

# Digitaltechnik

## Entwicklungssatz der Schaltalgebra

# Entwicklungssatz der Schaltalgebra

## Normalformtheoreme

- Ermöglichen eine **eindeutige** (*kanonische*) **Darstellung** jeder **beliebigen Schaltfunktion**
- Schaltfunktionen sind **allein** durch **3 logische Operationen** realisierbar **Und, Oder** und **Negation**
- Der **Boole'sche Entwicklungssatz** ist eine formelle Methode zur gezielten **Umwandlung** jedes **beliebigen schaltalgebraischen Ausdrucks** in eine der beiden Normalformen (KNF bzw. DNF)  
  
→ **Ergebnis:** eine der kanonischen **Darstellungen KNF** bzw. **DNF**

# Entwicklungssatz der Schaltalgebra

## Minterme

- **Terme  $m_i$**  → für **genau eine Belegung** wird der **Wert 1** angenommen  
→ “orthogonale Basisfunktionen“ zur **Bildung der DNF**
- “Projektion“ von Einstellen auf beliebige Positionen  
im Symmetriediagramm
- “**Auswahl**“ der richtigen **Funktionswerte** in **DNF**  
→ **Einstellenmenge**

| Minterme |  | $f(x_2, x_1)$ |
|----------|--|---------------|
| $m_0$    | $\overline{x_2} \ \& \ \overline{x_1}$ | $f(0,0)$      |
| $m_1$    | $\overline{x_2} \ \& \ x_1$            | $f(0,1)$      |
| $m_2$    | $x_2 \ \& \ \overline{x_1}$            | $f(1,0)$      |
| $m_3$    | $x_2 \ \& \ x_1$                       | $f(1,1)$      |

# Entwicklungssatz der Schaltalgebra

## Maxterme

- **Terme  $M_i$**  → für **genau eine Belegung** wird der **Wert 0** angenommen  
→ “orthogonale Basisfunktionen“ für **Bildung der KNF**
- “Projektion“ von Nullstellen auf beliebige Positionen  
im Symmetriediagramm
- “**Auswahl**“ der richtigen **Funktionswerte** in **KNF**  
→ **Nullstellenmenge**

| Maxterme |                                      | $f(x_2, x_1)$ |
|----------|--------------------------------------|---------------|
| $M_0$    | $x_2 \vee x_1$                       | $f(0,0)$      |
| $M_1$    | $x_2 \vee \overline{x_1}$            | $f(0,1)$      |
| $M_2$    | $\overline{x_2} \vee x_1$            | $f(1,0)$      |
| $M_3$    | $\overline{x_2} \vee \overline{x_1}$ | $f(1,1)$      |

# DNF (Disjunktive Normalform)

- **Schaltfunktion in DNF-Form:** besteht aus mehreren *disjunktiv* verknüpften ( $\rightarrow$  Oder-Funktion) **Termen**, die aus *konjunktiv* verknüpften ( $\rightarrow$  Und-Funktion) **Literalen** bestehen

## Beispiele:

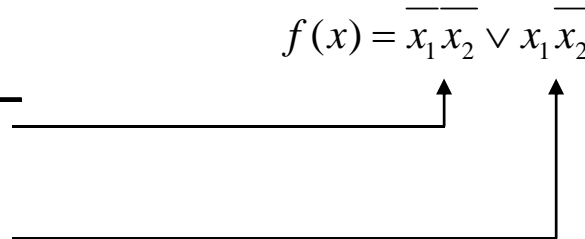
$$f(x) = (x_1 \& x_2 \& x_3) \vee (x_1 \& \bar{x}_2 \& \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \& x_2 \& \bar{x}_3) = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$$

$$f(x) = (x_1 \& x_2) \vee (x_1 \& \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \& x_2) = x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2$$

- Also: **DNF** listet **alle Belegungen**, die den **Funktionswert '1'** erzeugen sollen, einzeln auf

| $x_1$ | $x_2$ | $f(x)$ |
|-------|-------|--------|
| 0     | 0     | 1      |
| 0     | 1     | 0      |
| 1     | 0     | 1      |
| 1     | 1     | 0      |

$f(x) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_2$



# KNF (Konjunktive Normalform)

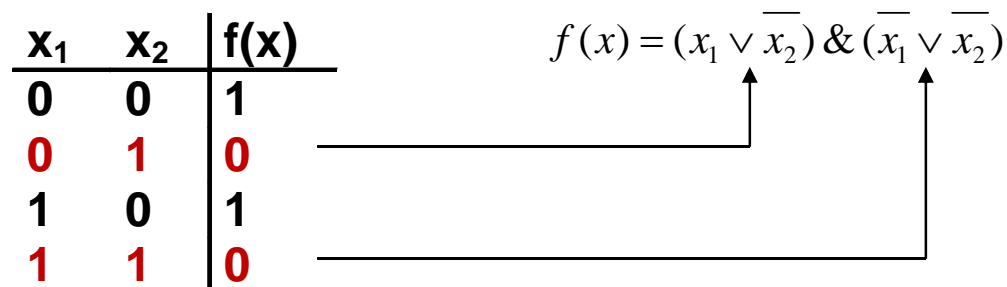
- **Schaltfunktion in KNF-Form:** besteht aus mehreren *konjunktiv* verknüpften **Termen**, die aus *disjunktiv* verknüpften **Literalen** bestehen

