) + \frac{1}{4}(64 - 16u + u^2) + 5 - \frac{5}{8}u - 2 \quad (\text{L77})$$

$$= -\frac{1}{32}(512 - 192u + 24u^2 - u^3) + 16 - 4u + \frac{u^2}{4} - \frac{5}{8}u + 3 \quad (\text{L78})$$

$$= \frac{u^3}{32} - \frac{u^2}{2} + \frac{11}{8}u + 3 \quad (\text{L79})$$

und bilden dann die Differenz:

$$y_D(u) = y(u) - y(8 - u) \quad (\text{L80})$$

$$= \left(-\frac{1}{32}u^3 + \frac{1}{4}u^2 + \frac{5}{8}u - 2 \right) - \left(\frac{u^3}{32} - \frac{u^2}{2} + \frac{11}{8}u + 3 \right) \quad (\text{L81})$$

$$= -\frac{u^3}{16} + \frac{3}{4}u^2 - \frac{3}{4}u - 5. \quad (\text{L82})$$

- c) Im Weiteren betrachten wir $\Delta u = u - u_0$ als Eingangsgröße. Der Ausgang der beiden Signalpfade wird dann zu $y(u) = y(u_0 + \Delta u)$ bzw. $y(-u + 2u_0) = y(u_0 - \Delta u)$. Das Ausgangssignal der Schaltung lässt sich dann darstellen als:

$$y_D = \underbrace{y(u_0 + \Delta u)}_{y_1} - \underbrace{y(u_0 - \Delta u)}_{y_2}. \quad (\text{L83})$$

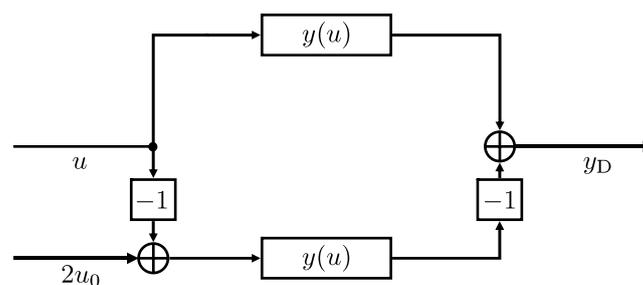


Abbildung L3: Blockschaltbild der Differenzmethode.

Wir entwickeln beide Funktionen y_1 und y_2 in eine Taylor-Reihe um den Arbeitspunkt $u = u_0$:

$$y_1 = y(u_0 + \Delta u) \tag{L84}$$

$$= y(u_0 + \Delta u)|_{u=u_0} + S(u_0 + \Delta u)|_{u=u_0} \cdot (u_0 + \Delta u - u_0) \tag{L85}$$

$$+ \frac{S'(u_0 + \Delta u)}{2} \Big|_{u=u_0} \cdot (u_0 + \Delta u - u_0)^2 \tag{L86}$$

$$+ \frac{S''(u_0 + \Delta u)}{6} \Big|_{u=u_0} \cdot (u_0 + \Delta u - u_0)^3 + \dots \tag{L87}$$

$$= y(u_0) + S(u_0)\Delta u + \frac{S'(u_0)}{2} (\Delta u)^2 + \frac{S''(u_0)}{6} (\Delta u)^3 + \dots \tag{L88}$$

$$y_2 = y(u_0 - \Delta u) \tag{L89}$$

$$= y(u_0 - \Delta u)|_{u=u_0} + S(u_0 - \Delta u)|_{u=u_0} \cdot (u_0 - \Delta u - u_0) \tag{L90}$$

$$+ \frac{S'(u_0 - \Delta u)}{2} \Big|_{u=u_0} \cdot (u_0 - \Delta u - u_0)^2 \tag{L91}$$

$$+ \frac{S''(u_0 - \Delta u)}{6} \Big|_{u=u_0} \cdot (u_0 - \Delta u - u_0)^3 + \dots \tag{L92}$$

$$= y(u_0) + S(u_0)(-\Delta u) + \frac{S'(u_0)}{2} (-\Delta u)^2 + \frac{S''(u_0)}{6} (-\Delta u)^3 + \dots \tag{L93}$$

Bildet man nun die Differenz aus beiden Funktionen, fällt auf, dass alle Terme mit geradem Exponenten von Δu herausfallen und alle anderen Terme verdoppelt werden:

$$y_D = y_1 - y_2 \tag{L94}$$

$$= 2S(u_0)\Delta u + \frac{S''(u_0)}{3} (\Delta u)^3 + \dots \tag{L95}$$

Da die Krümmung der Kennlinie durch den Term $\frac{S''(u_0)}{2} (\Delta u)^2$ repräsentiert wird, der durch die Differenzbildung entfällt, erklärt sich die linearisierende Wirkung der Differenzmethode. Sämtliche Fehler, die als gerade Funktionen in $y(u)$ eingehen, können also durch die Differenzmethode unterdrückt werden. Ein Beispiel wären systematische, superponierende Fehler.

Aufgabe 10: Abweichung von Normalbedingungen

Mit Hilfe eines einzelnen Dehnungsmessstreifens (DMS) wird eine Längenänderung y gemessen. Das DMS-System liefert eine elektrische Spannung y_1 abhängig von der Längenänderung im Bereich $0 \text{ V} \leq y_1 \leq 30 \text{ V}$. Damit lässt sich eine Kennlinie erstellen.

Um die Abhängigkeit des DMS von der Temperatur zu überprüfen, wird ein temperaturunabhängiges Referenzmesssystem verwendet, welches die Werte y_2 liefert. Unter Normalbedingungen ($\vartheta_0 = 300 \text{ K}$) liefern der DMS und das Referenzsystem die gleichen Messwerte (Tab. 4).

Bei einer Erhöhung der Temperatur auf $\vartheta_1 = 340 \text{ K}$ entsteht jedoch eine Abweichung, d. h. der DMS zeigt eine zu große Längenänderung an. In der Tabelle 5 finden Sie die Messwerte der beiden Systeme bei ϑ_1 :

Index	0	1	2	3	4	5
Längenänderung u /mm	0	2	4	6	8	10
Messwert $y_1 = y_2$ /V bei ϑ_0	4,0	8,0	12,0	16,0	20,0	24,0

Tabelle 4: Messwerte unter Normalbedingungen.

Index	0	1	2	3	4	5
Längenänderung u /mm	0	2	4	6	8	10
Messwert y_1 /V bei ϑ_1	4,2	8,3	12,4	16,5	20,6	24,7
Messwert y_2 /V bei ϑ_1	4,0	8,0	12,0	16,0	20,0	24,0

Tabelle 5: Messwerte bei Abweichung von den Normalbedingungen.

Um den Fehler, den der Temperatureinfluss hervorruft, abschätzen zu können, sollen der superponierende und der deformierende Fehler berechnet werden.

- Geben Sie den superponierenden Fehler $F_{\text{sup}}(z)$ an.
Hinweis: die Störgröße z ist in diesem Fall die Temperatur ϑ .
- Geben Sie den deformierenden Fehler $F_{\text{def}}(u, z)$ an.

Lösung

Da der Fehler $|y_2(u) - y_1(u)|$ für $\vartheta = \vartheta_1 = z_1$

- nicht konstant $\forall u$ ist (\Rightarrow deformierender Fehler vorhanden)
- $\neq 0$ für $u_a = 0$ ist (\Rightarrow superponierender Fehler vorhanden)

lautet unsere Modellgleichung:

$$y_1(u, z) = y_2(u, z) + F_{\text{sup}}(z) + F_{\text{def}}(u, z). \quad (\text{L96})$$

- Der deformierende Fehler verschwindet definitionsgemäß im Messanfang (d. h. $F_{\text{def}}(u = u_a = 0, z) = 0$), so dass im Messanfang nur der superponierende Fehler vorhanden ist und bestimmt werden kann. Mit dem Ansatz, dass der superponierende Messfehler linear von der Störgröße z abhängt, und der Modellgleichung (L96) erhält man:

$$F_{\text{sup}}(z) := a(z_1 - z_0) \stackrel{!}{=} y_1(u_a, z_1) - y_2(u_a, z_1) \quad (\text{L97})$$

$$\Rightarrow a = \frac{4,2 \text{ V} - 4,0 \text{ V}}{340 \text{ K} - 300 \text{ K}} = 5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{V}}{\text{K}}. \quad (\text{L98})$$

Somit ist der superponierende Messfehler:

$$F_{\text{sup}}(z) = 5 \cdot 10^{-3} \cdot (z - z_0) \frac{\text{V}}{\text{K}}. \quad (\text{L99})$$

Superponierende Fehler können z. B. durch eine Differenzschaltung wirksam unterdrückt werden.

- b) Der deformierende Fehler wächst in den gegebenen Messdaten linear mit u an. Mit dem Ansatz, dass der deformierende Messfehler linear von der Störgröße z und der Eingangsgröße u abhängt, der Modellgleichung (L96) und dem bekannten superponierenden Fehler erhält man:

$$F_{\text{def}}(z) := b(z_1 - z_0)(u_1 - u_a) \stackrel{!}{=} y_1(u_1, z_1) - y_2(u_1, z_1) - F_{\text{sup}}(z_1) \quad (\text{L100})$$

$$\Rightarrow b = \frac{8,3 \text{ V} - 8,0 \text{ V} - 0,2 \text{ V}}{(340 \text{ K} - 300 \text{ K}) \cdot 2 \text{ mm}} = 1,25 \cdot 10^{-3} \frac{\text{V}}{\text{K} \cdot \text{mm}}. \quad (\text{L101})$$

Somit ist der deformierende Messfehler:

$$F_{\text{def}}(u, z) = 1,25 \cdot 10^{-3} \cdot (z - z_0)(u - u_0) \frac{\text{V}}{\text{K} \cdot \text{mm}}. \quad (\text{L102})$$

Deformierende Fehler können z. B. durch Gegenkopplung effektiv unterdrückt werden.

Aufgabe 11: Zufallsgrößen

Gegeben seien zwei Zufallsvariablen x und y mit einer gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsdichte von

$$f_{xy}(x, y) = \begin{cases} k & \text{für } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{für } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

mit $k \neq 0$ als reellem Parameter.

- Bestimmen Sie den Wert des Parameters k .
- Bestimmen Sie die Randdichten $f_x(x)$ und $f_y(y)$ der beiden Zufallsvariablen aus der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsdichte.
- Sind die beiden Zufallsvariablen x und y statistisch unabhängig?
- Sind die beiden Zufallsvariablen x und y unkorreliert?

Lösung

- a) Damit $f_{xy}(x, y)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist, müssen zwei Bedingungen erfüllt sein:

$$1. \quad f_{xy}(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \quad \Rightarrow \quad k \geq 0$$

$$2. \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x, y) \, dx \, dy \stackrel{!}{=} 1$$

Man erkennt, dass der Bereich, in dem $f_{xy}(x, y) \neq 0$ ist, ein Kreis mit dem Radius 1 ist. Da $f_{xy}(x, y)$ in diesem Bereich konstant ist, gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x, y) \, dx \, dy = k \cdot \pi r^2 = k\pi \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{\pi}. \quad (\text{L103})$$

Da $\frac{1}{\pi} \geq 0$ gilt, ist auch Bedingung 1 erfüllt.

b) Die Randdichten bestimmt man durch Integration über alle anderen Variablen:

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x, y) dy = \begin{cases} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dy = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} & , |x| \leq 1 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{L104})$$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x, y) dx = \begin{cases} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi} dx = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-y^2} & , |y| \leq 1 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{L105})$$

c) Statistische Unabhängigkeit der Variablen würde bedeuten, dass

$$f_{xy}(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y) \quad (\text{L106})$$

gilt. Allerdings ist für $x = y = 0$

$$f_{xy}(x=0, y=0) = \frac{1}{\pi} \neq \frac{4}{\pi^2} = f_x(0) \cdot f_y(0). \quad (\text{L107})$$

Daher sind die beiden Zufallsvariablen statistisch abhängig voneinander.

d) Unkorreliertheit der Variablen würde bedeuten, dass

$$E\{x \cdot y\} = E\{x\} \cdot E\{y\} \quad (\text{L108})$$

gilt. Man bestimmt die Erwartungswerte:

$$E\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \underbrace{x \sqrt{1-x^2}}_{\text{ungerade Funktion}} dx = 0, \quad (\text{L109})$$

$$E\{y\} = \int_{-\infty}^{\infty} y f_y(y) dy = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 y \sqrt{1-y^2} dy = 0, \quad (\text{L110})$$

$$E\{x \cdot y\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f_{xy}(x, y) dx dy = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 y \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x dx dy = 0. \quad (\text{L111})$$

Die Bedingung für Unkorreliertheit ist damit erfüllt; die Variablen x und y sind unkorreliert.

Aufgabe 12: Rechnen mit Zufallsvariablen

Gegeben seien die Zufallsvariablen x und y sowie die kombinierten Zufallsvariablen $z = 2x + y$ und $w = x - y$. Berechnen Sie die folgenden Erwartungswerte, indem Sie die gesuchten Ergebnisse in Abhängigkeit der Mittelwerte μ_x, μ_y , der Varianzen σ_x^2, σ_y^2 sowie der Kovarianz C_{xy} der Zufallsvariablen x und y ausdrücken.

- Berechnen Sie die Korrelation r_{xz} .
- Berechnen Sie die Kovarianz C_{xz} .
- Berechnen Sie die Korrelation r_{zw} .
- Berechnen Sie den Erwartungswert $E\left\{\left([z - E\{z\}] - [w - E\{w}]\right)^2\right\} = E_d$.

