

Formelsammlung

Konstanten

Frequenz ν und Wellenlänge λ des Lichts	$c = \lambda \nu$ mit $c = 2,998 \cdot 10^8$ m/s
Elementarladung:	$e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ As
Plancksche Konstante:	$h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Js = $4,136 \cdot 10^{-15}$ eVs
Reduzierte Plancksche Konstante	$\hbar = 1,0546 \cdot 10^{-34}$ Js = $6,582 \cdot 10^{-16}$ eVs
Umrechnung der Energieeinheit Joule in Elektronenvolt (eV)	$1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19}$ J
Boltzmann-Konstante (zur Umrechnung von Energien in Temperaturen)	$k_B = 1,3807 \cdot 10^{-23}$ J/K = $8,617 \cdot 10^{-5}$ eV/K
Damit erhält man bei Zimmertemperatur (300 K = 27 °C)	$k_B T = 0.02585$ eV
Masse des freien Elektrons	$m_0 = 9,109 \cdot 10^{-31}$ kg
Dielektrizitätskonstante des Vakuums	$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ As/Vm
Permeabilität des Vakuums	$\mu_0 = 1,2566 \cdot 10^{-6}$ Vs/Am

Periodensystem der chemischen Elemente

(ohne Lanthaniden und Actiniden)

