Inoffizieller Mitschrieb der Vorlesung

Regelung linearer Mehrgrössensysteme

gehalten von *Dr.-Ing. Mathias Kluwe*

im Wintersemester 13/14
letzte Aktualisierung im Wintersemester 17/18

Autoren:
Felix Mach, Lukas Kiefer
überarbeitet von:
Patrik Föllmer, Daniel Seemer, Maximilian Gerst

5. November 2024
Fork me on GitLab & Submit Merge Requests : https://git.scc.kit.edu/fs-etec/RLM

Vorwort

Dieses Dokument stellt lediglich einen Mitschrieb der Tafelanschriebe des Dozenten dar. Daher erhebt dieses Dokument weder den Anspruch auf Vollständigkeit, noch auf komplette Korrektheit des Inhalts. Dennoch wurde dieses Dokument mit großer Sorgfalt erstellt und auch korrigiert, sodass der Inhalt weitgehend korrekt sein sollte.
Da sich der Inhalt der Vorlesung von Semester zu Semester auch mal ändert, bleibt dieser Mitschrieb sicher nicht besonders lange aktuell. Darum liegt der LaTeX-Code dieses Dokuments bei der Fachschaft. Es wäre also super, wenn du das Skript einfach in deinem aktuellen Semester überarbeitest, falls du ein bisschen Spaß am teXen hast. Der nötige Arbeitsaufwand sollte sich dabei in Grenzen halten, da das Dokument so an sich fertig steht. Auf diese Weise bleibt unsere Arbeit vielleicht noch eine Weile brauchbar und die Stunden, die wir in die Erstellung dieses Dokuments gesteckt haben, waren nicht komplett umsonst.

Changelog: WS 12/13 - Vorlesungsmitschrieb
WS 13/14 - Erste Überarbeitung
Juni 2015 - Neues Kapitel 2.3: Trajektorienanalyse im Zustandsraum

Der LaTeX-Code ist an manchen Stellen vielleicht etwas unsauber zusammen gehackt, ich habe es weitestgehend versucht, ein bisschen zu dokumentieren. Falls du Fragen hast, kannst du mir auch gerne eine E-Mail schreiben (zumindest für die nächsten 1-2 Jahre, solange ich noch an der Uni bin: `felix.mauch@student.kit.edu`)
Der LaTeX-Code wird jetzt lokal via Git versioniert. Das sollte es einfacher machen, Änderungen nachzuvollziehen und mehrere Änderungen zu mergen. Bitte dazu an die FS Etec wenden.

Inhaltsverzeichnis

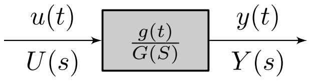
Kapitel 1

Modellierung linearer zeitinvarianter Mehrgrößensysteme

1.1 Ein-/Ausgangsmodelle im Zeit- und Bildbereich

Bekannt: Eingrößen (SISO)-Systeme im Zeit- und Bildbereich

- **zeitkontinuierlich**

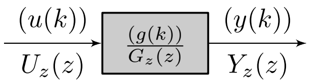


$$y(t) = g(t) * u(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

- **zeitdiskret**



$$(y(k)) = (g(k)) * (u(k)) = \sum_{\nu=0}^{k} g(k-\nu)u(\nu)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

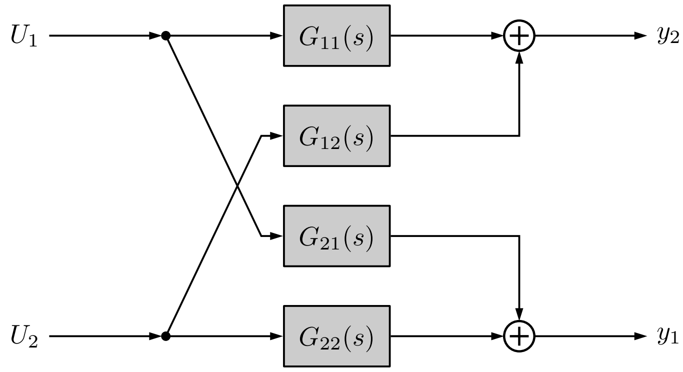
$$Y_z(z) = G_z(z) \cdot U_z(z)$$

SISO-Fall erweiterbar auf das sogenannte Mehrgrößensystem (MIMO) mit

- **p Eingangsgrößen** $u_1(t), \ldots, u_p(t)$
- **q Ausgangsgrößen** $y_1(t), \ldots, y_q(t)$

$\Rightarrow$ Mehrere, zumeist verkoppelte Signalpfade vorhanden, meist im **Bildbereich** betrachtet.
2 prinzipielle Übertragungsstrukturen:

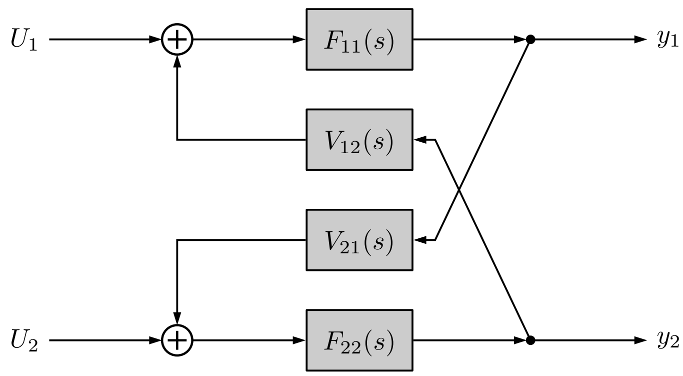
- P-Struktur (P-kanonische Form)



Kennzeichen: Ausgänge sind **nur von den Eingängen** gekennzeichnet, keine Rückwirkung vom Ausgang.

$$\underset{(q,1)}{\underline{Y}(s)} = \underbrace{\underset{(q,p)}{\underline{G}(s)}}_{\text{Übertragungsmatrix}} \underset{(p,1)}{\underline{U}(s)}$$

- V-Struktur (V-kanonische Form)



Kennzeichen: Ausgänge sind neben den Eingängen auch von den Ausgängen selbst beeinflusst. (Rückkopplung)

$$\underset{(q,1)}{\underline{Y}(s)} = \underset{(q,p)}{\underline{F}(s)} \cdot \left(\underset{(p,1)}{\underline{U}(s)} + \underset{(p,q)}{\underline{V}(s)} \cdot \underline{Y}(s) \right)$$

Hier im Beispiel:

$$\underline{F}(s) = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \qquad \underline{V}(s) = \begin{bmatrix} 0 & V_{12} \\ V_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

Zusammenhang P-V-Struktur

$$\begin{aligned} \text{V-Struktur}\, \underline{Y}(s) &= \underline{F}(s) \cdot (\underline{U}(s) + \underline{V}(s) \cdot \underline{Y}(s)) \\ (\underline{I} - \underline{F}(s)\underline{V}(s)) &= \underline{F}(s) \cdot \underline{U}(s) \\ \Rightarrow \underline{Y}(s) &= \underbrace{(\underline{I} - \underline{F}(s)\underline{V}(s))^{-1} \cdot \underline{F}(s)}_{=\underline{G}(s)} \cdot \underline{U}(s) \end{aligned}$$

also: Darstellung in P-Struktur ausreichend.

1.2 Modellierung zeitkontinuierlicher Systeme im Zustandsraum

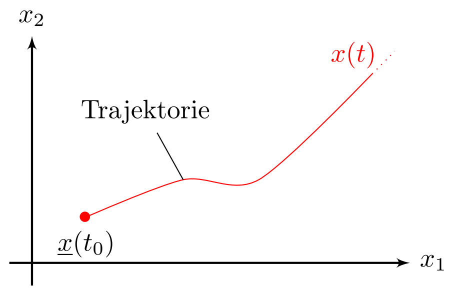
bisher: Systembehandlung überwiegend im Frequenzbereich ($U(s)$)
jetzt: Konzept zur Behandlung dynamischer Systeme direkt im Zeitbereich durch Einführung sogenannter *Zustandsgrößen* (Zustandsvariablen), die den inneren Systemzusammenhang repräsentieren (R.E. Kalman)
Vorteile:

- neuere und tiefere Systemeinsicht möglich
- Vergrößerung des Anwendungsbereichs auf nichtlineare und zeitvariante Systeme
- mächtige neue Entwurfsverfahren (speziell für MIMO-Systeme)
- Effiziente numerische Berechnung möglich

1.2.1 Definitionen und Struktur der Zustandsdarstellung

Zustandsdarstellung: s. BB RLM 1-1

Zustandsraum: Bsp. für $n = 2$

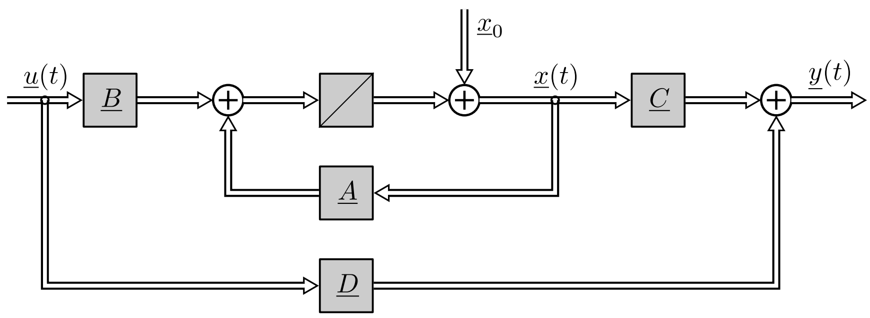


Anmerkungen:

- Festlegung der Zustandsgrößen ist nicht eindeutig, Wahl abhängig vom Modellierungskontext
- Spezialfall lineare Systeme:

$$\underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) \Rightarrow \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}$$
$$\underline{g}(\underline{x}, \underline{u}, t) \Rightarrow \underline{C}\,\underline{x} + \underline{D}\,\underline{u}$$

Form und Struktur: s. BB RLM 1-2



- Zeitvariante Systeme: Matrizen zeitabhängig ($\underline{A} = \underline{A}(t), \ldots$)
- SISO-System:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{b} \cdot u$$
$$y = \underline{c}^T\,\underline{x} + d \cdot u$$

1.2.2 Zusammenhang mit dem Bildbereich

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\cdot\underline{u} \\ \underline{y} &= \underline{C}\,\underline{x} + \underline{D}\cdot\underline{u} \end{aligned} \quad \overset{\mathscr{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \quad \begin{aligned} s\,\underline{X}(s) - \underline{x}_0 &= \underline{A}\,\underline{X}(s) + \underline{B}\,\underline{U}(s) \\ \underline{Y}(s) &= \underline{C}\,\underline{X}(s) + \underline{D}\,\underline{U}(s) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} -\underline{x}_0 \\ \underline{Y}(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{A} - s\,\underline{I} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix}}_{=:\ \underset{(n+q,n+p)}{\underline{P}(s)}} \begin{bmatrix} \underline{X}(s) \\ \underline{U}(s) \end{bmatrix}$$

wobei $\underline{P}(s)$: *Rosenbrocksche Systemmatrix*, beschreibt das

- **autonomes Systemverhalten**: $\underline{x}_0 \neq \underline{0}, \quad \underline{u} = \underline{0}$

$$\begin{aligned} -\underline{x}_0 &= (\underline{A} - s\,\underline{I})\,\underline{X}(s) \\ \Rightarrow \underline{X}(s) &= (s\,\underline{I} - \underline{A})^{-1}\,\underline{x}_0 \end{aligned}$$

  also:

$$\boxed{\underline{Y}(s) = \underline{C}\,\underline{X}(s) = \underline{C}(s\,\underline{I} - \underline{A})^{-1}\,\underline{x}_0}$$

- **Übertragungsverhalten des Systems:** $\underline{x}_0 = \underline{0}, \quad \underline{u} \neq \underline{0}$

$$\begin{aligned} (\underline{A} - s\,\underline{I})\,\underline{X}(s) + \underline{B}\,\underline{U}(s) &= 0 \\ \underline{X}(s) &= (s\,\underline{I} - \underline{A})^{-1}\,\underline{B}\,\underline{U}(s) \\ \Rightarrow \underline{Y}(s) &= \underline{C}\,\underline{X}(s) + \underline{D}\,\underline{U}(s) \\ &= \underbrace{\left[\underline{C}\,(s\,\underline{I} - \underline{A})^{-1}\,\underline{B} + \underline{D}\right]}_{\underline{G}(s)} \cdot \underline{U}(s) \end{aligned}$$

  wobei $\underline{G}(s)$: *Übertragungsmatrix* Sonderfall SISO ohne Durchgriff:

$$Y(s) = \underbrace{\underline{c}^T\,(s\,\underline{I} - \underline{A})^{-1}\,\underline{b}}_{G(s)\text{ -Übertragungsfunktion}} \cdot U(s)$$

1.2.3 Wahl der Zustandsgrößen und Aufstellung der Zustandsgleichungen

Wahl der Zustandsgrößen motiviert aus der physikalischen Systemanalyse ($\rightarrow$ *Bilanzgleichungen*)

Zustandsgrößen: Innere Systemgrößen, die mit Energie verknüpft sind.

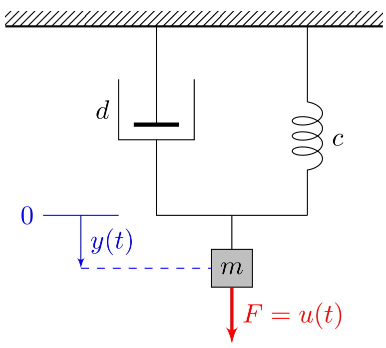
Beispiele:

- Position, Geschwindigkeit (mech. Systeme)
- Strom (Spulen), Spannung (Kondensator) (el. Systeme)

Möglichkeiten zur Aufstellung der Zustandsgleichungen:

- direkt aus den System-Dgln $\boxed{\text{s. BB RLM 1-3}}$

  a) **mechanisches Beispiel:**



Systembeschreibung:

$$m\ddot{y}(t) = u(t) - cy(t) - d\dot{y}(t)$$
$$\ddot{y}(t) = \frac{1}{m}\left[u(t) - cy(t) - d\dot{y}(t)\right]$$

Wahl der Zustandsgrößen:

- $x_1 = y(t)$ (Position, $\sim$ pot. Energie)
- $x_2 = \dot{y}(t)$ (Geschwindigkeit, $\sim$ kin. Energie)

$\Rightarrow$ **Zustandsgleichungen:**

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{y}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{y}(t) = \frac{1}{m}u(t) - \frac{d}{m}x_2(t) - \frac{c}{m}x_1(t) \end{aligned}} \tag{1.1}$$

Ausgangsgleichung:

$$\boxed{y(t) = x_1(t)} \tag{1.2}$$

$\Rightarrow$ (1.1), (1.2) in Vektor- Matrix-Notation:

$$\underbrace{\dot{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underline{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}_{\underline{b}} \cdot u$$
$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{c}^T} \cdot \underline{x}$$

b) **el. Beispiel:**
RC-Netzwerk: $\boxed{\text{s. BB RLM 1-4}}$
Eingangsgröße: $u(t) = u_e(t)$
Ausgangsgröße: $y(t) = u_a(t)$
Zustandsgrößen: $x_i(t) = u_i(t), \quad i = 1, 2, 3$ (Energie im Kondensator)

Zustandsgleichungen: Durch Maschenregeln. z.B. Stufe 1 (analog $\dot{x}_2, \dot{x}_3$)

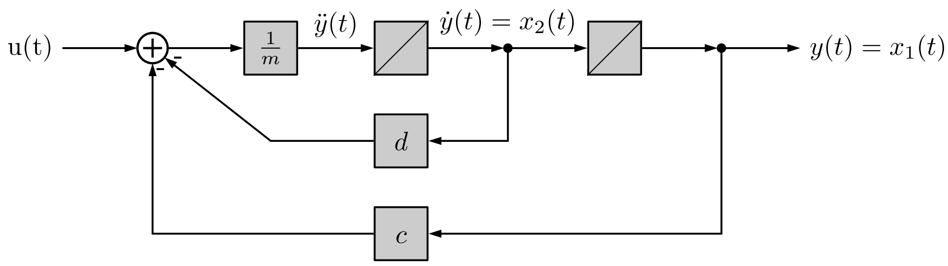
$$i_1(t) = C_1\dot{x}_1(t) = \frac{x_2(t) - x_1(t)}{R_1}$$
$$\Rightarrow \dot{x}_1(t) = -\frac{1}{R_1C_1}x_1(t) + \frac{1}{R_1C_1}x_2(t)$$

Ausgangsgleichung:

$$y(t) = u_a(t) = u_1(t) = x_1(t)$$

- aus dem Strukturbild: $\boxed{\text{s. BB RLM 1-3}}$

a) **mech. Beispiel:**



also: Zustände $\hat{=}$ Integrator-Ausgänge

b) **weiteres Beispiel:** $\boxed{\text{s. BB RLM 1-5}}$

1.2.4 Normalformen der Zustandsgleichungen

Zunächst SISO-System betrachtet:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) \qquad \text{mit}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_n s^n}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n}} \tag{1.3}$$

Hieraus direkt spezielle Zustandsgleichungen aufstellbar: *Regelungsnormalform (RNF)*, *Beobachtungsnormalform (BNF)* s. BB RLM 1-6

Herleitung exemplarisch an RNF (1.3):

$$Y(s) = b_0 \underbrace{\frac{U(s)}{N(s)}}_{:=X_1(s)} + b_1 \underbrace{\frac{s \cdot U(s)}{N(s)}}_{:=X_2(s)} + \cdots + b_{n-1} \underbrace{\frac{s^{n-1} \cdot U(s)}{N(s)}}_{:=X_n(s)} + b_n \frac{s^n \cdot U(s)}{N(s)}$$

offensichtlich:

$$X_{i+1}(s) = s \cdot X_i(s), \quad i = 1 \ldots n-1$$

$$\bullet\!\!-\!\!\!\circ$$

$$\boxed{x_{i+1}(t) = \dot{x}_i(t), \quad i = 1 \ldots n-1} \tag{1.4}$$

Aus der Definition in $X_1(s)$: $\quad X_1(s)N(s) = U(s)$ bzw. mit (1.3):

$$U(s) = a_0 X_1(s) + a_1 s X_1(s) + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} X_1(s) + a_n s^n X_1(s)$$

$$\bullet\!\!-\!\!\!\circ$$

$$u = a_0 x_1 + a_1 \dot{x}_1(s) + \cdots + a_{n-1} \overset{(n-1)}{x_1} + a_n \overset{(n)}{x_1}$$

$$\Downarrow (1.4)\text{:}\ \overset{(i-1)}{x_1} := x_i, \quad i = 2 \ldots n, \quad \overset{(n)}{x_1} = \dot{x}_n$$

$$\boxed{\dot{x}_n = -\frac{a_0}{a_n} x_1 - \frac{a_1}{a_n} x_2 - \cdots - \frac{a_{n-1}}{a_n} x_n + \frac{1}{a_n} u} \tag{1.5}$$

außerdem:

$$Y(s) = b_0 X_1(s) + \cdots + b_{n-1} X_n(s) + b_n s X_n(s)$$

$$\bullet\!\!-\!\!\!\circ$$

$$y = b_0 x_1 + \cdots + b_{n-1} x_n + b_n \dot{x}_n$$

$$\Downarrow (1.5)$$

$$\boxed{y = \left[b_0 - b_n \frac{a_0}{a_n}, \ldots, b_{n-1} - b_n \frac{a_{n-1}}{a_n} \right] \underline{x} + \frac{b_n}{a_n} u} \tag{1.6}$$

$\Rightarrow$ (1.4), (1.5), (1.6): RNF
Spezialfall: $a_n = 1, \quad b_n = 0$ vereinfachte RNF, BNF s. BB RLM 1-7, s. BB RLM 1-8

Weitere Normalform: *Jordansche Normalform* s. BB RLM 1-9

Herleitung für einfache Pole $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von $G(s)$

$$Y(s) = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{s - \lambda_i} + r_0 \right] U(s) \tag{1.7}$$

Wahl: $X_i(s) = \frac{1}{s-\lambda_i} U(s) \qquad i = 1, \ldots, n$

$$sX_i(s) = \lambda_i X_i(s) + U(s)$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$\boxed{\dot{x}_i = \lambda_i x_i + u \qquad i = 1, \ldots, n} \tag{1.8}$$

außerdem mit der Wahl der Zustände (1.7) $\bullet\!\!-\!\!\circ$:

$$\boxed{y = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i + r_0 u} \tag{1.9}$$

(1.8), (1.9): *Jordansche NF in Diagonalstruktur*
Kennzeichen: Zustandsgleichungen (1.8) entkoppelt.

1.2.5 Lösung der Zustandsdifferentialgleichungen

Zustandsdifferentialgleichungen:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\,\underline{x}(t) + \underline{B}\,\underline{u}(t) \tag{1.10}$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\,\underline{x}(t) + \underline{D}\,\underline{u}(t) \tag{1.11}$$

Also: Lösung der Zustandsgleichung (1.10) erforderlich. Hierzu Hilfsmittel: *Matrizen-Exponentialfunktion:*

$$\boxed{e^{\underline{A}t} := \underline{I} + \underline{A}t + \frac{1}{2}\underline{A}^2 t^2 + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\underline{A}t)^\nu}{\nu!}}$$

$\Rightarrow e^{-\underline{A}t} \cdot (1.10)$:

$$e^{-\underline{A}t}\,\dot{\underline{x}}(t) = \underbrace{e^{-\underline{A}t}\,\underline{A}}_{=\underline{A}e^{-\underline{A}t}}\,\underline{x}(t) + e^{-\underline{A}t}\,\underline{B}\,\underline{u}(t)$$

$$\underbrace{e^{-\underline{A}t}\,\dot{\underline{x}}(t) - \underline{A}e^{-\underline{A}t}\,\underline{x}(t)}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(e^{-\underline{A}t}\,\underline{x}(t)\right)} = e^{-\underline{A}t}\,\underline{B}\,\underline{u}(t)$$

$$\Downarrow \text{Integration}$$

$$\int_{\tau=t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\tau}\left(e^{-\underline{A}\tau}\,\underline{x}(\tau)\right)\mathrm{d}\,\tau = \int_{\tau=t_0}^{t} e^{-\underline{A}\tau}\,\underline{B}\,\underline{u}(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau$$

$$e^{-\underline{A}t}\,\underline{x}(t) - e^{-\underline{A}t_0}\,\underline{x}(t_0) = \int_{\tau=t_0}^{t} e^{-\underline{A}\tau}\,\underline{B}\,\underline{u}(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau$$

$$\text{bzw. } \underline{x}(t) = \underbrace{e^{\underline{A}(t-t_0)}\,\underline{x}(t_0)}_{:=\underline{x}_h} + \underbrace{\int_{\tau=t_0}^{t} e^{\underline{A}(t-\tau)}\,\underline{B}\,\underline{u}(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau}_{:=\underline{x}_p}$$

$\underline{x}_h$: homogene Lösung,
$\underline{x}_p$: partikuläre Lösung

Definition:

Transitionsmatrix

$$e^{\underline{A}(t-\tau)} =: \underline{\phi}(t-\tau)$$

Damit gilt:

$$\boxed{\underline{x}(t) = \underline{\phi}(t-t_0)\,\underline{x}(t_0) + \int_{\tau=t_0}^{t} \underline{\phi}(t-\tau)\,\underline{B}\,\underline{u}(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau, \quad \textit{Allgemeine Lösung der Zustandsgleichung}} \tag{1.12}$$

Berechnung von $\phi(t-\tau)$:

1) **über Exponentialreihenansatz:**
   in einfachen Fällen geschlossene Darstellung möglich, s. Übungen.

2) **durch numerische Näherung:**
   Berechnung von $\underline{x}$ und $\underline{y}$: $\boxed{\text{s. BB RLM 1-10}}$

3) **durch Vergleich mit der Frequenzbereichslösung** (vgl. 1.2.2)

$$
\begin{aligned}
(1.10) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad s\underline{X}(s) - \underline{x}_0 &= \underline{A}\,\underline{X}(s) + \underline{B}\,\underline{U}(s) \\
\underline{X}(s) &= (s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\,\underline{X}(0) + (s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\,\underline{B}\,\underline{U}(s) \\
&\bullet\!\!-\!\!\circ \\
\underline{x}(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\right\}\underline{x}(0) + \mathscr{L}^{-1}\left\{(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\right\} * \underline{B}\,\underline{u}(t)
\end{aligned}
$$

Vergleich mit (1.12) für $t_0 = 0$:

$$\underline{x}(t) = \underline{\phi}(t)\,\underline{x}(0) + \int\limits_0^t \underline{\phi}(t-\tau)\,\underline{B}\,\underline{u}(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau$$

$$\boxed{\Rightarrow \underline{\phi}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad (s\underline{I} - \underline{A})^{-1}}$$

1.3 Modellierung zeitdiskreter Systeme im Zustandsraum

Prinzip: Zeitkontinuierliche Dgln. gehen in zeitdiskrete Differentialgleichungen über. Viele Ergebnisse aus 1.2 analog gültig, hier kürzer behandelt.
Zunächst: Übergang zu diskreten Zeitpunkten kT $(k = 0, 1, \dots)$ mit Abtastzeit T: $\underline{x}(t) \rightarrow \underline{x}(kT)$, entsprechend $\underline{u}(t)$, $\underline{y}(t)$

Herleitung aus den zeitkontinuierlichen Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
\dot{\underline{x}}(t) &= \underline{A}\,\underline{x}(t) + \underline{B}\,\underline{u}(t) \\
\underline{y}(t) &= \underline{C}\,\underline{x}(t) \qquad \text{System ohne Durchgriff}
\end{aligned}
$$

Intervall $kT \leq t \leq (k+1)T$:

$$\underline{x}(t) = \underbrace{\int\limits_{kT}^{t} \underline{\phi}(t-\tau)\,\underline{B}\,\underline{u}(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau}_{\int\limits_{kT}^{t} \underline{\phi}(t-\tau)\,\mathrm{d}\,\tau \cdot \underline{B}\,\underline{u}(kT)} + \underline{\phi}(t-kT)\,\underline{x}(kT)$$

Mit $t - \tau = v$ und $\mathrm{d}\,\tau = -\,\mathrm{d}\,v$

$$-\int\limits_{t-kT}^{0} \underline{\phi}(v)\,\mathrm{d}\,v \cdot \underline{B}\,\underline{u}(kT) = \underbrace{\int\limits_{0}^{t-kT} \underline{\phi}(v)\,\mathrm{d}\,v \cdot \underline{B}}_{=:\underline{H}(t-kT)} \cdot \underline{u}(kT)$$

$\underline{H}(t-kT)$ abhängig von den Eigenschaften von $\underline{A}$

- $\underline{A}$ regulär:

$$\underline{H}(t-kT) = \int\limits_0^{t-kT} \underbrace{\underline{\phi}(v)}_{=e^{\underline{A}v}} \,\mathrm{d}\,v \cdot \underline{B}$$
$$= \underline{A}^{-1} e^{\underline{A}v}\Big|_0^{t-kT} \cdot \underline{B}$$

Also:

$$\boxed{\underline{H}(t-kT) = \underline{A}^{-1}\left[\underline{\phi}(t-kT) - \underline{I}\right] \cdot \underline{B}}$$

- $\underline{A}$ singulär:

$$\underline{H}(t-kT) = \int\limits_0^{t-kT} \underbrace{\underline{\phi}(v)}_{=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{(\underline{A}\cdot v)^i}{i!}} \,\mathrm{d}\,v \cdot \underline{B}$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} \underline{A}^i \frac{v^{i+1}}{(i+1)!}\Bigg|_0^{t-kT} \cdot \underline{B}$$

Mit $\nu := i+1$ ergibt sich also:

$$\boxed{\underline{H}(t-kT) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \underline{A}^{\nu-1}\frac{(t-kT)^{\nu}}{\nu!} \cdot \underline{B}}$$

Damit:

$$\underline{x}(t) = \underline{H}(t-kT)\,\underline{u}(kT) + \underline{\phi}(t-kT)\,\underline{x}(kT)$$
$$\Downarrow \quad {\scriptstyle t=(k+1)T}$$
$$\underline{x}\big((k+1)T\big) = \underline{\phi}(T)\,\underline{x}(kT) + \underline{H}(T)\,\underline{u}(kT)$$

Kurzschreibweise:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{\phi}\,\underline{x}(k) + \underline{H}\,\underline{u}(k)$$

Zusammen mit der Ausgangsgleichung (direkt übertragbar):

$$\underline{y}(k) = \underline{C}\,\underline{x}(k)$$

insgesamt: $\boxed{\text{s. BB RLM 1-11}}$

Bildbereich folgt aus der *z-Transformation*

$$\boxed{\big(f(k)\big) \circ\!\!-\!\!\bullet\; F_z(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)\cdot z^{-k}}$$

Korrespondenzen und Rechenregeln: $\boxed{\text{s. BB RLM 1-12 bis 1-15}}$

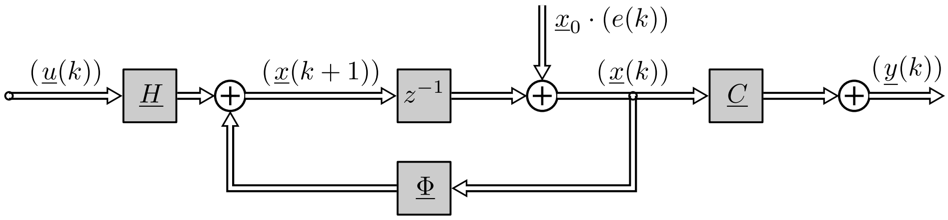
Anwendung auf die Zustandsgleichung:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{\phi}(T)\,\underline{x}(k) + \underline{H}(T)\,\underline{u}(k)$$
$$\circ\!\!\!\mid\!\!\bullet\ \mathscr{Z}$$
$$z\,\underline{X}_z(z) - z\,\underline{x}_0 = \underline{\phi}(T)\,\underline{X}_z(z) + \underline{H}(T)\,\underline{U}_z(z) \tag{1.13}$$

also

$$\underline{X}_z(z) = \underline{x}_0 + z^{-1}\left[\underline{\phi}(T)\,\underline{X}_z(z) + \underline{H}(T)\,\underline{U}_z(z)\right]$$
$$\Downarrow \quad {\scriptstyle \underline{x}_0 \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; (\underline{x}_0,\underline{0},\underline{0},\dots) = \underline{x}_0\cdot(1,\underline{0},\underline{0},\dots),\quad \underline{x}_0 = x_0\big(e(k)\big)}$$

Struktur und Zustandsgleichungen s. BB RLM 1-11



$$\underline{x}(k+1) = \underline{\Phi}\,\underline{x}(k) + \underline{H}\,\underline{u}(k) \qquad \textit{Zustandsdifferenzengleichung}$$
$$\underline{y}(k) = \underline{C}\,\underline{x}(k) \qquad \textit{Ausgangsgleichung}$$

außerdem aus (1.13):

$$\underline{X}_z(z) = z\big(z\,\underline{I} - \underline{\phi}(T)\big)^{-1}\underline{x}_0 + \big(z\,\underline{I} - \underline{\phi}(T)\big)^{-1} \cdot \underline{H}(T)\,\underline{U}_z(z) \tag{1.14}$$

Systemverhalten: s. BB RLM 1-11

Lösung der Zustandsdifferenzengleichung

$$\begin{aligned}\underline{x}(k+1) &= \underline{\phi}(T)\,\underline{x}(k) + \underline{H}(T)\,\underline{u}(k)\\ &= \underline{\phi}(T)\cdot\big[\underline{\phi}(T)\,\underline{x}(k-1) + \underline{H}(T)\,\underline{u}(k-1)\big] + \underline{H}(T)\,\underline{u}(k)\\ &= \underline{\phi}^2(T)\,\underline{x}(k-1) + \underline{\phi}(T)\,\underline{H}(T)\,\underline{u}(k-1) + \underline{H}(T)\,\underline{u}(k)\\ &\;\;\vdots\end{aligned}$$

$$\underline{x}(k+1) = \underline{\phi}^k(T)\,\underline{x}(0) + \sum_{\nu=0}^{k-1}\underline{\phi}^{k-1-\nu}(T)\,\underline{H}(T)\,\underline{u}(\nu)$$

$\Rightarrow$ $\underline{\phi}^k(T)$: *Transitionsmatrix* der Zustandsdifferenzengleichung

Vergleich von (1.14):

$$\big(\underline{\phi}^k(T)\big) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; z\big(z\,\underline{I} - \underline{\phi}(T)\big)^{-1}$$

(vgl. Korrespondenzen!)

