Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Technik der
Informationsverarbeitung

Prof. Dr.-Ing. J. Becker

becker@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

Digitaltechnik

Mathematische Grundlagen
- Relationen -

Relationen

Was sind Relationen?

- **Relationen verallgemeinern** die Prinzipien von **Vorschriften** wie $x < y$ oder $A \subseteq B$ und stellen sie auf eine **formale Grundlage**

- **zweistellige Relation** zwischen zwei Mengen X und Y:
  → Vorschrift α für beliebige Elemente **$x \in X$** und **$y \in Y$**
  → setzt fest, ob **x in Beziehung α zu y** steht

- Steht x in der Beziehung α zu y,
  so schreibt man: $x\,\alpha\,y$
  sonst: $x\,\overline{\alpha}\,y$

- **Gilt X = Y**
  → so spricht man von einer **Relation auf** oder **in einer Menge**

Relationen

Karlsruhe Institute of Technology

Eigenschaften von Relationen

- Bei **zweistelligen Relationen** auf einer Menge interessiert man sich für einige **spezielle Eigenschaften**

Reflexivität

- wenn **x α x** für beliebige x gilt, so ist die **Relation α reflexiv**

Beispiel:

- **‚=‘** ist eine **reflexive Relation**, da x = x immer gilt
- **‚$\leq$‘** ist **reflexiv** auf den reellen Zahlen, da x $\leq$ x für alle x gilt
- **‚$\subseteq$‘** ist **reflexiv**, da jede Menge Untermenge von sich selbst ist

Eigenschaften von Relationen

Symmetrie

- Wenn aus **$x \alpha y$** auch **$y \alpha x$** folgt
  → so ist die **Relation α symmetrisch**

Beispiele:

- **‚=‘** ist **symmetrisch**
- Die Relation **„ist Freund von“** ist meist **symmetrisch**

Eigenschaften von Relationen

Antisymmetrie

- Wenn aus **x α y** und **y α x** folgt, dass **x = y** ist
  → so ist α **antisymmetrisch**
- Antisymmetrie ist nicht das Gegenteil von Symmetrie

Beispiele:

- **‚=‘** ist sowohl **symmetrisch** als auch **antisymmetrisch**!
- **‚<‘** ist **antisymmetrisch**
- **‚≥‘** ist **antisymmetrisch**

Eigenschaften von Relationen

Transitivität

- Wenn aus **x** α **y** und **y** α **z** folgt, dass **x** α **z** gilt

  → so ist α **transitiv**

Beispiele:

- **‚=‘** ist **transitiv**
- **‚<‘** ist **transitiv**
- **‚$\subseteq$‘** ist **transitiv**
- Die Relation **„ist älter als“** ist **transitiv**

Relationen

Typen von Relationen

- Anhand der vorgestellten Eigenschaften können Relationen bestimmten Typen zugeordnet werden

Ordnungsrelation

- Eine **Ordnungsrelation** muss folgende **Eigenschaften** besitzen:
  - **reflexiv**
  - **antisymmetrisch**
  - **transitiv**

<u>Beispiele:</u>

- **‚=‘** ist **Ordnungsrelation**
- **‚≤‘** ist **Ordnungsrelation**
- Die Relation **„ist mindestens so alt wie“** ist **Ordnungsrelation**

Relationen

Strenge Ordnungsrelation

- Eine **strenge Ordnungsrelation** muss folgende Eigenschaften besitzen:
  - **antireflexiv** (x α x gilt für kein x)
  - **antisymmetrisch**
  - **transitiv**
- Die meisten Relationen, die man auch instinktiv als ordnend bezeichnen würde sind entweder eine Ordnungsrelation oder eine strenge Ordnungsrelation

Beispiele:

- **‚<'** ist eine **strenge Ordnungsrelation**
- Die Relation **„ist schneller als"** ist eine **strenge Ordnungsrelation**

Relationen

Äquivalenzrelation

- Eine **Äquivalenzrelation** muss folgende Eigenschaften besitzen:
  - **reflexiv**
  - **symmetrisch**
  - **transitiv**
- Als **Zeichen** für **‚α'** wird bei **Äquivalenzrelationen ‚$\equiv$'** verwendet
- Teilt die Elemente in **disjunkte Teilmengen** auf -> **Äquivalenzklassen**

Beispiele:

- **‚='** ist selbstverständlich eine **Äquivalenzrelation**
- **„$x \, \alpha \, y \Leftrightarrow |x| = |y|$"** ist für **Vektoren** eine **Äquivalenzrelation**

Relationen

Verträglichkeitsrelation

- Eine **Verträglichkeitsrelation** muss folgende Eigenschaften besitzen:
  - **reflexiv**
  - **symmetrisch**
  - **nicht transitiv**
- Als **Zeichen** für **‚α'** wird bei **Verträglichkeitsrelationen** häufig **‚~'** verwendet

Beispiele:

- **Relation** für Menschen **„verträgt sich mit"** ist **Verträglichkeitsrelation**
- **Verträglichkeitsrelationen** treten bei Problemen auf, bei denen bestimmte **Paarungen ausgeschlossen** sind
  → z.B.: **"zwei Leitungen führen zur gleichen Zeit ein Signal"**

Relationen

Überdeckungsproblem

- Ein **häufig** auftretendes **Grundproblem**
  → das sogenannte **Überdeckungsproblem**

- **Beispiel:**
  → “wie viele Parties man mindestens feiern muss,
  um alle Freunde so einzuladen, dass keine zwei
  Freunde, die sich nicht vertragen, zur gleichen
  Party eingeladen werden“

- Die **Grundlage** des **Problems**:
  → eine **Verträglichkeitsrelation**

Überdeckungsproblem

Problemstellung

- Es sei **M** die **Menge der Freunde f_i**
  - **$M = \{ f_i \mid f_i$ ist Freund $\}$**
- Gesucht sind **Gästelisten** (Teilmengen **G_j**)
  -> nur **Freunde (f_i)** enthalten, für welche **paarweise** die **Verträglichkeitsrelation** erfüllt ist
  - **für alle $f_k, f_m \in G_j$** gilt: **$f_k \; \alpha \; f_m$**
- Eine **Menge τ** von solchen **Parties (G_j)** wird **Überdeckung** von **M** genannt, wenn **jeder Freund (f_i)** in einer **Gästeliste ($G_j \in \tau$) enthalten** ist
  - **$\tau = \{ G_{j1}, G_{j2}, \ldots, G_{jn} \}$**
  - $\forall \; f_i \in M$ gilt -> $\exists \; G_j \in \tau$ mit $f_i \in G_j$

Überdeckungsproblem

Beispiel:

- **Gäste:**

  $M = \{ a, b, c, d, e \}$

- **Verträglichkeit:**

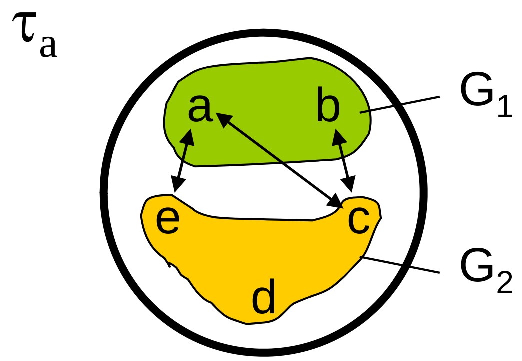
  $a \, \overline{\alpha} \, c \qquad b \, \overline{\alpha} \, c \qquad a \, \overline{\alpha} \, e$

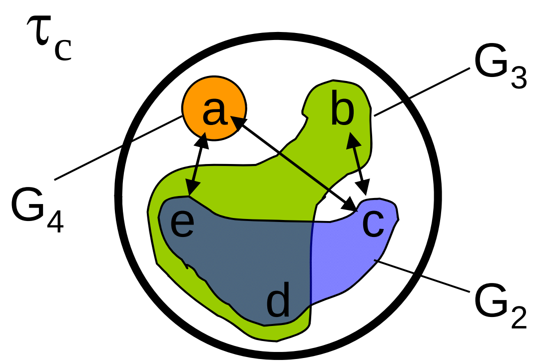
- **Gästelisten:**

  $G_1 = \{ a, b \}$
  $G_2 = \{ c, e, d \}$
  $G_3 = \{ b, d, e \}$
  $G_4 = \{ a \}$

- **Überdeckungen:**

  $\tau_a = \{ G_1, G_2 \}$ ist **Überdeckung**
  $\tau_b = \{ G_2, G_3 \}$ ist keine Überdeckung
  $\tau_c = \{ G_2, G_3, G_4 \}$ ist **Überdeckung**





Überdeckungsproblem

Überdeckungsrelation

- bestimmtes **Element f_i** von einer **Teilmenge G_j überdeckt**
  → eine **Relation** zwischen der Menge der **Elemente** aus **M**
  und der Menge der **Teilmengen τ**
- Diese Relation wird **Überdeckungsrelation** genannt
- Sie wird zweckmäßigerweise als **„τ x M“-Matrix** dargestellt

Struktur der Überdeckungstabelle:

Überdeckende Mengen $\in \tau$	Überdeckte Größen $\in$ M			
	f_1	f_2	...	f_j
G_1				
G_2				
...				
G_j				ist $f_j \in G_j$?

Überdeckungsrelation

Beispiele:

τ_a	a	b	c	d	e
G_1	X	X			
G_2			X	X	X

τ_c	a	b	c	d	e
G_2			X	X	X
G_3		X		X	X
G_4	X				

- τ_b ist keine Überdeckung, da ‚a' von keiner Teilmenge überdeckt wird

τ_b	a	b	c	d	e
G_2			X	X	X
G_3		X		X	X