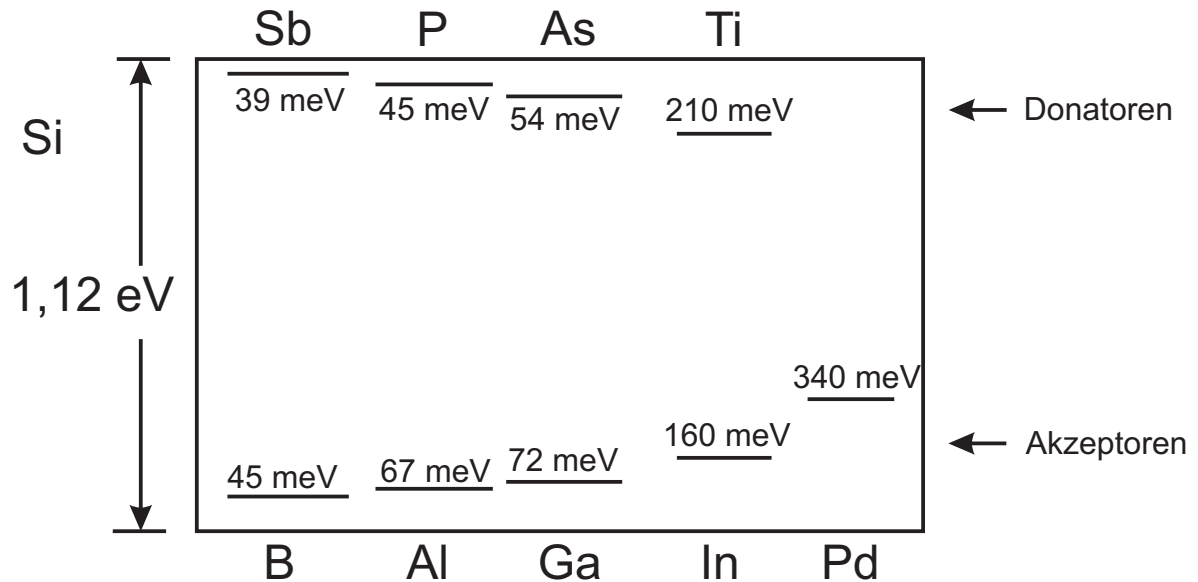


I		II										III		IV	V	VI	VII	VIII
¹ H 1,0079																		² He 4,0026
³ Li 6,941	⁴ Be 9,0122											⁵ B 10,811	⁶ C 12,011	⁷ N 14,007	⁸ O 15,999	⁹ F 18,998	¹⁰ Ne 20,180	
¹¹ Na 22,990	¹² Mg 24,305											¹³ Al 26,982	¹⁴ Si 28,086	¹⁵ P 30,974	¹⁶ S 32,066	¹⁷ Cl 35,453	¹⁸ Ar 39,948	
¹⁹ K 39,098	²⁰ Ca 40,078	²¹ Sc 44,956	²² Ti 47,867	²³ Va 50,942	²⁴ Cr 51,996	²⁵ Mn 54,938	²⁶ Fe 55,845	²⁷ Co 58,933	²⁸ Ni 58,693	²⁹ Cu 63,546	³⁰ Zn 65,39	³¹ Ga 69,723	³² Ge 72,61	³³ As 74,922	³⁴ Se 78,96	³⁵ Br 79,904	³⁶ Kr 83,80	
³⁷ Rb 85,468	³⁸ Sr 87,62	³⁹ Y 88,906	⁴⁰ Zr 91,224	⁴¹ Nb 92,906	⁴² Mb 95,94	⁴³ Tc (98)	⁴⁴ Ru 101,07	⁴⁵ Rh 102,91	⁴⁶ Pd 106,42	⁴⁷ Ag 107,87	⁴⁸ Cd 112,41	⁴⁹ In 114,82	⁵⁰ Sn 118,71	⁵¹ Sb 121,76	⁵² Te 127,60	⁵³ I 126,90	⁵⁴ Xe 131,29	
⁵⁵ Cs 132,91	⁵⁶ Ba 137,33	⁵⁷ La 138,91	⁷² Hf 178,49	⁷³ Ta 180,95	⁷⁴ W 183,84	⁷⁵ Re 186,21	⁷⁶ Os 190,23	⁷⁷ Ir 192,22	⁷⁸ Pt 195,08	⁷⁹ Au 195,08	⁸⁰ Hg 200,59	⁸¹ Tl 204,38	⁸² Pb 207,2	⁸³ Bi 208,98	⁸⁴ Po (209)	⁸⁵ At (210)	⁸⁶ Rn (222)	
⁸⁷ Fr (223)	⁸⁸ Ra (226)	⁸⁹ Ac (227)																

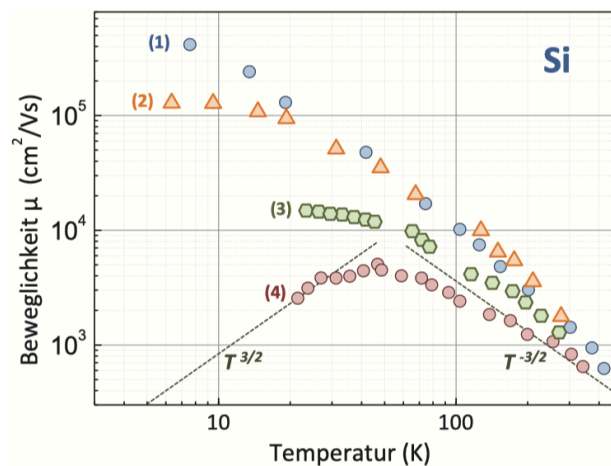
→ Lanthaniden (Ordnungszahlen 58 bis 71)

→ Actiniden (Ordnungszahlen ab 90)

Gemessene Ionisierungsenergien für verschiedene Dotierungen von Silizium



Temperaturabhängigkeit der Beweglichkeit der Ladungsträger in Si.



- (1) Hochreines Si, $n_D < 10^{12} \text{ cm}^{-3}$; (2) hochreines Si, $n_D < 4 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$; (3) $n_D = 1,75 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, $n_A = 1,48 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$; (4) $n_D = 1,3 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$, $n_A = 2,2 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$.

Quantenmechanik

$$E = h\nu = h \frac{c}{\lambda}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar \frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k$$

$$E_1 - E_2 = h\nu$$

$$E = \frac{m_0}{2} v^2 = \frac{p^2}{2m_0} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0}$$

Materialparameter verschiedener Halbleitermaterialien bei 300 K

E_g Breite der verbotenen Zone (Ergielücke),

ϵ relative Dielektrizitätskonstante,

m_e/m_0 effektive Masse der Elektronen im Leitungsband,

v_e Zahl der Leitungsbandminima (= 1 bei direkten Halbleitern),

N_c effektive Konzentration der Elektronen im Leitungsband,

m_h/m_0 effektive Masse der Löcher im Valenzband,

N_v effektive Konzentration der Löcher im Valenzband,

n_i intrinsische Ladungsträgerkonzentration,

N_c , N_v und n_i sind berechnete Größen, die anderen Daten sind Materialparameter.