Kapitel 2

Analyse linearer zeitinvarianter Mehrgrößensysteme

Ziel: Untersuchung wichtiger Systemeigenschaften

- Stabilität
- Steuer-/Beobachtbarkeit
- Pol-/Nullstellen

hierzu häufig Systemtransformationen sinnvoll.

2.1 Transformation von Zustandsgleichungen

bekannt: Normalformen der Zustandsgleichungen

- Regelungsnormalform, Beobachtungsnormalform
- Jordansche NF (vgl. 1.2.4)

Wie aus beliebiger Zustandsdarstellung zu erhalten?

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} \\ \underline{y} &= \underline{C}\,\underline{x} + \underline{D}\,\underline{u} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Prinzip: *Zustandstransformation*

$$\boxed{\underline{x} = \underline{T} \cdot \underline{x}^*, \quad \text{mit} \quad \begin{array}{ll} \underset{(n,n)}{\underline{T}} & : \text{ nicht singuläre Transformationsmatrix} \\ \underset{(n,1)}{\underline{x}^*} & : \text{ neuer Zustandsvektor} \end{array}} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} \text{damit (2.1)} : \underline{T}\,\dot{\underline{x}}^* &= \underline{A}\,\underline{T}\,\underline{x}^* + \underline{B}\,\underline{u} \\ &\Downarrow_{\underline{T}^{-1}} \\ \dot{\underline{x}}^* &= \underbrace{\underline{T}^{-1}\,\underline{A}\,\underline{T}}_{=:\underline{A}^*}\,\underline{x}^* + \underbrace{\underline{T}^{-1}\,\underline{B}}_{=:\underline{B}^*}\,\underline{u} \\ \underline{y} &= \underbrace{\underline{C}\,\underline{T}}_{=:\underline{C}^*}\,\underline{x}^* + \underline{D}\,\underline{u} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Je nach gewünschter Form der Zustandsgleichungen (2.3) ist die Transformationsmatrix $\underline{T}$ zu wählen.

- **Jordansche Normalform** (Eigenwerte einfach)

$$\underline{A}^* = \underline{T}^{-1}\,\underline{A}\,\underline{T} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_n \end{bmatrix}}_{=:\underline{\Lambda}}$$

$$\text{bzw.} \quad \underline{A}\,\underline{T} = \underline{T}\,\underline{\Lambda}$$

$$\Downarrow_{\underline{T}=[\underline{t}_1,\ldots,\underline{t}_n]}$$

$$[\underline{A}\,\underline{t}_1, \ldots, \underline{A}\,\underline{t}_n] = [\lambda_1\,\underline{t}_1, \ldots, \lambda_n\,\underline{t}_n]$$

$$\text{bzw.} \quad (\lambda_i\,\underline{I} - \underline{A})\,\underline{t}_i = \underline{0} \quad (\text{für } i = 1 \ldots n)$$

Gleichung aus Matrizentheorie bekannt.
Erinnerung: Eigenwerte, Eigenvektoren $\boxed{\text{s. BB RLM 2-1}}$
also: $\underline{t}_i = \underline{v}_i$ (Rechts-)Eigenvektoren von $\underline{A}$

$$\boxed{\Rightarrow \underline{T} = \underline{V}} \tag{2.4}$$

Wahl von (2.4) führt zu der Jordanschen Normalform (s. früher)

$$\underline{\dot{x}}^* = \underline{\Lambda}\,\underline{x}^* + \underbrace{\underline{V}^{-1}\,\underline{B}}_{\underline{B}^*}\,\underline{u}$$

$$\underline{y} = \underbrace{\underline{C}\,\underline{V}}_{\underline{C}^*}\,\underline{x}^* + \underline{D}\,\underline{u}$$

mit *transparenter, entkoppelter Struktur* (vgl. 1.2.4), $\boxed{\text{s. BB RLM 2-2}}$

Anmerkungen zur Transformation auf Jordansche Normalform

1) Voraussetzungen für die Transformation: $\underline{A}$ *diagonalähnlich*
   ($\Rightarrow$ $\underline{v}_i$ linear unabhängig, d.h. $\underline{V}^{-1}$ existiert) z.B. erfüllt, wenn
   - Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ einfach
   - $\underline{A}$ symmetrisch

   ansonsten: nur *Blockdiagonalstruktur* erreichbar.
2) $\underline{V}^{-1} = \underline{w} = \begin{bmatrix} \underline{w}_1^T \\ \vdots \\ \underline{w}_n^T \end{bmatrix}$ (Matrix der Linkseigenvektoren, $\boxed{\text{s. BB RLM 2-1}}$)
3) Bezeichnung der Transformation auch als *Modaltransformation*

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A}\,\underline{x}(t) \quad (\text{homogene Zustandsgleichung, } \underline{u} \equiv \underline{0})$$

$$\Rightarrow \underline{x}(t) = \underline{\phi}(t - t_0)\,\underline{x}_0$$

$$\text{Diagonal-Trafo} \Downarrow_{\underline{\phi}(t)=e^{\underline{A}t}=\underline{V}e^{\underline{\Lambda}t}\,\underline{V}^{-1}}$$

$$= \underline{V}e^{\underline{\Lambda}(t-t_0)}\,\underline{V}^{-1}\,\underline{x}_0$$

$$= \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i(t-t_0)}\,\underline{v}_i\,\underline{w}_i^T\,\underline{x}_0 = \sum_{i=1}^{n} \left[\underline{w}_i^T \quad \underline{x}_0\right] \cdot \underbrace{\overbrace{e^{\lambda_i(t-t_0)}}^{\text{Eigenbewegung}}\,\underline{v}_i}_{\text{Eigenmodus}}$$

also: Zustandsvektor $=$ Linearkombination der Eigenmodi, falls System in Diagonalform vorliegt.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \underline{\dot{x}}^*(t) = \underline{\Lambda}\,\underline{x}^*(t) & \\ \quad\Downarrow & \textit{Modalkoordinaten} \\ x_i^*(t) = e^{\lambda_i(t-t_0)}x_{i0}^*, \quad i = 1, \ldots, n & \end{array}}$$

$\Rightarrow$ *Diagonaltransformation* $=$ *Transformation auf Modalform*

- **Regelungs-/Beobachtungsnormalform**
  Transformationsvorschriften: $\boxed{\text{s. BB RLM 2-3, 2-4}}$

2.2 Stabilität linearer Mehrgrößensysteme

Zwei Arten von Stabilität

- **Übertragungsstabilität** (**B**ounded **I**nput **B**ounded **O**utput-Stabilität)
- **Lyapunov-Stabilität** (Stabilität bezüglich Anfangsauslenkungen)

bekannt (z.B. aus SRT)
Stabilitätsdefinition und -kriterien im SISO-Fall (zeitkontinuierlich, zeitdiskret)
Erinnerung: s. BB RLM 2-5 bis 2-11

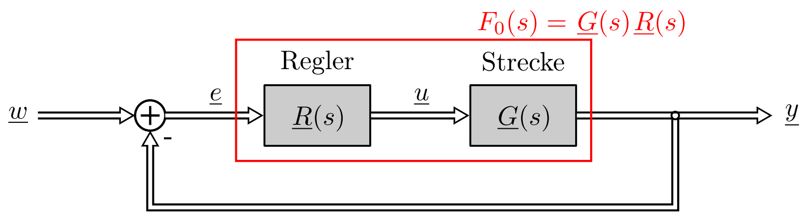
2.2.1 Übertragungsstabilität bei MIMO-Systemen in I/O-Darstellung

Wie in 1.1 exemplarische Betrachtung des zeitkontinuierlichen Falles.
MIMO-Übertragungsgleichung (Bildbereich):

$$\underset{(q,1)}{\underline{Y}(s)} = \underset{(q,p)}{\underline{G}(s)}\,\underset{(p,1)}{\underline{U}(s)}$$
$$\text{also } Y_i(s) = G_{i1}(s)U_1(s) + \cdots + G_{ip}(s)U_p(s)$$

> System stabil, wenn sämtliche einzelne Übertragungsfunktionen $G_{ij}(s)$ stabil sind ($\triangleq$ alle Pole links der j-Achse)

aber: Verhältnisse komplizierter zu prüfen bei verkoppelter Struktur.
Beispiel: Standard-MIMO-Regelkreis



$$\underline{Y}(s) = \underline{F}_o(s)\cdot(\underline{W}-\underline{Y})$$
$$(\underline{I}+\underline{F}_o(s))\underline{Y}(s) = \underline{F}_o(s)\underline{W}(s)$$
$$\Downarrow \text{falls } (\underline{I}+\underline{F}_o(s))^{-1} \text{ existiert}$$
$$\underline{Y}(s) = \underbrace{(\underline{I}+\underline{F}_o(s))^{-1}\cdot\underline{F}_o(s)}_{\triangleq \frac{F_o}{1+F_o} \text{ im skalaren Fall}}\cdot\underline{W}(s)$$

Wegen $\underline{A}^{-1} = \frac{A_{adj}^T}{\det \underline{A}}$ gilt also:

> Standard-MIMO-Regelkreis stabil, wenn die zugehörige charakteristische Gleichung
> $$\boxed{\det(\underline{I}+\underline{F}_o(s)) = 0} \tag{2.5}$$
> nur Nullstellen ($\triangleq$ Pole des MIMO-Regelkreises) links der j-Achse besitzt.

Dies gilt aber nur dann, wenn

a) alle einzelnen Übertragungsfunktionen $F_{oij}(s)$ stabil oder

b) die instabilen Übertragungsfunktionen auch zu (2.5) beitragen.
Gegenbeispiel: $\underline{F}_o(s) = \begin{bmatrix} F_{o11} & F_{o12} \\ 0 & F_{o22} \end{bmatrix}$ mit F_{o12} instabil. (2.5) $\Rightarrow (1+F_{o11})(1+F_{o22}) = 0$ instabil.
F_{o12} nicht erfasst!

2.2.2 Lyapunov-Stabilität von MIMO-Systemen in Zustandsraumdarstellung

- **zeitkontinuierliche Systeme:**
  Stabilitätsdefinition und -bedingungen: $\boxed{\text{s. BB RLM 2-12}}$
  Plausibilität der Stabilitätsbedingungen:
  Beispiel: diagonalähnliche Systemmatrix $\underline{A}$
  $\Rightarrow$ Lösung Zustandsvektor (s. 2.1)

$$\underline{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \left[\underline{w}_i^T \quad \underline{x}_0\right] \cdot e^{\lambda_i (t-t_0)} \underline{v}_i$$

Stabilität:

$$\begin{aligned} &\underline{x}_i(t) \to \underline{0} \ \forall i \\ \Rightarrow &e^{\lambda_i (t-t_0)} \to 0 \\ \Rightarrow &\text{alle Eigenwerte } \lambda_i \text{ müssen negativen Realteil besitzen.} \end{aligned}$$

also: Stabilitätsüberprüfung mit den gleichen Kriterien wie bei der Übertragungsstabilität möglich.

- **zeitdiskrete Systeme:**
  Stabilitätsdefinition und -bedingungen: $\boxed{\text{s. BB RLM 2-13}}$
  Plausibilität der Stabilitätsbedingungen:
  aus alternativer Lösung der homogenen Zustandsdifferenzialgleichung:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{\phi}\,\underline{x}(k) \tag{2.6}$$

(s. früher: $\underline{x}(k) = \underline{\phi}^k \underline{x}(0)$)
Exponentialansatz:

$$\boxed{\underline{x}(k) = e^{\alpha k T} \underline{v} = z^k \cdot \underline{v}}$$

$$\begin{aligned} \text{in (2.6):} \qquad z^{k+1} \underline{v} &= \underline{\phi} z^k \underline{v} \\ z^k (z \underline{v} - \underline{\phi}\,\underline{v}) &= \underline{0} \\ z^k (z \underline{I} - \underline{\phi}) \underline{v} &= \underline{0} \\ \overset{z \neq 0}{\Rightarrow} \quad (z \underline{I} - \underline{\phi}) \underline{v} &= \underline{0} \end{aligned}$$

Da $\underline{v} \neq \underline{0}$, gilt:

$$\boxed{\det(z \underline{I} - \underline{\phi}) = 0 : \text{charakteristische Gleichung}} \tag{2.7}$$

Lösungen von (2.7): $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$: *Eigenwerte* von $\underline{\phi}$
$\Rightarrow$ $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ (Rechts-)*Eigenvektoren* von $\underline{\phi}$
Spezialfall: $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ einfache Eigenwerte

$\Rightarrow$ $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ linear unabhängig
$\Rightarrow$ allgemeine Lösung für $\underline{x}(k)$:

$$\boxed{\underline{x}(k) = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^k \underline{v}_i} \tag{2.8}$$

$$(2.8): \quad |x_0(k)| = \left| \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^k v_{i0} \right| \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |c_i| \left|\lambda_i^k\right| |v_{1\nu}|}_{\to 0 \text{ für } k \to \infty \text{ für bel. } c_i (\hat{=} \text{bel. } \underline{x}_0), \text{ wenn gilt: } |\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n| < 1}, \quad \nu = 1, \ldots, n$$

Fazit: auch hier bekannte Stabilitätskriterien einsetzbar.

2.3 Trajektorienanalyse im Zustandsraum

Prinzip: Systemanalyse durch Bestimmung des zeitlichen Verlaufs der Systemtrajektorien im Zustandsraum.
$\Rightarrow$ tieferes Verständnis möglich

- geometrische Anschauung des Zustandsraumes
- Einfluss der Eigenmodi und der Eigenbewegung ($\leftarrow$ Eigenwerte)
- anschauliche Stabilitätsanalyse (auch weiterführend bei nichtlinearen Systemen, hier nicht im Fokus)

2.3.1 Ruhelagen und Linearisierung im Zustandsraum

Ausgangspunkt: allgemeine Systemdarstellung im Zustandsraum ($\boxed{\text{s. BB RLM 1-1}}$)

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) \tag{2.9}$$

$$\underline{y} = \underline{g}(\underline{x}, \underline{u}) \tag{2.10}$$

Ruhelage (stationärer Zustand): Fester Wert $\underline{x}_R$ des Systems 2.9, 2.10, bei dem es bei einem kostanten Eingangsvektor $\underline{u}(t) = \underline{u}_R$ als Anregung für wachsende Zeit zur Ruhe kommt.

$$\underline{x}_R = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \underline{x}(t) \to \underline{x}_R \text{ für } t \to \infty\}$$

Offenbar gilt in der Ruhelage:

$$\dot{\underline{x}}|_{\underline{x}_R, \underline{u}_R} = \underline{0} \tag{2.11}$$

Häufig: Ruhelagen sind sogenannte Arbeits- oder Betriebspunkte von Systemen. (hier aus Ableitung der bekannten linearen Systembeschreibung motiviert.)

Linearisierung im Zustandsraum (vgl auch z.B. SRT)
Gegeben: 2.9, 2.10 mit $\underline{f}$, $\underline{g}$ stetig differenzierbar.
Gesucht: Lineares Verhalten in der Umgebung des Arbeitspunktes (AP).
$\Rightarrow$ Übergang zu den Abweichungen vom Arbeitspunkt:

$$\begin{aligned}\Delta\underline{x} &= \underline{x} - \underline{x}_R\\ \Delta\underline{u} &= \underline{u} - \underline{u}_R\\ \Delta\underline{y} &= \underline{y} - \underline{y}_R\end{aligned}$$

Herleitung: im AP gilt:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}|_{\text{AP}} = \dot{\underline{x}}_R &= \underline{f}(\underline{x}_R, \underline{u}_R) = 0\\ \underline{y}_R &= \underline{g}(\underline{x}_R, \underline{u}_R)\end{aligned}$$

2.9, 2.10 mit Abweichungen:

$$\begin{aligned}(\underline{x}_R + \Delta\underline{x})^{\bullet} &= \underline{f}(\underline{x}_R + \Delta\underline{x}, \underline{u}_R + \Delta\underline{u})\\ (\underline{y}_R + \Delta\underline{y}) &= \underline{g}(\underline{x}_R + \Delta\underline{x}, \underline{u}_R + \Delta\underline{u})\end{aligned}$$

$\Downarrow$ jeweils Taylorreihenentwicklungen von $\underline{f}$ und $\underline{g}$ um den AP ($\underline{x}_R, \underline{u}_R$)

$$\underbrace{(\underline{x}_R + \Delta\underline{x})^{\bullet}}_{\Delta\dot{\underline{x}}} = \underbrace{\underline{f}(\underline{x}_R, \underline{u}_R)}_{=\underline{0}} + \underbrace{\left.\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}\right|_{\text{AP}}}_{\underline{A}} \cdot \Delta\underline{x} + \underbrace{\left.\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{u}}\right|_{\text{AP}}}_{\underline{B}} \cdot \Delta\underline{u} + \underbrace{\underline{R}_1(\Delta\underline{x}^r, \Delta\underline{u}^r)}_{\approx 0 \text{ im AP}} \qquad (r = 2, 3, ...)$$

$$(\underline{y}_R + \Delta\underline{y}) = \underbrace{\underline{g}(\underline{x}_R, \underline{u}_R)}_{\underline{y}_R} + \underbrace{\left.\frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{x}}\right|_{\text{AP}}}_{\underline{C}} \cdot \Delta\underline{x} + \underbrace{\left.\frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{u}}\right|_{\text{AP}}}_{\underline{D}} \cdot \Delta\underline{u} + \underbrace{\underline{R}_2(\Delta\underline{x}^r, \Delta\underline{u}^r)}_{\approx 0 \text{ im AP}} \qquad (r = 2, 3, ...)$$

Also gilt in der Umgebung des Arbeitspunktes dann:

$$\begin{aligned}\Delta\,\underline{\dot{x}} &= \underline{A}\cdot\Delta\,\underline{x} + \underline{B}\cdot\Delta\,\underline{u}\\ \Delta\,\underline{y} &= \underline{C}\cdot\Delta\,\underline{x} + \underline{D}\cdot\Delta\,\underline{u}\end{aligned}$$

mit $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$ sogenannte Jakobimatrizen, z.B.:

$$\underset{(n,n)}{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Ruhelagenbestimmung bei linearen Systemen
Gegeben:

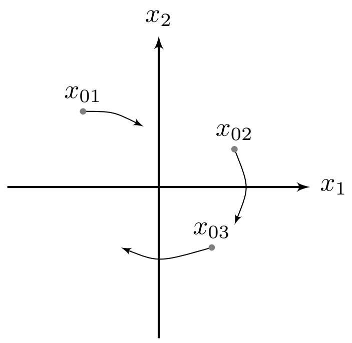
$$\begin{aligned}\underline{\dot{x}} &= \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}\\ \underline{y} &= \underline{C}\,\underline{x} + \underline{D}\,\underline{u}\\ &\Downarrow \text{Ruhelage } \left.\underline{\dot{x}}\right|_{\mathrm{AP}(\underline{x}_R,\underline{u}_R)} = \underline{0}\\ \underline{0} &= \underline{A}\,\underline{x}_R + \underline{B}\,\underline{u}_R \qquad (2.12)\\ \underline{y}_R &= \underline{C}\,\underline{x}_R + \underline{D}\,\underline{u}_R\end{aligned}$$

(2.12) $\Rightarrow$ $\underline{A}\,\underline{x}_R = -\underline{B}\,\underline{u}_r$: Lineares Gleichungssystem $\Rightarrow$ Lösung abhängig von $\underline{A}$:

- $\underline{A}$ regulär ($\det \underline{A} \neq 0$)
  1. $\underline{x}_R = -\underline{A}^{-1}\underline{B}\,\underline{u}_R$: eindeutige Lösung
- $\underline{A}$ singulär ($\det \underline{A} = 0$)
  2. unterbestimmtes Gleichungssystem: Lösungsmenge $\underline{x}_R$, d.h. unendlich viele Lösungen
  3. überbestimmtes Gleichungssystem: keine Lösung (ausgeschlossen bei $\underline{u}_R = 0$)

2.3.2 Trajektorienbestimmung im Zustandsraum

Jetzt: Analyse des zeitlichen Verlaufs der Zustandsgrößen im Zustandsraum. s. BB RLM 2-14
Wahl der zweiten Zustandsgröße x_2 als Ableitung der ersten Zustandsgröße x_1.
$\Rightarrow$ Zustandsraum = Phasenebene
(z.B. $x_1 = x$ (Position) , $x_2 = \dot{x} = v$ (Geschwindigkeit))
Durch diese Wahl wird die Trajektoriendurchlaufsrichtung festgelegt:



$x_2 = \dot{x}_1 > 0$: x_1 wächst.
$x_2 = \dot{x}_1 < 0$: x_1 fällt.

Trajektorienberechnung:

1. Reduktion der zwei Zustandsdifferentialgleichungen auf jeweils DGL 1. Ordnung für $x_2 = x_2(x_1)$ oder $x_1 = x_2(x_2)$.
2. Trennung der Veränderlichen und jeweils Integration.
3. Identifikation der Kegelschnittgleichung zur Bestimmung der Trajektorienform.

Beispiel: DGL 2. Ordnung:

$$\begin{aligned}
\text{DGL:}\quad & \ddot{x} = u \\
& \Downarrow u = c \text{ (konstant)} \\
& \ddot{x} = c \\
\text{Zustandsgrößen:}\quad & x_1 = x \\
& x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x} \\
\text{Zustandsgleichungen:}\quad & \dot{x}_1 = x_2 \\
& \dot{x}_2 = c
\end{aligned}$$

Trajektorien:

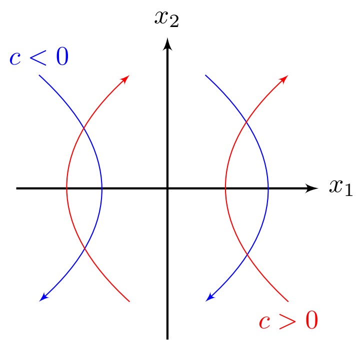
1. Reduktion auf eine DGL:

$$\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{dx_2/dt}{dx_1/dt} = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{c}{x_2}$$

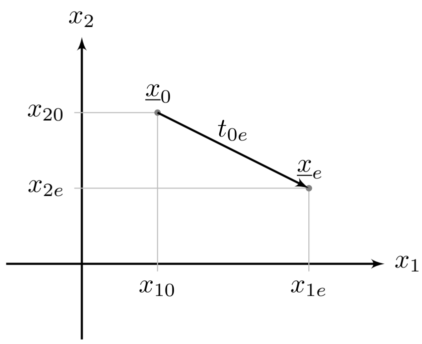
2. Trennung der Veränderlichen:

$$\begin{aligned}
x_2 \cdot dx_2 &= c \cdot dx_1 \\
&\Downarrow \text{ Integration} \\
\int x_2 \; dx_2 &= \int c \; dx_1 \\
\frac{x_2^2}{2} &= cx_1 + \text{const}
\end{aligned}$$

3. Kegelschnittgleichung identifizieren: $x_2^2 = 2cx_1 + k$ (Parabel in der Phasenebene)
   Schnittpunkte: $(x_{1b}, 0)$: $0 = 2cx_{1b} + k \Leftrightarrow k = -2cx_{1b}$
   Also: $x_2^2 = 2c(x_1 - x_{1b})$



Zeitabhängigkeit der Trajektorien:



a) $\dot{x}_1 = x_2 \overset{!}{=} x_2(x_1)$

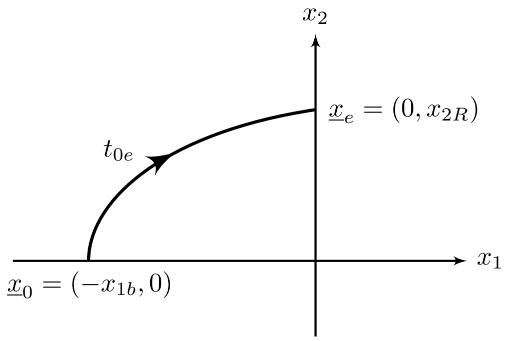
b) $\dot{x} = f(x_1, x_2, u)$

a) $\dfrac{\partial x_1}{\partial t} = x_2(x_1) \qquad \Rightarrow \displaystyle\int_{t_0}^{t_e} \partial t = \int_{x_{10}}^{x_{1e}} \frac{1}{x_2(x_1)} \partial x_1 = t_{oe}$

b) $\dfrac{\partial x_2}{\partial t} = f(x_1, x_2, u) \qquad \Rightarrow \displaystyle\int_{t_0}^{t_e} \partial t = \int_{x_{20}}^{x_{2e}} \frac{1}{f(x_1, x_2, u)} \partial x_2 = t_{oe}$

Beispiel: DGL 2. Ordnung (siehe oben)

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = c$$



$$\begin{aligned} \text{Trajektorien:} \quad & x_2^2 = 2c(x_1 - x_{1b}) \\ \underline{x}_0 \to \underline{x}_e\text{:} \quad & x_2 = \sqrt{2c(x_1 - x_{1b})} \\ & x_{2e} = \sqrt{2cx_{1b}} \end{aligned}$$

$$t_{0e} = \int_{t_0}^{t_e} dt = \int_{x_{20}}^{x_{2e}} \frac{1}{c} \partial x_2 = \left. \frac{x_2}{c} \right|_{x_{20}(=0)}^{x_{2e}} = \sqrt{\frac{2x_{1b}}{c}}$$

2.3.3 Trajektorienverlauf und Stabilitätsanalyse

Jetzt: Stabilitätsbeurteilung anhand der Trajektorienverläufe.
Dabei: Betrachtung der Lyapunov-Stabilität von Ruhelagen s. BB RLM 2-15
Vergleich mit bisheriger Stabilitätsdefinigtion s. BB RLM 2-12, 2-13
Definition:

System stabil ⇔ einzige Ruhelage $\underline{x}_R = \underline{0}$ des homogenen Systems global asymptotisch stabil.