Lösung

Wir benutzen immer wieder die statistische Definition der Korrelation $r_{xy} = E\{x \cdot y\}$, die Linearität der Erwartungswertbildung $E\{a \cdot x + y\} = a E\{x\} + E\{y\}$ (für a deterministisch) und den allgemeinen Zusammenhang $C_{xy} = r_{xy} - \mu_x \mu_y$.

a)

$$r_{xz} = E\{x z\} \stackrel{z=2x+y}{=} E\{2x^2 + xy\} = 2 \underbrace{E\{x^2\}}_{r_{xx}} + \underbrace{E\{xy\}}_{r_{xy}} = 2(\underbrace{\sigma_x^2}_{C_{xx}} + \mu_x^2) + C_{xy} + \mu_x \mu_y \quad (\text{L112})$$

b)

$$C_{xz} = r_{xz} - \mu_x \mu_z = r_{xz} - \mu_x (2\mu_x + \mu_y) = 2\sigma_x^2 + C_{xy} \quad (\text{L113})$$

c)

$$r_{zw} = E\{z w\} \stackrel{z=2x+y, w=x-y}{=} E\{2x^2 - xy - y^2\} \quad (\text{L114})$$

$$= 2(\sigma_x^2 + \mu_x^2) - C_{xy} - \mu_x \mu_y - \sigma_y^2 - \mu_y^2 \quad (\text{L115})$$

d)

$$E_d = E\left\{ \left([2x + y - 2\mu_x - \mu_y] - [x - y - \mu_x + \mu_y] \right)^2 \right\} \quad (\text{L116})$$

$$= E\left\{ (x + 2y - \mu_x - 2\mu_y)^2 \right\} \quad (\text{L117})$$

$$= E\{x^2\} + 4E\{y^2\} + \mu_x^2 + 4\mu_y^2 + 4E\{xy\} - 2\mu_x^2 - 8\mu_x \mu_y - 8\mu_y^2 + 4\mu_x \mu_x \quad (\text{L118})$$

$$= \sigma_x^2 + 4\sigma_y^2 + 4C_{xy} \quad (\text{L119})$$

Aufgabe 13: Stichprobe und statistische Sicherheit

Die konstante Spannung U einer Batterie werde $N = 6$ mal gemessen. Man erhält die fehlerbehafteten Messwerte $y = U + e$ (Tab. 6).

i	1	2	3	4	5	6
y_i / V	4,520	4,475	4,490	4,511	4,486	4,518

Tabelle 6: Messwerte einer Batterie.

- a) Berechnen Sie den Stichprobenmittelwert \hat{y} als Schätzwert für die konstante Spannung U .
- b) Berechnen Sie die Stichprobenvarianz s_y^2 als Schätzwert für die Varianz des Messrauschens e .
- c) Nehmen Sie an, das Messrauschen e sei normalverteilt. Geben Sie die Unsicherheit $u_{\hat{y}}$ des Stichprobenmittelwertes mit einer statistischen Sicherheit von 90% an.

Für die folgenden Teilaufgaben seien die Messfehler e innerhalb des Intervalls zwischen den Grenzen $\pm 0,025$ V gleichverteilt (siehe Abb. 4).

- d) Berechnen Sie die Varianz σ_y^2 einer Einzelmessung und die Varianz $\sigma_{\hat{y}}^2$ des Schätzwertes \hat{y} .
- e) Mit welcher statistischen Sicherheit weicht eine Einzelmessung um nicht mehr als $\pm 0,020$ V vom tatsächlichen Wert von U ab?

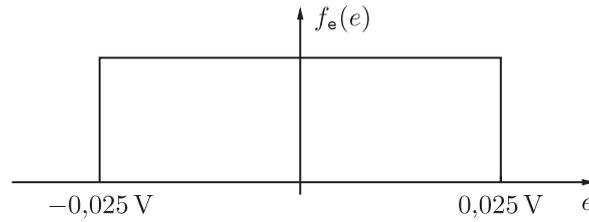


Abbildung 4: Wahrscheinlichkeitsdichte des gleichverteilten Messfehlers.

Lösung

Wir haben das Signalmodell $y = U + e$, wobei die zu messende Spannung als deterministisch angenommen wird.

- a) Wenn wir die Annahme machen, dass der Messfehler e mittelwertfrei ist, d. h. $\mu_e = 0$, folgt

$$\mu_y = E\{y\} = E\{U + e\} = U + \mu_e = U. \quad (\text{L120})$$

Daher ist der Stichprobenmittelwert $\hat{y} \approx \mu_y$ eine erwartungstreue Schätzung für die zu messende Spannung U :

$$\hat{y} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 y_i = 4,5 \text{ V}. \quad (\text{L121})$$

- b) Da die Spannung U konstant ist, gilt

$$\sigma_y^2 = E\{(y - \mu_y)^2\} = E\{y^2\} - \mu_y^2 = E\{U^2 + 2Ue + e^2\} - U^2 = 2E\{Ue\} + \sigma_e^2 + \mu_e^2 \quad (\text{L122})$$

und mit der Annahme, dass der Messfehler mittelwertfrei und zur Spannung U unkorreliert ist ($\mu_e = 0$ und $E\{Ue\} = U \cdot \mu_e = 0$),

$$\sigma_e^2 = \sigma_y^2 \approx s_y^2. \quad (\text{L123})$$

Daher ist die Stichprobenvarianz hier eine gute Schätzung für die Varianz des Messrauschens:

$$s_y^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^6 (y_i - \hat{y})^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^6 y_i^2 - \frac{6}{5} \hat{y}^2 = 3,532 \cdot 10^{-4} \text{ V}^2. \quad (\text{L124})$$

- c) Die Messunsicherheit wird allgemein in Vielfachen der Varianz der Messgröße angegeben: $u = c \cdot \sigma$. Die Abweichung des Stichprobenmittelwertes vom wahren Mittelwert ist $|\hat{y} - \mu_y|$, wobei $\mu_y = U$. Wir suchen zuerst also die Konstante c , für die gilt

$$P_n \{ |\hat{y} - \mu_y| \leq c \cdot \sigma_{\hat{y}} \} = 0,9 \quad (\text{L125})$$

bzw. mit $\sigma_{\hat{y}}^2 = \frac{\sigma_y^2}{N}$ und $N = 6$

$$P_n \left\{ \frac{|\hat{y} - \mu_y|}{\sigma_y} \sqrt{6} \leq c \right\} = 0,9. \quad (\text{L126})$$

Da e und somit auch y normalverteilt ist und wir σ_y durch s_y aus der Stichprobe selbst schätzen müssen, ist die Zufallsvariable $\frac{|\hat{y} - \mu_y|}{s_y} \sqrt{6}$ t-verteilt mit $n = 5$ Freiheitsgraden. Daher bestimmen wir c aus Abb. 4.19 oder Tab. A.1 im Messtechnik-Buch [1] oder einer anderen Darstellung der t-Verteilung (mit $n = 5$) zu $c \approx 2,0$.

Daraus folgt die Messunsicherheit $u_{\hat{y}} = c \frac{s_y}{\sqrt{N}} = 15,3188 \text{ mV}$. Somit liegt der Stichprobenmittelwert \hat{y} mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % weniger als 15,3188 mV von der wahren Spannung U entfernt.

- d) In Teilaufgabe b) hatten wir bereits gesehen, dass $\sigma_e^2 = \sigma_y^2$ gilt, wenn U konstant ist. Die Varianz einer im Intervall $[a, b]$ gleichverteilten Zufallsvariable ist $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$. Setzen wir für a und b die Grenzen des Messfehlers ein, erhalten wir:

$$\sigma_y^2 = \sigma_e^2 = \frac{(0,025 \text{ V} - (-0,025 \text{ V}))^2}{12} = 208,3 \text{ mV}^2. \tag{L127}$$

Für den Stichprobenmittelwert gilt dann (wenn die Messwerte y_i statistisch unabhängig sind):

$$\sigma_{\hat{y}}^2 = \frac{\sigma_y^2}{N} = 34,7 \text{ mV}^2. \tag{L128}$$

- e) Damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_e(e) \, de = 1 \tag{L129}$$

ist, muss

$$f_e(e) = \begin{cases} 20 \text{ V}^{-1} & \text{für } |e| \leq 25 \text{ mV} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{L130}$$

gelten. Die Abweichung einer einzelnen Messung vom tatsächlichen Wert U ist $|y_i - U| = |e_i|$, d. h. wir suchen:

$$P\{|e| \leq 20 \text{ mV}\} = \int_{-0,02}^{0,02} f_e(e) \, de = 0,04 \text{ V} \cdot 20 \frac{1}{\text{V}} = 0,8 \hat{=} 80 \%. \tag{L131}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % liegt also eine Einzelmessung weniger als 20 mV von der wahren Spannung U entfernt.

Aufgabe 14: χ^2 -Anpassungstest auf Normalverteilung

Ein Computerhersteller führt Untersuchungen zur Lebensdauer (in 10^3 h) seiner LCD-Bildschirme durch. Bei den Messungen erhalte man als statistische Kennwerte einen Stichprobenmittelwert von $\hat{x} = 5,15$ und eine Stichprobenvarianz von $s_x^2 = 0,59$. Dabei wurde folgende (als disjunkt angenommene) Häufigkeitsverteilung ermittelt (Tab. 7).

Prüfen Sie, ob die Lebensdauer der Bildschirme einer Normalverteilung folgt. Die Parameter der Normalverteilung seien die zuvor ermittelten, statistischen Kennwerte $\mu_x = \hat{x}$ und $\sigma_x^2 = s_x^2$. Die statistische Sicherheit soll dabei 96 % betragen. Überprüfen Sie auch, ob die Voraussetzungen für einen χ^2 -Test gegeben sind.

Hinweis: Da zur Beschreibung der Normalverteilung zwei Schätzwerte verwendet werden, reduziert sich die Anzahl der Freiheitsgrade für den χ^2 -Anpassungstest zusätzlich um zwei, also $m = k - 2 - 1$. Die Quantile für den Anpassungstest finden Sie in Abb. 5.

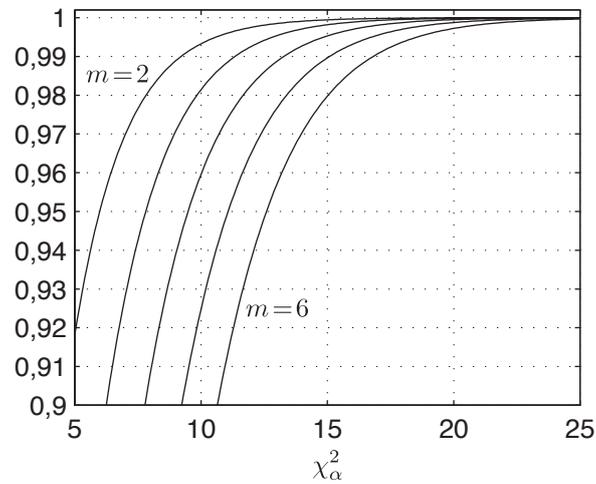


Abbildung 5: Quantile für den χ^2 -Test.

Lösung

1. Voraussetzungen:

- Unabhängigkeit der Messwerte: wird als gegeben angenommen
- Ausreichend großer Stichprobenumfang: wird bei $n = 130$ als gegeben angenommen

2. Histogramm erstellen:

Das Histogramm ist bereits in Tab. 2 gegeben. Es ist noch zu prüfen, ob die Anzahl der Elemente pro Klasse ausreichend ist, oder ob Klassen zusammengefasst werden müssen:

$$n_i \geq 1 \text{ bei Randklassen ist erfüllt,} \quad (\text{L132})$$

$$n_i \geq 5 \text{ bei sonstigen Klassen ist erfüllt.} \quad (\text{L133})$$

Intervall i	Lebensdauer / 10^3 h	Anzahl der Geräte n_i
1	3,0 – 3,6	2
2	3,6 – 4,2	8
3	4,2 – 4,8	35
4	4,8 – 5,4	43
5	5,4 – 6,0	22
6	6,0 – 6,6	15
7	6,6 – 7,2	5
	Gesamtanzahl n	130

Tabelle 7: Häufigkeitsverteilung einer Lebensdauer.

Es müssen also keine Klassen zusammengelegt werden.

3. Nullhypothese:

Die Nullhypothese beim χ^2 -Test ist stets, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte der untersuchten Größe mit der vermuteten Wahrscheinlichkeitsdichte (in dieser Aufgabe also eine Normalverteilung, deren Parameter durch Stichprobenmittelwert und -varianz geschätzt wurden) identisch ist:

$$H_0 : f_x(x) = \mathcal{N}(\mu = \hat{x}, \sigma^2 = s_x^2). \tag{L134}$$

4. Signifikanzniveau / statistische Sicherheit:

$$1 - \alpha = P \stackrel{!}{=} 0,96$$

5. Prüfgröße:

Zur Bestimmung der Prüfgröße

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \tag{L135}$$

müssen noch die Auftretenswahrscheinlichkeiten p_i der einzelnen Klassen bestimmt werden. Allgemein gilt:

$$p_i = P(a_i \leq x \leq b_i) = \int_{a_i}^{b_i} f_x(x) dx \quad \text{mit den Klassengrenzen } a_i, b_i. \tag{L136}$$

Hier bezeichnet $f_x(x)$ die Dichte einer Normalverteilung mit Mittelwert \hat{x} und Varianz s_x^2 ; daher ist $f_x\left(\frac{x-\hat{x}}{s_x}\right)$ standardnormalverteilt und es gilt

$$p_i = P(a_i \leq x \leq b_i) = \Phi\left(\frac{b_i - \hat{x}}{s_x}\right) - \Phi\left(\frac{a_i - \hat{x}}{s_x}\right), \tag{L137}$$

wobei die Werte der Standardnormalverteilung $\Phi(x)$ aus einer Tabelle aus der Literatur abgelesen werden können (Hinweis: es gilt $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$). So erhält man die Auftretenswahrscheinlichkeiten der einzelnen Klassen in Tab. L1. Mit den p_i aus Tab. L1, den n_i aus Tab. 7 und

i	1	2	3	4	5	6	7
p_i	0,0192	0,0863	0,2162	0,3033	0,2382	0,1047	0,0257

Tabelle L1: Wahrscheinlichkeiten dafür, dass ein Wert x in Klasse i fällt.

der Gesamtzahl an Messwerten n folgt:

$$\chi^2 = 6,5915. \tag{L138}$$

6. Freiheitsgrade:

Da die beiden Parameter der Wahrscheinlichkeitsdichte, mit der die Dichte der Stichprobe verglichen wird, aus der Stichprobe selbst bestimmt wurden, sind diese nicht statistisch unabhängig von der Stichprobe. Somit gehen uns zwei weitere Freiheitsgrade bei der χ^2 -Verteilung verloren:

$$m = k - 1 - 2 = 4. \tag{L139}$$

7. Bestimmung der Wahrscheinlichkeit der Prüfgröße:

Aus der Verteilungsfunktion der χ^2 -Verteilung (z. B. Abb. 4.20 oder Tab. A.1 im Messtechnik-Buch [1] oder Abb. 5 in dieser Übung) lesen wir ab, dass $P_4(\chi^2 \leq \chi_\alpha^2) = 0,96$ für $\chi_\alpha^2 \approx 10$ gilt.