	E_g in eV	ϵ	$\frac{m_e}{m_0}$	v_e	N_c in cm^{-3}	$\frac{m_h}{m_0}$	N_v in cm^{-3}	n_i in cm^{-3}
Si	1,12	11,4	0,32	6	$2,73 \cdot 10^{19}$	0,57	$1,08 \cdot 10^{19}$	$6,71 \cdot 10^9$
Ge	0,66	15,4	0,22	4	$1,04 \cdot 10^{19}$	0,36	$5,42 \cdot 10^{18}$	$2,14 \cdot 10^{13}$
GaP	2,26	11,2	0,58	3	$3,33 \cdot 10^{19}$	0,54	$9,96 \cdot 10^{18}$	1,892
AlP	2,45	10,9	0,55	3	$3,07 \cdot 10^{19}$	0,70	$1,47 \cdot 10^{19}$	0,056
AlAs	2,15	10,1	0,34	3	$1,49 \cdot 10^{19}$	0,80	$1,80 \cdot 10^{19}$	14,3
GaAs	1,424	12,4	0,066	1	$4,25 \cdot 10^{17}$	0,54	$9,96 \cdot 10^{18}$	$2,25 \cdot 10^6$
InP	1,34	12,5	0,077	1	$5,36 \cdot 10^{17}$	0,64	$1,28 \cdot 10^{19}$	$1,46 \cdot 10^7$
InAs	0,354	15,2	0,024	1	$9,33 \cdot 10^{16}$	0,406	$6,49 \cdot 10^{18}$	$8,27 \cdot 10^{14}$
InSb	0,18	15,9	0,0136	1	$3,98 \cdot 10^{16}$	0,6	$1,17 \cdot 10^{19}$	$2,10 \cdot 10^{16}$
GaN ^a	3,39	8,9	0,20	1	$2,24 \cdot 10^{18}$	0,8	$1,80 \cdot 10^{19}$	$2,13 \cdot 10^{10}$
SiC ^a	2,86	10	0,45	1	$1,17 \cdot 10^{19}$	1,0	$2,51 \cdot 10^{19}$	$1,62 \cdot 10^{-5}$
Diamant	5,5	5,7	0,57	6	$6,48 \cdot 10^{19}$	0,48	$8,35 \cdot 10^{18}$	$1,47 \cdot 10^{-27}$

^a hexagonal

Dielektrizitätskonstanten für verschiedene Isolatoren

Siliziumoxid	SiO ₂	3,9
Siliziumnitrid	Si ₃ N ₄	7
Saphir	Al ₂ O ₃	9
Titanoxid	TiO ₂	80

Intrinsische Halbleiter

$$g_c(E)dE \sim v_e (m_e)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E} dE$$

$$f_e(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E - E_F}{k_B T}}} \quad \text{und} \quad f_p(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E_F - E}{k_B T}}}$$

$$N_L = 2v_e \cdot \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} = 2v_e \cdot \left(\frac{m_e}{m_0} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{T}{300K} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{m_0 k_B 300K}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$N_V = 2v_p \cdot \left(\frac{m_p k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} = 2v_p \cdot \left(\frac{m_p}{m_0} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{T}{300K} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{m_0 k_B 300K}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$n = N_L \cdot e^{\frac{E_F - E_L}{k_B T}} \quad \text{und} \quad p = N_V \cdot e^{\frac{E_V - E_F}{k_B T}}$$

$$n \cdot p = n_i^2 = N_L \cdot N_V \cdot e^{-\frac{E_g}{k_B T}}$$

$$E_F = \frac{E_L + E_V}{2} + \frac{k_B T}{2} \cdot \ln \frac{N_V}{N_L}$$

Dotierte Halbleiter am Beispiel donatordotiert

$$E_e = E_L - E_D = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 a_e} = 13,6 \text{ eV} \cdot \frac{\left(\frac{m_e}{m_0}\right)}{\epsilon^2}$$

Temperaturabhängigkeit der Ladungsträgerkonzentration

$$n = \frac{N_D^+}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_D^+}{2}\right)^2 + n_i^2}$$

Extrem tiefe Temperaturen → Alle Elektronen sind gebunden.