Vorteil der Ruhelagenstabilitätsdefinition:

- auf nichtlineare Systeme zugeschnitten. (Im Gegensatz zum linearen Fall auch mehrere, endlich viele Ruhelagen mit unterschiedlichem Stabilitätsverhalten möglich.)
- auch Grenzfälle im linearen zu analysieren.
  Beispiel: ungedämpfter Schwinger s. BB RLM 2-14

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{m} & 0 \end{bmatrix}$$

EWe: $\det(\lambda \underline{I} - \underline{A}) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{c}{m} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{c}{m} = 0$
$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{c}{m}}$ (EWe auf j-Achse)
Also: System nach linearer Definition instabil, aber Ruhelage $\underline{x}_R$ Lyapunov-Stabil!

Typische Trajektorienverläufe linearer Systeme 2. Ordnung in der Phasenebene: s. BB RLM 2-16 bis 2-23

2.4 Steuer- und Beobachtbarkeit von MIMO-Systemen im Zustandsraum

2.4.1 Steuerbarkeit

Hierbei Fragestellung: Ist der Systemzustand $\underline{x}(t)$ durch die Eingangsgrößen $\underline{u}(t)$ hinreichend gut (beliebig) beeinflussbar? (wichtig für späteren Reglerentwurf)

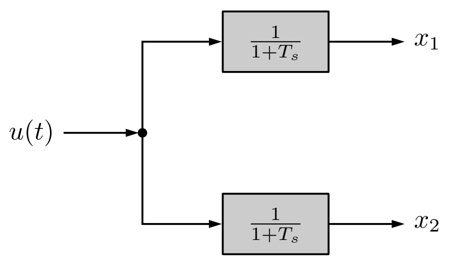
- **Zeitkontinuierliche Systeme**

  a) **Definition:** s. BB RLM 2-24 **Anmerkungen:**

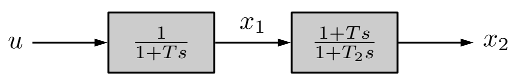
  1. Neben Steuerbarkeit auch definierbar: *Erreichbarkeit:*
     beliebiges $\underline{x}_e$ lässt sich mit geeignetem $\underline{u}$ von $\underline{x}_0 = 0$ erreichen. Bei LTI-Systemen beide Probleme äquivalent, daher nur Steuerbarkeit betrachtet.
  2. *Vollständige Steuerbarkeit* betrachtet, da alle Zustandsgrößen einbezogen, auch möglich:
     - *Teil-Steuerbarkeit* (nur bestimmte x_i beeinflussbar → steuerbarer Unterraum → später)
     - *Ausgangssteuerbarkeit* (Nur Ausgangsgrößen beeinflussbar)

  b) **Überprüfung der Steuerbarkeit**

  1. **Grafische Kriterien**
     ablesbar am Strukturbild: *Nicht steuerbare Zustandsgrößen* liegen vor bei
     - *vom Eingang abgetrennten Zustandsgrößen*
       Beispiel: SISO-System in Modalform, s. BB RLM 2-2
       System nicht vollständig steuerbar, wenn mindestens ein $b_i^* = 0$
       $\Rightarrow x_i^*$ nicht mittels u beeinflussbar ($b_i^* = 0:\ \lambda_i$ nicht steuerbarer Eigenwert, → später)
     - parallelen Systemen gleicher Dynamik



       x_1 und x_2 nicht unabhängig voneinander steuerbar.
     - Pol-/Nullstellenkompensation **Beispiel:**



       Kompensation → später
  2. **Algebraische Kriterien:**
     Kriterien von
     - Kalman
     - Hautus
     - Gilbert

     → s. BB RLM 2-24

Herleitung: (beispielhaft *Kalman- Kriterium*)
Lösung der Zustandsdifferentialgleichung $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}$ aus 1.2.5

$$\underline{x}(t) = \underline{\phi}(t - t_0)\,\underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \underline{\phi}(t - \tau)\,\underline{B}\,\underline{u}(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau$$

$$\Downarrow t = t_e:\ \underline{x}(t_e) = \underline{0}$$

$$\begin{aligned}
\underbrace{-\underline{\phi}(t_e - t_0)\,\underline{x}(t_0)}_{=:\,\underline{x}_0^*} &= \int_{t_0}^{t_e} \underline{\phi}(t_e - \tau)\,\underline{B}\,\underline{u}(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau \\
&= \underline{\phi}(t_e) \cdot \int_{t_0}^{t_e} \underbrace{\underline{\phi}(-\tau)}_{=e^{-\underline{A}\tau} = \underline{I} - \underline{A}\tau + \frac{\underline{A}^2}{2}\tau^2 - \dots} \underline{B}\,\underline{u}(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau \\
&= \underline{\phi}(t_e) \left[\underline{B} \underbrace{\int_{t_0}^{t_e} \underline{u}(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau}_{\underline{C}_0} + \underline{A}\,\underline{B} \cdot \left(\underbrace{-\int_{t_0}^{t_e} \tau \cdot \underline{u}(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau}_{\underline{C}_1} \right) + \underline{A}^2\,\underline{B} \int_{t_0}^{t_e} \frac{\tau^2}{2}\,\underline{u}(\tau) \dots \right] \\
&= \underline{\phi}(t_e) \left[\underline{B}\,\underline{C}_0 + \underline{A}\,\underline{B}\,\underline{C}_1 + \underline{A}^2\,\underline{B}\,\underline{C}_2 + \cdots \right]
\end{aligned}$$

Da $\underline{x}_0^*$ beliebiger n-dimensionaler Vektor ist, muss die Linearkombination der $\underline{A}^{\nu}\,\underline{B}$ den n-dimensionalen Raum aufspannen

$$\Rightarrow \mathrm{rg}\,[\underline{B}, \underline{A}\,\underline{B}, \dots] = n \tag{2.13}$$

außerdem gilt: *Theorem von Cayley-Hamilton:*
Eine Matrix $\underset{(n,n)}{\underline{S}}$ genügt ihrer charakteristischen Gleichung

$$\det(\lambda\underline{I} - \underline{S}) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0 = 0$$

d.h. es gilt:

$$\boxed{\underline{S}^n + p_{n-1}\,\underline{S}^{n-1} + \cdots + p_1\,\underline{S} + p_0\,\underline{I} = \underline{0}}$$

also: $\underline{A}^n + p_{n-1}\,\underline{A}^{n-1} + \cdots + p_1\,\underline{A} + p_0\,\underline{I} = \underline{0}$
$\Rightarrow$ $\underline{A}^n \cdot \underline{B}$ ist eine Linearkombination der übrigen $\underline{A}^i\,\underline{B}$, $(i = 0, 1, \dots, n-1)$

$$\Rightarrow \mathrm{rg}\,[\underline{B}, \underline{A}\,\underline{B}, \dots] \overset{!}{=} \mathrm{rg}\,\underbrace{\left[\underline{B}, \underline{A}\,\underline{B}, \dots, \underline{A}^{n-1}\,\underline{B}\right]}_{=\ \underset{(n,np)}{\underline{Q}_s}}$$

also Kalman-Kriterium:

$$\boxed{\text{System vollständig steuerbar} \ \Leftrightarrow \mathrm{rg}\,\underline{Q}_s = n} \tag{2.14}$$

Anmerkungen:

- SISO-Fall: $\underset{(n,p)}{\underline{B}} = \underset{(n,1)}{\underline{b}}$, d.h. $\underset{(n,n)}{\underline{Q}_s}$ hat n linear unabhängige Spalten
- MIMO-Fall: u.U. nicht alle Produkte $\underline{A}^i\,\underline{B}$ zur Erfüllung von (2.14) erforderlich.
  $\Rightarrow$ **Definition:**

Steuerbarkeitsindex m_S
kleinste natürliche Zahl m_S, mit der gilt

$$\mathrm{rg}\left[\underline{B}, \underline{A}\,\underline{B}, \dots, \underline{A}^{m_S-1}\,\underline{B}\right] = n$$

(anschauliche Bedeutung: s. zeitdiskreter Fall!)

- **Zeitdiskrete Systeme:**
  ganz analoge Definition und Kriterien wie bei zeitkontinuierlichen Systemen, $\boxed{\text{s. BB RLM 2-25}}$
  Steuerbarkeitsindex motivierbar aus diskreter Zustandstrajektorie: vgl. 1.3:

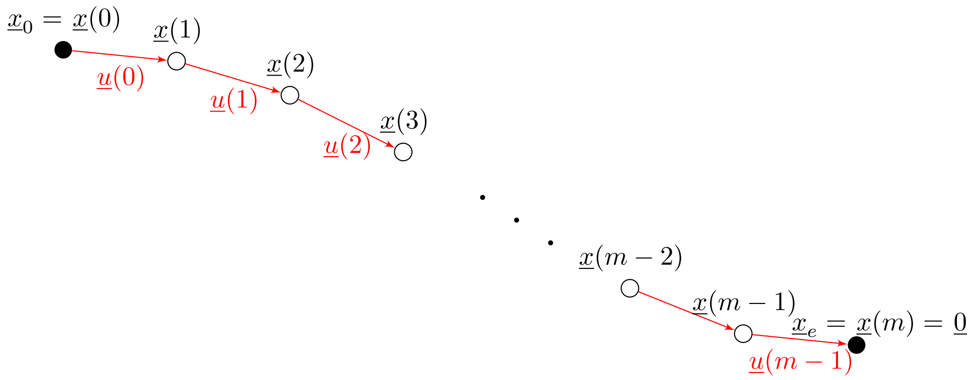


Abbildung 2.1: $(\underline{u}(0), \underline{u}(1), \ldots, \underline{u}(m-1))$ endliche Steuerfolge, die $\underline{x}_0$ in m Schritten nach $\underline{x}_e$ überführt

$$\underline{x}(m) = \underline{0} = \underline{\phi}^m \, \underline{x}(0) + \sum_{\nu=0}^{m-1} \underline{\phi}^{m-1-\nu} \, \underline{H} \, \underline{u}(\nu)$$

vektoriell:

$$\underbrace{\left[\underline{H}, \underline{\phi}\,\underline{H}, \ldots, \underline{\phi}^{m-1}\,\underline{H}\right]}_{=: \underset{(n,mp)}{\underline{Q}_m}} \cdot \begin{bmatrix} \underline{u}(m-1) \\ \vdots \\ \underline{u}(0) \end{bmatrix} = \underbrace{-\underline{\phi}^m \, \underline{x}(0)}_{\underline{x}_0^*}$$

Da $\underline{x}_o^*$ beliebig: Steuerfolge existiert, wenn gilt:

$$\operatorname{rg} \underline{Q}_m = n \tag{2.15}$$

Anzahl der Steuerschritte:

- Bedingung (2.15): $m \cdot p \geq n$, d.h. $m \geq \frac{n}{p}$
- wegen des Theorems von Cayley-Hamilton: höchstmöglicher Rang von $\underline{Q}_m$ bei $\underline{Q}_m = \underline{Q}_s$ mit $\underline{Q}_s = \left[\underline{H}, \underline{\phi}\,\underline{H}, \ldots, \underline{\phi}^{n-1}\,\underline{H}\right]$, d.h. $m \leq n$

$$\boxed{\frac{n}{p} \leq m \leq n} \tag{2.16}$$

Steuerbarkeitsindex m_S:
kleinste natürliche Zahl gemäß (2.16), die (2.15) erfüllt, d.h. es ist die minimale Anzahl von Steuerschritten, um von $\underline{x}_0$ nach $\underline{x}_e = 0$ zu gelangen. (dabei:

a) $m_S = \frac{n}{p}$: eindeutige Lösung

b) $m_S > \frac{n}{p}$: unendlich viele Lösungen, s. späterer Reglerentwurf)

2.4.2 Beobachtbarkeit

zu 2.4.1 duale Fragestellung:
Ist der (ggf. beliebige) Anfangszustand $\underline{x}_0$ bei bekanntem Eingang $\underline{u}(t)$ mittels der Ausgangsgrößen $\underline{y}(t)$ hinreichend gut ermittelbar? (wichtig für späteren Beobachterentwurf)

- **Zeitkontinuierliche Systeme**

  a) **Definition:** $\boxed{\text{s. BB RLM 2-26 oben}}$
  Anmerkungen:

1. hierbei auch definierbar: *Rekonstruierbarkeit:*
   beliebiges aktuelles $\underline{x}_e$ lässt sich bei bekanntem $\underline{u}(t)$ aus $\underline{y}(t)$ rekonstruieren. Bei LTI-Systemen sind beide Probleme äquivalent. $\Rightarrow$ nur Beobachtbarkeit behandelt.
2. *Vollständige Beobachtbarkeit* im Fokus, auch *Teil- Beobachtbarkeit* (nur bestimmte $\underline{x}_0$ beobachtbar) möglich.

b) **Überprüfung der Beobachtbarkeit**

1. **Grafische Kriterien:**
   aus Strukturbildanalyse, analog zur Steuerbarkeit: *Nicht beobachtbare Zustandsgrößen* liegen vor bei
   - *vom Ausgang abgetrennten Zustandsgrößen*
     Beispiel: SISO-System in Modalform, $\boxed{\text{s. BB RLM 2-2}}$
     System nicht vollständig beobachtbar, wenn mindestens ein $c_i^* = 0$
     $\Rightarrow x_i^*$ trägt nicht zu y bei ($c_i^* = 0 : \lambda_i$ *nicht beobachtbarer Eigenwert*)
   - parallelen Systemen mit gleicher Dynamik
   - Pol-/Nullstellenkompensation
2. **Algebraische Kriterien:**
   Kriterien von
   - Kalman
   - Hautus
   - Gilbert

   $\rightarrow$ $\boxed{\text{s. BB RLM 2-16}}$
   Herleitung ähnlich wie bei Steuerbarkeit.

   Anmerkungen:
   - SISO-Fall: $\underset{(q,n)}{\underline{C}} = \underset{(q,1)}{\underline{c}^T}$, d.h. $\underset{(n,n)}{\underline{Q}_B}$ muss n linear unabhängige Zeilen besitzen
   - MIMO-Fall: u.U. nicht alle Produkte $\underline{C}\,\underline{A}^i$, $(i = 0, 1, \dots)$ zur Erfüllung des Höchstrangs n von $\underset{(nq,n)}{\underline{Q}_B}$ erforderlich.

     $\Rightarrow$ **Definition:**

     Beobachtbarkeitsindex m_B
     kleinste natürliche Zahl m_B, für die gilt:

$$\text{rg}\begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C}\,\underline{A} \\ \vdots \\ \underline{C}\,\underline{A}^{m_B-1} \end{bmatrix} = n$$

- **Zeitdiskreter Fall**
  Definition und Kriterien analog zum zeitkontinuierlichen Fall: $\boxed{\text{s. BB RLM 2-27}}$
  Auch hier m_B an diskreter Zustandstrajektorie (siehe Abbildung 2.2) anschaulich zu machen.

also:

$$\begin{aligned}
\underline{y}(0) &= \underline{C}\,\underline{x}(0) + \underline{D}\,\underline{u}(0) \\
\underline{y}(1) &= \underline{C}\,\underline{x}(1) + \underline{D}\,\underline{u}(1) \overset{!}{=} \underline{C}\,\underline{\phi}\,\underline{x}(0) + \underline{C}\,\underline{H}\,\underline{u}(0) + \underline{D}\,\underline{u}(1) \\
&\vdots \\
\underline{y}(m-1) &= \underline{C}\,\underline{\phi}^{m-1}\,\underline{x}(0) + \sum_{\nu=0}^{m-2} \underline{C}\,\underline{\phi}^{m-2-\nu}\,\underline{H}\,\underline{u}(\nu) + \underline{D}\,\underline{u}(m-1)
\end{aligned}$$

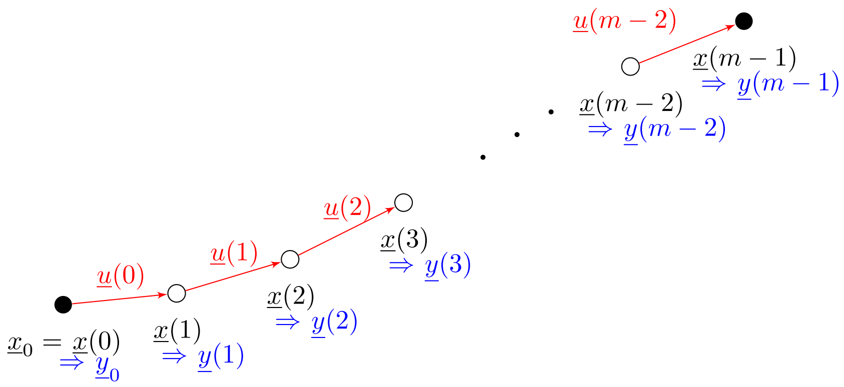


Abbildung 2.2: $(\underline{y}(0), \ldots, \underline{y}(m-1))$ ist *endliche Messwertfolge* von $\underline{x}(0)$ nach $\underline{x}(m-1)$

bzw.:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C}\,\underline{\phi} \\ \vdots \\ \underline{C}\,\underline{\phi}^{m-1} \end{bmatrix}}_{=: \underset{(mq,n)}{\underline{Q}_m}} \underline{x}(0) = \underset{(mq,1)}{\begin{bmatrix} \underline{y}(0) \\ \underline{y}(1) \\ \vdots \\ \underline{y}(m-1) \end{bmatrix}} + \ldots (\text{Rest von } \underline{u} \text{ abhängig}) \tag{2.17}$$

analog zur früheren Schreibweise:
Gleichungssystem (2.17) ist nach $\underline{x}(0)$ auflösbar, wenn gilt

$$\boxed{\operatorname{rg} \underline{Q}_m = n} \tag{2.18}$$

mit Forderung (2.18) und Beachtung des Theorems von Cayley- Hamilton ergibt sich wie bei 2.4.1:

$$\boxed{\frac{n}{q} \leq m \leq n} \tag{2.19}$$

Beobachtbarkeitsindex m_B:

kleinste natürliche Zahl gemäß (2.19), die (2.18) erfüllt $\hat{=}$ minimaler Anzahl von Messwerten, um $\underline{x}(0)$ zu ermitteln

(dabei:

a) $m_B = \frac{n}{q}$: eindeutige Lösung

b) $m_B > \frac{n}{q}$: unendlich viele Lösungen, siehe später Beobachterentwurf)

2.4.3 Kanonische Systemzerlegung nach Kalman

bislang: globale Eigenschaften der vollständigen Steuer- und Beobachtbarkeit behandelt.
jetzt: genaue Analyse des Systems: Welche Anteile steuer-/beobachtbar, welche nicht?

Hierzu etwas tiefer in die *mathematische Begriffswelt linearer Abbildungen* eintauchen:
s. BB RLM 2-28

Analyse durch geometrische Betrachtung möglich, exemplarisch an Steuerbarkeit ausgeführt.
Ziel: Bestimmung der *steuerbaren* ($\underline{x}_S$) und *nicht steuerbaren* ($\underline{x}_{\bar{S}}$) Zustandsgrößen und ihrer jeweiligen Unterräume X_S und $X_{\bar{S}}$, für die wegen $X_{\bar{S}} = X_S^{\perp}$, d.h. $X_S \oplus X_{\bar{S}} = \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\underline{x} = \underline{x}_S + \underline{x}_{\bar{S}}$$

(vgl. $\boxed{\text{s. BB RLM 2-28}}$)

Beispiel: $\underline{n=2}$
Aus Lösung der Zustands-DGL (s. früher):

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= \underline{\phi}(t-t_0)\,\underline{x}(t) + \int_{t_0}^{t} \underline{\phi}(t-\tau)\,\underline{B}\,\underline{u}(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau \\ \underbrace{\underline{x}(t) - \underline{\phi}(t-t_0)\,\underline{x}(t_0)}_{\underline{x}^*(t)} &= \int_{t_0}^{t} \underline{\phi}(t-\tau)\,\underline{B}\,\underline{u}(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau \end{aligned} \tag{2.20}$$

nun gilt (ohne Beweis):

> $\underline{x}^*(t) \in \mathbb{R}^n$ lässt sich genau dann durch
>
> $$\underline{x}^*(t) = \int_{t_0}^{t} \underset{(n,p)}{\underline{F}(\tau)}\,\underline{u}(t)\,\mathrm{d}\,\tau$$
>
> darstellen, wenn gilt
>
> $$\underline{x}^*(t) \in \mathrm{Bild}(\underline{W})$$
>
> Dabei ist die symmetrische Matrix $\underline{W}$ die sogenannte *Gramsche Matrix*
>
> $$\underset{(n,n)}{\underline{W}} = \int_{t_0}^{t} \underline{F}(\tau)\,\underline{F}^T(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau$$

Vergleich mit 2.20: $\underline{x}^*(t) = \underline{x}_S(t), \quad \underline{F}(\tau) = \underline{\phi}(t-\tau)\,\underline{B}$

steuerbarer Unterraum X_S

$$\boxed{X_S = \mathrm{Bild}(\underline{W}), \qquad (\underline{x}_S \in X_S)}$$

außerdem folgt mit $\boxed{\text{s. BB RLM 2-28}}$

Nicht steuerbarer Unterraum $X_{\bar{S}}$:

$$\boxed{X_{\bar{S}} = X_S^{\perp} = (\mathrm{Bild}(\underline{W}))^{\perp} \overset{!}{=} \mathrm{Kern}\,\underline{W}^T \overset{\underline{W}\text{ symm.}}{=} \mathrm{Kern}\,\underline{W}, \qquad (\underline{x}_{\bar{S}} \in X_{\bar{S}})}$$

also: $X_{\bar{S}} = \mathrm{Kern}(\underline{W}) = \mathrm{Kern}(\underline{F}\,\underline{F}^T) \overset{!}{=} \mathrm{Kern}(\underline{F}^T) \overset{\wedge}{=}$ Raum aller $\underline{x}_{\bar{S}}$, für die gilt: $\underline{F}^T \cdot \underline{x}_{\bar{S}} = \underline{0}$, d.h.

$$\underline{B}^T\,\underline{\phi}^T(t-\tau)\,\underline{x}_{\bar{S}} = 0$$

$$\Downarrow_{\underline{\phi}(t)=\underline{I}+\underline{A}t+\underline{A}^2\cdot\frac{t^2}{2!}+\ldots}$$

$$\underline{B}^T(\underline{A}^T)^i\,\underline{x}_{\bar{S}} = \underline{0}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

$$\text{d.h.} \quad \left[\underline{B}^T, \underline{B}^T\,\underline{A}^T, \ldots, \underline{B}^T\,\underline{A}^{T^{n-1}}\right]\underline{x}_{\bar{S}} = \underline{0}$$

$$\Downarrow_{\underline{Q}_S=[\underline{B},\underline{A}\,\underline{B},\ldots,\underline{A}^{n-1}\,\underline{B}]}$$

$$X_{\bar{S}} = \mathrm{Kern}(\underline{Q}_S^T)$$

$$\Rightarrow X_S = \mathrm{Bild}(\underline{Q}_S)$$

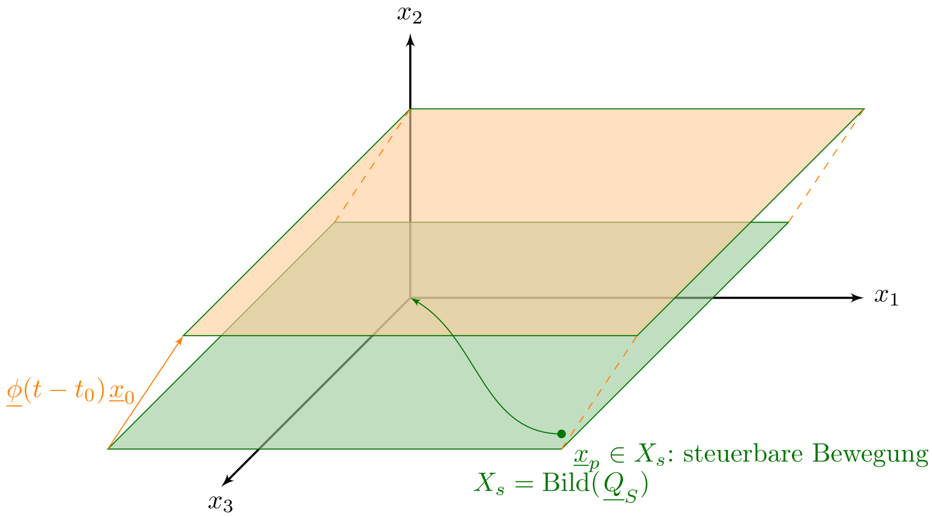
Dimension der Unterräume: $\boxed{\text{s. BB RLM 2-28}}$

$$\dim(X_S) = \mathrm{rg}(\underline{Q}_S) = n_S$$

$$\dim(X_{\bar{S}}) = \mathrm{Defekt}(\underline{Q}_S) = n - n_S$$

(Vollständige Steuerbarkeit: $\mathrm{rg}\,(\underline{Q}_S) = n :$ Kalman-Kriterium

Beispiel: $\underline{n=3}$, $n_S = 2 \Rightarrow X_S$: Ebene



durch analoge Überlegungen ergibt sich für die Beobachtbarkeit:
Beobachtbarer Unterraum X_B

$$\boxed{X_B = \text{Bild}\left(\underline{Q}_B^T\right)}$$

$$(\dim(X_B) = \text{rg}\left(\underline{Q}_B\right) = n_B)$$

Nicht beobachtbarer Unterraum $X_{\bar{B}}$

$$\boxed{X_{\bar{B}} = \text{Kern}\left(\underline{Q}_B\right)}$$

$$(\dim(X_{\bar{B}}) = \text{Defekt}(\underline{Q}_B) = n - n_B)$$

nun kann man die eigentliche *Zerlegung nach Kalman* angehen.

Prinzip: Transformation der Zustandsgrößen $\underline{x}$ durch

$$\underline{x} = \underline{T}_K\,\underline{x}_K \tag{2.21}$$

mit $\underline{T}_K = [\underline{T}_{K1}, \underline{T}_{K2}, \underline{T}_{K3}, \underline{T}_{K4}]$ so, dass für den neuen Zustandsvektor

$$\underline{x}_K = \left[\underline{x}_{K1}^T, \underline{x}_{K2}^T, \underline{x}_{K3}^T, \underline{x}_{K4}^T\right]^T$$

gilt:

$$\begin{aligned}
\underline{x}_{K1} &\in X_{S\bar{B}} = \text{Bild}\left(\underline{T}_{K1}\right)\\
\underline{x}_{K2} &\in X_{SB} = \text{Bild}\left(\underline{T}_{K2}\right)\\
\underline{x}_{K3} &\in X_{\bar{S}\bar{B}} = \text{Bild}\left(\underline{T}_{K3}\right)\\
\underline{x}_{K4} &\in X_{\bar{S}B} = \text{Bild}\left(\underline{T}_{K4}\right)
\end{aligned}$$

sowie

$$X_{S\bar{B}} \oplus X_{SB} \oplus X_{\bar{S}\bar{B}} \oplus X_{\bar{S}B} = \mathbb{R}^n$$

zunächst: verändern Transformationen vom Typ (2.21) die Eigenschaften? Nein!
Beweis (für Steuerbarkeit)**:**

$$\begin{aligned}
\underline{Q}_S &= \left[\underline{B}, \underline{A}\,\underline{B}, \ldots, \underline{A}^{n-1}\,\underline{B}\right]\\
&\Downarrow_{\underline{x}=\underline{T}_K\,\underline{x}_K}\\
\underline{Q}_{SK} &= \left[\underline{B}_K, \underline{A}_K\,\underline{B}_K, \ldots, \underline{A}_K^{n-1}\,\underline{B}_K\right]\\
&\overset{\text{s.(2.1)}}{=} \left[\underline{T}_K^{-1}\,\underline{B}, \underline{T}_K^{-1}\,\underline{A}\,\underline{B}, \ldots, \underline{T}_K^{-1}\,\underline{A}^{n-1}\,\underline{B}\right]\\
&= \underline{T}_K^{-1} \cdot \underline{Q}_S\\
\Rightarrow \text{rg}(\underline{Q}_{SK}) &= \text{rg}(\underline{T}_K^{-1}\,\underline{Q}_S) = \text{rg}(\underline{Q}_S)
\end{aligned}$$

Bestimmung der $\underline{T}_{Ki}$:
offensichtlich: Zerlegung in die vier Subsysteme nur dann möglich, wenn System weder voll steuer-, noch beobachtbar ist.

Zunächst: $\underline{Q}_S$ und $\underline{Q}_B$ aufstellen, dann die Unterräume Bild($\underline{Q}_S$) und Kern($\underline{Q}_B$) ermitteln, damit $\underline{T}_{Ki}$ wie folgt zu bestimmen.