8. Testentscheidung:

$$\chi^2 = 6,5915 \leq 10 \approx \chi_\alpha^2. \quad (\text{L140})$$

Daher wird die Nullhypothese, dass die Lebensdauer der Bildschirme der vermuteten Normalverteilung folgt, angenommen.

Aufgabe 15: Fehlerfortpflanzung

Mit zwei baugleichen Digitalkameras wurde eine Stereoanordnung gemäß Abb. 6 (a) erstellt. Für die einzelnen Kameras wird ein einfaches Lochkammermodell wie in Abb. 6 (b) verwendet. Zur Vereinfachung vernachlässigen wir die Höhenachse in den folgenden Betrachtungen. Für beide Kameras wird nun unabhängig voneinander ein Objekt in den aufgenommenen Bildern detektiert und diesem als Position der Schwerpunkt k_l bzw. k_r zugeordnet. Eine Rekonstruktion der Position des Objektes in der zweidimensionalen Ebene ist mit folgenden Formeln möglich:

$$x = f_1(k_l, k_r) = \frac{f}{\Delta p} \frac{b}{k_r - k_l},$$

$$y = f_2(k_l, k_r) = \frac{x \Delta p}{2f} (k_r + k_l + 1) = \frac{b}{2} \frac{k_r + k_l + 1}{k_r - k_l}.$$

Die Kameraparameter Brennweite f und Breite Δp eines Pixels auf der Sensorfläche seien bekannt sowie identisch für beide Kameras. Die Basisbreite der Stereoanordnung b sei ebenfalls bekannt.

- a) Schätzen Sie die Streuungen Δx^2 , Δy^2 und $\Delta x \Delta y$ für das gegebene Modell mit Hilfe des Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetzes ab, wenn die Varianzen $\sigma_{k_l}^2$ und $\sigma_{k_r}^2$ bekannt sind.

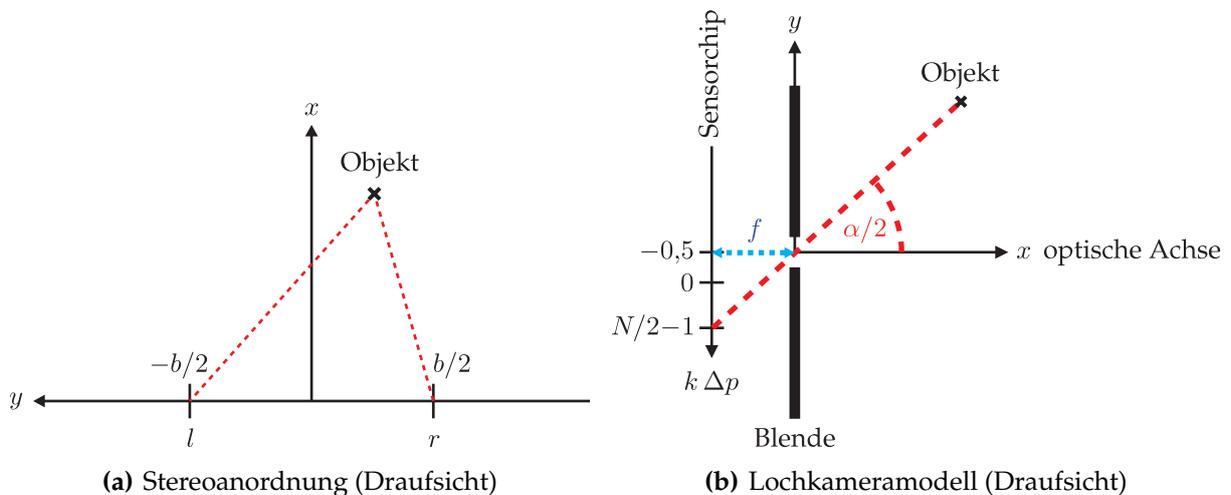


Abbildung 6: Einfaches Stereokameramodell.

Nun wird vor der Objektdetektion eine Tiefenkarte geschätzt und in dieser dann das Objekt detektiert. Diesem werden die Koordinaten Mittenwert m und Disparität d zugeordnet, wobei folgende Zusammenhänge gelten:

$$m = \frac{k_r + k_l}{2}, \quad d = k_r - k_l.$$

- b) Schätzen Sie erneut die Streuungen Δx^2 , Δy^2 und $\Delta x \Delta y$ für das gegebene Modell mit Hilfe des Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetzes ab, wenn die Varianzen σ_d^2 und σ_m^2 bekannt sind.

Lösung

- a) Im Folgenden werden folgende Kurzschreibweisen verwendet:

$$\mathbf{k} = [k_l, k_r]^T, \quad \mathbf{k}_0 = [k_{l,0}, k_{r,0}]^T, \quad x_0 = f_1(\mathbf{k}_0), \quad y_0 = f_2(\mathbf{k}_0), \quad \text{wobei } k_{r,0} = \mu_{k_r} \text{ und } k_{l,0} = \mu_{k_l} \text{ gilt.}$$

Die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung basiert auf einer Taylorreihenentwicklung mit Abbruch nach dem linearen Glied, so dass man

$$x \approx x_0 + \left. \frac{\partial f_1}{\partial k_l} \right|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0} (k_l - k_{l,0}) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial k_r} \right|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0} (k_r - k_{r,0}), \quad (\text{L141})$$

$$y \approx y_0 + \left. \frac{\partial f_2}{\partial k_l} \right|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0} (k_l - k_{l,0}) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial k_r} \right|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0} (k_r - k_{r,0}) \quad (\text{L142})$$

erhält.

Die partiellen Ableitungen sind:

$$\frac{\partial f_1}{\partial k_l} = \frac{f}{\Delta p} \frac{b}{(k_r - k_l)^2}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial k_l} = \frac{b}{2} \frac{1 + 2k_r}{(k_r - k_l)^2}, \quad (\text{L143})$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial k_r} = -\frac{f}{\Delta p} \frac{b}{(k_r - k_l)^2}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial k_r} = -\frac{b}{2} \frac{1 + 2k_l}{(k_r - k_l)^2}. \quad (\text{L144})$$

Wir benutzen folgende Abkürzungen:

$$f_{1,l} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial k_l} \right|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0}, \quad f_{1,r} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial k_r} \right|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0}, \quad f_{2,l} = \left. \frac{\partial f_2}{\partial k_l} \right|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0} \quad \text{und} \quad f_{2,r} = \left. \frac{\partial f_2}{\partial k_r} \right|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0} \quad \text{und bemerken, dass folgende Zusammenhänge gelten:}$$

$$f_{1,l} = \frac{x_0}{k_{r,0} - k_{l,0}} = -f_{1,r}, \quad (\text{L145})$$

$$f_{2,l} + f_{2,r} = \frac{b}{k_{r,0} - k_{l,0}}, \quad (\text{L146})$$

$$f_{2,l} - f_{2,r} = \frac{2y_0}{k_{r,0} - k_{l,0}}. \quad (\text{L147})$$

Die Streuung um die wahren Positionswerte schätzen wir über folgende Erwartungswerte (vgl.

(L141) und (L142) bzw. (4.263) und (4.264) im Messtechnik-Buch [1]):

$$E\{\Delta x^2\} = E\{(x - x_0)^2\} \approx E\left\{[f_{1,l} \cdot (k_l - k_{l,0}) + f_{1,r} \cdot (k_r - k_{r,0})]^2\right\} \quad (\text{L148})$$

$$= f_{1,l}^2 E\{(k_l - k_{l,0})^2\} + 2f_{1,l}f_{1,r} E\{(k_l - k_{l,0}) \cdot (k_r - k_{r,0})\} + f_{1,r}^2 E\{(k_r - k_{r,0})^2\} \quad (\text{L149})$$

$$= f_{1,l}^2 \sigma_{k_l}^2 + 2f_{1,l}f_{1,r} C_{k_l k_r} + f_{1,r}^2 \sigma_{k_r}^2 = f_{1,l}^2 \cdot (\sigma_{k_l}^2 - 2C_{k_l k_r} + \sigma_{k_r}^2) \quad (\text{L150})$$

$$E\{\Delta y^2\} = f_{2,l}^2 \sigma_{k_l}^2 + 2f_{2,l}f_{2,r} C_{k_l k_r} + f_{2,r}^2 \sigma_{k_r}^2 \quad (\text{L151})$$

$$E\{\Delta x \Delta y\} = f_{1,l}f_{2,l} \sigma_{k_l}^2 + (f_{1,l}f_{2,r} + f_{2,l}f_{1,r}) C_{k_l k_r} + f_{1,r}f_{2,r} \sigma_{k_r}^2 \quad (\text{L152})$$

$$= f_{1,l}f_{2,l} (\sigma_{k_l}^2 - C_{k_l k_r}) - f_{1,l}f_{2,r} (\sigma_{k_r}^2 - C_{k_l k_r}) . \quad (\text{L153})$$

Da der Detektionsalgorithmus für linkes und rechtes Bild unabhängig voneinander arbeitet, wird die Kovarianz $C_{k_l k_r}$ identisch null angenommen. Sämtliche anderen Größen sind laut Aufgabenstellung bekannt, sobald ein konkreter Messvektor \mathbf{k} vorliegt.

Man erkennt, dass die Abweichung in x -Richtung ($E\{\Delta x^2\}$) gleichermaßen von der Unsicherheit der Positionsschätzung der linken bzw. rechten Kamera abhängt und maßgeblich durch die Differenz der Positionen bestimmt wird ($E\{\Delta x^2\} \propto \frac{1}{(k_r - k_l)}$). Man sieht auch, dass wenn sich das Objekt direkt auf der optischen Achse einer der Kameras befindet (d. h. $k_{l,0} = -0,5$ oder $k_{r,0} = -0,5$) die Abweichung in y -Richtung ($E\{\Delta y^2\}$) nur noch von der Unsicherheit dieser Kamera abhängt, da $f_{2,l}$ bzw. $f_{2,r}$ den Wert 0 annimmt.

- b) Die Detektion des Objektes erfolgt nun nicht mehr in beiden Bildern unabhängig voneinander, so dass $C_{k_l k_r} \neq 0$ gilt. Um unser Ergebnis aus a) wiederzuverwenden, drücken wir $\sigma_{k_l}^2$, $\sigma_{k_r}^2$ und $C_{k_l k_r}$ abhängig von den Kenngrößen von m und d aus. Wir nehmen weiterhin an, dass m und d wiederum statistisch unabhängig voneinander sind:

$$k_l = m - \frac{d}{2} \Rightarrow \mu_{k_l} = \mu_m - \frac{\mu_d}{2} \quad (\text{L154})$$

$$\Rightarrow \sigma_{k_l}^2 = E\{k_l^2\} - \mu_{k_l}^2 = E\left\{m^2 - md + \frac{d^2}{4}\right\} - \left(\mu_m^2 - \mu_m \mu_d + \frac{\mu_d^2}{4}\right) = \sigma_m^2 + \frac{\sigma_d^2}{4} \quad (\text{L155})$$

$$k_r = m + \frac{d}{2} \Rightarrow \mu_{k_r} = \mu_m + \frac{\mu_d}{2} \quad (\text{L156})$$

$$\Rightarrow \sigma_{k_r}^2 = E\{k_r^2\} - \mu_{k_r}^2 = E\left\{m^2 + md + \frac{d^2}{4}\right\} - \left(\mu_m^2 + \mu_m \mu_d + \frac{\mu_d^2}{4}\right) = \sigma_m^2 + \frac{\sigma_d^2}{4} \quad (\text{L157})$$

$$C_{k_l k_r} = E\{k_l k_r\} - \mu_{k_l} \mu_{k_r} = E\left\{m^2 - \frac{d^2}{4}\right\} - \left(\mu_m^2 - \frac{\mu_d^2}{4}\right) = \sigma_m^2 - \frac{\sigma_d^2}{4} . \quad (\text{L158})$$

Mit $\sigma_{k_l}^2 - 2C_{k_l k_r} + \sigma_{k_r}^2 = \sigma_d^2$ und $f_{1,l} = \frac{x_0}{d_0}$ folgt:

$$\frac{E\{\Delta x^2\}}{x_0^2} = \frac{\sigma_d^2}{d_0^2} . \quad (\text{L159})$$

Man sieht also, dass die relative Genauigkeit in x -Richtung $\frac{E\{\Delta x^2\}}{x_0^2}$ unabhängig vom Fehler in m ist und identisch zum relativen Fehler bei der Disparitätbestimmung.

Mit (L155), (L158), (L146) und (L147) kann man (L151) umformen zu:

$$\frac{E\{\Delta y^2\}}{y_0^2} = \left(\frac{1}{y_0} \frac{b}{d_0}\right)^2 \sigma_m^2 + \frac{\sigma_d^2}{d_0^2} . \quad (\text{L160})$$

Dies bedeutet, dass die relative Genauigkeit in y -Richtung unabhängig von der Ungenauigkeit in m wird, wenn man sich von der optischen Achse der Stereoanordnung entfernt und eine konstante Abhängigkeit von der Genauigkeit der Disparitätsschätzung besitzt.