Mittlere Temperatur (<100K, Störstellenreserve)

$$n = \sqrt{N_L \frac{N_D}{g}} \cdot \exp\left(-\frac{E_e}{2k_B T}\right), \text{ mit } E_e = E_L - E_D$$

$$E_F = \frac{E_D + E_L}{2} + \frac{k_B T}{2} \cdot \ln\left(\frac{N_D}{g N_L}\right)$$

Normale Temperaturen

$$n = N_D$$

Hohe Temperaturen

$$n \approx n_i \quad (\text{Eigenleitung wie beim reinen Halbleiter})$$

Beweglichkeit von Ladungsträgern

$$j_e(x) = e\mu_e n(x)\vec{E}(x) + eD_e \frac{dn(x)}{dx}$$

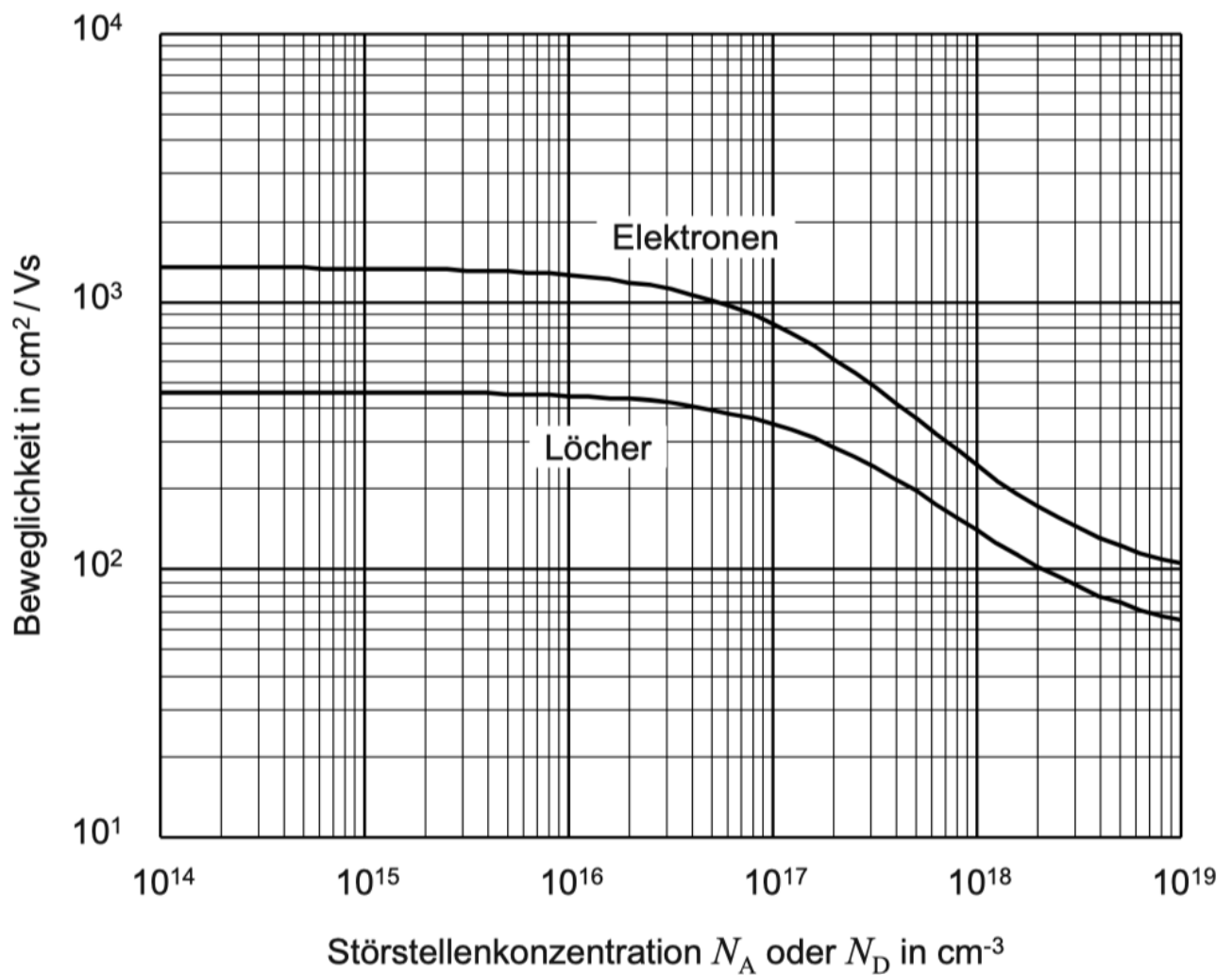
$$j_p(x) = e\mu_p p(x)\vec{E}(x) - eD_p \frac{dp(x)}{dx}$$

$$v_d^p = \mu_p \vec{E} \quad \text{und} \quad v_d^e = \mu_e \vec{E}$$

$$\sigma_p = e\mu_p p \quad \text{und} \quad \sigma_e = e\mu_e n$$

$$D_e = \frac{\mu_e k_B T}{e} \quad \text{und} \quad D_p = \frac{\mu_p k_B T}{e}$$