1. $\underline{T}_{K1}$: Basisvektoren von $X_{S\bar{B}}$, d.h. $X_{S\bar{B}} = \text{Bild}(T_{K1}) = \text{Bild}(\underline{Q}_S) \cap \text{Kern}(\underline{Q}_B)$
2. $\underline{T}_{K2}$: übrige Basisvektoren von Bild($\underline{Q}_S$), die nicht in $\underline{T}_{K1}$ enthalten, d.h.
$$\text{Bild}\left([\underline{T}_{K1}, \underline{T}_{K2}]\right) = \text{Bild}(\underline{Q}_S) \quad \text{bzw.}$$
$$X_{SB} = \text{Bild}(\underline{T}_{K2}) = \text{Bild}(\underline{Q}_S) \cap \left(\text{Kern}\left(\underline{Q}_B\right)\right)^\perp$$
3. $\underline{T}_{K3}$: übrige Basisvektoren von Kern($\underline{Q}_B$), die nicht in $\underline{T}_{K1}$ enthalten, d.h.
$$\text{Bild}\left([\underline{T}_{K1}, \underline{T}_{K3}]\right) = \text{Kern}(\underline{Q}_B) \quad \text{bzw.}$$
$$X_{\bar{S}\bar{B}} = \text{Bild}(\underline{T}_{K3}) = (\text{Bild}(\underline{Q}_S))^\perp \cap \text{Kern}\left(\underline{Q}_B\right)$$
4. $\underline{T}_{K4}$: weitere Vektoren, die $\underline{T}_{K1}$, $\underline{T}_{K2}$ und $\underline{T}_{K3}$ als Basisvektoren für $\mathbb{R}^n$ ergänzen:
$$X_{\bar{S}B} = \text{Bild}(\underline{T}_{K4}) = (\text{Bild}(\underline{Q}_S))^\perp \cap (\text{Kern}(\underline{Q}_B))^\perp$$

Struktur der Zerlegung: $\boxed{\text{s. BB RLM 2-29}}$
Beispiel: $\boxed{\text{s. BB RLM 2-30 bis 2-32}}$

2.5 Pole und Nullstellen bei MIMO-Systemen: Definition und Einfluss auf das Systemverhalten

wieder exemplarisch am zeitkontinuierlichen Fall behandelt. Pol-/Nullstellendefinition nicht unmittelbar klar.
Beispiele hierzu:

a) **SISO-System:**
$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \underline{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
Übertragungsverhalten: ablesbar an $G(s)$
$$G(s) = \frac{s^2 + 5s + 4}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{\cancel{(s+1)}(s+4)}{\cancel{(s+1)}(s+2)(s+3)}$$
also Kompensation von Zähler- und Nennernullstellen: Pole, Nullstellen?

b) **MIMO-System:**
$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$
Übertragungsverhalten: ablesbar an $\underline{G}(s)$
$$\underline{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2(s+1)}{s(s+2)} & \frac{1}{s+1} \\ 0 & \frac{2}{s+1} \end{bmatrix}$$
Pole? Nullstellen?

2.5.1 Systempole und invariante Nullstellen

Begriffsdefinition auf Basis der Systembeschreibung mittels der *Rosenbrockschen Systemmatrix* $\underline{P}(s)$ (s. 1.2.2):

$$\begin{bmatrix} -\underline{x}_0 \\ \underline{Y}(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{A} - s\,\underline{I} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix}}_{\underline{P}(s)} \cdot \begin{bmatrix} \underline{X}(s) \\ \underline{U}(s) \end{bmatrix}$$

1. **Systempole**
   Kenngrößen, die das autonome Systemverhalten (=Anfangswert-Übertragungsverhalten) bestimmen
   $$\underline{X}(s) = (s\,\underline{I} - A)^{-1}\,\underline{x}_0$$
   wegen $(s\,\underline{I} - \underline{A})^{-1} = \frac{[\text{Adjunkte von } (s\,\underline{I} - \underline{A})]}{\det(s\,\underline{I} - \underline{A})}$ gilt: Systempole von $\underline{X}(s)$ = Nullstellen von $\det(s\,\underline{I} - \underline{A})$

   $$\Downarrow \text{vgl. mit char. Gleichung } \det(\lambda\,\underline{I} - \underline{A}) = 0$$

   $$\boxed{\begin{array}{l} \text{Systempole} \mathrel{\hat{=}} \text{Eigenwerte des Systems (von } \underline{A}) \\ (\text{Anzahl der Systempole: } n) \end{array}}$$

   Eingangsbeispiele:

   a) Systempole: $\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = -3$
   b) Systempole: $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = -2$

   Besonders übersichtlich: *System in Modalform:*

   $$(s\,\underline{I} - \Lambda)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-\lambda_1} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \frac{1}{s-\lambda_n} \end{bmatrix}$$

2. **Invariante Nullstellen**
   Annahme: $\underline{p = q}$ (gleiche Anzahl von Ein- und Ausgängen)
   Definition:

   > **Invariante Nullstellen**
   > *Stellen η der komplexen Ebene, an denen $\underline{P}(s)$ den Höchstrang $n + p$ verliert, also Lösungen von*
   > $$\boxed{\det \underline{P}(\eta) = \underline{0}}$$

   Namensgebung: $\underbrace{\text{invariante}}_{(B)}\underbrace{\text{Nullstelle}}_{(A)}$

   (A) Annahme: $\eta \neq \lambda_i \quad \forall i$; kein Durchgriff $\Rightarrow \underline{D} = 0$

   $$\det \underline{P}(\eta) = \det \begin{bmatrix} \underline{A} - \eta\,\underline{I} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{0} \end{bmatrix} = \underbrace{\det \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} \\ -\underline{C}(\underline{A} - \eta\,\underline{I})^{-1} & \underline{I} \end{bmatrix}}_{1} \cdot \det \begin{bmatrix} \underline{A} - \eta\,\underline{I} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{0} \end{bmatrix}$$
   $$= \det \begin{bmatrix} \underline{A} - \eta\,\underline{I} & \underline{B} \\ \underline{0} & \underbrace{\underline{C}(\eta\,\underline{I} - \underline{A})^{-1}\,\underline{B}}_{\underline{G}(\eta)} \end{bmatrix}$$
   $$= \det(\underline{A} - \eta\,\underline{I}) \cdot \det \underline{G}(\eta)$$

   Speziell Eingrößenfall: $\underline{G}(\eta) = G(\eta)$

   $$\eta = \text{Nullstellen von } G(s) \tag{2.22}$$

(B) Invariante Nullstellen nicht veränderbar ($\hat{=}$invariant) bei

- regulären Zustandstransformationen
- Rückführungen ($\Rightarrow$Regler, s. später)
- Vorfiltereinsatz (s. später)

Anmerkungen

- allgemeine Bestimmung der invarianten Nullstellen (auch für $p \neq q$) aus der Transformation von $\underline{P}(s)$ auf sogenannte *Smith- Normalform*
- Anzahl der invarianten Nullstellen für $p = q$: $\begin{cases} n & \underline{D} \text{ regulär} \\ n-p & \underline{D} = \underline{0} \text{ und } \underline{C} \cdot \underline{B} \text{ regulär} \end{cases}$

frühere Beispiele:

a) $\det \underline{P}(\eta) = \det \begin{bmatrix} -1-\eta & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2-\eta & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3-\eta & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = (\eta+1)(\eta+4) = 0$

$\Rightarrow$ Invariante Nullstellen: $\eta_1 = -1, \quad \eta_2 = -4$

b) $\det \underline{P}(\eta) = \det \begin{bmatrix} -\eta & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1-\eta & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2-\eta & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -4(\eta+1) = 0$

$\Rightarrow$ Invariante Nullstellen: $\eta_1 = -1$

2.5.2 Übertragungspole und -nullstellen

Gegenseitige Beeinflussung von Systempolen und invarianten Nullstellen offensichtlich für SISO-Systeme
Beispiel a): Systempol $\lambda_1 = -1 \overset{!}{=}$ invariante Nullstellen η_1
$\Rightarrow$ in $G(s)$ kürzen sich λ_1 und η_1 $\hat{=}$ Kompensation im Übertragungsverhalten

daraus definierbar:

3. **Übertragungspole**
   = Systempole, die nicht durch invariante Nullstellen kompensiert werden können und damit im Übertragungsverhalten sichtbar sind ($\Rightarrow$ {Übertragungspole} $\subseteq$ {Systempole})

4. **Übertragungsnullstellen**
   = Invariante Nullstellen, die nicht durch Systempole kompensiert werden und ebenfalls im Übertragungsverhalten sichtbar sind ($\Rightarrow$ {Übertragungsnullstellen} $\subseteq$ {invariante Nullstellen})

Beispiel a):
Übertragungspole: $\lambda_{Ü1} = -2, \quad \lambda_{Ü2} = -3$
Übertragungsnullstellen: $\eta_{Ü} = -4$

Bedingungen für Kompensation im Übertragungsverhalten

(A) **Systempole und invariante Nullstellen liegen an gleicher Stelle der s- Ebene**
Problem: (2.22) bei MIMO-Systemen nicht ausreichend, da die Übertragungsnullstellen und Übertragungspole *nicht* direkt an $\underline{G}(s)$ ablesbar.
(zuvor Transformation auf sogenannte *Smith-McMillan-Form* erforderlich, kompliziert!)
Es gilt lediglich:

η gemeinsame m-fache Nullstelle *aller* Elemente von k Zeilen ($q \leq p$) oder Spalten ($q \geq p$) von $\underline{G}(s)$ $\Rightarrow \eta$ mindestens $k \cdot m$-fache Übertragungsnullstelle

Beispiel b): Invariante Nullstelle $\eta_1 = -1 =$ Systempol λ_2, aber η_1 ist eine Übertragungsnullstelle! (aber an $\underline{G}(s)$ nicht ablesbar.)

zusätzliche Bedingung für Kompensation aus *SISO-Fall in Modalform* $\boxed{\text{s. BB RLM 2-2}}$

$$\Rightarrow \underline{G}(s) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{c_\nu^* b_\nu^*}{s - \lambda_\nu}$$

also: Systempole λ_ν nur dann in $\underline{G}(s)$ enthalten ($\Rightarrow \lambda_\nu$ auch Übertragungspol!), wenn $c_\nu^* b_\nu^* \neq 0$, d.h. λ_ν *steuer- und beobachtbarer Eigenwert.*

weitere Kompensationsbedingung:

(B) **Der an gleicher Stelle wie die invarianten Nullstellen liegende Systempol ist ein nicht steuerbarer und/oder nicht beobachtbarer Eigenwert**
plausibel aus Berechnung der invarianten Nullstellen aus det $\underline{P}(\eta) = 0$
$\Rightarrow \underline{P}(\eta)$ hat Rangverlust, d.h.

$$\text{rg} \begin{bmatrix} \underline{A} - \eta \underline{I} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{0} \end{bmatrix} < n + p \tag{2.23}$$

also: für (2.23) mit $\eta = \lambda$ (vgl. (A)) zwei Möglichkeiten:

- rg $\begin{bmatrix} \underline{A} - \lambda \underline{I} & \underline{B} \end{bmatrix} < n$: λ nicht steuerbar (Hautus) (Zeilenrangverlust)
- rg $\begin{bmatrix} \underline{A} - \lambda \underline{I} \\ \underline{C} \end{bmatrix} < n$: λ nicht beobachtbar (Hautus) (Spaltenrangverlust)

Beispiel b):

- rg $\begin{bmatrix} \underline{A} - \lambda_2 \underline{I} & \underline{B} \end{bmatrix} = \text{rg} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 3 = n$

  $\Rightarrow \lambda_2$ steuerbar
- rg $\begin{bmatrix} \underline{A} - \lambda_2 \underline{I} \\ \underline{C} \end{bmatrix} = \text{rg} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 3 = n$

  $\Rightarrow \lambda_2$ beobachtbar

$\Rightarrow$ keine Kompensation
$\Rightarrow$ Übertragungspole = Systempole, Übertragungsnullstellen = invariante Nullstellen

Anmerkungen zur Pol-/Nullstellenthematik

- System vollständig steuer- und beobachtbar
  $\Leftrightarrow$ {Systempole} = {Übertragungspole} und
  {invariante Nullstellen} = {Übertragungsnullstellen}
- bei Kompensation von Systempolen λ und invarianten Nullstellen η: falls λ nicht steuer-/beobachtbar, so heißt η Eingangs-/Ausgangs-*Abkopplungsnullstelle* ("decoupling zero")
- Pol-/Nullstellenkonfiguration hat große Konsequenzen für die Reglersynthese (Polverschiebung, s. später): Übertragungspole und Übertragungsnullstellen gezielt beeinflussbar!

Kapitel 3

Regelung linearer zeitinvarianter Mehrgrößensysteme

3.1 Regelung bei Ein-/Ausgangsnullstellen im Bildbereich

erneut nur zeitkontinuierlicher Fall betrachtet

Ausgangspunkt: I/O-Modelle mit gleich vielen Ein-/Ausgangsgrößen $p = q$

$$1.1 \;\Rightarrow \underline{Y}(s) = \underline{G}(s) \cdot \underline{U}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \cdots & G_{1p}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{p1}(s) & \cdots & G_{pp}(s) \end{bmatrix} \cdot \underline{U}(s)$$

1. Ansatz zur Reglersynthese: Für jeden der Hauptübertragungspfade $Y_i(s) = G_{ii}(s)U_i(s)$ separater Reglerentwurf wie bei SISO-Systemen unter Vernachlässigung der Koppelstrecken $G_{ij}(s)$ bzw. $G_{ji}(s)$

aber: aufgrund der vorhandenen Wechselwirkungen trotz dann stabiler Hauptpfade instabiles Verhalten (Koppelschwingungen) möglich.

daher besser: Entwurf mit

- **Reihen- bzw. Serienentkopplung** (exakte Entkopplung)
  (Bocksenboom, Hood 1950)
- **stationärer Entkopplung** (unvollständige Entkopplung)

3.1.1 Reihen- bzw. Serienentkopplung

Gegeben: Strecke (P-Struktur) $\underline{Y}(s) = \underline{G}(s)\underline{U}(s)$
Gesucht: Regler $\underline{U}(s) = \underline{R}(s)\underbrace{\underline{E}(s)}_{\text{Regeldifferenz}}$

$$\boxed{\Rightarrow \underline{Y}(s) = \underline{G}(s)\,\underline{R}(s)\,\underline{E}(s)}$$

Entwurfsforderung: Entkopplung durch $\underline{R}(s)$ und separate Regelung der i entkoppelten Pfade mittels separater $G_{Ki}(s)$, d.h.

$$\boxed{\underline{G}(s)\,\underline{R}(s) \overset{!}{\equiv} \underline{G}_K(s)\,\underline{G}_D(s)}$$

mit $\underline{G}_D(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & G_{pp}(s) \end{bmatrix}, \quad \underline{G}_K(s) = \begin{bmatrix} G_{K1}(s) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & G_{Kp} \end{bmatrix}$

$$\boxed{\Rightarrow \underline{R}(s) = \underline{G}^{-1}(s)\,\underline{G}_D(s)\,\underline{G}_K(s) \quad \textit{Entkopplungsregler zur exakten Entkopplung}}$$

Beispiel: *Zweifachregelung* s. BB RLM 3-1
anhand der Struktur ersichtlich: folgende Aufgaben zu lösen:

- **Auftrennung der Signalpfade zwischen e_1 und y_2 sowie zwischen e_2 und y_1**

$$\underbrace{(R_{11} \cdot G_{21} + R_{21} \cdot G_{22})}_{\stackrel{!}{=}0,\text{ da } e_1 \text{ beliebig}} \cdot E_1 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\boxed{\Rightarrow R_{21}(s) = -\frac{G_{21}(s)}{G_{22}(s)} R_{11}(s)} \tag{3.1}$$

analog:

$$\boxed{R_{12}(s) = -\frac{G_{12}(s)}{G_{11}(s)} R_{22}(s)} \tag{3.2}$$

- **Regelung der Hauptsignalpfade zwischen e_1 und y_1, sowie e_2 und y_2**
mit (3.1) ergibt sich

$$\begin{aligned} G_{11}(s)R_{11}(s) - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s)}{G_{22}(s)} \cdot R_{11}(s) &\stackrel{!}{=} G_{K1}(s)G_{11}(s) \\ R_{11}(s)\left(G_{11}(s) - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s)}{G_{22}(s)}\right) &= G_{K1}(s)G_{11}(s) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{bzw.} \quad R_{11}(s) = F(s) \cdot G_{K1}(s)} \tag{3.3}$$

$$\boxed{\text{mit} \quad F(s) = \frac{1}{1 - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s)}{G_{11}(s)G_{22}(s)}}} \tag{3.4}$$

analog:

$$\boxed{R_{22}(s) = F(s) \cdot G_{K2}(s)} \tag{3.5}$$

Bezeichnungsweise:

- (3.1), (3.2): *Entkopplungsregler*
- (3.3), (3.5) mit (3.4): *Hauptregler*

Struktur: s. BB RLM 3-2 oben

Probleme bei exakter Entkopplung:

- gerätetechnische Realisierung kann problematisch sein bei
  - möglichen Streckentotzeiten $e^{-T_t s}$
  - Regler-Übertragungsfunktionen mit Zählergrad > Nennergrad (Störwelligkeit wegen differenzierendem Charakter)
- sehr aufwändig bei Strecken höherer Ordnung oder $p > 2$

⇒ Kompromiss: *stationäre Entkopplung*

3.1.2 Stationäre Entkopplung

Prinzip: Entkopplung nur im stationären Fall ($t \to \infty$ bzw. $s \to 0$, also für $\underline{G}(0)$), dann separate Regelung mit $G_{Ki}(s)$

$$\Rightarrow \underline{G}(0) \cdot \underline{R}(s) = \underline{G}_K(s) \cdot \underline{G}_D(0)$$

$$\boxed{\text{bzw.} \quad \underline{R}(s) = \underbrace{\underline{G}^{-1}(0)\,\underline{G}_D(0)}_{\substack{\text{konstante Matrizen} \\ \Rightarrow \text{Probleme von exakter} \\ \text{Entkopplung vermieden.}}} \cdot \underline{G}_K(s)}$$

Beispiel: *Zweifachentkopplung* s. BB RLM 3-2 unten
Gleichungen (3.1) - (3.5) mit$G_{ij}(0) \Rightarrow F(0)$
$\Rightarrow$ Entkopplungsregler: P-Glieder, Hauptregler nur mit Konstanten multipliziert.
Falls dynamisches Verhalten unbefriedigend:
Verbesserte stationäre Entkopplung möglich:

- Hauptregler (Beispiel: (3.3), (3.5)) wie bei stationärer Entkopplung
- Entkopplungsregler näher an exakter Entkopplung gewählt, indem man durch einfache Übertragungsfunktionen approximiert.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
(3.1): \quad & R_{21} = -F(0)\frac{G_{21}(s)}{G_{22}(s)} \cdot G_{K1}(s) \\
(3.2): \quad & R_{12} = -F(0)\underbrace{\frac{G_{12}(s)}{G_{11}(s)}}_{\substack{\text{Approximation durch einfache} \\ \text{Übertragungsfunktionen, z.B.} \\ \text{PT}_1\text{-Glieder } \left(\frac{v}{s}\frac{1+T_1 s}{1+T_2 s}\right)}} \cdot G_{K2}(s)
\end{aligned}
$$

3.2 Regelung bei zeitkontinuierlichen Zustandsmodellen

3.2.1 Grundansatz und Struktur der Regelung: Zustandsrückführung und Vorfilter

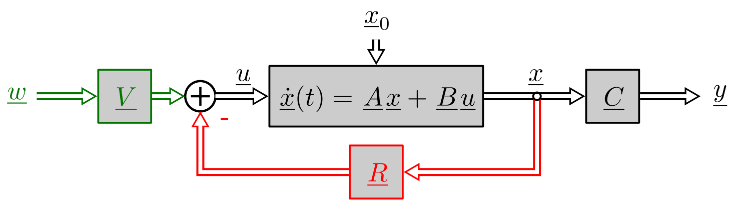
Ausgangspunkt: System in Zustandsdarstellung (=(Regel-)Strecke)

$$
\begin{aligned}
\dot{\underline{x}} &= \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} \\
\underline{y} &= \underline{C}\,\underline{x} + \underbrace{\underline{D}}_{=\underline{0}}\,\underline{u}
\end{aligned}
$$

Annahmen:

- System vollständig steuerbar
- Zustandsvektor $\underline{x}(t)$ messbar (oder zumindest muss das System vollständig beobachtbar sein, dann ist $\underline{x}(t)$ über *Beobachter* (s. später) bestimmbar.)

Struktur:



Ansatz für die Regelung zweigeteilt: Kombination aus

(I) **Zustandsrückführung**

$$\boxed{\underline{u}_1(t) = -\underline{R}\,\underline{x}(t), \quad \underset{(p,n)}{\underline{R}}: \textit{Reglermatrix} \text{ (konstant)}}$$

dient zur *Beseitigung beliebiger Anfangsauslenkungen* (Anfangsstörungen) $\underline{x}_0$, d.h. im geregelten System

$$\dot{\underline{x}} = (\underline{A} - \underline{B}\,\underline{R})\,\underline{x}$$

muss $\underline{R}$ so gewählt werden, dass *Regelkreis stabil*

$$\Rightarrow \underline{x}(t) \to \underline{0} \text{ für } \underline{t} \to \infty$$

(II) **Führungsgrößenformung**

$$\boxed{\underline{u}_2(t) = \underline{V} \cdot \underline{w}(t), \qquad \begin{aligned} \underset{(p,q)}{\underline{V}} &: \textit{Vorfilter} \text{ (konstant)} \\ \underset{(q,1)}{\underline{w}(t)} &: \textit{Führungsgrößen} \end{aligned}}$$

dient zur *Erzielung eines gewünschten Führungsverhaltens der Ausgangsgrößen* (=Regelgrößen) $\underline{y}(t)$ bezüglich $\underline{w}(t)$, d.h. konkret muss im geregelten System $\underline{V}$ so gewählt werden, dass der *Regelkreis stationär genau* ist.

$$\Rightarrow \underline{y} \to \underline{w}(t) \text{ für } t \to \infty$$

Insgesamt:

$$\boxed{\underline{u}(t) = -\underline{R}\,\underline{x}(t) + \underline{V}\,\underline{w}(t) \quad \textit{Zustandsregelung}}$$

Kennzeichen:

- regelt lediglich Anfangsstörungen aus, aber keine Dauerstörungen
- im Gegensatz zur klassischen Regelung findet kein Soll-/Istwert-Vergleich statt.

zunächst Fokus auf Vorfilter:
Bestimmung von $\underline{V}$ für stationäre Genauigkeit, falls $\underline{R}$ bereits stabil entworfen ist: stationärer Zustand:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}_\infty &\overset{!}{=} \underline{0} = (\underline{A} - \underline{B}\,\underline{R})\,\underline{x}_\infty + \underline{B}\,\underline{V}\,\underline{w} \\ \Rightarrow \underline{x}_\infty &= \underbrace{(\underline{B}\,\underline{R} - \underline{A})^{-1}}_{\substack{\text{existiert, da im stabilen Regelkreis kein Eigenwert} \\ \text{in } \lambda = 0 \text{ (da sonst } \det(s\,\underline{I} - (\underline{A} - \underline{B}\,\underline{R}))|_{s=0} = 0)}} \underline{B}\,\underline{V}\,\underline{w} \end{aligned}$$

außerdem

$$\begin{aligned} \underline{y}_\infty &= \underline{C}\,\underline{x}_\infty \\ &= \underline{C}(\underline{B}\,\underline{R} - \underline{A})^{-1}\,\underline{B}\,\underline{V}\,\underline{w} \overset{!}{=} \underline{w} \text{ (für stat. Genauigkeit)} \\ &\Downarrow_{\underline{w} \text{ beliebig}} \\ \underline{C}(\underline{B}\,\underline{R} - \underline{A})^{-1}\,\underline{B}\,\underline{V} &= \underline{I} \end{aligned}$$

bzw.

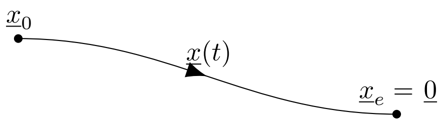
$$\boxed{\underline{V} = \left[\underline{C}(\underline{B}\,\underline{R} - \underline{A})^{-1}\,\underline{B}\right]^{-1} \qquad \textit{Vorfilter für stat. Genauigkeit}}$$

Spezialfall: SISO-System

$$\boxed{v = \left[\underline{c}^T(\underline{b}\,\underline{r}^T - \underline{A})^{-1}\,\underline{b}\right]^{-1}}$$

3.2.2 Grundprinzip des Entwurfs der Zustandsrückführung: Polvorgabe

Hauptaufgabe bei Zustandsregelung: Entwurf von I): $\underline{u} = -\underline{R}\,\underline{x}$ so, dass *Regelkreis (RK) stabil*



Zusätzliche qualitative Anforderungen (z.T. gegensätzlich):

1. Übergang hinreichend schnell
2. Übergang hinreichend gedämpft
3. Stellgrößenamplituden nicht zu groß

Für Stabilität: Führungs-/Ausgangsverhalten bedeutungslos. ⇒ Gleichung des Regelkreises:

$$\underline{\dot{x}} = \underbrace{(\underline{A} - \underline{B}\,\underline{R})}_{\text{Dynamikmatrix des RKes}} \cdot \underline{x}$$

s. früher: maßgeblichen Einfluss auf die Dynamik des Regelkreises haben die Eigenwerte (EW) $\lambda_{R1}, \ldots, \lambda_{Rn}$ von $(\underline{A} - \underline{B}\,\underline{R})$

⇒ **Entwurfsprinzip:**
Vorgabe gewünschter Eigenwerte mittels $\underline{R} \stackrel{\triangle}{=}$ *Eigenwert/(Pol)- Vorgabe(Verschiebung)*; ("pole assignment, pole shifting")

Dazu zwei Schritte erforderlich:

1. **geeignete Wahl der Eigenwerte** $\lambda_{R1}, \ldots, \lambda_{Rn}$
   Regelkreis stabil ⇒ λ_{Ri} links der j-Achse in s-Ebene (nicht zu weit links, sonst zu hohe Stellauslenkungen)
   Zumeist: *rechnergestützte Wahl* (z.B. Simulationstools wie MATLAB/SIMULINK)

2. **Berechnung des erforderlichen Reglers** $\underline{R}$
   Entwurf über Vorgabe des char. Polynoms des Regelkreises:

$$\det\big[s\underline{I} - (\underline{A} - \underline{B}\,\underline{R})\big] \stackrel{!}{=} \prod_{\nu=1}^{n} (s - \underbrace{\lambda_{R\nu}}_{\text{vorgeben}})$$

$$\text{also: } s^n + a_{n-1}(\underline{R})s^{n-1} + \cdots + a_0(\underline{R}) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \cdots + p_0$$

   Koeffizientenvergleich:

$$\left.\begin{aligned} a_{n-1}(\underline{R}) &= p_{n-1} \\ &\vdots \\ a_0(\underline{R}) &= p_0 \end{aligned}\right\} \textit{Synthesegleichungen } (n \text{ Gleichungen für } p \cdot n \text{ Elemente von } \underline{R})$$

   Lösung der Synthesegleichungen:

   $p = 1$ **(SISO-System):** Synthesegleichungen linear in den Elementen von $\underline{R}$. Eindeutige Lösung genau dann, wenn Strecke vollständig steuerbar.

   $p > 1$ **(MIMO-System):** Synthesegleichungen nichtlinear in den Elementen von $\underline{R}$. Unterbestimmt, d.h. unendlich viele Lösungen genau dann, wenn die Strecke vollständig steuerbar ist (WONHAM 1967)

Anmerkung: Daraus folgt alternative Steuerbarkeitsdefinition (ohne Herleitung):

> Das System
>
> $$\underline{\dot{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}$$
> $$\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x} + \underline{D}\,\underline{u}$$
>
> ist genau dann vollständig steuerbar, wenn mittels einer Zustandsrückführung $\underline{u} = -\underline{R}\,\underline{x}$ eine beliebige Polkonfiguration im Regelkreis erzielt werden kann.