Analog zeigt man mit (L153), (L146), (L147) sowie $\sigma_{k_l/r}^2 - C_{k_l k_r} = \frac{\sigma_d^2}{2}$:

$$\frac{E\{\Delta x \Delta y\}}{x_0 y_0} = \frac{\sigma_d^2}{d_0^2}. \quad (\text{L161})$$

Aufgabe 16: Statistische Ähnlichkeit, Eigenschaften der Korrelationsfunktion

Die statistische Ähnlichkeit zweier reeller, stationärer, stochastischer Signale $x(t)$ und $y(t)$ sei durch die Kreuzkorrelationsfunktion

$$r_{xy}(\tau) = \frac{6\tau^2 + 2\tau - 10}{2\tau - \tau^2}$$

beschrieben. Der Mittelwert von $x(t)$ sei $\mu_x = 2$.

- Berechnen Sie den Mittelwert μ_y von $y(t)$.
- Berechnen Sie die Kreuzkorrelationsfunktion $r_{yx}(\tau)$.
- Berechnen Sie die Kreuzkovarianzfunktionen $C_{xy}(\tau)$ und $C_{yx}(\tau)$.

Lösung

- Da $r_{xy}(\tau)$ nicht periodisch ist, können wir annehmen, dass für große Verschiebungen τ die Signale $x(t)$ und $y(t)$ unkorreliert sind, also dass

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} r_{xy}(\tau) = \mu_x \cdot \mu_y \quad (\text{L162})$$

gilt (vgl. Tab. 6.3 im Messtechnik-Buch [1]). Wir lösen nach dem gesuchten μ_y auf:

$$\mu_y = \frac{1}{\mu_x} \lim_{|\tau| \rightarrow \infty} r_{xy}(\tau) = \frac{1}{2} \lim_{|\tau| \rightarrow \infty} \frac{6\tau^2 + 2\tau - 10}{-\tau^2 + 2\tau} = -3. \quad (\text{L163})$$

- Wir verwenden die Symmetrieeigenschaft der Korrelationsfunktion:

$$r_{yx}(\tau) = r_{xy}^*(-\tau) = \frac{6(-\tau)^2 + 2(-\tau) - 10}{-(-\tau)^2 + 2(-\tau)} = \frac{6\tau^2 - 2\tau - 10}{-\tau^2 - 2\tau}. \quad (\text{L164})$$

- Für die Kreuzkovarianzfunktionen erhält man:

$$C_{xy}(\tau) = r_{xy}(\tau) - \mu_x \mu_y^* = \frac{6\tau^2 + 2\tau - 10}{-\tau^2 + 2\tau} - 2(-3) = \frac{14\tau - 10}{-\tau^2 + 2\tau}, \quad (\text{L165})$$

$$C_{yx}(\tau) = r_{yx}(\tau) - \mu_y \mu_x^* = \frac{14\tau + 10}{\tau^2 + 2\tau}. \quad (\text{L166})$$

Aufgabe 17: Korrelation und mittlere Leistung

Zwei stochastische, stationäre Signale $x(t)$ und $y(t)$ werden zu $z(t) = x(t) - y(t)$ subtrahiert.

- a) Geben Sie allgemein die resultierende Autokorrelationsfunktion $r_{zz}(\tau)$ des Signals $z(t)$ an. Dabei darf $r_{zz}(\tau)$ ausschließlich von den entsprechenden Auto- und Kreuzkorrelationsfunktionen der Eingangssignale $x(t)$ und $y(t)$ abhängen.

Die beiden Signale $x(t)$ und $y(t)$ werden nun gemäß

$$x(t) = A + e(t) \quad , \quad r_{ee}(\tau) = \sigma_e^2 \cdot e^{-|\tau|}$$

$$y(t) = B + n(t) \quad , \quad r_{nn}(\tau) = \sigma_n^2 \cdot e^{-|2\tau|}$$

belegt, wobei die Signale je einen deterministischen Gleichanteil A bzw. B besitzen. Die auftretenden Rauschanteile $e(t)$ und $n(t)$ seien mittelwertfrei und statistisch unabhängig vom jeweils anderen Signal.

- b) Geben Sie die Kreuzkorrelationsfunktionen $r_{en}(\tau)$ und $r_{ne}(\tau)$ an.
 c) Wie groß ist die mittlere Leistung \bar{P}_z des resultierenden Differenzsignals $z(t) = x(t) - y(t)$?

Lösung

- a) Wir verwenden die statistische Definition der Korrelation

$$r_{zz}(\tau) = E\{z(t + \tau) z(t)\} \quad (\text{L167})$$

$$= E\{x(t + \tau)x(t) - x(t + \tau)y(t) - y(t + \tau)x(t) + y(t + \tau)y(t)\} \quad (\text{L168})$$

$$= r_{xx}(\tau) - r_{xy}(\tau) - r_{yx}(\tau) + r_{yy}(\tau). \quad (\text{L169})$$

- b) Da $e(t)$ und $n(t)$ mittelwertfrei und statistisch unabhängig voneinander sind, gilt:

$$r_{en}(\tau) = r_{ne}(\tau) = 0. \quad (\text{L170})$$

- c) Allgemein gilt $\bar{P}_z = r_{zz}(0)$, so dass wir mit dem Ergebnis aus a) nur noch die Kreuz- und Autokorrelationen von $x(t)$ und $y(t)$ für $\tau = 0$ bestimmen müssen. Hierzu verwenden wir unser Signalwissen $x(t) = A + e(t)$ bzw. $y(t) = B + n(t)$:

$$r_{xx}(0) = E\{x^2(t)\} = E\{A^2 + 2Ae(t) + e^2(t)\} = A^2 + 2A\mu_e + r_{ee}(0) \quad (\text{L171})$$

$$= A^2 + \sigma_e^2, \quad (\text{L172})$$

$$r_{yy}(0) = E\{y^2(t)\} = E\{B^2 + 2Bn(t) + n^2(t)\} = B^2 + 2B\mu_n + r_{nn}(0) \quad (\text{L173})$$

$$= B^2 + \sigma_n^2, \quad (\text{L174})$$

$$r_{xy}(0) = E\{x(t)y(t)\} = E\{(A + e(t))(B + n(t))\} = AB + \mu_e B + A\mu_n + r_{en}(0) \quad (\text{L175})$$

$$= AB, \quad (\text{L176})$$

$$r_{yx}(0) = E\{y(t)x(t)\} = r_{xy}(0). \quad (\text{L177})$$

Somit ist:

$$\bar{P}_z = A^2 + \sigma_e^2 - AB - AB + B^2 + \sigma_n^2 = (A - B)^2 + \sigma_e^2 + \sigma_n^2. \quad (\text{L178})$$

Aufgabe 18: Fahrzeugortung mittels Korrelation

In Abb. 7 ist eine vereinfachte Anordnung zur Fahrzeugortung mittels Schall dargestellt. Die Sender an den Positionen (x_A, y_A) und (x_B, y_B) erzeugen jeweils eine harmonische Schwingung $s_A(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ und $s_B(t) = \sin(4\pi f_0 t)$ mit der bekannten Frequenz f_0 . Die Wellenlängen beider Schwingungen sind größer als die größere der beiden Längen a und b . Die Ausbreitung des Schalls erfolgt mit der Geschwindigkeit v_s und ohne Verluste und Dämpfung. Die Zeit in den Sendern und im Fahrzeug ist perfekt synchronisiert, so dass die Signale $s_A(t)$ und $s_B(t)$ im Fahrzeug bekannt sind.

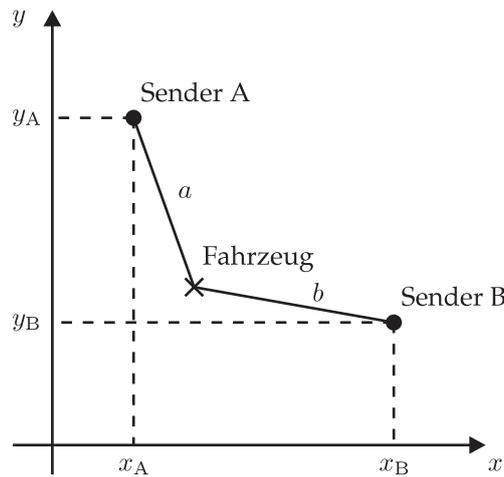


Abbildung 7: Anordnung zur Fahrzeugortung.

- Geben Sie das empfangene Signal $x(t)$ im Empfänger an.
- Zeigen Sie, dass $s_A(t)$ und $s_B(t)$ unkorrelierte Signale sind.
- Berechnen Sie die Kreuzkorrelationsfunktionen $r_{x s_A}(\tau)$ und $r_{x s_B}(\tau)$ und bestimmen Sie damit die Entfernungen a und b .
- Beschreiben Sie stichpunktartig ein Lokalisationsverfahren mit dieser Anordnung. Sind zwei Sender für eine eindeutige Lokalisation ausreichend?

Lösung

- Für die Längen der Strecken a und b in Abhängigkeit von den Laufzeiten der Signale und der Schallgeschwindigkeit gilt:

$$a = \tau_a v_s, \quad b = \tau_b v_s. \quad (\text{L179})$$

Da laut unseren Annahmen keine Dämpfung und keine weiteren Signalquellen vorkommen, ist das Empfangssignal identisch mit der Summe der Sendesignale, jeweils um die entsprechende Laufzeit verzögert:

$$x(t) = s_A\left(t - \tau_a\right) + s_B\left(t - \tau_b\right) = \sin\left(2\pi f_0 \left(t - \frac{a}{v_s}\right)\right) + \sin\left(4\pi f_0 \left(t - \frac{b}{v_s}\right)\right). \quad (\text{L180})$$

b) Zu zeigen ist:

$$E\{s_A(t + \tau) s_B(t)\} = E\{s_A(t + \tau)\} E\{s_B(t)\} \quad \forall \tau, t. \quad (\text{L181})$$

Laut Bsp. 6.3 im Messtechnik-Buch [1] bilden die harmonischen Schwingungen mit zufälliger Phase und gleicher Frequenz einen schwach ergodischen Prozess. Die Funktionen $s_A(t)$ und $s_B(t)$ können als Musterfunktionen solcher Prozesse auftreten, so dass wir davon ausgehen, dass wir anstatt der Scharmittelwerte auch die Zeitmittelwerte nach [1, Satz 6.1 und Satz 6.2] für die Momente der ersten und zweiten Ordnung verwenden können. Somit sind die beiden Erwartungswerte auf der rechten Seite und damit auch deren Produkt identisch null. Der linke Erwartungswert wird zu:

$$E\{s_A(t + \tau) s_B(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sin(2\pi f_0(t + \tau)) \sin(2\pi f_0 2t) dt \quad (\text{L182})$$

mit $\sin(a) \cdot \sin(b) = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T} \int_{-T}^T [\cos(2\pi f_0(t + \tau - 2t)) - \cos(2\pi f_0(t + \tau + 2t))] dt \quad (\text{L183})$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T} \int_{-T}^T \cos(2\pi f_0(\tau - t)) dt - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T} \int_{-T}^T \cos(2\pi f_0(\tau + 3t)) dt = 0. \quad (\text{L184})$$

Da die beiden Integrale beschränkt sind, der Ausdruck $4T$ beim Grenzübergang aber unbeschränkt wächst, ist die Korrelation identisch null.

Somit ist die Gleichheit in (L181) für alle t und τ gegeben und $s_A(t)$ und $s_B(t)$ sind unkorreliert.

c) Für die gesuchten Korrelationsfunktionen gilt:

$$r_{xs_A}(\tau) = E\{x(t + \tau) s_A(t)\} = E\{s_A(t + \tau - \tau_a) s_A(t)\} + \underbrace{E\{s_B(t + \tau - \tau_b) s_A(t)\}}_{= 0, \text{ siehe a)} \quad (\text{L185})$$

$$= E\{s_A(t + \tau - \tau_a) s_A(t)\} = r_{s_A s_A}(\tau - \tau_a) \quad (\text{L186})$$

bzw.

$$r_{xs_B}(\tau) = r_{s_B s_B}(\tau - \tau_b). \quad (\text{L187})$$

Wie in a), verwenden wir die Zeitmittelwerte um die Korrelationen zu berechnen:

$$r_{s_A s_A}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sin(2\pi f_0(t + \tau)) \sin(2\pi f_0 t) dt \quad (\text{L188})$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T} \int_{-T}^T \underbrace{\cos(2\pi f_0 \tau)}_{\text{unabhängig von } t} - \cos(2\pi f_0(2t + \tau)) dt \quad (\text{L189})$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \cos(2\pi f_0 \tau) \frac{2T}{4T} - \underbrace{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T} \int_{-T}^T \cos(2\pi f_0(2t + \tau)) dt}_{= 0, \text{ siehe b)}} \quad (\text{L190})$$

$$= \frac{1}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \quad (\text{L191})$$

und analog

$$r_{s_B s_B}(\tau) = \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 \tau). \quad (\text{L192})$$

Die Kreuzkorrelationsfunktionen $r_{s_A s_A}(\tau - \tau_a)$ und $r_{s_B s_B}(\tau - \tau_b)$ sind periodisch und haben Maxima bei $\frac{(\tau - \frac{a}{v_s})}{T_0} = k$ bzw. $\frac{2(\tau - \frac{b}{v_s})}{T_0} = l$ mit $k, l \in \mathbb{Z}$. Für $k = l = 0$ gilt dann $\tau - \frac{a}{v_s} = 0$, d. h. $a = \tau v_s$ bzw. $b = \tau v_s$.