Beweglichkeit der Ladungsträger bei 300 K in Silizium



Hall-Effekt

$$U_H = R_H \cdot \frac{I \cdot B}{b} \quad \text{mit} \quad R_H = \frac{1}{\pm en}$$

Generation und Rekombination

Effektive Rekombinationsrate bei Band-Band-Rekombination

$$R_s^{eff} \equiv R_s - G_s = \frac{np - n_0 p_0}{\tau_s}$$

Nichtstrahlende Rekombination über tiefe Zentren

$$R_{ns}^{eff} = \frac{np - n_i^2}{\tau_{ns}(n + p)}$$

Nichtstrahlende Rekombination durch AUGER-Prozesse

$$R_{Auger} = c_A n^3 \quad \text{mit } c_A \text{ als Proportionalitätsfaktor}$$

Kontinuitätsgleichungen

$$e \frac{\partial n}{\partial t} = \text{div } j_e + e(G - R)_e \quad \text{und} \quad e \frac{\partial p}{\partial t} = -\text{div } j_p + e(G - R)_p$$

Poisson-Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{d\vec{E}}{dx} = -\frac{e}{\varepsilon} \cdot (N_D - N_A + p - n)$$

pn – Übergang

Ladungsneutralität

$$N_A \cdot x_p = N_D x_n$$

Breite des Raumladungsgebietes

$$x_n^2 = \frac{2\epsilon\epsilon_0 U_D}{e} \cdot \frac{N_A}{N_D N_A + N_D^2} \quad \text{und} \quad x_p^2 = \frac{2\epsilon\epsilon_0 U_D}{e} \cdot \frac{N_D}{N_D N_A + N_A^2}$$

$$b = \sqrt{\frac{2\epsilon\epsilon_0}{e}} \cdot \sqrt{\frac{N_D + N_A}{N_D N_A}} \cdot \sqrt{U_D}$$

Diffusionsspannung

$$U_D = \frac{k_B T}{e} \cdot \ln \frac{N_D N_A}{n_i^2}$$

Diffusionslängen

$$L_e = \sqrt{D_e \tau_e} \quad \text{und} \quad L_p = \sqrt{D_p \tau_p}$$

τ_e und τ_p sind die Rekombinationszeiten der Elektronen bzw. Löcher

Strom-Spannungs-Kennlinie (Shockley-Gleichung)

$$j = \left(\frac{e D_e}{L_e} n_0 + \frac{e D_p}{L_p} p_0 \right) \cdot \left(e^{\frac{e U}{k_B T}} - 1 \right) = j_s \cdot \left(e^{\frac{e U}{k_B T}} - 1 \right)$$

Sperrstrom oder Sättigungsstrom einer langen Diode

$$j_s = n_i^2 \left(\frac{e D_e}{L_e N_A} + \frac{e D_p}{L_p N_D} \right) = n_i^2 k_B T \left(\frac{\mu_e}{L_e N_A} + \frac{\mu_p}{L_p N_D} \right)$$

Sperrstrom oder Sättigungsstrom einer kurzen Diode

$$j_s = \left(\frac{e D_e}{X_p - x_p} n_0 + \frac{e D_p}{X_n - x_n} p_0 \right)$$

Kapazität eines pn-Übergangs

$$C_s = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{b} A$$

Diffusionskapazität (starke Dotierung)

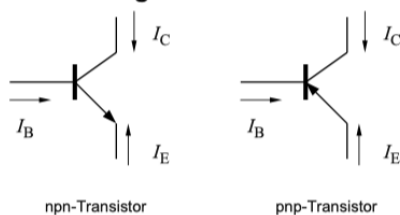
$$C_D = \frac{e}{k_B T} \cdot \tau_p \cdot j_p \cdot A$$

Differentieller Leitwert eines pn-Übergangs

$$Y = \frac{1}{r} = \frac{dI}{dU} = A \cdot \frac{dj}{dU}$$

Bipolartransistoren

Verstärkungsfaktoren



Gleichstromverstärkung in Basisschaltung und in Emitterschaltung

$$\alpha = \frac{\text{Kollektorstrom}}{\text{Emitterstrom}} = \frac{-I_C}{I_E} \qquad \beta = \frac{\text{Kollektorstrom}}{\text{Emitterstrom}} = \frac{I_C}{I_B}$$