3.2.3 Polvorgabe bei SISO-Systemen nach Ackermann

Bestimmung von $\underline{R}$ bei vollständig steuerbaren Systemen durch die *Ackermann- Formel* (1971): s. BB RLM 3-3, 3-4

Beispiel: Regelung einer Verladebrücke (*Systemmodell* s. BB RLM 3-5)

Herleitung des Modells: Überlagerte Bewegungen:

- horizontal:
  - Katze: $m_K \cdot \ddot{s}_K = F + S \cdot \sin\vartheta$ (a)
  - Greifer: $m_G \cdot \ddot{s}_G = -S \cdot \sin\vartheta$ (b)

  Zusammen:

$$m_K \cdot \ddot{s}_K = F - m_G \cdot \ddot{s}_G$$

$$\Downarrow_{s_G = s_K + l\cdot\sin\vartheta \Rightarrow \ddot{s}_G = \ddot{s}_K + l\ddot{\vartheta}\cos\vartheta - l\dot{\vartheta}^2\sin\vartheta}$$

$$\boxed{(m_K + m_G)\ddot{s}_K + m_G l(\ddot{\vartheta}\cos\vartheta - \dot{\vartheta}^2\sin\vartheta) = F} \tag{3.6}$$

- vertikal
  Greifer: $m_G\ddot{z}_G = -S\cos\vartheta + m_G \cdot g$ mit

$$\begin{aligned} z_G &= l \cdot \cos\vartheta \\ \ddot{z}_G &= -l\ddot{\vartheta}\sin\vartheta - l\dot{\vartheta}\cos\vartheta \\ S &= -\frac{m_G}{\sin\vartheta}\ddot{s}_G \end{aligned}$$

  und den horizontalen Gleichungen ergibt sich:

$$\boxed{\ddot{s}_K\cos\vartheta + l\cdot\ddot{\vartheta} + g\cdot\sin\vartheta = 0} \tag{3.7}$$

(3.6), (3.7): nichtlineare DGLn, Appriximation für $|\vartheta|$, $|\dot{\vartheta}|$ klein:

$$\sin\vartheta \approx \vartheta, \quad \cos\vartheta \approx 1, \quad \dot{\vartheta}^2\sin\vartheta \approx 0$$

Lineare DGLn:

$$(m_K + m_G)\cdot\ddot{s}_K + m_G l\ddot{\vartheta} = F \tag{3.8}$$

$$\ddot{s}_K + l\ddot{\vartheta} + g\cdot\vartheta = 0 \tag{3.9}$$

jeweils Auflösen von (3.8) nach $\ddot{s}_K$ bzw. $\ddot{\vartheta}$ und einsetzen in (3.9):

$$\begin{aligned} \ddot{\vartheta} &= -\frac{m_K + m_G}{m_K}\cdot\frac{g}{l}\vartheta - \frac{1}{m_K l}\cdot F \\ \ddot{s}_K &= \frac{m_G}{m_K}\cdot g\cdot\vartheta + \frac{1}{m_K}\cdot F \end{aligned}$$

Wahl der Eingangsgröße $u = F$ und der Zustandsgrößen wie auf s. BB RLM 3-5, sowie der Ausgangsgröße $y = s_K$

$$\begin{array}{ll} x_1 = s_K & \dot{x}_1 = x_2 \\ x_2 = \dot{s}_K & \dot{x}_2 = \frac{m_G}{m_K}\cdot g\cdot x_3 + \frac{1}{m_K}\cdot u \\ x_3 = \vartheta & \dot{x}_3 = x_4 \\ x_4 = \dot{\vartheta} & \dot{x}_4 = -\frac{m_K+m_G}{m_K}\cdot\frac{g}{l}\cdot x_3 - \frac{1}{m_K\cdot l}\cdot u \\ y = x_1 & \end{array}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\Rightarrow \underline{\dot{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{b}u \\ &\Rightarrow \underline{y} = \underline{c}^T\,\underline{x} \end{aligned}}$$

Berechnung der Regelung und Simulationsergebnisse: s. BB RLM 3-6, 3-7

Lösungen für MIMO-Fall:

- Modale Regelung (speziell)
- Entkopplungsregelung (speziell)
- Vollständige modale Synthese (allgemein)

3.2.4 Modale Regelung

(ROSENBROCK, 1962)
Grundidee: einfacher Entwurf durch vorherige Transformation des Systems auf Modal(=Diagonal)-form (s. 1.2.4), also:

$$\begin{aligned}
&\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} \\
&\quad \Downarrow \text{Diagonal-Trafo (Voraussetzung: einfache Eigenwerte)} \\
&\dot{\underline{x}}^* = \underline{\Lambda}\,\underline{x}^* + \underline{B}^*\,\underline{u} \\
&\text{mit} \quad \underline{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \underline{B}^* = \underline{V}^{-1}\,\underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{w}_1^T\,\underline{B} \\ \vdots \\ \underline{w}_n^T\,\underline{B} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Zeilenschreibweise: $\dot{x}_i^* = \lambda_i x_i^* + \underbrace{\underline{w}_i^T\,\underline{B}\,\underline{u}}_{=u_i^*=b_{i1}^* u_1+\cdots+b_{ip}^* u_p}, \quad (i = 1, \ldots, n)$

Regleransatz: $u_i^* = -r_i^* x_i^*, \quad (i = 1, \ldots, n)$

$$\Rightarrow \dot{x}_i^* = \underbrace{(\lambda_i - r_i^*)}_{\overset{!}{=}\lambda_{Ri}}\, x_i^*, \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Dabei: λ_{Ri} gewählte Eigenwerte des Regelkreises

$\Rightarrow r_i^* = \lambda_i - \lambda_{Ri}$ bzw.

$$\boxed{u_i^* = -(\lambda_i - \lambda_{Ri}) \cdot x_i^*, \quad (i = 1, \ldots, n)}$$

aber: Stellgrößen $\underline{u}$ gesucht, nicht u_i^*

$$\text{nun gilt: } u_i^* = \underline{w}_i^T\,\underline{B}\,\underline{u}, \quad (i = 1, \ldots, n)$$

$$\text{also: } \begin{bmatrix} u_1^* \\ \vdots \\ u_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^* = \underline{w}_1^T\,\underline{B}\,\underline{u} \\ \vdots \\ u_n^* = \underline{w}_n^T\,\underline{B}\,\underline{u} \end{bmatrix}$$

Also n lineare Gleichungen für $u_1, \ldots, u_p$, da normalerweise $p < n$: *überbestimmtes Gleichungssystem* (i.A. nicht lösbar)
Problemlösung: Vorgabe von nur p Eigenwerten, dazu Analyse, welche Eigenwerte *dominant* ($\hat{=}$ maßgeblich für das dynamische Verhalten) und *Umsortierung der Zustandsgrößen* so, dass gerade die *ersten p Eigenwerte dominant* sind.

$\Rightarrow$ Gleichungssystem für die ersten u_i^* $(i = 1, \ldots, p)$

$$\begin{bmatrix} u_1^* \\ \vdots \\ u_p^* \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{w}_1^T\,\underline{B} \\ \vdots \\ \underline{w}_p^T\,\underline{B} \end{bmatrix}}_{=:\underline{B}_p^*} \underline{u}, \qquad \underbrace{\underline{B}_p^*}_{(p,p)} \hat{=} \text{ erste } p \text{ Zeilen von } \underline{B}^* = \underline{V}^{-1}\,\underline{B}$$

$$\Rightarrow \underline{u} = \left(\underline{B}_p^*\right)^{-1} \begin{bmatrix} u_1^* \\ \vdots \\ u_p^* \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{bmatrix} u_1^* \\ \vdots \\ u_p^* \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_{R1} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_p - \lambda_{Rp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_p^* \end{bmatrix}$$

nun gilt

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_p^* \end{bmatrix} = \underline{w}_p \, \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{w}_1^T \\ \vdots \\ \underline{w}_p^T \end{bmatrix} \underline{x} \quad (\text{erste } p \text{ Zeilen von } \underline{x}^* = \underline{V}^{-1} \underline{x} = \underline{w} \, \underline{x})$$

$\Rightarrow$ insgesamt *Modale Regelung*

$$\underline{u} = - \underbrace{\left(\underline{B}_p^*\right)^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_{R1} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_p - \lambda_{Rp} \end{bmatrix}}_{\underline{R} \text{ verschiebt } \lambda_i \to \lambda_{Ri}, \quad (i=1,\ldots,p)} \cdot \underline{w}_p \, \underline{x}$$

$$\left(\text{mit: } \underline{B}_p^* = \begin{bmatrix} \underline{w}_1^T \underline{B} \\ \vdots \\ \underline{w}_p^T \underline{B} \end{bmatrix}, \quad \underline{w}_p = \begin{bmatrix} \underline{w}_1^T \\ \vdots \\ \underline{w}_p^T \end{bmatrix} \right)$$

$$\boxed{\underline{R} = \begin{bmatrix} \underline{w}_1^T \underline{B} \\ \vdots \\ \underline{w}_p^T \underline{B} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_{R1} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_p - \lambda_{Rp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{w}_1^T \\ \vdots \\ \underline{w}_p^T \end{bmatrix}} \tag{3.10}$$

Anmerkungen:

1. **Existenz von $\left(\underline{B}_p^*\right)^{-1}$ erforderlich**
   $\Rightarrow$ $\underline{B}_p^*$ muss regulär sein, d.h. $\underline{w}_1^T \underline{B}, \ldots, \underline{w}_p^T \underline{B}$ linear unabhängig. Nun gilt

   $$\text{rg} \underbrace{\underline{B}}_{(n,p)} = p \quad (\text{Höchstrang wegen } p \leq n)$$

   $$\Rightarrow \text{rg } \underline{B}^* = \text{rg}(\underline{V}^{-1} \underline{B}) = p$$

   Also: $\underline{B}^*$ enthält p linear unabhängige Zeilen
   $\Rightarrow$ ggf. Umordnung der Zustände so, dass gerade die ersten p Zeilen linear unabhängig (u.U. bestimmte Eigenwerte damit nicht verschiebbar, wenn sie nicht unter den ersten p sind.)

2. **Die restlichen $n-p$ Eigenwerte $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n$ bleiben durch $\underline{R}$ unbeeinflusst.** (ohne Beweis)

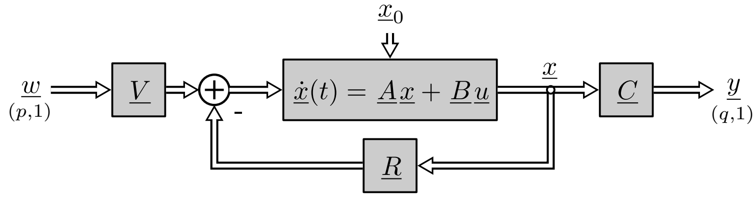
3. **Verschiebung von mehr als p Eigenwerten durch mehrfache Anwendung der modalen Regelung** s. BB RLM 3-8
   Zahlenbeispiel: s. BB RLM 3-9 bis 3-12

Anwendungsbeispiel: Modale Regelung eines 3-Tank-Systems s. BB RLM 3-13 bis 3-17

3.2.5 Entkopplungsregelung

(Falb-Wolovich, 1967)

Ausgangspunkt: Zustands-Regelkreis



Voraussetzung: $p = q$ (gleich viele Eingangs- wie Ausgangs(=Regel)-größen)

Entwurfsansatz:
Gemeinsamer Entwurf einer Zustandsrückführung $\underline{R}$ **und** eines Vorfilters $\underline{V}$ so, dass

- jede Regelgröße $y_i(t)$ ihrer Führungsgröße $w_i(t)$ $(i = 1, \dots, p)$ möglichst gut folgt ($\Rightarrow$ *Führungsverhalten*)
- jedes $y_i(t)$ auch nur durch das zugehörige $w_i(t)$ beeinflusst wird ($\Rightarrow$ *Entkopplung*)

Herleitung der Regelung:

1. **Analyse der Abhängigkeiten zwischen den Systemein- und -ausgangsgrößen**
   Resultat: für jedes $y_i(t)$ $(i = 1, \dots, p)$ eine DGL abhängig von $\underline{w}$, d.h. verkoppelte Differentialgleichungen.
2. **Syntheseschritte:**
   a) Bestimmung der ersten Entwurfsparameter in $\underline{R}$ und $\underline{V}$ zur *Entkopplung* der p Differentialgleichungen
   b) Wahl der dann noch freien Parameter zur *Vorgabe einer gewünschten Dynamik*

1. **Charakterisierung des Systemübertragungsverhaltens mittels der Differenzordnung Ausgangsgleichung** (ohne Durchgriff):

$$\underset{(p,1)}{\underline{y}} = \underline{C}\,\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{c}_1^T \\ \vdots \\ \underline{c}_p^T \end{bmatrix} \underline{x} \quad \text{bzw. } y_i = \underline{c}_i^T\,\underline{x} \quad (i = 1, \dots, p) \tag{3.11}$$

Mögliche Abhängigkeit von $\underline{u}$ bzw. $\underline{w}$ erst bei Differentiation von (3.11)

$$\begin{aligned} \dot{y}_i = \underline{c}_i^T\,\dot{\underline{x}} &= \underline{c}_i^T\,\underline{A}\,\underline{x} + \underline{c}_i^T\,\underline{B}\,\underline{u} \\ &\Downarrow \text{falls } \underline{c}_i^T\,\underline{B} = \underline{0}^T \\ &= \underline{c}_i^T\,\underline{A}\,\underline{x} \Rightarrow \text{ keine direkte Abhängigkeit von } \underline{u} \end{aligned}$$

erneute Differentiation:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_i = \underline{c}_i^T\,\underline{A}\,\dot{\underline{x}} &= \underline{c}_i^T\,\underline{A}^2\,\underline{x} + \underline{c}_i^T\,\underline{A}\,\underline{B}\,\underline{u} \\ &\Downarrow \text{ falls } \underline{c}_i^T\,\underline{A}\,\underline{B} = \underline{0}^T \\ &= \underline{c}_i^T\,\underline{A}^2\,\underline{x} \Rightarrow \text{ wieder keine direkte Abhängigkeit von } \underline{u} \\ &\vdots \;\; \text{wiederholte Differentiation} \\ \overset{(\delta_i)}{y_i} &= \underline{c}_i^T\,\underline{A}^{\delta_i}\,\underline{x} + \underbrace{\underline{c}_i^T\,\underline{A}^{\delta_i - 1}\,\underline{B}}_{\neq \underline{0}^T}\,\underline{u} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ **Definition:**

Differenzordnung δ_i (der Strecke bezüglich y_i)
:= *niedrigste Ableitung von y_i, auf die die Eingangsgröße $\underline{u}$ direkt einwirkt.*

ermittelbar aus Berechnung der $\underline{c}_i^T\,\underline{A}^\nu\,\underline{B}$ $\quad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$

$$\begin{aligned} \underline{c}_i^T\,\underline{B} &= \underline{0}^T \\ \underline{c}_i^T\,\underline{A}\,\underline{B} &= \underline{0}^T \\ &\vdots \\ \underline{c}_i^T\,\underline{A}^{\delta_i - 2}\,\underline{B} &= \underline{0}^T \\ \underline{c}_i^T\,\underline{A}^{\delta_i - 1}\,\underline{B} &\neq \underline{0}^T \end{aligned}$$

damit gilt für y_i, $(i = 1, \ldots, p)$:

$$\overset{(\nu)}{y_i} = \underline{c}_i^T \, \underline{A}^\nu \, \underline{x} \quad (\nu = 0, \ldots, \delta_i - 1)$$

$$\text{und} \quad \overset{(\delta_i)}{y_i} = \underline{c}_i^T \, \underline{A}^{\delta_i} \, \underline{x} + \underline{c}_i^T \, \underline{A}^{\delta_i - 1} \, \underline{B} \, \underline{u}$$

$$\Downarrow \text{Regelungsansatz: } \underline{u} = -\underline{R}\,\underline{x} + \underline{V}\,\underline{w}$$

$$\boxed{\overset{(\delta_i)}{y_i} = \left(\underline{c}_i^T \, \underline{A}^{\delta_i} - \underline{c}_i^T \, \underline{A}^{\delta_i - 1} \, \underline{B}\,\underline{R} \right) \underline{x} + \underline{c}_i^T \, \underline{A}^{\delta_i - 1} \, \underline{B}\,\underline{V}\,\underline{w}} \tag{3.12}$$

2. **Reglersynthese mit Entkopplung und Dynamikvorgabe**

Syntheseschritte :

a) **Entkopplung der p Differentialgleichungen** (3.12)

1. Ziel: jedes y_i soll nur durch ein jeweils zugehöriges w_i beeinflusst werden.

$$(3.12) \Rightarrow \underline{c}_i^T \, \underline{A}^{\delta_i - 1} \, \underline{B}\,\underline{V}\,\underline{w} \overset{!}{=} K_i w_i \quad (K_i \text{ beliebig, konstant})$$

$$= [0, \ldots, K_i, \ldots, 0] \cdot \underline{w}$$

$$\Downarrow \underline{w} \text{ beliebig}$$

$$\underline{c}_i^T \, \underline{A}^{\delta_i - 1} \, \underline{B}\,\underline{V} = [0, \ldots, K_i, \ldots, 0] \quad (i = 1 \ldots, p)$$

$$\text{bzw.} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{c}_1^T \, \underline{A}^{\delta_1 - 1} \, \underline{B} \\ \vdots \\ \underline{c}_p^T \, \underline{A}^{\delta_p - 1} \, \underline{B} \end{bmatrix}}_{=:\underline{D}^*} \underline{V} = \underbrace{\begin{bmatrix} K_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & K_p \end{bmatrix}}_{=:\underline{K}}$$

$$\boxed{\Rightarrow \underline{V} = (\underline{D}^*)^{-1} \underline{K}, \quad \textit{Entkopplungsvorfilter}} \tag{3.13}$$

(3.13) berechenbar, sofern die *Entkoppelbarkeitsbedingung*

$$\boxed{\det \underline{D}^* \neq 0} \tag{3.14}$$

erfüllt ist.
aber: durch (3.13) noch keine Entkopplung in (3.12), da noch Einfluss von $\underline{x}$ vorhanden:

$$\overset{(\delta_i)}{y_i} = \left(\underline{c}_i^T \, \underline{A}^{\delta_i} - \underline{c}_i^T \, \underline{A}^{\delta_i - 1} \, \underline{B}\,\underline{R} \right) \underline{x} + K_i w_i \quad (i = 1, \ldots, p)$$

2. Ziel: jedes y_i nur von sich selbst und von w_i abhängig.

$$\Rightarrow (\underline{c}_i^T \, \underline{A}^{\delta_i} - \underline{c}_i^T \, \underline{A}^{\delta_i - 1} \, \underline{B}\,\underline{R})\,\underline{x} \overset{!}{=} -\sum_{\nu=0}^{\delta_i - 1} q_{i\nu} \underbrace{\overset{(\nu)}{y_i}}_{= \underline{c}_i^T \, \underline{A}^\nu \, \underline{x}} \quad (q_{i\nu} \text{ beliebig, konstant})$$

$$\Downarrow \underline{x} \text{ beliebig}$$

$$\underline{c}_i^T \, \underline{A}^{\delta_i - 1} \, \underline{B}\,\underline{R} = \underline{c}_i^T \, \underline{A}^{\delta_i} + \sum_{\nu=0}^{\delta_i - 1} q_{i\nu} \, \underline{c}_i^T \, \underline{A}^\nu \quad (i = 1, \ldots, p)$$

$$\text{bzw.} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{c}_1^T \, \underline{A}^{\delta_1 - 1} \, \underline{B} \\ \vdots \\ \underline{c}_p^T \, \underline{A}^{\delta_p - 1} \, \underline{B} \end{bmatrix}}_{=\underline{D}^*} \underline{R} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{c}_1^T (\underline{A}^{\delta_1} + \sum_{\nu=0}^{\delta_1 - 1} q_{1\nu} \, \underline{A}^\nu) \\ \vdots \\ \underline{c}_p^T (\underline{A}^{\delta_p} + \sum_{\nu=0}^{\delta_p - 1} q_{p\nu} \, \underline{A}^\nu) \end{bmatrix}}_{=:\underline{F}}$$

$$\boxed{\Rightarrow \underline{R} = (\underline{D}^*)^{-1} \underline{F} \quad \textit{Entkopplungsrückführung}} \tag{3.15}$$

((3.15) berechenbar, sofern (3.14) erfüllt ist)

b) **Vorgabe einer gewünschten Dynamik** dazu: geeignete Wahl der noch freien Parameter $(K_i, q_{i\nu})$ des bisherigen Entwurfs
nun gilt: *System entkoppelt in p Eingrößensysteme*

$$\overset{\delta_i}{y_i} + \sum_{\nu=0}^{\delta_i - 1} q_{i\nu} \overset{(\nu)}{y_i} = K_i w_i \tag{3.16}$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet \ \mathscr{L}$$

$$Y_i(s) = \underbrace{\frac{K_i}{s^{\delta_i} + \cdots + q_{i1}s + q_{i0}}}_{=G_i(s)} \cdot w_i(s) \tag{3.17}$$

also:

- **Festlegung der $q_{i\nu}$:** Polvorgabe für die gewünschte Dynamik der $G_i(s)$
- **Festlegung der K_i:** $K_i = q_{i0}$ für stationäre Genauigkeit der $G_i(s)$

Fazit

Erfüllt ein System mit p Ein- und Ausgangsgrößen die Entkoppelbarkeitsbedingung (3.14), so lässt es sich durch die Entkopplungsregelung $\underline{u} = -\underline{R}\,\underline{x} + \underline{V}\,\underline{w}$ mit $\underline{R}$ gemäß (3.15) und $\underline{V}$ gemäß (3.13) in p unabhängige Teilsysteme (3.16) bzw. (3.17) zerlegen.

Anmerkungen:
aus den einzelnen δ_i definierbar
$\Rightarrow$ **Definition:**

Differenzordnung δ der Strecke
:= Summe der einzelnen δ_i, d.h. $\delta = \delta_1 + \cdots + \delta_p$

Differenzordnung hat maßgeblichen Einfluss auf Entwurf

- $\delta = n$ (*volle Differenzordnung der Strecke*): alle n Eigenwerte des Systems vorgebbar
- $\delta < n$: nur δ Eigenwerte vorgebbar, restliche $n - \delta$ Eigenwerte nicht in den $G_i(s)$ enthalten.
  $\Rightarrow$ nur δ Übertragungspole vorhanden (vgl. 2.4.2), d.h. das Verfahren bewirkt die Entkopplung durch Kompensation von $n - \delta$ Systempolen durch invariante Nullstellen (Abkopplungsnullstellen), die dadurch unbeobachtbar werden (Steuerbarkeit bleibt erhalten).

  Problem: Falls *instabile Eigenwerte unter den $n - \delta$ unbeobachtbaren Eigenwerten: Synthese unbrauchbar* (Regelkreis entkoppelt, aber instabil)

  Also: Stets nachträgliche Überprüfung der Stabilität erforderlich anhand der

  a) Eigenwerte des Regelkreises: $\det(\lambda \underline{I} - (\underline{A} - \underline{B}\,\underline{R})) = 0$ oder
  b) invariante Nullstellen der Strecke: $\det \underline{P}(\eta) = 0$

  (ggf. *partielle Entkopplung* möglich

$$\underline{G}(s) = \begin{bmatrix} G_1(s) & & & & \underline{0} \\ & \ddots & & & \\ G_{j1}(s) & \dots & G_j(s) & \dots & G_{jp}(s) \\ & & & \ddots & \\ \underline{0} & & & & G_p(s) \end{bmatrix}$$

  unter Verzicht auf Kompensation von Nullstellen rechts der j-Achse.)

Anwendungsbeispiel: Entkopplungsregelung für das 3-Tank-System s. BB RLM 3-18 bis 3-24

3.2.6 Vollständige modale Synthese: Allgemeine Darstellung vollständiger Zustandsrückführungen

Bisher: spezieller Reglerentwurf
Jetzt: Herleitung einer allgemeinen Reglerformel
Ausgangspunkt: Regelkreis $\dot{\underline{x}} = (\underline{A} - \underline{B}\,\underline{R})\underline{x}$ mit Regler $\underline{R}$, der Eigenwerte $\lambda_{R1}, \ldots, \lambda_{Rn}$ festlegt.

Herleitungsvoraussetzungen (unwesentlich):

- rg $\underline{B} = p$ (Höchstrang)
- Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von $\underline{A}$ einfach
- Eigenwerte $\lambda_{R1}, \ldots, \lambda_{Rn}$ von $(\underline{A} - \underline{B}\,\underline{R})$ einfach
- $\lambda_{Ri} \neq \lambda_j$ (Eigenwerte von Strecke und Regelkreis verschieden)

} unwesentlich (nur für leichtere Herleitung)

$\Rightarrow$ $\underline{v}_{R1}, \ldots, \underline{v}_{Rn}$ vom Regelkreis linear unabhängig (d.h. $\underline{V}_R := [\underline{v}_{R1}, \ldots, \underline{v}_{Rn}]$ regulär)

Charakteristische Gleichung des Regelkreises:

$$[\lambda_{Ri}\underline{I} - (\underline{A} - \underline{B}\,\underline{R})]\,\underline{v}_{Ri} = \underline{0}$$

bzw. $$(\lambda_{Ri}\underline{I} - \underline{A})\,\underline{v}_{Ri} = -\underline{B}\,\underbrace{\underline{R}\underline{v}_{Ri}}_{=:\underline{p}_i} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Idee Roppenecker (1981)
Definition:

Parametervektoren

$$\underline{p}_i = \underline{R} \cdot \underline{v}_{Ri} \tag{3.18}$$

$$\Rightarrow (\lambda_{Ri}\underline{I} - \underline{A})\,\underline{v}_{Ri} = -\underline{B}\underline{p}_i$$

bzw. $$\underline{v}_{Ri} = (\underline{A} - \lambda_{Ri}\underline{I})^{-1}\,\underline{B}\underline{p}_i \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.19}$$

man erhält mit (3.18), (3.19):

$$[\underline{p}_1, \ldots, \underline{p}_n] = \underline{R} \cdot [\underline{v}_{R1}, \ldots, \underline{v}_{Rn}]$$
$$\Downarrow \cdot \underline{V}_R^{-1}$$
$$\underline{R} = [\underline{p}_1, \ldots, \underline{p}_n] \cdot \underline{V}_R^{-1}$$

bzw.

$$\boxed{\underline{R} = [\underline{p}_1, \ldots, \underline{p}_n] \cdot \left[(\underline{A} - \lambda_{R1}\underline{I})^{-1}\,\underline{B}\underline{p}_1, \ldots, (\underline{A} - \lambda_{Rn}\underline{I})^{-1}\,\underline{B}\underline{p}_n\right]^{-1}} \tag{3.20}$$

(*Allgemeine Zustandsreglerformel*)

nun gilt

bei beliebiger* Vorgabe der Eigenwerte λ_{Ri} und der Parametervektoren $\underline{p}_i$ in (3.20) erzeugt dieses $\underline{R}$ tatsächlich die Eigenwerte λ_{Ri} im Regelkreis.

* einzige Einschränkung: $\underline{p}_i$ müssen so gewählt werden, dass die $\underline{v}_{Ri}$ in (3.20) linear unabhängig sind. (praktisch bedeutungslos)

Beweis: s. BB RLM 3-25 bis 3-27

Anmerkungen:

1. **Entwurfsparameter in** (3.20)**:** λ_{Ri} **und** $\underline{p}_i$
   Geometische Bedeutung der $\underline{p}_i$**:** aus Modaltransformation (s. 2.1)

$$\underline{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i^* \underline{v}_{Ri}$$
$$\Downarrow \underline{R}\cdot$$
$$\underbrace{\underline{R}\,\underline{x}(t)}_{=-\underline{u}(t)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^* \underbrace{\underline{R}\,\underline{v}_{Ri}}_{=\underline{p}_i} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

   also: *Die Parametervektoren* $\underline{p}_i$ *spannen den (negativen) Steuerraum auf.* (analog zu den Eigenvektoren für den Zustandsraum!)

2. ohne Beweis: **Parametervektoren sind (im Gegensatz zu den Eigenvektoren!) invariant gegenüber linearer Zustandstransformation**
   $\Rightarrow$ $\underline{p}_i$ (wie die λ_{Ri}) *geometrische Regelkreis- Eigenschaften*

3. **falls** $\lambda_{Ri} = \lambda_j$ **gewünscht:**

   in (3.20):
   - $\underline{p}_i = 0$
   - $\underline{v}_{Ri} = \underline{v}_j$

Fazit:
aus vollständiger modaler Synthese ersichtlich: Eigenwerte λ_{Ri} und Parametervektoren $\underline{p}_i$ sind natürliche Entwurfsparameter für $\underline{R}$, wobei die

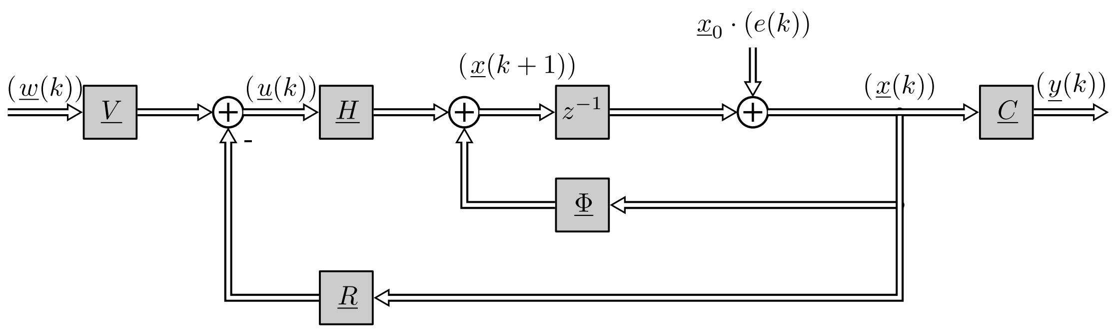
- Eigenwerte für Stabilitätsverhalten
- Parametervektoren für weitere Zielsetzungen

verantwortlich sind.