Wir können also die Laufzeiten und somit die Entfernungen zu den Sendern aus den Maxima der Korrelationsfunktionen bestimmen. Die Frage ist nun, welche Maxima zu $k = l = 0$ gehören. Hierzu nutzen wir, dass laut den Voraussetzungen Folgendes gilt (beachte: $\lambda = \frac{c}{f}$):

$$\begin{aligned} 0 < a < \frac{1}{2} \lambda_0 \\ 0 < \frac{a}{v_s} = \tau_a < \frac{1}{2} \frac{\lambda_0}{v_s} = \frac{1}{2} T_0 \end{aligned}$$

Wir wissen außerdem, dass die Kreuzkorrelationen die Periodendauern T_0 bzw. $\frac{T_0}{2}$ und pro Periode nur ein Maximum haben, so dass wir τ_a als die Verschiebung ablesen können, die zum Maximum von $r_{x s_A}(\tau)$ im Intervall $[0, \frac{T_0}{2}]$ gehört. Damit berechnen wir dann $a = \tau_a v_s$. Analog geht man bei der Berechnung von b vor.

d) Alle Punkte mit $\|\mathbf{x}_A - \mathbf{x}\| = a$ liegen auf einem Kreis mit Radius a um die Position \mathbf{x}_A des Senders A. Analoges gilt für Sender B. Somit könnte eine Lokalisation wie folgt ablaufen:

1. Zeichne ein möglichst langes Signal $x(t)$ auf.
2. Nähere die Kreuzkorrelationen $r_{x s_A}(\tau)$ und $r_{x s_B}(\tau)$ des gemessenen $x(t)$ mit den bekannten Sendesignalen $s_A(t)$ und $s_B(t)$ über die Korrelation für Energiesignale $r_{x s_A}^E(\tau)$ und $r_{x s_B}^E(\tau)$ an.
3. Bestimme die Verschiebungen τ_a und τ_b , die zu den Maxima im Intervall $[0, \frac{T_0}{2}]$ gehören, und berechne daraus a bzw. b .
4. Bestimme die Schnittpunkte der Kreise mit diesen Radien um die Positionen der Sender. Einer der Schnittpunkte ist die Fahrzeugposition.

Da sich zwei Kreise aber in bis zu zwei Punkten schneiden, wird die Lokalisation in der Regel nicht eindeutig sein. Daher ist für eine eindeutige Positionsbestimmung eigentlich ein weiterer

Sender nötig.

Aufgabe 19: Korrelation und Leistungsdichte

- a) In Abb. 8 finden Sie Zeitfunktionen $x(t)$, deren Autokorrelationsfunktionen $r_{xx}(\tau)$ sowie die zugehörigen Leistungsdichten $S_{xx}(f)$. Die Bilder sind jedoch in ihrer Reihenfolge vertauscht. Ordnen Sie daher den Zeitfunktionen (A–H) die zugehörigen Autokorrelationen (1–8) und die entsprechenden Leistungsdichten (I–VIII) zu. Geben Sie für Ihre Zuordnung jeweils eine Begründung an.

Lösung

- A – 8 – II

$x(t)$	Sägezahn $f_0 = 4 \text{ Hz}$	kein Offset	Weißes Rauschen
$r_{xx}(\tau)$	parabelförmig $f_0 = 4 \text{ Hz}$	kein Offset	$\delta(\tau)$
$S_{xx}(f)$	Impulse bei $f = k \cdot f_0, k \in \mathbb{Z}$	kein Impuls $\delta(f)$	Offset

- B – 3 – VIII

$x(t)$	Sägezahn $f_0 = 8 \text{ Hz}$	Offset
$r_{xx}(\tau)$	parabelförmig $f_0 = 8 \text{ Hz}$	Offset
$S_{xx}(f)$	Impulse bei $f = k \cdot f_0, k \in \mathbb{Z}$	$\delta(f)$

- C – 1 – V

$x(t)$	PRBS $f_0 = 4 \text{ Hz}$
$r_{xx}(\tau)$	Peaks bei $\tau = \frac{k}{f_0}, k \in \mathbb{Z}$ kleiner negativer Offset
$S_{xx}(f)$	Impulse bei $f = k \cdot f_0, k \in \mathbb{Z}$ $\delta(f)$

- D – 4 – IV

$x(t)$	Rechteck $f_0 = 8 \text{ Hz}$	Weißes Rauschen
$r_{xx}(\tau)$	dreieckförmig $f_0 = 8 \text{ Hz}$	$\delta(\tau)$
$S_{xx}(f)$	Impulse bei $f = (2k + 1) \cdot f_0, k \in \mathbb{Z}$	Offset

- E – 7 – III

$x(t)$	Harmonische $f_0 = 8 \text{ Hz}$	Offset	farbiges Rauschen
$r_{xx}(\tau)$	cosinus $f_0 = 8 \text{ Hz}$	Offset	Überhöhung um $\tau = 0$
$S_{xx}(f)$	Impulse bei $f = \pm f_0$	$\delta(f)$	„Glocke“ um $f = 0$

- F – 5 – VII

$x(t)$	Rechteck $f_0 = 4 \text{ Hz}$	Offset	Weißes Rauschen
$r_{xx}(\tau)$	dreieckförmig $f_0 = 4 \text{ Hz}$	Offset	$\delta(\tau)$
$S_{xx}(f)$	Impulse bei $f = (2k + 1) \cdot f_0, k \in \mathbb{Z}$	$\delta(f)$	Offset

- G – 2 – VI

$x(t)$	Rechteck $f_0 = 16 \text{ Hz}$	Offset	farbiges Rauschen
$r_{xx}(\tau)$	dreieckförmig $f_0 = 16 \text{ Hz}$	Offset	Überhöhung um $\tau = 0$
$S_{xx}(f)$	Impulse bei $f = (2k + 1) \cdot f_0, k \in \mathbb{Z}$	$\delta(f)$	„Glocke“ um $f = 0$

• H-6-I

$x(t)$	Sägezahn $f_0 = 16 \text{ Hz}$	Offset	farbiges Rauschen
$r_{xx}(\tau)$	parabelförmig $f_0 = 16 \text{ Hz}$	Offset	Überhöhung um $\tau = 0$
$S_{xx}(f)$	Impulse bei $f = k \cdot f_0, k \in \mathbb{Z}$	$\delta(f)$	„Glocke“ um $f = 0$

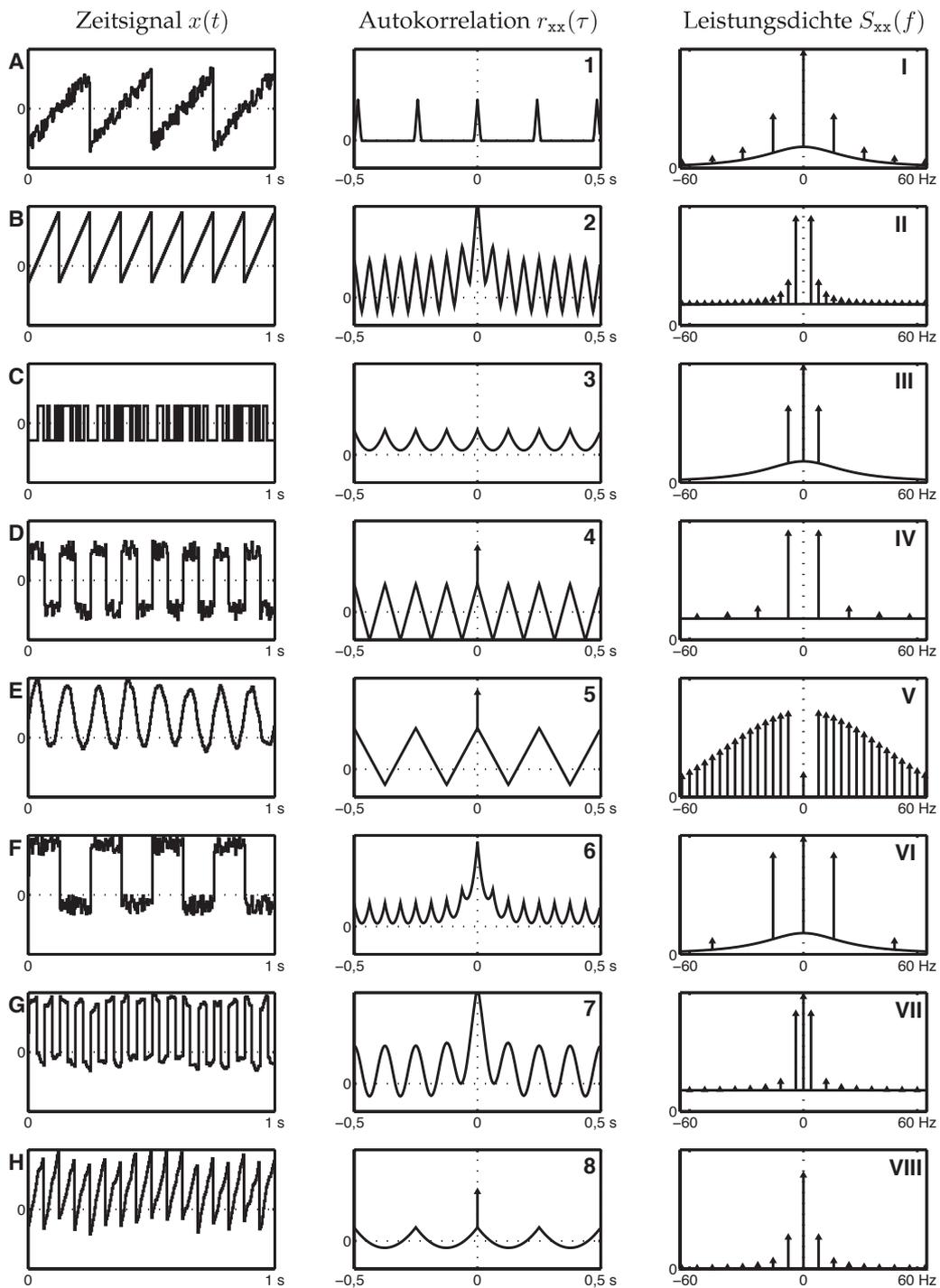


Abbildung 8: Zeitsignale, Autokorrelationsfunktionen und Leistungsdichten.

Aufgabe 20: Identifikation von LTI-Systemen

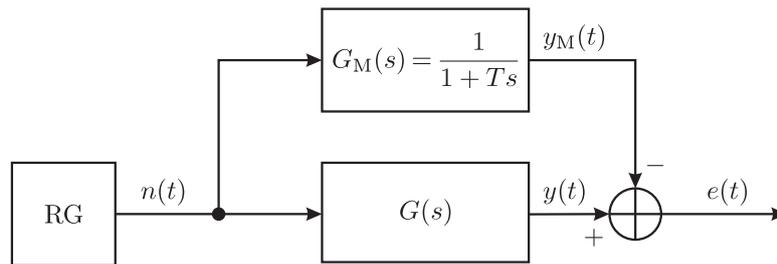


Abbildung 9: Gesamtsystem.

Um ein System mit einer unbekanntem Übertragungsfunktion $G(s)$ zu identifizieren, wird dem System ein Modell $G_M(s)$ parallel geschaltet und beide Übertragungsfunktionen mit dem gleichen Anregungssignal $n(t)$ gespeist. Durch Differenzbildung der beiden verschiedenen Ausgänge erhält man ein Fehlersignal $e(t)$ für das modellierte System. Das so entstehende Gesamtsystem ist in Abb. 9 zu sehen.

Beide Systeme seien durch einen Rauschgenerator RG mit Gauß'schem weißem Rauschen mit einer Leistungsdichte von $S_{nn}(f) = \sigma_n^2$ angeregt. Die Autokorrelationsfunktion am Ausgang des eigentlichen Systems beträgt

$$r_{yy}(\tau) = \frac{a}{2} e^{-b|\tau|}, \quad b > 0.$$

- Bestimmen Sie die Leistungsdichte $S_{yy}(f)$ des Ausgangssignals.
- Geben Sie mit Hilfe der in a) berechneten Leistungsdichte das Betragsquadrat der Übertragungsfunktion $|G(f)|^2$ an.
- Berechnen Sie die Leistungsdichte $S_{ee}(f)$ des Fehlersignals, wenn die Übertragungsfunktion des Systems als

$$G(f) = \frac{\sqrt{ab}}{\sigma_n(b + j2\pi f)}$$

bekannt ist.

Lösung

Um das unbekanntem System $G(s)$ zu identifizieren, wird es mit einem bekannten Eingangssignal beschaltet und sein Ausgangssignal analysiert. Man könnte sich zum Beispiel vorstellen, das unbekanntem System sei ein Übertragungskanal in der Kommunikationstechnik. Da dieser beim Entwurf eines Kommunikationssystems nicht immer für Messungen zur Verfügung steht, soll er zunächst modelliert werden und der eigentliche Entwurf des Kommunikationssystems dann anhand dieses Modells stattfinden. Man muss daher zuerst den Kanal vermessen, d. h. seine Übertragungsfunktion $G(f)$ bestimmen, um dann die Parameter des Modells $G_M(f)$ so zu wählen, dass dieses das Verhalten des Kanals optimal annähert. D. h. hier, dass das Differenzsignal $e(t) = y(t) - y_M(t)$ minimale mittlere Leistung haben soll.

- a) Das Leistungsdichtespektrum $S_{yy}(f)$ ist definiert als die Fourier-Transformierte der Autokorrelationsfunktion $r_{yy}(\tau)$:

$$S_{yy}(f) = \mathcal{F}\{r_{yy}(\tau)\} = \frac{a}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b|\tau|} e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (\text{L193})$$

$$= \frac{a}{2} \left[\int_{-\infty}^0 e^{\tau(b-j2\pi f)} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-\tau(b+j2\pi f)} d\tau \right] \quad (\text{L194})$$

$$= \frac{a}{2} \left[\frac{e^{\tau(b-j2\pi f)}}{b-j2\pi f} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{e^{-\tau(b+j2\pi f)}}{b+j2\pi f} \Big|_0^{\infty} \right] \quad (\text{L195})$$

$$= \frac{a}{2} \left[\frac{1}{b-j2\pi f} + \frac{1}{b+j2\pi f} \right] = \frac{ab}{b^2 + (2\pi f)^2}. \quad (\text{L196})$$

Alternativ kann zur Berechnung des Integrals eine Transformationstabelle (z. B. [2, Tab. A.4]) herangezogen werden.