Emitterergiebigkeit

$$\gamma = \frac{\text{in die Basis vom Emitter injizierter Elektronenstrom}}{\text{gesamter Emitterstrom}}$$

Basis-Transportfaktor

$$B = \frac{\text{Kollektorstrom}}{\text{in die Basis injizierter Elektronenstrom}}$$

$$\text{Verknüpfungen: } \beta = \alpha / (1 - \alpha) \quad \text{bzw.} \quad \alpha = B\gamma$$

Einfache Näherung für die Stromverstärkung

$$\beta = \frac{D_B n_0^B L_E}{D_E p_0^E w} = \frac{\mu_B N_E L_E}{\mu_E N_B w}$$

Bei kurzem Emittorgebiet (Breite $w_E < L_E$) ist die Diffusionslänge L_E der Löcher im Emitter durch w_E zu ersetzen.

Ebers-Moll-Gleichungen

$$j^E = -j_{ES} \cdot \left(e^{\frac{eU_{EB}}{k_B T}} - 1 \right) + \alpha_R j_{CS} \cdot \left(e^{\frac{eU_{CB}}{k_B T}} - 1 \right)$$

$$j^C = \alpha_R j_{ES} \cdot \left(e^{\frac{eU_{EB}}{k_B T}} - 1 \right) - j_{CS} \cdot \left(e^{\frac{eU_{CB}}{k_B T}} - 1 \right)$$

α_V ist die Vorwärtsstromverstärkung, α_R die Rückwärtsstromverstärkung in Basisschaltung.

Allgemeiner lauten die Beziehungen (mit $a = w/L_B$):

$$j^E = -j_{ES} \cdot \left(e^{\frac{eU_{EB}}{k_B T}} - 1 \right) + \alpha_R j_{CS} \cdot \left(e^{\frac{eU_{CB}}{k_B T}} - 1 \right) \\ = - \left(\frac{eD_B}{L_B} n_0^B \coth a + \frac{eD_E}{L_E} p_0^E \right) \left(e^{\frac{eU_{EB}}{k_B T}} - 1 \right) + \frac{eD_B}{L_B \sinh a} n_0^B \left(e^{\frac{eU_{CB}}{k_B T}} - 1 \right)$$

$$j^C = \alpha_V j_{ES} \cdot \left(e^{\frac{eU_{EB}}{k_B T}} - 1 \right) - j_{CS} \cdot \left(e^{\frac{eU_{CB}}{k_B T}} - 1 \right) \\ = \frac{eD_B}{L_B \sinh a} n_0^B \left(e^{\frac{eU_{EB}}{k_B T}} - 1 \right) - \left(\frac{eD_B}{L_B} n_0^B \coth a + \frac{eD_C}{L_C} p_0^C \right) \left(e^{\frac{eU_{CB}}{k_B T}} - 1 \right)$$

Vorwärts- und Rückwärtsstromverstärkung:

$$\alpha_V = \frac{1}{\cosh a + r_{EB} \sinh a} \quad \text{bzw.} \quad \alpha_R = \frac{1}{\cosh a + r_{CB} \sinh a}$$

Allgemeine Form der Stromverstärkung in Basisschaltung:

$$\beta = \frac{1}{\cosh a + r_{EB} \sinh a} \quad \text{mit} \quad r_{EB} = \frac{D_E p_0^E L_B}{D_B n_0^B L_E} \quad (r_{CB} \text{ analog}) \quad \text{und} \quad a = w/L_B$$

Diffusionsstromdichte in der Basis für den linearen Verlauf

$$j^B = eD_B \frac{d}{dx} \Delta n(x) = eD_B \frac{\Delta n}{w}$$

SCHOTTKY-Dioden

Breite des Raumladungsgebiets:

$$b = \sqrt{\frac{2\varepsilon\varepsilon_0}{e}} \cdot \sqrt{\frac{1}{N_D}} \cdot \sqrt{U_D - U}$$

Sperrschichtkapazität

$$C_s = A \cdot \sqrt{\frac{e\varepsilon\varepsilon_0}{2}} \cdot \frac{N_D}{(U_D - U)}$$

Kennliniengleichung

$$j = j_s \cdot \left(e^{\frac{eU}{k_B T}} - 1 \right)$$

Sperrstromdichte

$$j_s = R^* \cdot T^2 \cdot e^{-\frac{e\Phi_B}{k_B T}}$$

R^* ist die Richardson-Konstante, Φ_B die Barrierenhöhe zwischen Metall und Halbleiter.