3.3 Regelung bei zeitdiskreten Zustandsmodellen

3.3.1 Regelungsstruktur und Grundprinzip des Entwurfs

analoge Prinzipien wie beim zeitkontinuierlichen Entwurf, an zeitdiskrete Verhältnisse anzupassen.
Struktur zeitdiskreter Regelungen:
ganz analog zum zeitkontinuierlichen Fall, s. BB RLM 3-28



also: $\underline{u}(k) = -\underline{R}\,\underline{x}(k) + \underline{V}\,\underline{w}(k)$ Dabei:

(I) $\underline{R}$ für Störverhalten

(II) $\underline{V}$ für Führungsverhalten

Führungsverhalten (II) (wenn Störverhalten zufriedenstellend):
Ziel: *stationäre Genauigkeit*

$$\boxed{\underline{y}(k) = \underline{w}(k) \qquad \text{für } k \to \infty}$$

Stationärer Zustand:

$$\begin{aligned}
\underline{x}(k+1) &\overset{!}{=} \underline{x}(k) = \underline{x}_s \quad \Rightarrow \underline{y}(k) = \underline{y}_s = \underline{C}\,\underline{x}_s \\
\underline{u}(k) &= \underline{u}_s \\
\underline{w}(k) &= \underline{w}_s \\
\Rightarrow \underline{x}_s &= \left(\underline{\phi} - \underline{H}\,\underline{R}\right) \underline{x}_s + \underline{H}\,\underline{V}\,\underline{w}_s \\
\underbrace{\left(\underline{I} - \underline{\phi} + \underline{H}\,\underline{R}\right)}_{\text{regulär für stabiles } \underline{R}} \ \underline{x}_s &= \underline{H}\,\underline{V}\,\underline{w}_s \\
\Rightarrow \underline{x}_s &= \left(\underline{I} - \underline{\phi} + \underline{H}\,\underline{R}\right)^{-1} \underline{H}\,\underline{V}\,\underline{w}_s \\
\text{Ausgangsgleichung:} \qquad \underline{y}_s &= \underline{C}\,\underline{x}_s = \underbrace{\underline{C}\left(\underline{I} - \underline{\phi} + \underline{H}\,\underline{R}\right)^{-1} \underline{H}\,\underline{V}}_{\overset{!}{=}\underline{I} \text{ für stat. Genauigkeit}} \underline{w}_s
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Rightarrow \underline{V} = \left[\underline{C}\left(\underline{I} - \underline{\phi} + \underline{H}\,\underline{R}\right)^{-1} \underline{H}\right]^{-1} \qquad \textit{Vorfilter für stationäre Genauigkeit}}$$

Störverhalten (I): analog zu zeitkontinuierlichem Fall

Entwurf der Zustandsrückführung durch Eigenwert-Vorgabe

1. **Wahl geeigneter Eigenwerte**, dabei zu beachten

   (a) **Stabilität**
   sicher (s.früher): $|\lambda_i| < 1$
   bei einfachen Eigenwerten (s. früher): $\underline{x}(k) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \underline{v}_i \lambda_i^k$ **also:** je kleiner $|\lambda_i| < 1$, desto schnelleres Abklingen.
   $\Rightarrow$ *Vorgabe eines Kreises K mit Radius R*, sodass gilt

   $$\boxed{|\lambda_i| < R < 1}$$

   (b) **hinreichende Schwingungsdämpfung**
   ohne Herleitung:
   λ_i innerhalb von Kurve C, wobei
   C "herzförmige" Kurve
   (d: Dämpfung eines kontinuierlichen PT_2-Gliedes. Zusammenhang mit konjugiert komplexen Eigenwerten $z = re^{j\varphi}$ und $\bar{z} = re^{-j\varphi}$: $r = e^{-\frac{d}{\sqrt{1-d^2}}\varphi}$, $0 < \varphi < \pi$)

   Verhältnisse: $\boxed{\text{s. BB RLM 3-29}}$

2. **Konkrete Synthese von $\underline{R}$**
   analog zum zeitkontinuierlichen Fall. **Vorgabe des charakteristischen Polynoms**

   $$\det\left[z\,\underline{I} - \left(\underline{\phi} - \underline{H}\,\underline{R}\right)\right] \overset{!}{=} \prod_{i=1}^{n} (z - \lambda_{Ri})$$

   $\Rightarrow$ **Synthesegleichungen** (n Gleichungen für die $p \cdot n$ Elemente von $\underline{R}$)

   a) $p = 1$: Ackermann-Formel (vgl 3.2.2 bzw. $\boxed{\text{s. BB RLM 3-4}}$)

   $$\boxed{\underline{R} = \underline{r}^T = \underline{k}_0^T \left(p_0\,\underline{I} + p_1\,\underline{\phi} + \cdots + p_{n-1}\,\underline{\phi}^{n-1} + \underline{\phi}^n\right)}$$

   $$\underline{k}_0^T: \ \text{letzte Zeile von } \underline{Q}_s^{-1} = [\underline{h}, \underline{\phi}\,\underline{h}, \ldots, , \underline{\phi}^{n-1}\,\underline{h}]^{-1}$$

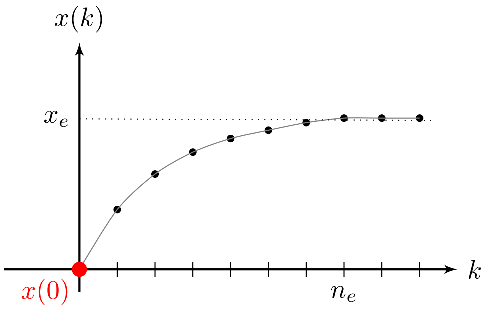
   b) $p > 1$: unendlich viele Lösungen
   spezielle Lösung: *Zustands-Deadbeat-Regler*

3.3.2 Zustandsregler für endliche Einstellzeit (Zustands-Deadbeat-Regler)

Ziel: Ermittlung eines Zustandsreglers, der $\underline{x}(k)$ des geregelten Systems in n_e Schritten von beliebigem Anfangszustand $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ in einen vorgegebenen Endpunkt $\underline{x}_e$ überführt und dort festhält:

$$\boxed{\underline{x}(k) = \underline{x}_e \quad \forall k \geq n_e}$$

Beispiel: $(n = 1)$



$\Rightarrow \forall k \geq n_e$ gilt:

$$\left.\begin{aligned} \underline{x}(k) &= \underline{x}_e = \underline{x}_s \\ \underline{u}(k) &= \underline{u}_s \end{aligned}\right\} \text{stationärer Zustand}$$

Ausgangspunkt: Steuerfolge, die $\underline{x}_0$ in $n_e = m$ Schritten nach $\underline{x}_s$ bringt (s. früher)

$$\underset{(n, m\cdot p)}{\underline{Q}_m} \cdot \begin{bmatrix} \underline{u}(m-1) \\ \vdots \\ \underline{u}(0) \end{bmatrix} = \left[\underline{x}_s - \underline{\phi}^m \underline{x}_0\right] \tag{3.21}$$

mit $\frac{n}{p} \leq m \leq n \quad \Rightarrow$ Steuerbarkeitsindex m_s(s. 2.4.1)

$$\text{rg } \underline{Q}_{m_s} = n$$

Fallunterscheidung:

a) $m \cdot p = n$: $\underline{Q}_m$-Matrix (n, n) regulär. Aus (3.21) folgt:

$$(3.21) \Rightarrow \begin{bmatrix} \underline{u}(m-1) \\ \vdots \\ \underline{u}(0) \end{bmatrix} = \underline{Q}_m^{-1} \cdot \left[\underline{x}_s - \underline{\phi}^m \underline{x}_0\right]$$
$$= \underbrace{\left[\underline{H}, \underline{\phi}\,\underline{H}, \ldots, \underline{\phi}^{m-1}\underline{H}\right]^{-1}}_{=: \begin{bmatrix} \underline{K}_{m-1} \\ \vdots \\ \underline{K}_0 \end{bmatrix}} \cdot \left[\underline{x}_s - \underline{\phi}^m \underline{x}_0\right]$$

also: *Steuerung*, die $\underline{x}_0$ in $m = n_e$ Schritten nach $\underline{x}_e$ überführt:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{u}(0) &= \underline{K}_0 \left[\underline{x}_s - \underline{\phi}^m \underline{x}_0\right] \\ &\vdots \\ \underline{u}(m-1) &= \underline{K}_{m-1} \left[\underline{x}_s - \underline{\phi}^m \underline{x}_0\right] \end{aligned}}$$

Übergang zur Regelung:
gesucht: $\underline{u}(\nu)$ in Abhängigkeit von $\underline{x}(\nu)$

Ablauf der Steuerung:

$\underline{x}_0$

$\downarrow \quad \underline{u}(0) = \underline{K}_0 \left[\underline{x}_s - \underline{\phi}^m \underline{x}_0\right]$

$\underline{x}(1) \overset{!}{=} \underline{x}_0'$: Startpunkt einer 2. Steuerfolge, die $\underline{x}_0'$ nach $\underline{x}_e$ überführt

$\downarrow \quad \underline{u}(1) = \underline{K}_1 \left[\underline{x}_s - \underline{\phi}^m \underline{x}_0\right] = \underline{u}'(0) = \underline{K}_0 \left[\underline{x}_s - \underline{\phi}^m \underline{x}_0'\right] = \underline{K}_0 \left[\underline{x}_s - \underline{\phi}^m \underline{x}(1)\right]$

$\underline{x}(2)$

$\downarrow \quad \underline{u}(2) = \underline{K}_2 \left[\underline{x}_s - \underline{\phi}^m \underline{x}_0\right]$

$\vdots$

$\downarrow \quad \underline{u}(m-1)$

$\underline{x}(m) = \underline{x}_e = \underline{x}_s$

$\downarrow \quad \underline{u}_s$

$\underline{x}_s$

$\vdots$

allgemein:

$$\begin{aligned}\underline{u}(k) &= \underline{K}_0 \left[\underline{x}_s - \underline{\phi}^m \underline{x}(k)\right] \qquad k = 0, \dots, m-1\\ &= -\underline{K}_0 \underline{\phi}^m \underline{x}(k) + \underline{K}_0 \underline{x}_s\\ &= -\underline{R}\,\underline{x}(k) + \underline{u}(s)\end{aligned}$$

also:

$$\boxed{\begin{array}{r}\underline{R} = \underline{K}_0 \underline{\phi}^m \quad \textit{Zustands-Deadbeat-Regler}\\ \underline{R} \text{ bringt } \underline{x}(k) \text{ in } m \text{ Schritten von } \underline{x}_0 \text{ nach } \underline{x}_e\end{array}} \tag{3.22}$$

($\underline{K}_0$: letzten p Zeilen von $\underline{Q}_m^{-1}$)

Sonderfall: $p = 1 \Rightarrow n = m$
$\Rightarrow \underline{Q}_m = \underline{Q}_s = \left[\underline{h}, \underline{\phi}\,\underline{h}, \dots, \underline{\phi}^{n-1} \underline{h}\right]$

$$\boxed{\begin{array}{r}\underline{r}^T = \underline{k}_0^T \underline{\phi}^n \quad \textit{SISO-Zustands-Deadbeat-Regler}\\ \underline{r}^T \text{ bringt } \underline{x}(k) \text{ in } n \text{ Schritten von } \underline{x}_0 \text{ nach } \underline{x}_e\end{array}} \tag{3.23}$$

($\underline{k}_0^T$: letzte Zeile von $\underline{Q}_s^{-1}$)

Anmerkung: leichte Bestimmung von $\underline{k}_0^T$ aus

$$\underline{Q}_s^{-1} \underline{Q}_s = \underline{I}$$

$$\begin{bmatrix}\vdots\\ \underline{k}_0^T\end{bmatrix} \left[\underline{h}, \underline{\phi}\,\underline{h}, \dots, \underline{\phi}^{n-1} \underline{h}\right] = \underline{I}$$

möglich.

(3.23) entspricht *Spezialfall der Eigenwert-Vorgabe* (s. 3.3.1)
Ackermann-Formel:

$$\underline{r}^T = \underline{k}_0^T \left(p_0 \underline{\phi}^0 + p_1 \underline{\phi} + \dots p_{n-1} \underline{\phi}^{n-1} + \underline{\phi}^n\right)$$

Vergleich mit (3.23): $p_0 = p_1 = \dots = p_{n-1} = 0$

$\Rightarrow$ charakteristisches Polynom des Regelkreises: $\prod_{i=1}^{n} (z - \lambda_{Ri}) \overset{!}{=} z^n$

also:

> alle Eigenwerte des Regelkreises liegen in $z = 0$, d.h. der Zustands-Deadbeat- Regler verschiebt alle Pole nach $z = 0$

b) $m \cdot p > n$: unendlich viele Steuerungen erfüllen Vorgabe. Zum Beispiel *betragskleinste Steuerung* (ohne Herleitung)

$$\begin{bmatrix} \underline{u}(m-1) \\ \vdots \\ \underline{u}(0) \end{bmatrix} = \underline{Q}_m^T \left(\underline{Q}_m \underline{Q}_m^T \right)^{-1} \left[\underline{x}_s - \underline{\phi}^m \underline{x}_0 \right]$$

$\Rightarrow$ Entwurf wie bei *a)* zunächst nicht möglich.
Abhilfe: Erweiterung der Strecke um r fiktive Zustandsgrößen, sodass gilt:

$$\boxed{m \cdot p = n + r}$$

$$\begin{array}{c} n \\ r \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{x}(k+1) \\ \underline{x}^*(k+1) \end{bmatrix}}_{=\underline{\hat{x}}(k+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\phi} & \underline{0} \\ \underline{A}^* & \underline{0} \end{bmatrix}}_{=\underline{\hat{\phi}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{x}(k) \\ \underline{x}^*(k) \end{bmatrix}}_{=\underline{\hat{x}}(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{H} \\ \underline{B}^* \end{bmatrix}}_{=\underline{\hat{H}}} \underline{u}(k)$$

dabei $\underline{A}^*$, $\underline{B}^*$ so zu wählen, dass

$$\underset{(n+r,n+r)}{\underline{\hat{Q}}_m} = \left[\underline{\hat{H}}, \underline{\hat{\phi}}\,\underline{\hat{H}}, \ldots, \underline{\hat{\phi}}^{m-1} \underline{\hat{H}} \right]$$

regulär ($\hat{=}$ erweiterte Strecke steuerbar!)

$\Rightarrow$ Entwurf wie bei *a)* möglich:

$$\begin{aligned} \underline{u}(k) &= -\underline{\hat{R}}\,\underline{\hat{x}}(k) \\ &= -\underline{\hat{K}}_0 \underline{\hat{\phi}}^m \underline{\hat{x}}(k) = -\underline{\hat{K}}_0 \begin{bmatrix} \underline{\phi}^m & \underline{0} \\ \underline{A}^* \underline{\phi}^{m-1} & \underline{0} \end{bmatrix} \underline{\hat{x}}(k) \end{aligned}$$

$$\boxed{\underline{u}(k) = -\underline{\hat{K}}_0 \begin{bmatrix} \underline{\phi} \\ \underline{A}^* \end{bmatrix} \underline{\phi}^{m-1} \underline{x}(k)} \tag{3.24}$$

Kapitel 4

Synthese von Zustandsbeobachtern

bisher: Regelung mit Zustandsrückführung
$\Rightarrow$ alle Zustandsgrößen müssen messbar sein (in Praxis nicht immer erfüllt!)
Abhilfe: Ermittlung von $\underline{x}$ aus den messbaren Größen durch sogenannte *Beobachter*

4.1 Vollständiger Beobachter

4.1.1 Gleichungen und Struktur des vollständigen Beobachters

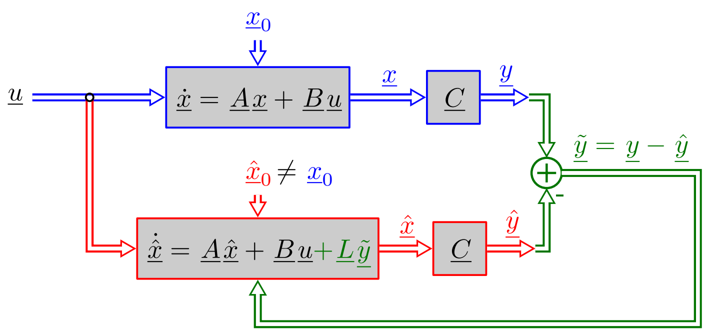
Ausgangspunkt: vollständig beobachtbare Strecke (vgl. 2.4.2)

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} \\ \underset{(q,1)}{\underline{y}} &= \underline{C}\,\underline{x} \end{aligned}} \tag{4.1}$$

$\underline{y}$ als *Messgrößen* angenommen.
Ansatz: Parallelschaltung eines Systems gleicher Dynamik mit Zustandsvektor $\underset{(n,1)}{\hat{\underline{x}}}(t)$ des Beobachters als Schätzwert für $\underline{x}(t)$:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\hat{\underline{x}}} &= \underline{A}\,\hat{\underline{x}} + \underline{B}\,\underline{u} \\ \hat{\underline{y}} &= \underline{C}\,\hat{\underline{x}} \end{aligned}}$$

Struktur:



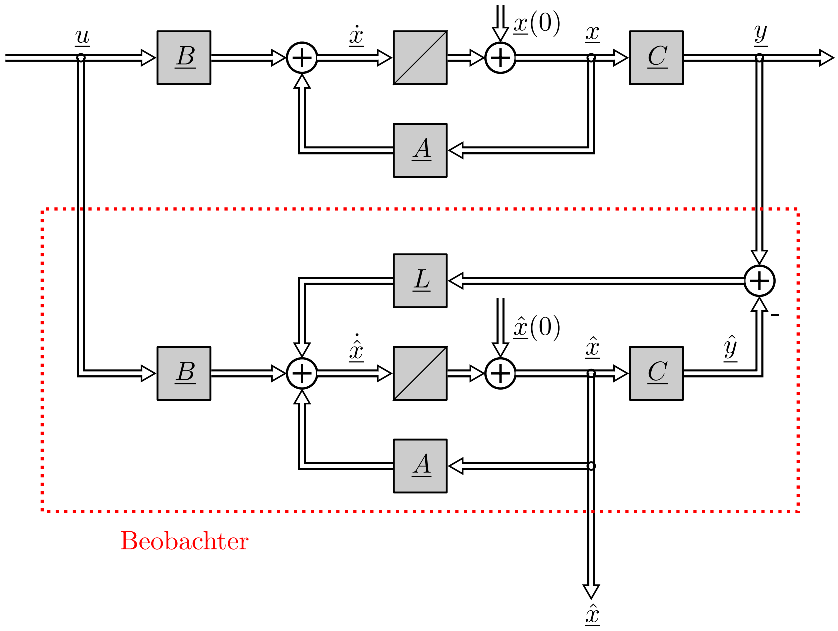
Problem: Da $\underline{x}_0$ unbekannt, ist normalerweise auch $\hat{\underline{x}}_0 \neq \underline{x}_0$ und daher $\hat{\underline{x}}(t) \neq \underline{x}(t)$
Abhilfe:

> Vergleich der Messgrößen $\underline{y}$ und der Ausgangsgrößen $\hat{\underline{y}}$ und Rückführung der Differenz über die sogenannte *Beobachtermatrix* $\underset{(n,q)}{\underline{L}}$ zur Korrektur

⇒ **Vollständiger Zustandsbeobachter** (D. G. Luenberger, 1964/66)
(Identitätsbeobachter, Luenberger Beobachter)

$$\boxed{\dot{\underline{\hat{x}}}(t) = (\underline{A} - \underline{L}\,\underline{C})\,\underline{\hat{x}}(t) + \underline{B}\,\underline{u}(t) + \underline{L}\,\underline{y}(t)} \tag{4.2}$$

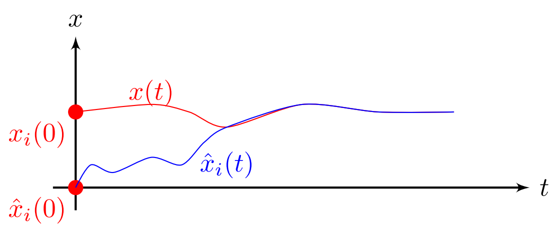
Strukturbild des vollständigen Beobachters: $\boxed{\text{s. BB RLM 4-1}}$



Wahl von $\underline{L}$: Forderung: $\underline{\hat{x}}(t)$ soll $\underline{x}(t)$ möglichst gut nachbilden, d.h. der *Schätzfehler* $\underline{\tilde{x}} := \underline{x} - \underline{\hat{x}}$ soll möglichst klein sein, mindestens

$$\underline{\tilde{x}}(t) \to \underline{0} \quad \text{für } t \to \infty \tag{4.3}$$

für beliebige $\underline{x}(0)$, $\underline{\hat{x}}(0)$
Beispiel:



dazu:

- System: $\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} \\ \underline{y} &= \underline{C}\,\underline{x} \end{aligned}$

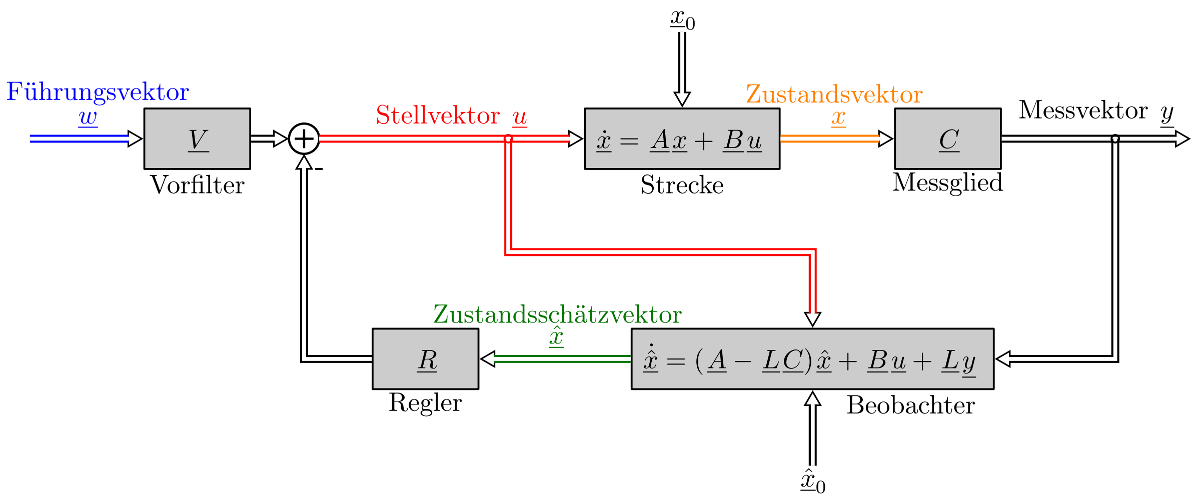
- Beobachter: $\dot{\underline{\hat{x}}} = (\underline{A} - \underline{L}\,\underline{C})\,\underline{\hat{x}} + \underline{B}\,\underline{u} + \underline{L}\,\underline{y}$

$$\begin{aligned} (4.1), (4.2): \quad \dot{\underline{\tilde{x}}}(t) &= (\underline{x} - \underline{\hat{x}}(t))^{\cdot} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} - \left[(\underline{A} - \underline{L}\,\underline{C})\,\underline{\hat{x}} + \underline{B}\,\underline{u} + \underline{L}\underbrace{\underline{y}}_{=\underline{C}\,\underline{x}} \right] \\ &= (\underline{A} - \underline{L}\,\underline{C})\,\underline{\tilde{x}}(t) \end{aligned}$$

vgl. 2.2.2: Forderung (4.3) genau dann erfüllt, wenn alle Eigenwerte $\beta_1, \ldots, \beta_n$ der Beobachtersystemmatrix $(\underline{A} - \underline{L}\,\underline{C})$ links der j-Achse liegen.

4.1.2 Synthese des vollständigen Beobachters

Struktur des über den Beobachter geschlossenen Regelkreises: s. BB RLM 4-2



Hierbei zwei zentrale Fragen zu klären:

A) **Welchen Einfluss hat der Beobachter auf die Dynamik des Regelkreises?**

B) **Wie wird die Beobachtermatrix $\underline{L}$ konkret entworfen?**

Antworten:

A) **Dynamischer Einfluss des Beobachters:**

es gilt: Die Einführung des Beobachters in den Regelkreis verändert die Eigenwerte $\lambda_{R1}, \dots, \lambda_{Rn}$ des Regelkreises nicht, zu ihnen treten lediglich die Beobachter-Eigenwerte $\beta_1, \dots, \beta_n$ hinzu!

Grund: *Separationstheorem* s. BB RLM 4-3

also: separater Entwurf von Regler und Beobachter möglich!

B) **Beobachter-Synthese**
analoges Vorgehen zum Reglerentwurf: *Polvorgabe*!

1. **Wahl der Beobachter-Eigenwerte** $\beta_1, \dots, \beta_n$:
   links von den Eigenwerten $\lambda_{R1}, \dots, \lambda_{Rn}$ (rechnergestützt)
   $\Rightarrow$ Beobachter-Vorgabe schneller abgeschlossen als System-Vorgänge (aber nicht zu weit links, vgl. 3.2.2)
2. **Wahl von $\underline{L}$**
   Vorgabe für charakteristische Gleichung:

$$\det\left[s\,\underline{I} - (\underline{A} - \underline{L}\,\underline{C})\right] \stackrel{!}{=} \prod_{\nu=1}^{n} (s - \beta_\nu)$$

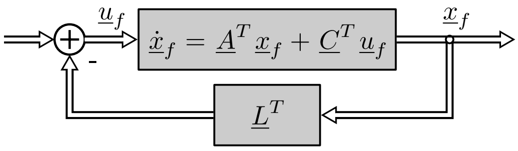
Problem: etwas andere Struktur als frühere Polvorgabe

$$\det\left[s\,\underline{I} - (\underline{A} - \underline{B}\,\underline{R})\right] \stackrel{!}{=} \prod_{\nu=1}^{n} (s - \lambda_{R\nu})$$

Abhilfe: Transposition von $(\underline{A} - \underline{L}\,\underline{C})$ (Eigenwerte bleiben gleich!)

$$\det\left[s\,\underline{I} - \left(\underline{A}^T - \underline{C}^T\,\underline{L}^T\right)\right] \stackrel{!}{=} \prod_{\nu=1}^{n} (s - \beta_\nu)$$

$\hat{=}$ Polvorgabe für einen *fiktiven Regelkreis*



mit

- $\underline{A}^T$ statt $\underline{A}$
- $\underline{C}^T$ statt $\underline{B}$
- $\underline{L}^T$ statt $\underline{R}$
- β_ν statt $\lambda_{R\nu}$
- q statt p

vgl. mit früher: Beobachter-Eigenwerte genau dann beliebig vorgebbar, wenn die fiktive Strecke vollständig steuerbar ist.
also:

$$\underline{Q}_{Sf} = \left[\underline{C}^T, \underline{A}^T\,\underline{C}^T, \ldots, (\underline{A}^T)^{n-1}\,\underline{C}^T\right] \quad \text{muss Höchstrang haben}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{Q}_{Sf}^T = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C}\,\underline{A} \\ \vdots \\ \underline{C}\,\underline{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \underline{Q}_B \quad \text{muss Höchstrang haben}$$

⇒ **Alternative Beobachtbarkeitsdefinition**:

> Ein System ist dann und nur dann vollständig beobachtbar, wenn eine beliebige Eigenwert-Konfiguration für einen vollständigen Beobachter vorgegeben werden kann.

konkrete Bestimmung von $\underline{L}$:

- **SISO-Entwurf:** *Ackermann-Formel* $\boxed{\text{s. BB RLM 4-4}}$
  Beispiel: $\boxed{\text{s. BB RLM 4-5}}$
- **MIMO-Entwurf:** beliebiges Verfahren, z.B. *Entwurf durch modale Regelung*(s.3.2.4)

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} \underline{w}_1^T\,\underline{B} \\ \vdots \\ \underline{w}_p^T\,\underline{B} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_{R1} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_p - \lambda_{Rp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{w}_1^T \\ \vdots \\ \underline{w}_p^T \end{bmatrix}$$

hier: statt $\underline{w}_\nu$ die Linkseigenvektoren $\tilde{\underline{w}}_\nu$ von $\underline{A}^T$ zu bestimmen.

$$\tilde{\underline{w}}_\nu^T\left(\lambda_\nu\,\underline{I} - \underline{A}^T\right) = \underline{0}^T$$

$$\Downarrow \text{Transposition}$$

$$(\lambda_\nu\,\underline{I} - \underline{A})\,\underbrace{\tilde{\underline{w}}_\nu}_{\overset{!}{=}\underline{v}_\nu} = \underline{0}$$

d.h. Linkseigenvektoren $\tilde{\underline{w}}_\nu$ von $\underline{A}^T \overset{!}{=}$ Eigenvektoren $\underline{v}_\nu$ von $\underline{A}$

$$\boxed{\Rightarrow \underline{L} = [\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_q] \begin{bmatrix} \lambda_1 - \beta_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_q - \beta_q \end{bmatrix} [\underline{C}\,\underline{v}_1, \ldots, \underline{C}\,\underline{v}_q]^{-1}}$$

4.2 Reduzierter Beobachter

bisher: Ermittlung *aller* Zustandsgrößen durch den vollständigen Beobachter, auch der gemessenen!

jetzt: Aufwandsreduktion durch Schätzung nur der nicht messbaren Zustandsgrößen (=: *Sensorkoordinaten*)

hierzu: *Umordnung des Zustandsvektors*

$$\underset{(n,1)}{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \underline{y} \\ \underline{r} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} \underline{y}: \text{ Messgrößen } (y_1, \ldots, y_q), \\ \underline{r}: \text{ Sensorkoordinaten } (r_1, \ldots, r_{n-q}) \end{array}$$

damit:

$$\begin{gathered} \underline{\dot{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} \\ \Downarrow \text{Umordnung wie oben} \\ \begin{bmatrix} \underline{y} \\ \underline{r} \end{bmatrix}^{\bullet} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{y} \\ \underline{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{B}_1 \\ \underline{B}_2 \end{bmatrix} \underline{u} \end{gathered}$$

bzw.:

$$\begin{aligned} \underline{\dot{y}} &= \underset{(q,q)}{\underline{A}_{11}}\,\underline{y} + \underset{(q,n-q)}{\underline{A}_{12}}\,\underline{r} + \underline{B}_1\,\underline{u} \\ \underline{\dot{r}} &= \underset{(n-q,q)}{\underline{A}_{21}}\,\underline{y} + \underset{(n-q,n-q)}{\underline{A}_{22}}\,\underline{r} + \underline{B}_2\,\underline{u} \end{aligned}$$

Idee: Interpretation als *neues System* mit Zustand $\underline{r}$

$$\begin{aligned} \underbrace{\underline{\dot{r}}}_{=\underline{\dot{x}}^*} &= \underbrace{\underline{A}_{22}}_{=\underline{A}^*}\,\underline{r} + \underbrace{\left(\underline{A}_{21}\,\underline{y} + \underline{B}_2\,\underline{u}\right)}_{=\underline{B}^*\cdot\underline{u}^*} \Rightarrow \underline{\dot{x}}^* = \underline{A}^*\,\underline{x}^* + \underline{B}^*\cdot\underline{u}^* \\ \underbrace{\underline{\dot{y}} - \underline{A}_{11}\,\underline{y} - \underline{B}_1\,\underline{u}}_{=\underline{y}^*} &= \underbrace{\underline{A}_{12}}_{=\underline{C}^*}\,\underline{r} \Rightarrow \underline{y}^* = \underline{C}^*\,\underline{x}^* \end{aligned}$$

⇒ Entwurf eines vollständigen Beobachters für das neue System

$$\boxed{\underline{\dot{\hat{r}}} = \left(\underline{A}_{22} - \underline{L}\,\underline{A}_{12}\right)\underline{\hat{r}} + \left(\underline{A}_{21}\,\underline{y} + \underline{B}_2\,\underline{u}\right) + \underline{L}\left(\underline{\dot{y}} - \underline{A}_{11}\,\underline{y} - \underline{B}_1\,\underline{u}\right)} \tag{4.4}$$

(Wahl von $\underline{L}$ so, dass Eigenwerte von $(\underline{A}_{22} - \underline{L}\,\underline{A}_{12})$ links von den Eigenwerten des ohne Beobachter geschlossenen Regelkreises liegen!)