**Beispiel:**  $f(x) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \& (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \& (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})$

- **Also:** bei der **KNF** entspricht **jeder Term** von *konjunktiv* verknüpften **Literalen** einer **“invertierten Belegung”** mit **Funktionswert ‘0’**  
→ Tritt diese Wertkombination auf, so wird der entsprechende Term ‘0’ und der komplette Schaltfunktionswert wird auch ‘0’

| $x_1$ | $x_2$ | $f(x)$ |
|-------|-------|--------|
| 0     | 0     | 1      |
| 0     | 1     | 0      |
| 1     | 0     | 1      |
| 1     | 1     | 0      |

$f(x) = (x_1 \vee \overline{x_2}) \& (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})$



# Entwicklungssatz der Schaltalgebra

- Der **Entwicklungssatz** ist eine formale Methode eine **Funktion**  $f(x_n, \dots, x_3, x_2, x_1)$  in eine **DNF** (oder KNF) umzuwandeln
- Die **Entwicklung der Funktion f nach der Variablen  $x_i$**   
→ Aufteilung in **zwei Fälle**:  $x_i = 1$  und  $x_i = 0$

$$\begin{aligned} f(x_n, \dots, x_i, \dots, x_1) &= [x_i \& f(x_n, \dots, 1, \dots, x_1)] \vee [\bar{x}_i \& f(x_n, \dots, 0, \dots, x_1)] \\ &= [x_i \& f \Big|_{x_i=1}] \vee [\bar{x}_i \& f \Big|_{x_i=0}] \end{aligned}$$

- Oder für eine **KNF**:

$$\begin{aligned} f(x_n, \dots, x_i, \dots, x_1) &= [x_i \vee f(x_n, \dots, 0, \dots, x_1)] \& [\bar{x}_i \vee f(x_n, \dots, 1, \dots, x_1)] \\ &= [x_i \vee f \Big|_{x_i=0}] \& [\bar{x}_i \vee f \Big|_{x_i=1}] \end{aligned}$$

# Entwicklungssatz der Schaltalgebra

## Beweis der beiden Fälle:

$$\begin{aligned} f(x_n, \dots, x_i = 1, \dots, x_1) &= [1 \& f \Big|_{x_i=1}] \vee [\bar{1} \& f \Big|_{x_i=0}] \\ &= [1 \& f \Big|_{x_i=1}] \vee [0 \& f \Big|_{x_i=0}] \\ &= f \Big|_{x_i=1} \vee 0 \\ &= f \Big|_{x_i=1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_n, \dots, x_i = 0, \dots, x_1) &= [0 \& f \Big|_{x_i=1}] \vee [\bar{0} \& f \Big|_{x_i=0}] \\ &= [0 \& f \Big|_{x_i=1}] \vee [1 \& f \Big|_{x_i=0}] \\ &= 0 \vee f \Big|_{x_i=0} \\ &= f \Big|_{x_i=0} \end{aligned}$$



# Entwicklungssatz der Schaltalgebra

- $f|_{x_i=1}$  und  $f|_{x_i=0}$  werden als **Restfunktionen** oder **Kofaktoren** bezeichnet
- der nach  $x_i$  entwickelte Ausdruck lässt sich nach den weiteren Variablen entwickeln

## Beispiel einer Funktion mit zwei Variablen:

$$y = f(x_2, x_1) = x_1 \& f(x_2, 1) \vee \bar{x}_1 \& f(x_2, 0)$$

Entwicklung nach  $x_1$

$$= x_2 \& [x_1 \& f(1, 1) \vee \bar{x}_1 \& f(1, 0)] \vee \\ \bar{x}_2 \& [x_1 \& f(0, 1) \vee \bar{x}_1 \& f(0, 0)]$$

Entwicklung nach  $x_2$

$$= x_2 \& x_1 \& f(1, 1) \vee x_2 \& \bar{x}_1 \& f(1, 0) \vee \bar{x}_2 \& x_1 \& f(0, 1) \vee \bar{x}_2 \& \bar{x}_1 \& f(0, 0)]$$

$$= \underbrace{m_3 \& f_3 \vee m_2 \& f_2 \vee m_1 \& f_1 \vee m_0 \& f_0}$$

Minterme

$$= \bigvee_{j=0}^3 (m_j \& f_j)$$

DNF