- b) Wenn ein ergodischer Zufallsprozess $n(t)$ ein LTI-System mit der Übertragungsfunktion $G(f)$ durchläuft, gilt nach dem Messtechnik-Buch [1, (6.191)] allgemein für das Leistungsdichtespektrum $S_{yy}(f)$ am Ausgang des Systems:

$$S_{yy}(f) = S_{nn}(f) \cdot |G(f)|^2. \quad (\text{L197})$$

Da wir die Leistungsdichte des Eingangsprozesses $n(t)$ kennen und die Leistungsdichte des Ausgangsprozesses $y(t)$ aus der gemessenen Autokorrelationsfunktion $r_{yy}(\tau)$ bestimmt haben, können wir diese Gleichung nach $|G(f)|^2$ auflösen:

$$|G(f)|^2 = \frac{S_{yy}(f)}{S_{nn}(f)} = \frac{ab}{b^2 + (2\pi f)^2} \cdot \frac{1}{\sigma_n^2}. \quad (\text{L198})$$

Eine Zerlegung von $|G(f)|^2$ in $G(f)$ und $G^*(f)$ ist nicht eindeutig möglich, so dass wir mit diesem Verfahren den Phasengang leider nicht rekonstruieren können. Wäre uns die Kreuzkorrelationsfunktion $r_{ny}(\tau)$ oder die Kreuzleistungsdichte $S_{ny}(f)$ bekannt, so könnten wir zur Schätzung der Übertragungsfunktion die Gleichung [1, (6.190)]

$$S_{yy}(f) = S_{ny}(f) \cdot G(f) \quad (\text{L199})$$

nach $G(f) = \frac{S_{yy}(f)}{S_{ny}(f)}$ auflösen und somit auch den Phasengang des Systems bestimmen.

- c) Um die Parameter des Modells $G_M(s)$ optimal zu wählen, soll die mittlere Leistung des Fehlersignals $e(t)$ minimiert werden. Hierzu ist als erster Schritt die Leistungsdichte $S_{ee}(f)$ des

Fehlersignals in Abhängigkeit des Parameters T zu bestimmen:

$$S_{ee}(f) = S_{nn}(f) \cdot |G(f) - G_M(f)|^2 = \sigma_n^2 \left| \frac{\sqrt{ab}}{\sigma_n(b + j2\pi f)} - \frac{1}{1 + j2\pi fT} \right|^2 \quad (\text{L200})$$

$$= \sigma_n^2 \left| \frac{\sqrt{ab}(1 + j2\pi fT) - \sigma_n(b + j2\pi f)}{\sigma_n(b + j2\pi f)(1 + j2\pi fT)} \right|^2 \quad (\text{L201})$$

$$= \left| \frac{[\sqrt{ab} - \sigma_n b] + j [2\pi f (T\sqrt{ab} - \sigma_n)]}{(b + j2\pi f)(1 + j2\pi fT)} \right|^2 \quad (\text{L202})$$

$$= \frac{(\sqrt{ab} - \sigma_n b)^2 + (2\pi f)^2 (T\sqrt{ab} - \sigma_n)^2}{(b^2 + (2\pi f)^2) (1 + (2\pi fT)^2)}. \quad (\text{L203})$$

Eine Minimierung der Leistungsdichte $S_{ee}(f)$ würde den Rahmen dieser Aufgabe übersteigen.

Aufgabe 21: Wiener-Filter

Gegeben sei ein Messsystem gemäß Abb. 10. Die additive Störung $n(t)$ sei nicht mit dem Eingangssignal $x(t)$ korreliert. Es soll ein Wiener-Filter $H(f)$ entworfen werden, das aus $y(t)$ das Signal $x(t)$ unter minimalem quadratischem Fehler als Nebenbedingung rekonstruiert. Das so geschätzte Signal am Ausgang von $H(f)$ sei $\hat{x}(t)$.

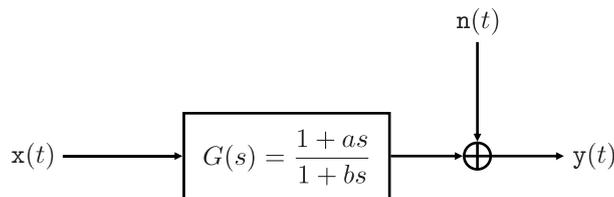


Abbildung 10: Struktur eines Messsystems.

- a) Welche messtechnisch erfassbaren Größen müssen zur Bestimmung von $H(f)$ bekannt sein? ($G(f)$ sei unbekannt). Geben Sie $H(f)$ in Abhängigkeit dieser Größen an.

$G(f)$ sei nun durch eine Systemidentifikation entsprechend Abb. 10 bekannt. Die Leistungsdichte des Eingangssignals sei konstant $S_{xx}(f) = d^2$ für $|f| \leq 10^5$ Hz und 0 sonst. Das Rauschen wird als ideales weißes Rauschen mit der konstanten Leistungsdichte $S_{nn}(f) = c^2$ angenommen.

- b) Berechnen Sie $H(f)$ bei gegebenen Konstanten $a = \frac{10^{-3}}{2\pi}$ s, $b = \frac{10^{-5}}{2\pi}$ s, $c = 2$ und $d = 1$. Skizzieren Sie die Amplitudengänge von $G(f)$ und $H(f)$ in einem Bode-Diagramm.
- c) Stellen Sie die Signal- und Störübertragungsfunktionen $G_{\text{sig}}(f)$ bzw. $G_{\text{stör}}(f)$ in Abhängigkeit des frequenzabhängigen Signal-Rausch-Verhältnisses $\text{SNR} = \frac{S_{xx}(f)}{S_{nn}(f)}$ auf und beschreiben Sie anhand dessen die Wirkung des Gesamtsystems aus G und H auf die jeweiligen Signalanteile.

Lösung

- a) Da das optimale Rekonstruktionsfilter (oder Wiener-Filter) sich aus

$$H(f) = \frac{S_{xy}(f)}{S_{yy}(f)} \quad (\text{L204})$$

berechnet (vgl. (6.243) im Messtechnik-Buch [1]), müssen die Leistungsdichten $S_{xy}(f)$ und $S_{yy}(f)$ bekannt sein.

- b) Da die Übertragungsfunktion und die Leistungsdichten des Eingangs- und Störsignals gegeben sind, können wir direkt (6.246) aus dem Messtechnik-Buch [1] ansetzen:

$$H(f) = \frac{S_{xx}(f) G^*(f)}{S_{xx}(f) G(f) G^*(f) + S_{nn}(f)}. \quad (\text{L205})$$

Man sieht, dass für die gegebenen Leistungsdichten der Nenner stets ungleich 0 ist, der Zähler aber durch $S_{xx}(f)$ für $|f| > 10^5$ Hz verschwindet. Somit gilt

$$H(f) = \begin{cases} H_1(f) & \text{für } |f| \leq 10^5 \text{ Hz} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (\text{L206})$$

wobei $H_1(f)$ im Folgenden näher bestimmt wird.

$$H_1(f) = \frac{1 - aj2\pi f}{\underbrace{1 - bj2\pi f}_{G^*(f)}} \cdot \frac{d^2}{d^2 \cdot \underbrace{\frac{1 + a^2(2\pi f)^2}{1 + b^2(2\pi f)^2} + c^2}_{G(f)G^*(f)}} \quad (\text{L207})$$

$$= \frac{(1 - aj2\pi f)(1 + bj2\pi f)}{1 + b^2(2\pi f)^2} \cdot \frac{1 + b^2(2\pi f)^2}{1 + a^2(2\pi f)^2 + \left(\frac{c}{d}\right)^2 (1 + b^2(2\pi f)^2)} \quad (\text{L208})$$

$$= \frac{(1 - aj2\pi f)(1 + bj2\pi f)}{1 + \left(\frac{c}{d}\right)^2 + (2\pi f)^2 \left(a^2 + \left(\frac{bc}{d}\right)^2\right)}, \quad (\text{L209})$$

wobei wir für die Skizzierung des Amplitudenganges noch den Nenner geeignet umformen:

$$1 + \left(\frac{c}{d}\right)^2 + (2\pi f)^2 \left(a^2 + \left(\frac{bc}{d}\right)^2\right) = \left(1 + \left(\frac{c}{d}\right)^2\right) \left(1 + (2\pi f)^2 \cdot \frac{a^2 + \frac{b^2c^2}{d^2}}{1 + \frac{c^2}{d^2}}\right) \quad (\text{L210})$$

$$= \left(1 + \left(\frac{c}{d}\right)^2\right) \left(1 + (2\pi f)^2 \frac{(ad)^2 + (bc)^2}{c^2 + d^2}\right) \quad (\text{L211})$$

$$= \left(1 + \left(\frac{c}{d}\right)^2\right) \left(1 + j2\pi f \sqrt{\frac{(ad)^2 + (bc)^2}{c^2 + d^2}}\right) \left(1 - j2\pi f \sqrt{\frac{(ad)^2 + (bc)^2}{c^2 + d^2}}\right). \quad (\text{L212})$$

Somit gelten mit den Konstanten aus der Aufgabenstellung

$$G(f) = \frac{1 + j10^{-3}f}{1 + j10^{-5}f} \quad (\text{L213})$$

$$H_1(f) = \frac{d^2}{\underbrace{c^2 + d^2}_{= \frac{1}{5}}} \cdot \frac{(1 - j10^{-3}f)(1 + j10^{-5}f)}{(1 - j0,4473 \cdot 10^{-3}f)(1 + j0,4473 \cdot 10^{-3}f)} \quad (\text{L214})$$

und folglich

$$20 \log |G(f)| = 20 \log |1 + j10^{-3}f| - 20 \log |1 + j10^{-5}f| \quad (\text{L215})$$

$$20 \log |H_1(f)| = -20 \log |5| + 20 \log |1 - j10^{-3}f| + 20 \log |1 + j10^{-5}f| \quad (\text{L216})$$

$$- 40 \log |1 + j0,4473 \cdot 10^{-3}f|. \quad (\text{L217})$$

Die Amplitudengänge sind in den Abbildungen L4 und L5 dargestellt.

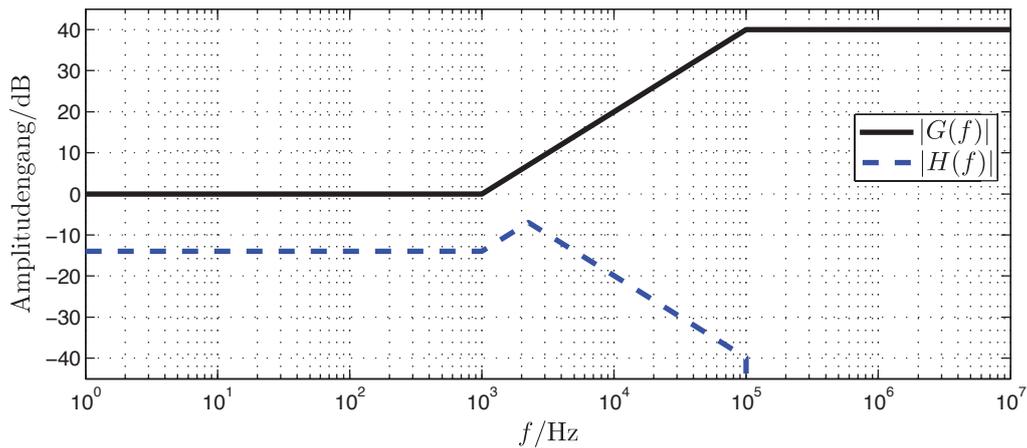


Abbildung L4: Geradennäherung der Amplitudengänge von $G(f)$ und $H(f)$.

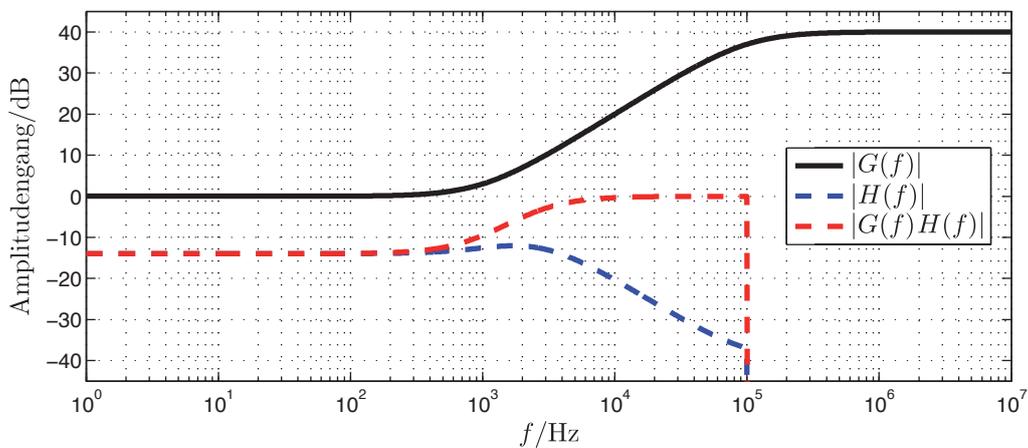


Abbildung L5: Amplitudengänge von $G(f)$ und $H(f)$, sowie der Reihenschaltung aus beiden.

c) Man kann $H(f)$ auch darstellen als

$$H(f) = \frac{S_{xx}(f) G^*(f)}{S_{xx}(f) G(f) G^*(f) + S_{nn}(f)} = \frac{1}{G(f)} \left[\frac{G(f) G^*(f)}{G(f) G^*(f) + \frac{S_{nn}}{S_{xx}}} \right]. \quad (\text{L218})$$

Das Nutzsignal $x(t)$ wird durch $G(f) \cdot H(f)$ beeinflusst, also durch den reellen Ausdruck

$$G_{\text{sig}}(f) = \frac{G(f) G^*(f)}{G(f) G^*(f) + \frac{S_{nn}(f)}{S_{xx}(f)}}. \quad (\text{L219})$$

Man erkennt, dass das Nutzsignal für Frequenzen ohne Störungen, d. h. $S_{nn}(f) = 0$, nicht verändert wird, da dann $G_{\text{sig}}(f) = 1$ gilt. Frequenzen, in denen aber die Störleistung deutlich höher als die Signalleistung ist, werden dagegen stark gedämpft.