Problem von (4.4)**:** Differentiation des Messvektors enthalten.

Abhilfe: statt $\underline{\hat{r}}$ den *Beobachterzustand*

$$\boxed{\underline{\rho} := \underline{\hat{r}} - \underline{L}\underline{y}}$$

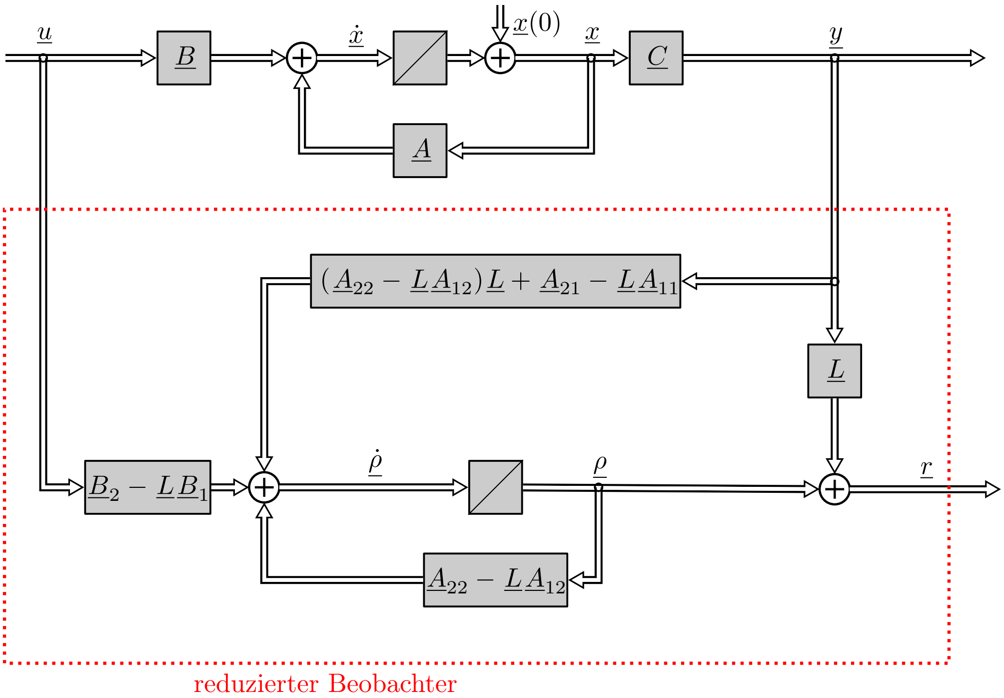
verwenden.

$$(4.4) \Rightarrow \underline{\dot{\rho}} = \left(\underline{A}_{22} - \underline{L}\,\underline{A}_{12}\right)\left(\underline{\rho} + \underline{L}\underline{y}\right) + \left(\underline{A}_{21}\,\underline{y} + \underline{B}_2\,\underline{u}\right) - \underline{L}\,\underline{A}_{11}\,\underline{y} - \underline{L}\,\underline{B}_1\,\underline{u}$$

also:

$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{\dot{\rho}} = \left(\underline{A}_{22} - \underline{L}\,\underline{A}_{12}\right)\underline{\rho} + \left[\left(\underline{A}_{22} - \underline{L}\,\underline{A}_{12}\right)\underline{L} + \underline{A}_{21} - \underline{L}\,\underline{A}_{11}\right]\underline{y} + \left(\underline{B}_2 - \underline{L}\,\underline{B}_1\right)\underline{u} \\ &\underline{\hat{r}} = \underline{\rho} + \underline{L}\,\underline{y} \\ &\qquad \textit{Reduzierter Beobachter } ((n-q)\text{-ter Ordnung}) \end{aligned}}$$

Struktur:



Beispiele: *Verladebrücke*

- Entwurf eines reduzierten Beobachters: $\boxed{\text{s. BB RLM 4-6 bis 4-9}}$
- Vergleich vollständiger/reduzierter Beobachter: $\boxed{\text{s. BB RLM 4-10 bis 4-18}}$

Kapitel 5

Reglersynthese zur Beseitigung von Dauerstörungen

bisher: Beseitigung von Anfangsstörungen behandelt.
jetzt: *Dauerstörungen* betrachtet, dabei Klassifikation gemäß Messinformation

1. Störgrößen messbar

2. Störgrößen nicht messbar, aber ihre prinzipielle Dynamik bekannt

3. Störgrößen und deren Dynamik unbekannt

5.1 Störgrößenaufschaltung

Gegeben: dauergestörtes System

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} + \underline{E}\,\underline{z}, \quad \text{mit} \quad \begin{array}{ll} \underset{(n,m)}{\underline{E}} & : \text{ konst.,} \\ \underset{(m,1)}{\underline{z}} & : \textit{ Störgrößenvektor}\text{, messbar} \end{array}$$

Regelungsansatz:

$$\boxed{\underline{u} = \underline{u}_R + \underset{(p,1)}{\underline{u}_z}\,, \qquad (\underline{u}_R = -\underline{R}\,\underline{x},\ \text{s. Kap. 3.2.1})}$$

$$\Rightarrow \dot{\underline{x}} = \underbrace{(\underline{A} - \underline{B}\,\underline{R})}_{\text{Entwurf wie gehabt}}\,\underline{x} + \underbrace{\underline{B}\,\underline{u}_z + \underline{E}\,\underline{z}}_{\stackrel{!}{=}\underline{0}\text{: Störgrößenelimination}}$$

also:

$$\boxed{\underline{B}\,\underline{u}_z + \underline{E}\,\underline{z} = \underline{0}}$$

(n Synthesegleichungen für die p Elemente von $\underline{u}_z$)

Lösung der Synthesegleichungen:

a) $\underline{p = n}$ (Ausnahme!):
$\underline{B}$ quadratisch; da Höchstrang: $\underline{B}$ *regulär*

$$\boxed{\underline{u}_z = -\underline{B}^{-1}\,\underline{E}\,\underline{z} \qquad \begin{array}{l}\textit{Vollständige Störgrößenkompensation} \\ \textit{(Störgrößenaufschaltung)}\end{array}} \tag{5.1}$$

b) $\underline{p < n}$ (Normalfall!):
Synthesegleichungen überbestimmt: i.A. keine Lösung!
aber: Näherungslösung mit *Least-Squares-Verfahren* möglich. Dazu
Definition:

> **Gleichungsfehler**
>
> $$\underline{\varepsilon} := \underline{B}\,\underline{u}_z + \underline{E}\,\underline{z}$$

Ziel: Ermittlung von $\underline{u}_z$ so, dass $|\underline{\varepsilon}|^2 \to \text{Min}$ (bestmögliche Kompensation von $\underline{z}$)

$$\begin{aligned}
|\underline{\varepsilon}|^2 = \underline{\varepsilon}^T \cdot \underline{\varepsilon} &= \left[\underline{u}_z^T\,\underline{B}^T + \underline{z}^T\,\underline{E}^T\right]\left[\underline{B}\,\underline{u}_z + \underline{E}\,\underline{z}\right] \\
&= \underline{u}_z^T\,\underline{B}^T\,\underline{B}\,\underline{u}_z + \underbrace{\underline{z}^T\,\underline{E}^T\,\underline{B}\,\underline{u}_z}_{\substack{(\underline{u}_z^T\,\underline{B}^T\,\underline{E}\,\underline{z})^T = \underline{u}_z^T\,\underline{B}^T\,\underline{E}\,\underline{z}, \\ \text{da skalar}}} + \underline{u}_z^T\,\underline{B}^T\,\underline{E}\,\underline{z} + \underline{z}^T\,\underline{E}^T\,\underline{E}\,\underline{z} \\
&= \underline{u}_z^T\,\underline{B}^T\,\underline{B}\,\underline{u}_z + 2\underline{u}_z^T\,\underline{B}^T\,\underline{E}\,\underline{z} + \underline{z}^T\,\underline{E}^T\,\underline{E}\,\underline{z} \\
&\Downarrow \text{Minimierung:} \quad \underbrace{\left.\frac{\partial}{\partial \underline{u}_z}|\underline{\varepsilon}|^2\right|_{\underline{u}_{z,opt}}}_{\boxed{\text{s. BB RLM 5-1 und 5-2}}} = \underline{0}
\end{aligned}$$

$$2\,\underline{B}^T\,\underline{B}\,\underline{u}_{z,opt} + 2\,\underline{B}^T\,\underline{E}\,\underline{z} = \underline{0}$$

$$\text{bzw.}\quad \underbrace{\underline{B}^T\,\underline{B}}_{\text{regulär,da } \underline{B} \text{ Höchstrang hat}}\,\underline{u}_{z,opt} = -\underline{B}^T\,\underline{E}\,\underline{z}$$

$$\boxed{\Rightarrow \underline{u}_z = -\left(\underline{B}^T\,\underline{B}\right)^{-1}\underline{B}^T\,\underline{E}\,\underline{z} \quad \textit{näherungsweise Störkompensation}} \tag{5.2}$$

Anmerkung: $\left(\underline{B}^T\,\underline{B}\right)^{-1}\underline{B}^T =: \underline{B}^+$ *Moore-Penrose Pseudoinverse zu* $\underline{B}$

es gilt:

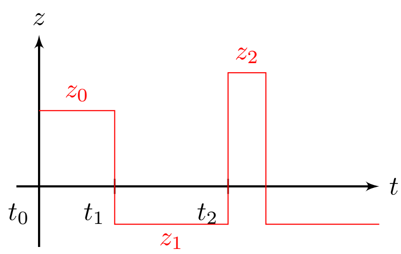
> Aufschaltung von $\underline{u}_z$ gemäß (5.1) oder (5.2) hat keine Auswirkung auf den übrigen Entwurf (Regelung, Beobachter)

5.2 Behandlung von nicht messbaren, aber modellierbaren Störgrößen

Prinzip: Hinzunahme eines *Störmodells*

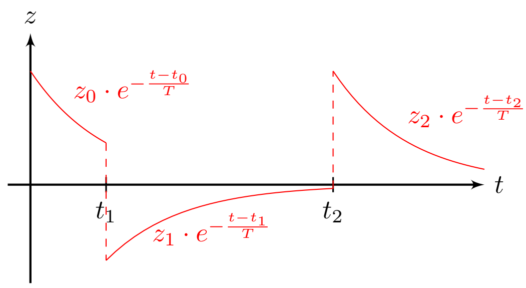
Gegeben: $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} + \underline{E}\,\underline{z}$, $\quad \underline{z}$: nicht messbar, aber Dynamik bekannt
Beispiele

a) **Störgröße stückweise konstant**



z.B. Lastumschaltung bei einem Gleichstrommotor

b) **Störgrößen mit exponentiellem Verlauf**



z.B.verfahrenstechnische Prozesse

allgemein: Dynamik von $\underline{z}$ beschreibbar mit *linearen, homogenen DGLn beliebiger Ordnung* (zu t_0, t_1, t_2 mit entsprechenden Anfangswerten angeregt)
in den Beispielen:

a) $\dot{z} = 0$

b) $T\dot{z} + z = 0$

$\Rightarrow$ *Zustandsbeschreibung für* $\underline{z}$ aufstellbar:

$$\begin{aligned} \underline{\dot{x}}_s &= \underline{A}_s \underline{x}_s \\ \underline{z} &= \underline{C}_s \underline{x}_s \end{aligned} \qquad \textit{Störmodell}$$

mit
- $\underline{x}_s$: *Störungszustandsvektor*
- $\underline{A}_s, \underline{C}_s$: bekannte Matrizen, konstant

$\Rightarrow$ Zusammenfassung mit dem Streckenmodell:

$$\begin{aligned} \underline{\dot{x}} &= \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} + \underline{E}\,\underline{C}_s \underline{x}_s \\ \underline{\dot{x}}_s &= \underline{A}_s \underline{x}_s \\ \underline{y} &= \underline{C}\,\underline{x} \end{aligned}$$

bzw.

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{x}_s \end{bmatrix}^{\bullet}}^{=:\underline{\dot{x}}_g} = \overbrace{\begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{E}\,\underline{C}_s \\ \underline{0} & \underline{A}_s \end{bmatrix}}^{=:\underline{A}_g} \overbrace{\begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{x}_s \end{bmatrix}}^{=:\underline{x}_g} + \overbrace{\begin{bmatrix} \underline{B} \\ \underline{0} \end{bmatrix}}^{=:\underline{B}_g} \underline{u}$$

$$\underline{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{C} & \underline{0} \end{bmatrix}}_{=:\underline{C}_g} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{x}_s \end{bmatrix}$$

Gesamtmodell von Strecke und Störung

zunächst: gewohnter Regleransatz:

$$\underline{u} = -\begin{bmatrix} \underline{R} & \underline{R}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{x}_s \end{bmatrix}, \quad \underline{R}_s : \text{ Rückführung der Störgrößen}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{\dot{x}} &= (\underline{A} - \underline{B}\,\underline{R})\underline{x} + (\underline{E}\,\underline{C}_s - \underline{B}\,\underline{R}_s)\underline{x}_s \\ \underline{\dot{x}}_s &= \underline{A}_s \underline{x}_s \end{aligned}$$

Charakteristische Gleichung des Regelkreises:

$$\det(s\underline{I} - (\underline{A} - \underline{B}\,\underline{R})) \cdot \det(s\underline{I} - \underline{A}_s) = 0$$

also: Störmodell ist über $\underline{u}$ nicht beeinflussbar!
$\Rightarrow$ **Modifizierter Regleransatz** erforderlich:

$$\boxed{\underline{u} = -\underline{R}\,\underline{x} + \underline{u}_z \quad \text{(wie bei 5.1)}}$$

Problem: $\underline{z}$ ist nicht messbar.
Abhilfe: Einsatz eines Beobachters für $\underline{x}_g$ (*Störbeobachter*)

$$\Rightarrow \text{Schätzwert } \hat{\underline{x}}_g = \begin{bmatrix} \hat{\underline{x}} \\ \hat{\underline{x}}_s \end{bmatrix}$$

$$\text{damit Schätzwert } \hat{\underline{z}} = \underline{C}_s \hat{\underline{x}}_s \text{ für die Störgröße}$$

$$\Downarrow \begin{array}{l} \textit{Störgrößenaufschaltung} \\ \underline{u}_z \text{ wie in 5.1 b)} \end{array}$$

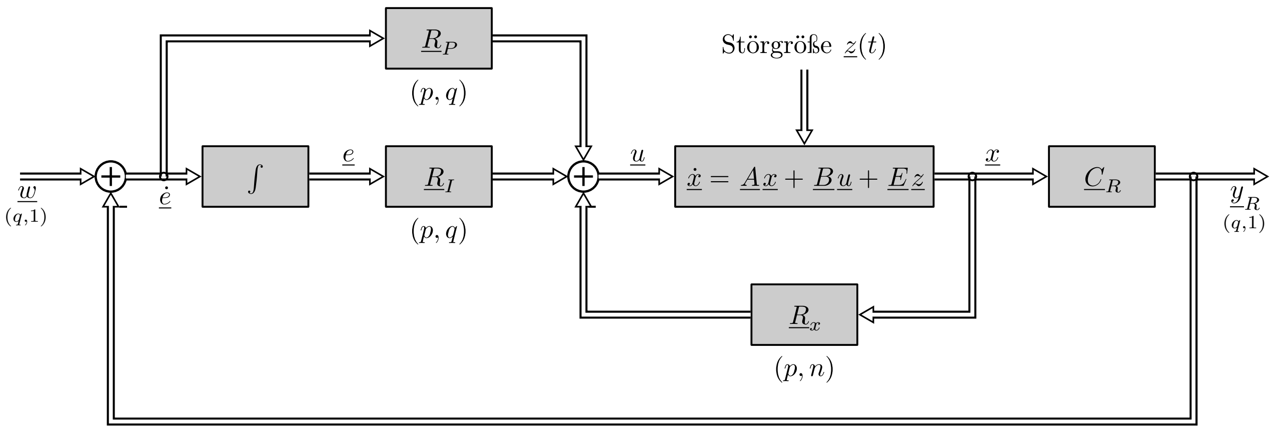
$$\boxed{\underline{u}_z = -\left(\underline{B}^T \underline{B}\right)^{-1} \underline{B}^T \underline{E}\, \hat{\underline{z}}}$$

5.3 Einsatz von PI-Zustandsreglern

Gegeben: $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} + \underline{E}\,\underline{z}$, $\quad \underline{z}$: nicht messbar, keine Information über Dynamik vorhanden

Ansatz: Erinnerung an die klassische Störausregelung im Frequenzbereich durch Regler mit I-Anteil
$\Rightarrow$ *PI-Zustandsregelung* ($\hat{=}$ dynamischer Regler, s. später in Kapitel 7)

Struktur: $\boxed{\text{s. BB RLM 5-3}}$



also: Kombination von *Zustandsrückführung* $\underline{R}_x$ und *vektoriellem PI-Regler* ($\underline{R}_P$, $\underline{R}_I$), dabei

- Stabilisierung durch $\underline{R}_x$, $\underline{R}_P$ und $\underline{R}_I$
- stationärer Zustand: $\dot{\underline{e}} = \underline{0}$, d.h. $\underline{y}_R = \underline{w}$

Gewinn:

1. Beseitigung des Einflusses von $\underline{z}$
2. Führungsverhalten stationär genau (kein Vorfilter mehr notwendig!)

Synthese des PI-Zustandsreglers:

$$\begin{aligned} \text{Regelkreis:}\quad \dot{\underline{x}} &= \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} + \underline{E}\,\underline{z} \\ \underline{y}_R &= \underline{C}_R\,\underline{x} \\ \underline{u} &= \underline{R}_P\,\dot{\underline{e}} + \underline{R}_I\,\underline{e} - \underline{R}_x\,\underline{x} \\ \dot{\underline{e}} &= \underline{w} - \underline{y}_R \end{aligned}$$

für Stabilisierung sind $\underline{w}$, $\underline{z}$ bedeutungslos ($\underline{w} = \underline{0}$, $\underline{z} = \underline{0}$)

$$
\begin{aligned}
\dot{\underline{x}} &= \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}\\
\dot{\underline{e}} &= -\underline{C}_R\,\underline{x}\\
\underline{u} &= -(\underline{R}_x + \underset{(p,n)}{\underline{R}_P}\,\underline{C}_R)\,\underline{x} + \underset{(p,q)}{\underline{R}_I}\,\underline{e}
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow \text{Zusammenfassung von } \underline{x} \text{ und } \underline{e}$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix}\underline{x}\\ \underline{e}\end{bmatrix}^{\bullet}}^{=:\dot{\underline{x}}_g} = \overbrace{\begin{bmatrix}\underline{A} & \underline{0}\\ -\underline{C}_R & \underline{0}\end{bmatrix}}^{=:\underline{A}_g}\overbrace{\begin{bmatrix}\underline{x}\\ \underline{e}\end{bmatrix}}^{=:\underline{x}_g} + \overbrace{\begin{bmatrix}\underline{B}\\ \underline{0}\end{bmatrix}}^{=:\underline{B}_g}\underline{u} \qquad \text{um \textit{I-Glieder erweiterte Strecke}}$$

$$\underline{u} = -\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{R}_x + \underline{R}_P\,\underline{C}_R & -\underline{R}_I\end{bmatrix}}_{=:\underline{R}_g}\begin{bmatrix}\underline{x}\\ \underline{e}\end{bmatrix} \qquad \text{\textit{PI-Zustandsregler}}$$

für erweiterte Strecke dann *gewohnter Reglerentwurf* möglich, *falls erweiterte Strecke steuerbar*:

Voraussetzungen:

1. ursprüngliche Strecke ($\underline{A}$, $\underline{B}$) steuerbar und
2. $\operatorname{rg} \underset{(n+q,n+p)}{\begin{bmatrix}\underline{A} & \underline{B}\\ -\underline{C}_R & \underline{0}\end{bmatrix}} = n + q$ (Beweis Föllinger)

Problem: mit $\underline{R}_g$ nur Summe $\underline{R}^* = \underline{R}_x + \underline{R}_P\,\underline{C}_R$ neben $\underline{R}_I$ bekannt:

$$\underline{R}_g = \begin{bmatrix}\underbrace{\underline{R}_x + \underline{R}_P\,\underline{C}_R}_{=\underline{R}^*} & -\underline{R}_I\end{bmatrix}$$

Wahl von $\underline{R}_x$ und $\underline{R}_P$:

1. Möglichkeit: $\underline{R}_P = \underline{0}$, $\underline{R}_x = \underline{R}^*$ schlecht, da dann nur I-Anteil ohne P-Anteil wirksam
$\Rightarrow$ Regelkreis langsam mit Schwingungsneigung

2. Möglichkeit: Festlegung von $\underline{R}_P$ als *Vorsteuerung*
Vorraussetzungen:

1. $p = q$
2. $\underline{A}^{-1}$ existiert

stationärer Zustand ($\underline{w} = \text{const.}$, $\underline{z} = \underline{0}$)

$$
\begin{aligned}
\underline{0} &= \underline{A}\,\underline{x}_\infty + \underline{B}\,\underline{u}_\infty \quad \Rightarrow \underline{x}_\infty = -\underline{A}^{-1}\underline{B}\,\underline{u}_\infty\\
\underline{0} &= \underline{w} - \underline{y}_{R\infty} = \underline{w} - \underline{C}_R\,\underline{x}_\infty\\
&\Rightarrow \underline{y}_{R\infty} = \underline{w} = -\underline{C}_R\,\underline{A}^{-1}\underline{B}\,\underline{u}_\infty
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\text{bzw. } \underline{u}_\infty = -\left(\underline{C}_R\,\underline{A}^{-1}\underline{B}\right)^{-1}\underline{y}_{R\infty}} \tag{5.3}$$

also: mit (5.3) ist jeder gewählte Wert $\underline{y}_{R\infty}$ mit $\underline{u}$ einstellbar, wenn $\left(\underline{C}_R\,\underline{A}^{-1}\underline{B}\right)^{-1}$ existiert ($\hat{=} \operatorname{rg}\begin{bmatrix}\underline{A} & \underline{B}\\ -\underline{C}_R & \underline{0}\end{bmatrix} = n + q$, s. oben) (Beweis: Föllinger)

Vorsteuerung: Wahl von $\underline{R}_P$ so, dass $\underline{u}_\infty$ gemäß (5.3) möglichst schnell (schon ab $t = 0$) erreicht wird.

nun gilt: (vgl. Struktur $\boxed{\text{s. BB RLM 5-3}}$)

$$t = +0: \quad \underline{x}_0 = \underline{0},\ \underline{z}(+0) = \underline{0},\ \underline{e}(+0) = \underline{0},\ \underline{y}_R(+0) = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \underline{u}(+0) = \underline{R}_P \underbrace{\underline{w}}_{=\underline{y}_{R\infty}}$$

$$\Downarrow \text{vgl. mit (5.3): } \underline{w} \text{ beliebig}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{R}_P = -\left(\underline{C}_R \underline{A}^{-1} \underline{B}\right)^{-1} \\ \Rightarrow\ &\underline{R}_x = \underline{R}^* - \underline{R}_P \underline{C}_R = \underline{R}^* + \left(\underline{C}_R \underline{A}^{-1} \underline{B}\right)^{-1} \underline{C}_R \end{aligned}}$$

Fazit PI-Zustandsregler:

+ Beseitigung von $\underline{z}$ ohne dessen genaue Kenntnis
+ Beseitigung zusätzlicher Störeffekte (z.B. Parameterschwankungen, Modellungenauigkeiten)
+ kein Vorfilter für stationäre Genauigkeit erforderlich
- theoretisch nur stationäre Störbeseitigung
- Erhöhung der Systemordnung ($n \to n + q$)

Beispiele: siehe später

Kapitel 6

Synthese von Ausgangsrückführungen

6.1 Gleichungen und Struktur von Ausgangsrückführungen

bisher: Rückführungen des vollständigen Zustands ⇒ i.d.R. Beobachter erforderlich

- hoher Realisierungsaufwand
- Dynamikverschlechterung (insbesondere bei ungenauen Streckenmodellen)

jetzt: alleinige Rückführung der Messgrößen

$\underline{u} = -\underline{K}\,\underline{y}$	*Ausgangsrückführung* (ARF) (Messvektor-, Teilzustandsrückführung)
	mit: • $\underline{y}$: Messvektor • $\underset{(p,q)}{\underline{K}}$: konstante Matrix

zunächst: Ermittlung des Vorfilters für *stationäre Genauigkeit* für eine Ausgangsrückführung bei $\underline{u} = -\underline{K}\,\underline{y} + \underline{V}\,\underline{w}$ (mit $\underline{K}$ bekannt)

1. Lösung: (vgl. 3.2.1)

$$\boxed{\underline{V} = \left[\underline{C}(\underline{B}\,\underline{K}\,\underline{C} - \underline{A})^{-1}\,\underline{B}\right]^{-1}}$$

2. Lösung:

Voraussetzungen: (vgl. 5.3)

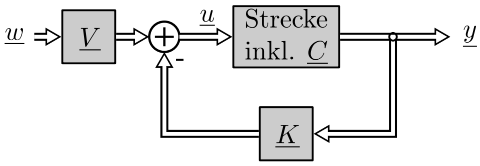
- $p = q$
- $\underline{A}^{-1}$ existiert

stationärer Zustand:

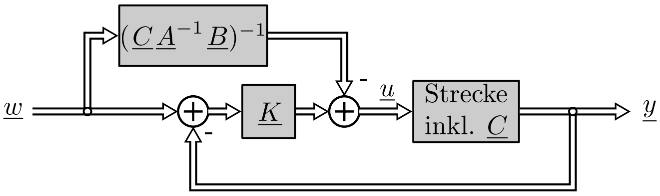
$$\begin{aligned}
\underline{0} &= \underline{A}\,\underline{x}_\infty + \underline{B}\,\underline{u}_\infty \Rightarrow \underline{x}_\infty = -\underline{A}^{-1}\,\underline{B}\,\underline{u}_\infty \\
\underline{y}_\infty &= \underline{C}\,\underline{x}_\infty = -\underline{C}\,\underline{A}^{-1}\,\underline{B}\,\underline{u}_\infty = \underline{C}\,\underline{A}^{-1}\,\underline{B}(\underline{K}\,\underline{y}_\infty - \underline{V}\,\underline{w}) \\
&\Downarrow \underline{y}_\infty \overset{!}{=} \underline{w}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\underline{V} = \underline{K} - \underbrace{\left(\underline{C}\,\underline{A}^{-1}\,\underline{B}\right)^{-1}}_{\text{Vorsteuerung, vgl. 5.3}}}$$

Struktur:



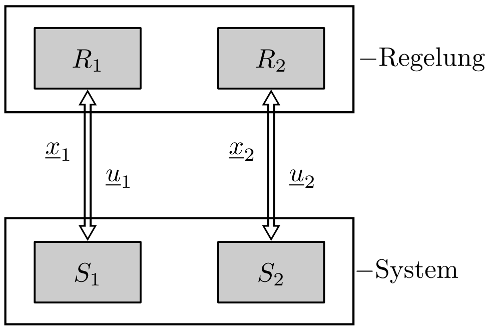
$\Downarrow$ $\underline{V}$ aus 2. Lösung



Konkreter Entwurf der Ausgangsrückführung
interpretierbar als Spezialfall der vollständigen Zustandsrückführung:

$$\begin{aligned}\underline{u} &= -[\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &\hat{=} -\underline{K}\,\underline{y},\end{aligned}$$

indem $\underline{r}_k = \underline{0}$ gewählt wird, falls x_k keine Messgröße ist
$\Rightarrow$ Ausgangsrückführung $\hat{=}$ *strukturbeschränkte Regelung*
Anmerkung: weiterer Spezialfall ist die sogenannte *dezentrale Steuerung*



6.2 Entwurf von Ausgangsrückführungen mittels der vollständigen modalen Synthese

Wiederholung:

Vollständige modale Synthese: $\underline{u} = -\underline{R}\,\underline{x}$ mit

$$\underline{R} = \left[\underline{p}_1, \ldots, \underline{p}_n\right] \left[(\underline{A} - \lambda_{R1}\,\underline{I})^{-1}\,\underline{B}\,\underline{p}_1, \ldots, (\underline{A} - \lambda_{Rn}\,\underline{I})^{-1}\,\underline{B}\,\underline{p}_n\right]^{-1}$$

wobei Entwurfsparameter:

- $\lambda_{R1}, \ldots, \lambda_{Rn}$ (vorgegeben)
- $\underline{p}_1, \ldots, \underline{p}_n$ (beliebig)

Übergang zur Ausgangsrückführung:

Strukturbeschränkung

$$\begin{aligned}\underline{u} &= -\left[\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_n\right]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\\ &= -[\underline{r}_1 x_1 + \cdots + \underbrace{\underline{r}_k x_k}_{\textbf{Idee: } \underline{r}_k = \underline{0} \text{ setzen, wenn } x_k \text{ keine Messgröße}} + \cdots + \underline{r}_n x_n]\end{aligned}$$

aber: schlechte Vorgehensweise, da hierdurch die Eigenwerte $\lambda_{R1}, \ldots, \lambda_{Rn}$ unkontrolliert verschoben werden.