Absorption

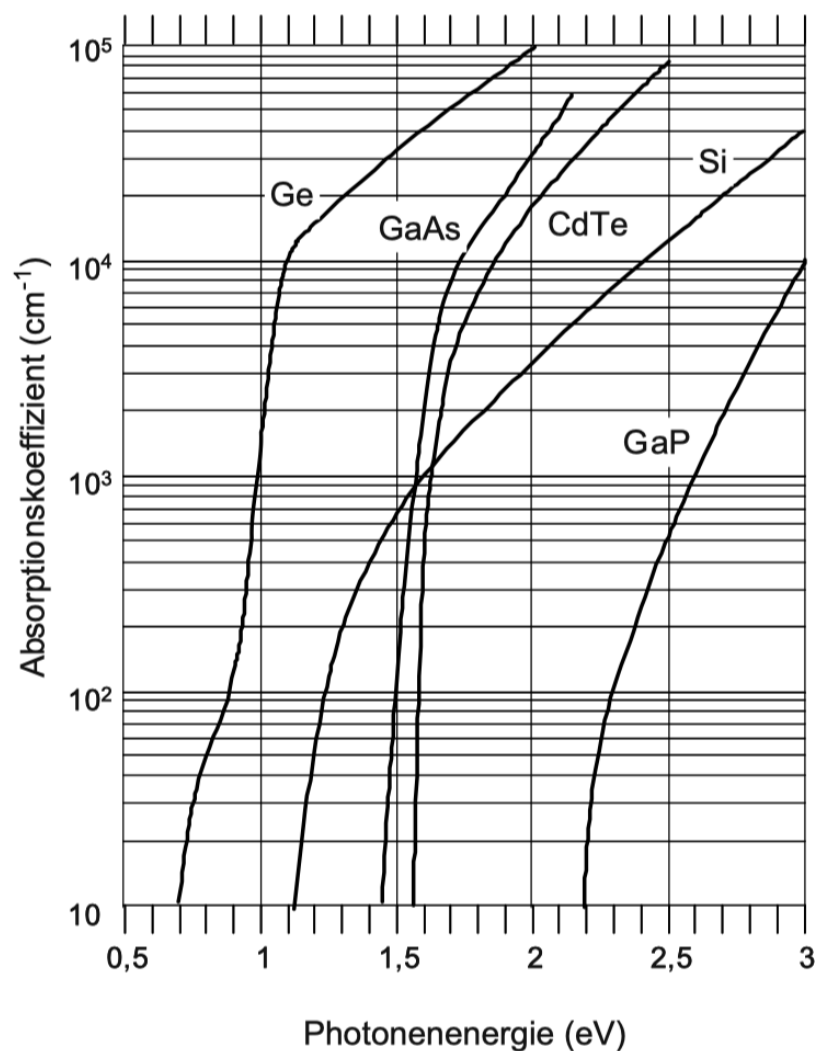
Abnahme des Photonenstroms (bzw. der Lichtintensität) mit der Eindringtiefe x :

$$j_{ph}(x) = j_{ph}(0) \cdot e^{-\alpha x}, \quad \alpha \text{ ist der Absorptionskoeffizient}$$

Energieflussdichte (Leistungsdichte) des Lichtstrahls:

$$P_{opt}(x) = \text{Photonenstromdichte} \cdot \text{Photonenenergie} = j_{ph}(x) \cdot h\nu$$

Absorptionskoeffizienten verschiedener Halbleiter in Abhängigkeit von der Energie (nach [Singh 1995]).