Das Störsignal wird nur durch $H(f)$ beeinträchtigt, also

$$G_{\text{stör}}(f) = H(f), \quad (\text{L220})$$

so dass es zusätzlich zu der SNR-abhängigen Dämpfung noch mit $G(f)^{-1}$ ($\neq G^{-1}(f)$) verändert wird.

Aufgabe 22: Jitter-Analyse

Bei einer *DVD-Audio* seien die Musikdaten mit einer Quantisierung von 24 Bit und einer Abtastfrequenz von 96 kHz abgespeichert. Dabei sind die Musiksignale bandbegrenzt auf 20 kHz.

- Welcher Signal-Rausch-Verhältnis (in dB) lässt sich theoretisch mit dieser Quantisierung unter der Annahme eines linearen Quantisierungsmodells erreichen?
- Welche Anforderungen ergeben sich an die Abtastzeitgenauigkeit? Berechnen Sie dazu den maximalen Abtastzeitfehler unter der Annahme eines gleichverteilten Abtastzeitfehlers.
- Wie hoch ist die nutzbare Auflösung in Bit, wenn die Abtastzeitfehler im Intervall $-10 \text{ ps} \leq \tau \leq 10 \text{ ps}$ gleichverteilt sind?

Lösung

- Das Signal-Rausch-Verhältnis (SNR) ist allgemein definiert als:

$$\text{SNR} = \frac{P_{\text{Sig}}}{P_{\text{Noi}}} \quad (\text{L221})$$

mit der Signalleistung P_{Sig} und der Störleistung P_{Noi} . Wir nehmen ein lineares Quantisierungsmodell an:

$$\mathbf{x}_q(t) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{e}_q(t). \quad (\text{L222})$$

Nehmen wir des Weiteren ein sinusförmiges Eingangssignal mit der maximal vom ADU darstellbaren Amplitude $2 \cdot A = q \cdot 2^N$ an, so kann man die Signalleistung bestimmen:

$$P_{\text{Sig}} = r_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A^2 \sin^2(2\pi ft) dt \quad (\text{L223})$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{4T} \left(\underbrace{\int_{-T}^T \cos(0) dt}_{=2T} - \int_{-T}^T \cos(4\pi ft) dt \right) \quad (\text{L224})$$

$$= \frac{A^2}{2} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T} \int_{-T}^T \cos(4\pi ft) dt \quad (\text{L225})$$

$$= \frac{A^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{q \cdot 2^N}{2} \right)^2 = \frac{(q \cdot 2^{N-1})^2}{2} = q^2 \cdot 2^{2N-3}. \quad (\text{L226})$$

Die Störleistung bestimmt man wie folgt:

$$P_{\text{Noi}} = r_{\mathbf{e}_q\mathbf{e}_q}(0) = E \{ \mathbf{e}_q^2 \} = \sigma_{\mathbf{e}_q}^2 + \mu_{\mathbf{e}_q}^2. \quad (\text{L227})$$

Da der Quantisierungsfehler aber mittelwertfrei und im Intervall $-\frac{q}{2} \leq \mathbf{e}_q \leq \frac{q}{2}$ gleichverteilt ist, wird dies zu:

$$P_{\text{Noi}} = \sigma_{\mathbf{e}_q}^2 + \underbrace{\mu_{\mathbf{e}_q}^2}_{=0} = \sigma_{\mathbf{e}_q}^2 = \frac{q^2}{12}. \quad (\text{L228})$$

Somit ist das gesuchte SNR:

$$\text{SNR}_q = \frac{P_{\text{Sig}}}{P_{\text{Noi}}} = \frac{q^2 \cdot 2^{N-3} 12}{q^2} = 3 \cdot 2^{2N-1} = 3 \cdot 2^{47} \approx 146 \text{ dB}. \quad (\text{L229})$$

- b) Gesucht ist das größte τ_{max} , für das noch $\text{SNR}_q \leq \text{SNR}_{\text{Jitter}}$ gilt. Laut (7.56) im Messtechnik-Buch [1] gilt für das SNR des Jitter die Abschätzung

$$\text{SNR}_{\text{Jitter}} = \frac{2}{(2\pi f_g \sigma_\tau)^2} \quad (\text{L230})$$

mit der maximal im Signal vorkommenden Frequenz f_g und der Varianz des Jitters σ_τ . Da τ im Intervall $[-\tau_{\text{max}}, \tau_{\text{max}}]$ gleichverteilt ist, beträgt $\sigma_\tau^2 = \frac{(2\tau_{\text{max}})^2}{12} = \frac{\tau_{\text{max}}^2}{3}$. Somit ergibt sich:

$$\text{SNR}_{\text{Jitter}} = \frac{2}{\left(2\pi f_g \frac{\tau_{\text{max}}}{\sqrt{3}}\right)^2} \geq 3 \cdot 2^{47} = \text{SNR}_q. \quad (\text{L231})$$

Wir lösen nach τ_{max} auf und setzen $f_g = 20 \text{ kHz}$ ein:

$$\tau_{\text{max}} \leq \frac{1}{2\pi \cdot 20 \cdot 10^3} \frac{1}{\sqrt{2^{46}}} \approx 1 \text{ ps}. \quad (\text{L232})$$

- c) Gesucht ist die Anzahl an Bits N , bei der $\text{SNR}_{\text{Jitter}} = \text{SNR}_q$ gilt, wenn τ im Bereich $[-\tau_{\text{max}}, \tau_{\text{max}}]$ mit $\tau_{\text{max}} = 10 \text{ ps}$ gleichverteilt ist. Dies führt wie in b) auf:

$$\frac{2}{\left(2\pi f_g \frac{\tau_{\text{max}}}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{3}{2} \cdot 2^{2N}. \quad (\text{L233})$$

Wir lösen nach N auf und setzen $f_g = 20 \text{ kHz}$ und $\tau_{\text{max}} = 10 \cdot 10^{-12} \text{ s}$ ein:

$$N = 1 - \log_2(2\pi f_g \tau_{\text{max}}) \approx 20,6. \quad (\text{L234})$$

D.h. die maximal nutzbare Auflösung beträgt 20 Bit, da das 21. Bit bereits vom Jitter-Fehler beeinträchtigt wird.

Aufgabe 23: Quantisierungstechnische Kennwerte von A/D-Umsetzern

Ein Rauschgenerator liefere ein Signal $u(t)$ mit dem Mittelwert $\mu_u = 1,66 \text{ V}$ und der Varianz $\sigma_u^2 = 0,9 \text{ V}^2$. Dieses Signal werde nun mit verschiedenen A/D-Umsetzern quantisiert. Der Eingangsbereich der Umsetzer liege bei $\pm 5 \text{ V}$. Für die quantisierten Signale ergaben sich die folgenden statistischen Kennwerte, vgl. Tab. 8.

	Mittelwert/V	Varianz/ V^2
A/D-Umsetzer 1	1,669	1,13
A/D-Umsetzer 2	1,663	0,90
A/D-Umsetzer 3	1,661	1,40

Tabelle 8: Statistische Kennwerte der quantisierten Signale verschiedener A/D-Umsetzer.

- a) Berechnen Sie die Breite q einer Quantisierungsstufe für jeden der A/D-Umsetzer unter der Annahme eines linearen Quantisierungsmodells.
- b) Berechnen Sie aus der Breite q einer Quantisierungsstufe nach Teilaufgabe a) die Auflösung in Bit der eingesetzten A/D-Umsetzer.

Lösung

- a) Gesucht ist die Breite q der Amplitudenstufen. Das lineare Quantisierungsmodell lautet:

$$u_q(t) = u(t) + e_q(t), \quad (\text{L235})$$

und somit gilt, da u und e_q als unkorreliert angenommen werden,

$$E\{u_q^2\} = E\{u^2\} + E\{e_q^2\} \quad (\text{L236})$$

bzw.

$$\sigma_{u_q}^2 + \mu_{u_q}^2 = \sigma_u^2 + \mu_u^2 + \sigma_{e_q}^2 + \mu_{e_q}^2. \quad (\text{L237})$$

Da e als mittelwertfrei und gleichverteilt angenommen wird, gilt $\mu_{e_q} = 0$ und $\sigma_{e_q}^2 = \frac{q^2}{12}$. Einsetzen und Auflösen nach q liefert:

$$q = \sqrt{12 \left(\sigma_{u_q}^2 + \mu_{u_q}^2 - \sigma_u^2 - \mu_u^2 \right)}. \quad (\text{L238})$$

Damit lassen sich die Breiten der Quantisierungsstufen der einzelnen ADU berechnen:

$$q_1 = 1,7662 \text{ V}, \quad (\text{L239})$$

$$q_2 = 0,3459 \text{ V}, \quad (\text{L240})$$

$$q_3 = 2,4576 \text{ V}. \quad (\text{L241})$$

- b) Der Eingangsbereich aller Wandler ist $u_E = 10 \text{ V}$ breit und wird in 2^N Stufen der Breite q unterteilt, d. h. es gilt:

$$u_E = q \cdot 2^N \quad \Rightarrow \quad N = \log_2 \frac{u_E}{q}. \quad (\text{L242})$$

Damit lassen sich die Auflösungen der einzelnen ADU berechnen:

$$N_1 = 2,5 \text{ Bit} \quad \rightarrow \quad 3 \text{ Bit}, \quad (\text{L243})$$

$$N_2 = 4,9 \text{ Bit} \quad \rightarrow \quad 5 \text{ Bit}, \quad (\text{L244})$$

$$N_3 = 2 \text{ Bit}. \quad (\text{L245})$$

Aufgabe 24: Delta-Sigma-Umsetzer

Abbildung 11 zeigt als Referenz die Signal-Rausch-Verhältnisse (SNR) bei Einsatz eines Delta-Sigma-Umsetzers mit Modulatoren verschiedener Ordnungen.

Gegeben sei nun ein Delta-Sigma-Umsetzer mit einem Modulator 1. Ordnung.

- Skizzieren Sie den Amplitudengang für das Quantisierungsrauschen $n(n)$.
- Es soll ein A/D-Umsetzer mit einer Auflösung von 8 Bit realisiert werden. Wie groß ist das hierbei entstehende Signal-Rausch-Verhältnis für das Quantisierungsrauschen, wenn ein lineares Quantisierungsmodell und ein sinusförmiges Eingangssignal angenommen werden?

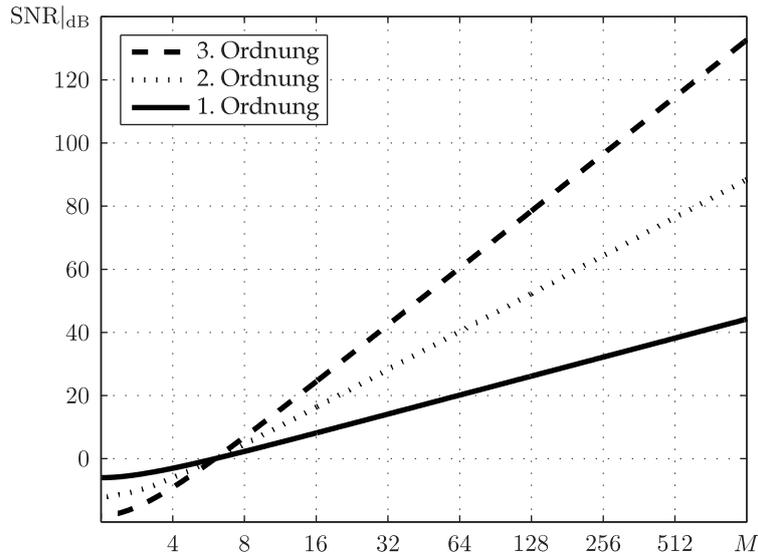


Abbildung 11: Signal-Rausch-Verhältnisse für Modulatoren verschiedener Ordnungen ($M = f_A/f_g$).

- c) Es sollen Signale mit Frequenzen bis 2 kHz abgetastet werden. Wie hoch müssen Sie die Abtastfrequenz des Delta-Sigma-Umsetzers mindestens wählen, um eine Genauigkeit von 8 Bit zu erhalten?
- d) Es werde ein gleichverteilter Abtastzeitfehler angenommen. Wie groß darf der maximale Abtastzeitfehler höchstens sein, damit der Umsetzer die geforderte Genauigkeit von 8 Bit erreicht?

Lösung

- a) Unter der Annahme, dass $T_i = V \cdot t_A$ gilt, lässt sich das Strukturbild des $\Delta\Sigma$ -Modulators (Abb. 7.37 im Messtechnik-Buch [1]) wie in Abb. L6 vereinfachen.

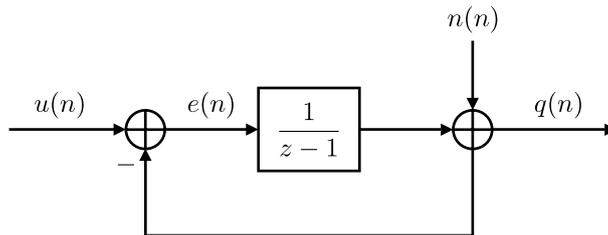


Abbildung L6: Vereinfachtes Schaltbild des $\Delta\Sigma$ -Modulators.