$\Rightarrow$ **besseres Vorgehen:** nur durch zusätzliche Entwurfsparameter $\underline{p}_1, \ldots, \underline{p}_n$ der vollst. modalen Synthese möglich

- zunächst Wahl der $\underline{p}_i$ so, dass $|\underline{r}_k|$ klein. (λ_{Ri} bleiben hiervon unverändert!)
- dann $\underline{r}_k = \underline{0}$ setzen
  $\Rightarrow$ aus Stetigkeitsgründen λ_{Ri} nur wenig verschoben!

Entwurf:

(I) **Einführung einer Gewichtung für die Spalten von $\underline{R}$**

$$g_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, n) \qquad \text{mit } g_\nu \begin{cases} > 0 & \text{für später zu unterdrückende Spalten } \underline{r}_\nu \\ = 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

(II) **Einführung eines Gütemaßes**

$$\begin{aligned}J &= \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} g_\nu |\underline{r}_\nu|^2\\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{sp}\left(\underline{R}\,\underline{G}\,\underline{R}^T\right), \qquad \left(\underline{G} = \begin{bmatrix} g_1 & & \underline{0}\\ & \ddots & \\ \underline{0} & & g_n\end{bmatrix}, \ \mathrm{sp}(\underline{X}) = x_{11} + x_{22} + \cdots + x_{nn}\right)\\ &\Downarrow \underline{R} = \underline{R}(\underbrace{\lambda_{R1}, \ldots, \lambda_{Rn}}_{\text{fest}};\ \underline{p}_1, \ldots, \underline{p}_n)\\ &= J(\underline{p}_1, \ldots, \underline{p}_n)\end{aligned}$$

(III) **Minimierung des Gütemaßes**

$$J(\underline{p}_1, \ldots, \underline{p}_n) \to \min_{\underline{p}_1, \ldots, \underline{p}_n}$$

z.B. Gradientenverfahren, es gilt (ohne Herleitung):

$$\frac{\partial J}{\partial \underline{p}_j} = \left[\underline{I} - \underline{R}(\underline{A} - \lambda_{Rj}\,\underline{I})^{-1}\,\underline{B}\right]^T \underline{R}\,\underline{G}\,\underline{w}_{Rj}, \quad (j = 1, \ldots, n)$$

$\Rightarrow$ optimale Parametervektoren: $\underline{p}_1^*, \ldots, \underline{p}_n^*$

(IV) **Nullsetzen der zu unterdrückenden Reglerspalten**

$$\underline{R}(\lambda_{R1}, \ldots, \lambda_{Rn};\ \underline{p}_1^*, \ldots, \underline{p}_n^*) = [\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_n]$$
$$\Downarrow_{\underline{r}_\nu = \underline{0}}$$

$\underline{K}$: Ausgangsrückführung, deren Eigenwerte $\tilde{\lambda}_{R1}, \ldots, \tilde{\lambda}_{Rn}$ nur wenig gegenüber denen von $\underline{R}$ verschoben

also: keine formelmäßige, aber immerhin numerische Lösung auffindbar!

Beispiel: Regelung eines Bensonkessels $\boxed{\text{s. BB RLM 6-1 bis 6-4}}$

Kapitel 7

Synthese dynamischer Regler

bisher: Entwurf *konstanter* Ausgangsrückführungen $\underline{u} = -\underset{(p,q)}{\underline{K}}\,\underline{y}$ behandelt.

Nachteile:

- nur geringe Anzahl freier Reglerparameter $p \cdot q$
  Polvorgabe: n Synthesegleichungen
  - bei vollständiger Zustandsrückführung ($q = n$): Reglerparameter $p \cdot n \geq n$
    unterbestimmtes Gleichungssystem, Lösung existiert
  - bei Ausgangsrückführungen: häufig Reglerparameter $p \cdot q < n$
    überbestimmtes Gleichungssystem, im Allgemeinen keine Lösung
    $\Rightarrow$ d.h. nicht alle Eigenwerte vorgebbar
- nur Beseitigung von Anfangsstörungen

jetzt: *Dynamischer Regler* zur Vermeidung dieser Nachteile

Beispiel: *PI-Zustandsregler* $\boxed{\text{s. BB RLM 5-3}}$

mit:

- $\underline{w} = \underline{0}$
- $\underline{y}_R = \underline{y}$
- $\underline{R}_x = \underline{0}$ (Ausgangsrückführung betrachtet, $\Rightarrow$ PI- Ausgangsregler)

$$\Rightarrow \underline{u} = \underline{R}_I\,\underline{e} + \underline{R}_P\,\underline{\dot{e}}$$
$$\underline{\dot{e}} = -\underline{y}$$

$$\text{bzw.} \quad \begin{aligned} \underline{\dot{e}} &= \underline{0}\,\underline{e} + (-\underline{I})\,\underline{y} \\ \underline{u} &= \underline{R}_I\,\underline{e} + (-\underline{R}_P)\,\underline{y} \end{aligned}$$

$\Downarrow$ Verallgemeinerung: $\underline{x}_D$ statt $\underline{e}$ als dyn. Reglerzustand

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\dot{x}}_D &= \underset{(r,r)}{\underline{A}_D}\,\underset{(r,1)}{\underline{x}_D} + \underline{B}_D\,\underline{y} \\ \underline{u} &= -\underline{C}_D\,\underline{x}_D - \underline{D}_D\,\underline{y} \end{aligned} \qquad \textit{Dynamischer Regler}}$$

dabei frei wählbar:

- Reglerordnung r
- konstante Matrizen: $\underline{A}_D, \underline{B}_D, \underline{C}_D, \underline{D}_D$

$\Rightarrow$ viele freie Entwurfsparameter

$$r^2 + q \cdot r + p \cdot r + p \cdot q$$

damit folgt aus der zentralen Syntheseforderung

$$\boxed{\begin{array}{r} \text{Entwurfsparameter} \geq \text{Streckenordung} \\ \Rightarrow r^2 + q \cdot r + p \cdot r + p \cdot q \geq n + r \end{array}} \tag{7.1}$$

also:

Bestimmung der Reglerordung r als kleinste Zahl, die (7.1) zur Vorgabe aller Eigenwerte erfüllt

Interessante Grenzfälle für r:

a) $\underline{r = 0}$: keine Zustands-DGL für den dynamischen Regler

$$\Rightarrow \underline{C}_D = \underline{0}, \quad \underline{u} = -\underline{D}_D \underline{y} \qquad \textit{konstante Ausgangsrückführung}$$

b) $\underline{r = n}$: Zustands-DGL n-ter Ordnung für den dynamischen Regler
$\Rightarrow$ vollständiger Beobachter ($\underline{x}_D = \hat{\underline{x}}$) + vollständige Zustandsrückführung

konkrete Synthese dynamischer Regler:

Rückführung auf den Entwurf einer konstanten Ausgangsrückführung: s. BB RLM 7-1, 7-2

Kapitel 8

Ordnungsreduktion bei Modellen hoher Ordnung

8.1 Aufgabenstellung und Prinzip der Ordnungsreduktion

Ausgangspunkt: Systemmodell (=*Original*)

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} \quad \text{mit hoher Systemordnung (z.B. } n = 50 \ldots 100\text{)}$$

$\Rightarrow$ Geringe dynamische Transparenz, hoher Analyse-/Synthese-Aufwand.
$\Rightarrow$ *Ordnungsreduktion* sinnvoll
$\hat{=}$ Approximation des Originals durch ein Modell niedrigerer Ordnung (=*reduziertes Modell*)

Vorgehen bei der Ordnungsreduktion:

1. **Definition relevanter Zustandsgrößen**
   z.B. Regelgrößen, Messgrößen, kritische Größen

2. **Neuordnung des Zustands:**

$$\underline{x}_{neu} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \\ x_{q+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} =: \underline{x}_r : \ \textit{relevante Zustandsgrößen} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} =: \underline{x}_{nr} : \ \text{nicht relevante Zustandsgrößen} \end{matrix}$$

hier: $\underline{x}_r \overset{!}{=} \underline{y}$ vom Original
$\Rightarrow \underline{y} = \underline{C}\,\underline{x}_{neu}$ mit $\underline{C} = \begin{bmatrix} \underline{I}_q & \underline{0} \end{bmatrix}$

Gesucht: *reduziertes Modell*

$$\dot{\tilde{\underline{x}}}_r = \tilde{\underline{A}}\tilde{\underline{x}}_r + \tilde{\underline{B}}\,\underline{u}$$

d.h. $\tilde{\underline{A}}$, $\tilde{\underline{B}}$ so, dass $\underline{x}_r$ durch $\tilde{\underline{x}}_r$ möglichst gut approximiert wird.

8.2 Modale Ordnungsreduktion nach Litz (1979)

Prinzip: Aufbau des reduzierten Modells aus den *dominanten Eigenwerten* des Originals

8.2.1 Eigenwert-Dominanzanalyse

Gegeben:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} \\ \underline{y} &= \underline{C}\,\underline{x} \end{aligned} \quad \text{(Original)}$$

Annahme: Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ einfach. $\Rightarrow$ Modaltransformation (s. 2.1): $\underline{x} = \underline{V}\,\underline{z}$

$$\begin{aligned} \dot{\underline{z}} &= \underline{\Lambda}\,\underline{z} + \underline{B}^*\,\underline{u} \\ \underline{y} &= \underline{C}^*\,\underline{z} \end{aligned}$$

$$\Downarrow \mathscr{L}-\text{Transformation und I/O-Verhalten}$$

$$\underline{Y}(s) = \underbrace{\underline{C}^*(s\,\underline{I} - \underline{\Lambda})^{-1}\,\underline{B}^*}_{\underline{G}(s)} \cdot \underline{U}(s)$$

$$\text{bzw. } Y_i(s) = \sum_{j=1}^{p} \underbrace{G_{ij}(s) \cdot u_j(s)}_{y_{ij}(s)}, \quad i = 1, \ldots, q$$

mit

$$\boxed{\begin{aligned} G_{ij}(s) &= [c_{i1}^*, \ldots, c_{in}^*] \begin{bmatrix} \frac{1}{s-\lambda_1} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \frac{1}{s-\lambda_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j}^* \\ \vdots \\ b_{nj}^* \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{c_{ik}^* b_{kj}^*}{s - \lambda_k} \end{aligned}}$$

Signalpfad (i, j) von u_j nach y_i: s. BB RLM 9-1

Dominanzanalyse
Testfunktion aufschalten: $u_j(t) = u_{j0}\sigma(t)$

$$\Rightarrow Y_{ij}(s) = G_{ij}(s) \cdot u_{j0} \cdot \frac{1}{s} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{c_{ik}^* b_{kj}^*}{\lambda_k} \left(e^{\lambda_k t} - 1\right) \cdot u_{j0} = y_{ij}(t)$$

also: Einfluss von λ_k auf den Signalpfad (i, j) ablesbar an

$$\boxed{D_{ikj} := \left| \frac{c_{ik}^* b_{kj}^*}{\lambda_k} \right|}$$

$\Rightarrow$ Gesamtsystem: Dominanzmaß von λ_k

$$\boxed{D_k := \max_{(i,j)} D_{ikj}}$$

also:

$$\boxed{\lambda_k \textit{ dominant, falls } D_k \textit{ groß}}$$

hierbei ggf. noch *Maß für die Zahl der beeinflussten Signalpfade* hilfreich:

$$S_k := \sum_{(i,j)} D_{ikj}$$

(bei gleichem D_k ist Eigenwert λ_k mit größerem S_k dominanter!)

Anmerkungen:

- *Normierung* erforderlich: s. BB RLM 9-2, 9-3
- D_k unbrauchbar, falls λ_k nicht beobachtbar bzw. nicht steuerbar (d.h. $c_{ik}^* = 0$ bzw. $b_{kj}^* = 0$ oder sehr klein)

8.2.2 Konstruktion des reduzierten Modells

Ausgangspunkt:

- wesentliche Zustandsgrößen $x_1, \dots, x_q$
- dominante Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_m$

Annahme: $q = m$
$\Rightarrow$ Original in Modalform:

$$\dot{\underline{z}} = \underline{\Lambda}\,\underline{z} + \underline{B}^*\,\underline{u}$$

$$\begin{array}{c} \underline{z}_1 \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right. \\ \underline{z}_2 \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right. \end{array} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \\ z_{m+1} \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}^{\bullet} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & \underline{0} & \\ & & \lambda_m & & & \\ & & & \lambda_{m+1} & & \\ & \underline{0} & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{z}_1 \\ \underline{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{B}_1^* \\ \underline{B}_2^* \end{bmatrix} \underline{u}$$

$$\text{mit:} \quad \underline{\Lambda}_1 := \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{bmatrix} \quad \text{und } \underline{\Lambda}_2 := \begin{bmatrix} \lambda_{m+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

also:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{z}}_1 &= \underline{\Lambda}_1\,\underline{z}_1 + \underline{B}_1^*\,\underline{u}: \ \text{dominanter Anteil} \\ \dot{\underline{z}}_2 &= \underline{\Lambda}_2\,\underline{z}_2 + \underline{B}_2^*\,\underline{u}: \ \text{nichtdominanter Anteil} \end{aligned}$$

$\Downarrow$ Ordnungsreduktion: nichtdominanten Teil weg lassen

$$\boxed{\dot{\underline{z}}_1 = \underline{\Lambda}_1\,\underline{z}_1 + \underline{B}_1^*\,\underline{u} \qquad \textit{Reduziertes Modell}} \tag{8.1}$$

Problem: für $\underline{x}_r$ neben $\underline{z}_1$ auch $\underline{z}_2$ benötigt

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_r \\ \underline{x}_{nr} \end{bmatrix} = \underline{V}\,\underline{z}, \qquad \text{mit: } \underline{V} = \begin{bmatrix} \underline{V}_{11} & \underline{V}_{12} \\ \underline{V}_{21} & \underline{V}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{x}_r = \underline{V}_{11}\,\underline{z}_1 + \underline{V}_{12}\,\underbrace{\underline{z}_2}_{\text{nicht in (8.1) enthalten}}$$

Abhilfe: Approximation $\tilde{\underline{z}}_2$ für $\underline{z}_2$

$$\boxed{\tilde{\underline{z}}_2 = \underline{E}\,\underline{z}_1 \quad (\textsc{Litz})}$$

(dabei $\underline{E}$ so, dass Approximationsfehler $|\tilde{\underline{z}}_2 - \underline{z}_2|$ minimal formelmäßige Lösung: s. BB RLM 9-4)

damit:

$$\begin{aligned}\underline{\tilde{x}}_r &= \underline{V}_{11}\,\underline{z}_1 + \underline{V}_{12}\,\underline{\tilde{z}}_2 \\ &= \underbrace{(\underline{V}_{11} + \underline{V}_{12}\,\underline{E})}_{=:\underline{F}}\,\underline{z}_1\end{aligned}$$

$\Downarrow$ falls $\underline{F}^{-1}$ existiert

$$\boxed{\underline{z}_1 = \underline{F}^{-1}\,\underline{\tilde{x}}_r}$$

$\Downarrow$ in (8.1): $\underline{F}^{-1}\,\dot{\underline{\tilde{x}}}_r = \underline{\Lambda_1}\,\underline{F}^{-1}\,\underline{\tilde{x}}_r + \underline{B}_1^*\,\underline{u}$

$$\boxed{\text{bzw. } \dot{\underline{\tilde{x}}}_r = \underbrace{\underline{F}\,\underline{\Lambda_1}\,\underline{F}^{-1}}_{=\underline{\tilde{A}}}\,\underline{\tilde{x}}_r + \underbrace{\underline{F}\,\underline{B}_1^*}_{=\underline{\tilde{B}}}\,\underline{u} \qquad \textit{Reduziertes Modell}}$$

Beispiel: Destillationskolonne $\boxed{\text{s. BB RLM 9-5 bis 9-7}}$

Kapitel 9

Kein Teil der Vorlesung: Synthese robuster Regelungen mittels Polbereichsvorgabe

DIESES KAPITEL IST SEIT WS 14/15 NICHT MEHR TEIL DER VORLESUNG.

Es ist nur noch für Interessierte oder den Fall zukünftiger Wiederaufnahme in den Vorlesungsstoff Teil dieses inoffiziellen Skripts geblieben.

9.1 Definition robuster Regelung und Polbereichsstabilität

bisher: Annahme konstanter Streckenparameter ($\Rightarrow$ Systemmatrizen konstant)

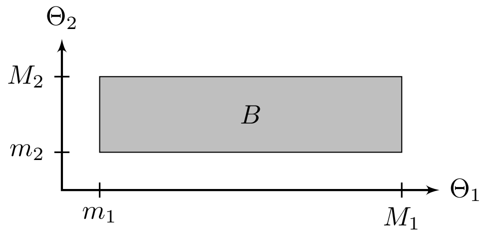
zumeist: in Realität Parameterschwankungen vorhanden, falls zu stark: *robuste Regelung* erforderlich.

Gegeben:

a) System

$$\begin{gathered}\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} \\ \Downarrow_{\textit{Systemparameter } \theta_1,\ldots,\theta_n =: \underline{\theta}} \\ \dot{\underline{x}} = \underline{A}(\underline{\theta})\,\underline{x} + \underline{B}(\underline{\theta})\,\underline{u}\end{gathered}$$

Parameterschwankungen: $m_i \leq \theta_i \leq M_i, \quad i = 1, \ldots, n$
$\Rightarrow$ *Parameterbereich B*
Beispiel: $\underline{n = 2}$



b) bei Systemvorgängen gilt:

Parameter θ fest oder sie ändern sich nur langsam im Vergleich zur Systemdynamik (sonst: *zeitvariantes System* zu betrachten)

Beispiele:

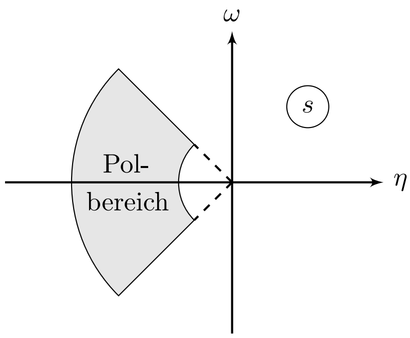
- Verladebrücke (s. früher): Greifermasse, Greiferlänge
- Flugzeug: Geschwindigkeit, Flughöhe

Definition:

> **Robuster Regler**
> fester Regler, der dem Regelkreis für jedes $\theta \in B$ gewünschte Eigenschaften sichert. (Ein robuster Regler ist kein *strukturvariabler robuster Regler* (zustandsabhängige Reglermodifikation) oder kein *adaptiver Regler* (parameterabhängige Reglerkonfiguration))

gewünschte Eigenschaften des Regelkreises können zunächst beliebig sein
hier: *Polbereichs-Stabilität*
$\triangleq$ alle Eigenwerte des Regelkreises liegen innerhalb eines *Polbereichs*
(= Bereich in der komplexen s-Ebene, symmetrisch zur reellen und links der imaginären Achse)

Beispiel:



$\Rightarrow$ aufgrund größerer dynamischer Freiheit bessere Dynamik des Regelkreises zu erwarten!

9.2 Polbereichsvorgabe nach Konigorski(1987)

gegeben:

$$\text{Strecke:} \quad \begin{aligned} \underline{\dot{x}} &= \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} \\ \underline{y} &= \underline{C}\,\underline{x} \end{aligned}$$

gesucht: Ausgangsrückführung $\underline{u} = -\underline{K}\,\underline{y}$, die alle Eigenwerte $\lambda_{K1}, \ldots, \lambda_{Kn}$ des Regelkreises

$$\underline{\dot{x}} = (\underline{A} - \underline{B}\,\underline{K}\,\underline{C})\,\underline{x}$$

innerhalb eines vorgegebenen Polbereichs Γ platziert.

Berechnung von $\underline{K}$:

(I) **Wahl eines Polbereichs Γ:**
Ausgangspunkt:
Zusammenhang zwischen einem komplexen Polpaar und der Sprungantwort beim PT_2- Glied: $\boxed{\text{s. BB RLM X-1}}$
Forderungen an den Polbereich:

(1) Einhaltung einer Mindestdämpfung d_m : $\quad d > d_m \rightarrow \psi \leq \psi_m$

(2) $(\alpha, \bar{\alpha})$ nicht zu weit rechts (sonst Regelkreis zu langsam): $-d\omega_0 \leq -a, \quad (a > 0)$
$\Rightarrow$ Approximation der Begrenzung nach rechts

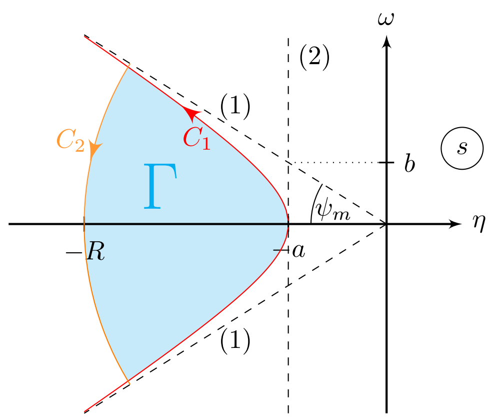
$$\boxed{\text{Hyperbel } C_1 : \quad \frac{\eta^2}{a^2} - \frac{\omega^2}{b^2} = 1, \quad b = a \cdot \tan(\psi_m)}$$

(3) ω_0 nicht zu groß (sonst Regelkreis zu schnell, d.h. Stellenergie $|u_\nu|$ zu groß): $\omega_0 \leq R$
$\Rightarrow$ Begrenzung des Gebiets nach links:

$$\boxed{\text{Kreis } C_2 : \quad \eta^2 + \omega^2 = R^2}$$

gesamt:

$$\boxed{\textit{Polbereich } \Gamma = \text{Innengebiet des von } C_1 \text{ und } C_2 \text{ begrenzten Bereichs}}$$



(II) **Charakterisierung von Γ durch Ungleichungen:**
aus C_1 : $\quad \eta = -\frac{a}{b}\sqrt{b^2+\omega^2}$, bzw.

$$F_1(\eta, \omega) := \eta + \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + \omega^2}$$

Orientierung von C_1 (s. Skizze):

$$\Rightarrow F_1(\eta,\omega) \begin{cases} = 0 & \text{auf } C_1 \\ > 0 & \text{rechts von } C_1 \\ < 0 & \text{links von } C_1 \end{cases}$$

aus C_2 : $\quad R = \sqrt{\eta^2 + \omega^2}$, bzw.

$$F_2(\eta, \omega) := \sqrt{\eta^2 + \omega^2} - R$$

Orientierung von C_2 (s. Skizze):

$$\Rightarrow F_2(\eta,\omega) \begin{cases} = 0 & \text{auf } C_2 \\ > 0 & \text{rechts von } C_2 \\ < 0 & \text{links von } C_2 \end{cases}$$

also:

$$\boxed{\Gamma \text{ charakterisiert durch } F_1 < 0 \text{ und } F_2 < 0}$$

Definition:

$$\gamma(\eta,\omega) := e^{pF_1(\eta,\omega)} + e^{pF_2(\eta,\omega)}, \quad (p > 1,\ \textit{fest, nicht zu klein, sonst beliebig})$$

$$\Rightarrow \gamma(\eta,\omega) = \begin{cases} \ll 1 & \textit{innerhalb } \Gamma \\ \gg 1 & \textit{außerhalb } \Gamma \end{cases}$$

(bis auf schmalen Schlauch um C_1, C_2, in dem auch mittlere Werte von γ auftreten.)

(III) **Einführung eines Gütemaßes**
Eigenwerte des Regelkreises $\underline{\dot{x}} = (\underline{A} - \underline{B}\,\underline{K}\,\underline{C})\underline{x}$ von $\underline{K}$ abhängig:

$$\lambda_{K\nu} = (\eta_{K\nu}, \omega_{K\nu}), \quad (\nu = 1, \ldots, n)$$

$\Rightarrow$ **Gütemaß** (Straffunktion)

$$\boxed{\begin{aligned} J &:= \sum_{\nu=1}^{n} \gamma(\eta_{K\nu}, \omega_{K\nu}) = J(\underline{K}) \qquad \textit{Gütemaß} \\ \text{mit: } J(\underline{K}) &= \begin{cases} \ll 1, & \text{alle } \lambda_{K\nu} \text{ innerhalb von } \Gamma \\ \gg 1, & \textit{mindestens} \text{ ein } \lambda_{K\nu} \text{ außerhalb von } \Gamma \end{cases} \end{aligned}}$$

(IV) **Ermittlung von $\underline{K}$ zur Polbereichsvorgabe durch die Minimierung von $J(\underline{K})$**
Wahl einer beliebigen Ausgangsrückführung $\underline{K}_0 \Rightarrow J(\underline{K}_0)$
Dann Minimierung von $J(\underline{K})$ (z.B über Gradientenverfahren (Gradient formelmäßig angebbar, s. FÖLLINGER (15.2.2)) solange bis $J(\underline{K}) \ll 1$)
$\Rightarrow$

> durch Ausgangsrückführung $\underline{u} = -\underline{K}_e\,\underline{y}$ liegen alle Eigenwerte $\lambda_{K\nu},\ (\nu = 1, \ldots, n)$ innerhalb des Polbereichs Γ

Beispiel: siehe nächster Abschnitt

9.3 Entwurf robuster Ausgangsrückführungen

Ziel:

Entwurf einer robusten Ausgangsrückführung $\underline{u} = -\underline{K}\,\underline{y}$, die die Eigenwerte $\lambda_{K\nu},\ (\nu = 1, \ldots, n)$ des Regelkreises in einem gewünschten Polbereich Γ platziert. (Γ-Stabilität, s. 9.2)

Verhältnisse: s. BB RLM X-2

Reglersynthese: zunächst *Problemvereinfachung:*

Auswahl einzelner signifikanter Parametersätze $\underline{\theta}_1, \ldots, \underline{\theta}_m$ aus dem Parameterbereich B

$\Rightarrow$ Reduktion auf *endlich viele Modelle* M_μ, $(\mu = 1, \ldots, m)$

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\dot{x}} &= \underline{A}_\mu \underline{x} + \underline{B}_\mu \underline{u} \quad \textit{Multi-Modell-Ansatz} \\ \text{mit:}\quad \underline{A}_\mu &= \underline{A}(\underline{\theta}_\mu), \quad \underline{B}_\mu = \underline{B}(\underline{\theta}_\mu) \end{aligned}}$$

$\Rightarrow$ *Multi-Modell-Problem* liegt vor

$\Rightarrow$ Entwurf einer robusten Ausgangsrückführung, die jeweils bei den m Modellen M_μ für Γ-Stabilität sorgt.

$\Downarrow$ Stetigkeitsannahme

> Ausgangsrückführung näherungsweise robust (Γ-Stabilität!) für alle $\underline{\theta} \in B$

aber: streng genommen nachzuweisen, meist Simulation ausreichend, ggf. *Robustheitsanalyse* (aufwändig!)

Konkreter Entwurf von $\underline{K}$ Polbereichsvorgabe nach Konigorski auf Multi-Modell-Ansatz erweitern:

$$\Rightarrow \text{Gütemaß } J(\underline{K}) = \sum_{\nu=1}^{n} e^{pF_1(\eta_{K\nu},\omega_{K\nu})} + e^{pF_2(\eta_{K\nu},\omega_{K\nu})}$$

$$\Downarrow \text{ mehrere Strecken } M_1,\ldots,M_m$$

$$J(\underline{K}) = \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} e^{pF_1(\eta_{K\mu\nu},\omega_{K\mu\nu})} + e^{pF_2(\eta_{K\mu\nu},\omega_{K\mu\nu})}$$

$$\Downarrow \text{ Minimierung bezüglich } \underline{K}$$

$$\boxed{\textit{Robuste Ausgangsrückführung } \underline{K}}$$

Beispiel: Robuste Regelung der Verladebrücke: $\boxed{\text{s. BB RLM X-3 bis X-5}}$