MOSFETs

Kennliniengleichung eines MOSFET im Ladungssteuerungsmodell:

$$I = \frac{\mu_e C_G}{L^2} \cdot \left\{ (U_G - U_{th}) U_{DS} - \frac{1}{2} U_{DS}^2 \right\} = \mu_e c \frac{w}{L} \cdot \left\{ (U_G - U_{th}) U_{DS} - \frac{1}{2} U_{DS}^2 \right\}$$

Leitwert

$$Y = \frac{I_D}{U_{DS}} = \mu_e c \frac{w}{L} \cdot (U_G - U_{th})$$

Kennliniengleichung in gradueller Kanalabschätzung

$$I = \mu_e c_{iso} \frac{w}{L} \cdot \left\{ \left(U_G - U_{FB} - \phi_{inv} - \frac{U_{DS}}{2} \right) U_{DS} - \frac{2 \sqrt{2 \varepsilon_{HL} \varepsilon_0 e N_A}}{c_{iso}} \left((U_{DS} + \phi_{inv})^{3/2} - \phi_{inv}^{3/2} \right) \right\}$$

Inversionsbedingung:

Trägerdichte an der Grenzschicht = Akzeptorkonzentration (bei p-leitenden Materialien), d.h.
 $n_{gr} = p_{\infty} = N_A$.

Inversionspotential:

$$2\phi_B = \phi_{inv} = \frac{2k_B T}{e} \cdot \ln \frac{N_A}{n_i}$$

Flachbandspannung:

$$U_{FB} = (\phi_M - \phi_{HL})$$

Aufteilung der Gate-Spannung:

$$U_G = U_{FB} + U_{iso} + U_{HL}$$

Flächenbezogene Kapazität des Isolators

$$c_{iso} = \frac{\varepsilon_{iso} \varepsilon_0}{d_{iso}}$$

Kapazität pro Fläche bei Akkumulation

$$c_{MOS} = \frac{c_{iso}}{\sqrt{1 + \frac{2c_{iso}^2 \varepsilon_{iso} U_G}{\varepsilon_{HL} \varepsilon_0 e N_A}}}$$

Breite der Raumladungsschicht bei Inversion:

$$b_{max} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_{HL}\varepsilon_0\phi_{inv}}{eN_A}}$$

Spannungsabfall an der Halbleiter-Grenzschicht bei Inversion:

$$U_{HL} = \frac{eN_A}{2\varepsilon_{HL}\varepsilon_0} \cdot b_{max}^2 = \phi_{inv}$$

Sättigungsbereich

$$U_{DS,sat} = U_G - 2\phi_B + K^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2U_G}{K^2}} \right) \quad \text{mit} \quad K = \frac{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r e N_A}}{C_{iso}}$$

Flachbandfall

$$U_{FB} = \phi_{ms} - \frac{(Q_f + Q_m + Q_t)}{C_{iso}}$$

Schwellspannung

$$U_{th} = U_{FB} + 2\phi_B + \frac{\sqrt{2\varepsilon_r\varepsilon_0 e N_A (2\phi_B + U_{BS})}}{C_{iso}}$$

Sperrschicht-FET

Kennliniengleichung eines JFET:

$$I = \frac{aw e \mu N_D}{L} \cdot \left\{ U_{DS} - \frac{4}{3} \cdot \frac{(U_D - U_G + U_{DS})^{3/2} - (U_D - U_G)^{3/2}}{U_p^{1/2}} \right\} \quad \text{mit} \quad U_p = a^2 \cdot \frac{e N_D}{2\varepsilon\varepsilon_0}$$

Magnetismus

Durchflutungsgesetz

$$\oint_s \vec{H} \cdot d\vec{s} = I$$

Verknüpfung Feld und Feldstärke

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

Paramagnetismus

Brillouin-Funktion

$$B_J(x) = \frac{2J+1}{2J} \cdot \coth\left(\frac{2J+1}{2J}x\right) - \frac{1}{2J} \cdot \coth\left(\frac{1}{2J}x\right)$$

Magnetisierung

$$M = N \cdot g \cdot \mu_B \cdot J \cdot B_J(x)$$

mit dem Bor'schen Magneton $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$, N die Anzahl der Atome pro Einheitsvolumen, g der g -Faktor und x als Verhältnis der Zeeman Energie des magnetischen Momentes im externen Magnetfeld zur thermischen Energie.

Hochtemperatur-Limit

$$x \rightarrow 0: \quad \coth(x) \approx \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \dots$$

Tiefemperatur-Limit

$$x \rightarrow \infty \quad \coth(x) \approx 1$$

Supraleiter

Kritisches Magnetfeld

$$B_c(T) = B_c(0) \cdot \left(1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right)$$

London'sche Eindringtiefe

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m_s}{\mu_0 n q_s^2}} \quad \text{mit} \quad m_s = 2m_e, \quad q_s = 2e$$

Abschirmstromdichte

$$j_y(x) = \frac{B_0}{\mu_0 \lambda_L} \cdot e^{-x/\lambda_L}$$