Gesucht ist die Störübertragungsfunktion $G_n(z) = Q(z)/N(z)$. Aus dem Schaltbild folgt:

$$E(z) = U(z) - Q(z), \tag{L246}$$

$$Q(z) = \frac{1}{z-1} E(z) + N(z), \tag{L247}$$

woraus durch Einsetzen Folgendes resultiert:

$$Q(z) = \frac{1}{z-1} (U(z) - Q(z)) + N(z) \quad (\text{L248})$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(1 + \frac{1}{z-1}\right)}_{=\frac{z}{z-1}} Q(z) = \frac{1}{z-1} U(z) + N(z) \quad (\text{L249})$$

$$\Leftrightarrow Q(z) = \frac{1}{z} U(z) + \frac{z-1}{z} N(z). \quad (\text{L250})$$

Ohne Eingangssignal, also für $U(z) = 0$, erhalten wir den Betrag der Störübertragungsfunktion $|G_n(z)| = \left| \frac{Q(z)}{N(z)} \right| = \left| \frac{z-1}{z} \right| = |1 - z^{-1}|$. Da wir an den Amplitudengang $|G_n(f)|$ interessiert sind, setzen wir $z = e^{j2\pi \frac{f}{f_A}}$ ein (vgl. [2]):

$$|G_n(f)| = \left| G_n(z) \Big|_{z=e^{j2\pi \frac{f}{f_A}}} \right| = \left| 1 - e^{-j2\pi \frac{f}{f_A}} \right| = \left| e^{-j\pi \frac{f}{f_A}} \underbrace{\left(e^{j\pi \frac{f}{f_A}} - e^{-j\pi \frac{f}{f_A}} \right)}_{2j \sin\left(\pi \frac{f}{f_A}\right)} \right| \quad (\text{L251})$$

$$= 2 \left| j e^{-j\pi \frac{f}{f_A}} \right| \cdot \left| \sin\left(\pi \frac{f}{f_A}\right) \right| = 2 \left| \sin\left(\pi \frac{f}{f_A}\right) \right|. \quad (\text{L252})$$

Der berechnete Amplitudengang ist in Abb. L7 dargestellt. Man erkennt, dass das Quantisierungsrauschen bei niedrigen Frequenzen gedämpft wird und zu hohen Frequenzen hin zunimmt (dieser Effekt kann durch $\Delta\Sigma$ -Modulatoren höherer Ordnung noch weiter verstärkt werden). Somit lässt es sich bei ausreichender Überabtastung leicht durch ein Tiefpassfilter entfernen, ohne das Nutzsignal stark zu beeinträchtigen.

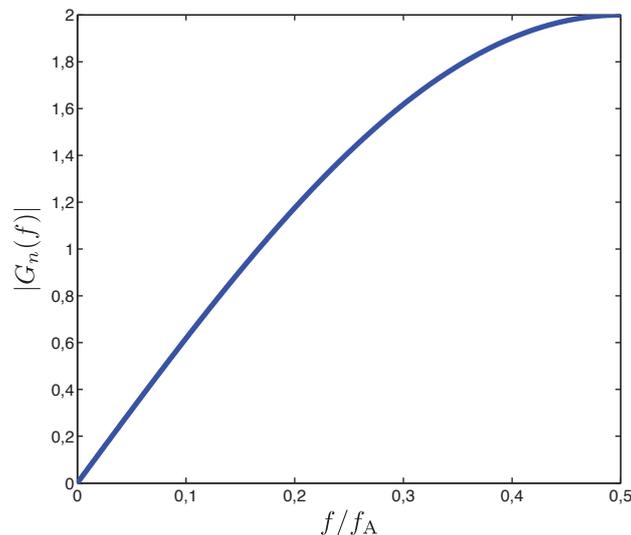


Abbildung L7: Amplitudengang für das Quantisierungsrauschen.

- b) Aus (7.121) und (7.122) im Messtechnik-Buch [1] wissen wir, dass das Signal-Rausch-Verhältnis infolge der Quantisierung $\text{SNR}_q = 1,5 \cdot 2^{2N}$ bzw. in Dezibel $\text{SNR}_q|_{\text{dB}} = 10 \lg(1,5 \cdot 2^{2N})$ beträgt. Für 8 Bit ergibt sich somit $\text{SNR}_q|_{\text{dB}} \approx 50$ dB.

- c) Es soll also $\text{SNR}_q \leq \text{SNR}_{\Delta\Sigma}$ gelten. Dem Messtechnik-Buch [1, (7.174)] kann entnommen werden, dass für $\Delta\Sigma$ -Modulatoren 1. Ordnung

$$\text{SNR}_{\Delta\Sigma} = \frac{1}{\left(2 \left| \sin \left(\pi \frac{f_g}{f_A} \right) \right| \right)^2} \quad (\text{L253})$$

gilt. Wir lösen nach f_A auf, wobei wir berücksichtigen, dass $0 < f_g < f_A$ gilt und somit der Betrag um $\sin \left(\pi \frac{f_g}{f_A} \right)$ weggelassen werden kann:

$$f_A \geq \frac{\pi f_g}{\arcsin \left(\frac{1}{2\sqrt{\text{SNR}_q}} \right)} \approx 3,94 \text{ MHz}. \quad (\text{L254})$$

- d) Analog zu Aufgabe 22 b) folgt:

$$\tau_{\max} \leq \frac{1}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^3} \frac{1}{\sqrt{2^{14}}} \approx 622 \text{ ns}. \quad (\text{L255})$$

Aufgabe 25: Drehzahlmessung bei Fräsmaschinen

Für ein Regelungssystem von Fräsmaschinen soll die Drehzahl des Fräasers bestimmt werden. Dazu wird ein Sensorzahnrad mit 100 Zähnen auf der Antriebswelle der Spindel befestigt. Das Drehzahlsignal wird mittels eines Inkrementalgebers erfasst. Da nur sehr feine Bearbeitungsschritte mit der Fräsmaschine durchgeführt werden, werden Fräserdrehzahlen im Bereich von 1500 min^{-1} bis 75000 min^{-1} gewählt.

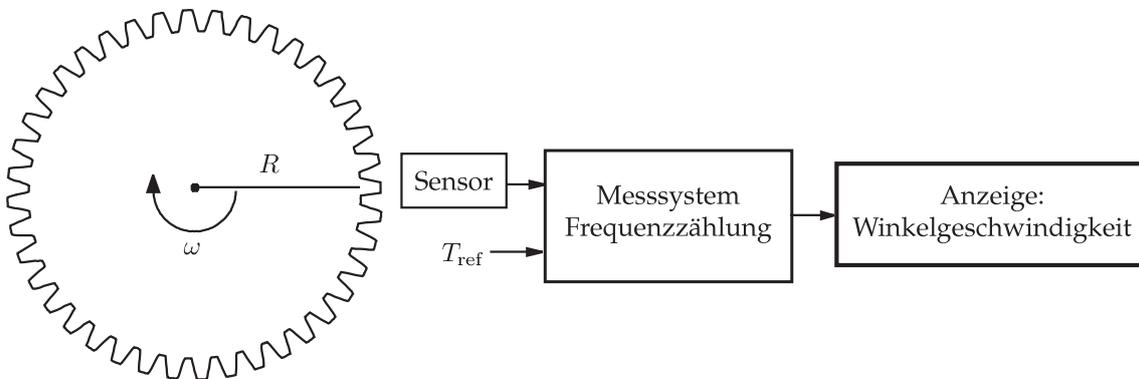


Abbildung 12: Messsystem zur Winkelgeschwindigkeitserfassung (Frequenzzählung).

In Abb. 12 ist ein Messsystem zur Erfassung der Winkelgeschwindigkeit der Antriebswelle skizziert. Die Referenzperiode T_{ref} sei 1 s.

- Warum ist die Periodendauermessung bei dieser Anordnung weniger geeignet für die Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit der Antriebswelle, wenn eine Zählfrequenz von $f_0 = 1 \text{ MHz}$ angenommen wird? Begründen Sie Ihre Antwort durch Vergleich der relativen Quantisierungsfehler!
- Der Zählerstand am Ende der Referenzperiode sei $N = 2,5 \cdot 10^3$. Welche Winkelgeschwindigkeit wird angezeigt?

Aufgrund der hohen Drehzahlen ist die Lagerung der Antriebswelle schwierig. Deshalb kann es zu minimalen Schwankungen der Drehzahl kommen. Diese können mittels einer additiv überlagerten, harmonischen Störung der Frequenz $f_{\text{stör}}$ modelliert werden.

- c) Wie wirkt sich die Störung auf das Ergebnis der Winkelgeschwindigkeitsbestimmung aus, wenn $f_{\text{stör}}$ kein Aliasing hervorruft und die tatsächliche Winkelgeschwindigkeit als konstant angenommen wird?

Lösung

- a) Wir berechnen den maximalen relativen Quantisierungsfehler für die Periodendauermessung (PDM) und für die Frequenzzählung (FZ):

$$F_{r,\text{PDM,max}} = \frac{\omega_q}{\varphi_0 \cdot f_0} = \frac{2\pi f}{\frac{2\pi}{Z} \cdot f_0} = Z \frac{f}{f_0} = Z T_0 f, \quad (\text{L256})$$

$$F_{r,\text{FZ,max}} = \frac{\varphi_0}{\omega_q \cdot T_{\text{ref}}} = \frac{\frac{2\pi}{Z}}{2\pi f \cdot T_{\text{ref}}} = \frac{1}{Z T_{\text{ref}} f}. \quad (\text{L257})$$

Man erkennt, dass $F_{r,\text{PDM,max}}$ mit wachsender Frequenz f linear steigt, wohingegen $F_{r,\text{FZ,max}}$ mit der Frequenz abnimmt.

Wir rechnen die niedrigste Drehzahl um in Hertz, $f_{\text{min}} = 1500 \text{ min}^{-1} = 25 \text{ Hz}$, und bestimmen mit den Angaben zu f_0 , Z und T_{ref} die relativen Fehler für diesen Arbeitspunkt:

$$F_{r,\text{PDM,max}} = 100 \frac{25}{10^6} = 2,5 \cdot 10^{-3}, \quad (\text{L258})$$

$$F_{r,\text{FZ,max}} = \frac{1}{100 \cdot 25 \cdot 1} = 4 \cdot 10^{-4}. \quad (\text{L259})$$

Der relative Fehler des FZ-Verfahrens ist bereits niedriger als der des PDM-Verfahrens. Da der Fehler des FZ-Verfahrens bei höheren Drehzahlen sinkt, im Gegensatz zum Fehler des PDM-Verfahrens, wird er auch bei allen anderen einstellbaren Drehzahlen kleiner sein. Daher ist das FZ-Verfahren für diese Maschine besser geeignet als das PDM-Verfahren.

- b) Es gilt:

$$\omega_q = \frac{\varphi_q}{T} = \frac{N\varphi_0}{T_{\text{ref}}} \approx 157 \text{ Hz} \hat{=} 9424,8 \text{ min}^{-1}. \quad (\text{L260})$$

- c) Der konstanten Drehzahl $\bar{\omega}$ wird eine harmonische Schwingung $\Delta\omega \sin(2\pi f_s t + \varphi)$ additiv überlagert:

$$\omega(t) = \bar{\omega} + \Delta\omega \sin(2\pi f_s t + \varphi). \quad (\text{L261})$$

Laut (8.58) im Messtechnik-Buch [1] wird dann durch den mittelwertbildenden Charakter des

FZ-Verfahrens die angezeigte Drehzahl zu:

$$\hat{\omega}(t) = \frac{1}{T_{\text{ref}}} \int_{t - \frac{T_{\text{ref}}}{2}}^{t + \frac{T_{\text{ref}}}{2}} (\bar{\omega} + \Delta\omega \sin(2\pi f_s t + \varphi)) dt \quad (\text{L262})$$

$$= \bar{\omega} + \frac{\Delta\omega}{T_{\text{ref}}} \int_{t - \frac{T_{\text{ref}}}{2}}^{t + \frac{T_{\text{ref}}}{2}} \sin(2\pi f_s t + \varphi) dt \quad (\text{L263})$$

$$= \bar{\omega} - \frac{\Delta\omega}{T_{\text{ref}}} \frac{\cos\left(2\pi f_s \left(t + \frac{T_{\text{ref}}}{2}\right) + \varphi\right) - \cos\left(2\pi f_s \left(t - \frac{T_{\text{ref}}}{2}\right) + \varphi\right)}{2\pi f_s} \quad (\text{L264})$$

$$= \bar{\omega} + \Delta\omega \frac{2(\sin(2\pi f_s t + \varphi) \cdot \sin(\pi f_s T_{\text{ref}}))}{2\pi f_s T_{\text{ref}}} \quad (\text{L265})$$

$$= \bar{\omega} + \Delta\omega \cdot \sin(2\pi f_s t + \varphi) \cdot \frac{\sin(\pi f_s T_{\text{ref}})}{\pi f_s T_{\text{ref}}}. \quad (\text{L266})$$

Wenn man dieses Ergebnis mit (L261) vergleicht, fällt auf, dass die Störung mit der Funktion $\frac{\sin(\pi f_s T_{\text{ref}})}{\pi f_s T_{\text{ref}}}$ abgeschwächt wird. Allerdings wird $\hat{\omega}$ noch zusätzlich mit $f_A = \frac{1}{T_{\text{ref}}}$ abgetastet, was jedoch laut Aufgabenstellung nicht zu zusätzlichen Aliasing-Fehlern führt, d. h. die Bedingung $f_s \leq \frac{1}{2T_{\text{ref}}}$ wird als erfüllt angenommen (vgl. (8.75) im Messtechnik-Buch [1]).

Literatur

- [1] F. Puente León und U. Kiencke, *Messtechnik – Systemtheorie für Ingenieure und Informatiker*, 9. Aufl. Heidelberg: Springer-Verlag, 2013.
- [2] F. Puente León, U. Kiencke und H. Jäkel, *Signale und Systeme*, 5. Aufl. München: Oldenbourg Verlag, 2011.