

Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. J. Becker

becker@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Digitaltechnik

Entwicklungssatz der Schaltalgebra

Entwicklungssatz der Schaltalgebra

Normalformtheoreme

- Ermöglichen eine **eindeutige** (*kanonische*) **Darstellung** jeder **beliebigen Schaltfunktion**
- Schaltfunktionen sind **allein** durch **3 logische Operationen** realisierbar **Und, Oder** und **Negation**
- Der **Boole'sche Entwicklungssatz** ist eine formelle Methode zur gezielten **Umwandlung** jedes **beliebigen schaltalgebraischen Ausdrucks** in eine der beiden Normalformen (KNF bzw. DNF)

→ **Ergebnis:** eine der kanonischen **Darstellungen KNF** bzw. **DNF**

Minterme

- **Terme m_i** → für **genau eine Belegung** wird der **Wert '1'** angenommen
→ “orthogonale Basisfunktionen“ zur **Bildung der DNF**
- “Projektion“ von Einstellen auf beliebige Positionen
im Symmetriediagramm
- **“Auswahl“** der richtigen **Funktionswerte** in **DNF**
→ **Einstellenmenge**

Minterme		$f(x_2, x_1)$
m_0	$\overline{x_2} \ \& \ \overline{x_1}$	$f(0,0)$
m_1	$\overline{x_2} \ \& \ x_1$	$f(0,1)$
m_2	$x_2 \ \& \ \overline{x_1}$	$f(1,0)$
m_3	$x_2 \ \& \ x_1$	$f(1,1)$

Maxterme

- **Terme M_i** → für **genau eine Belegung** wird der Wert **0** angenommen
→ “orthogonale Basisfunktionen“ für **Bildung der KNF**
- “Projektion“ von Nullstellen auf beliebige Positionen
im Symmetriediagramm
- **“Auswahl“** der richtigen **Funktionswerte** in **KNF**
→ **Nullstellenmenge**

Maxterme		$f(x_2, x_1)$
M_0	$x_2 \vee x_1$	$f(0,0)$
M_1	$x_2 \vee \overline{x_1}$	$f(0,1)$
M_2	$\overline{x_2} \vee x_1$	$f(1,0)$
M_3	$\overline{x_2} \vee \overline{x_1}$	$f(1,1)$

DNF (Disjunktive Normalform)

- **Schaltfunktion in DNF-Form:** besteht aus mehreren *disjunktiv* verknüpften (\rightarrow Oder-Funktion) **Termen**, die aus *konjunktiv* verknüpften (\rightarrow Und-Funktion) **Literalen** bestehen

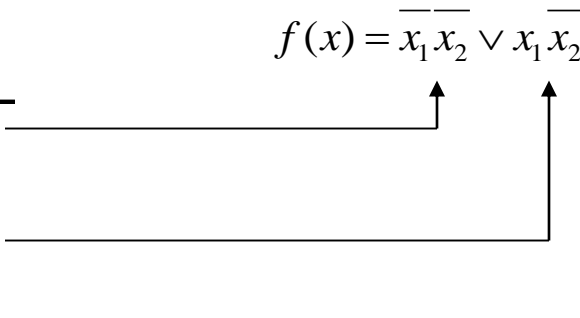
Beispiele:

$$f(x) = (x_1 \& x_2 \& x_3) \vee (x_1 \& \bar{x}_2 \& \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \& x_2 \& \bar{x}_3) = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$$

$$f(x) = (x_1 \& x_2) \vee (x_1 \& \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \& x_2) = x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2$$

- Also: **DNF** listet **alle Belegungen**, die den **Funktionswert '1'** erzeugen sollen, einzeln auf

x_1	x_2	$f(x)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

$$f(x) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_2$$


KNF (Konjunktive Normalform)

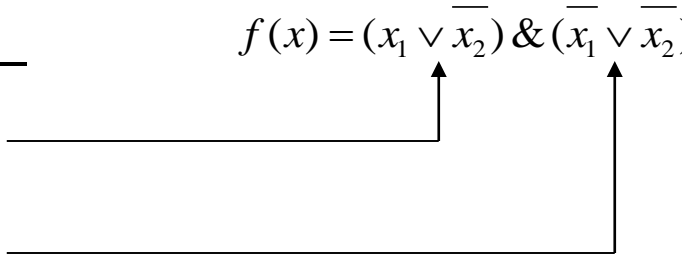
- **Schaltfunktion in KNF-Form:** besteht aus mehreren *konjunktiv* verknüpften **Termen**, die aus *disjunktiv* verknüpften **Literalen** bestehen

$$f(x) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \& (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \& (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$$

Beispiel:

- **Also:** bei der **KNF** entspricht **jeder Term** von **disjunktiv** verknüpften **Literalen** einer **“invertierten Belegung”** mit **Funktionswert ‘0’**
 → Tritt diese Wertkombination auf, so wird der entsprechende Term ‘0’ und der komplette Schaltfunktionswert wird auch ‘0’

x_1	x_2	$f(x)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

$$f(x) = (x_1 \vee \bar{x}_2) \& (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$$


Entwicklungssatz der Schaltalgebra

- Der **Entwicklungssatz** ist eine formale Methode eine **Funktion** $f(x_n, \dots, x_3, x_2, x_1)$ in eine **DNF** (oder KNF) umzuwandeln

- Die **Entwicklung der Funktion f nach der Variablen x_i**

→ Aufteilung in **zwei Fälle**: $x_i = 1$ und $x_i = 0$

$$\begin{aligned} f(x_n, \dots, x_i, \dots, x_1) &= [x_i \& f(x_n, \dots, 1, \dots, x_1)] \vee [\bar{x}_i \& f(x_n, \dots, 0, \dots, x_1)] \\ &= [x_i \& f \Big|_{x_i=1}] \vee [\bar{x}_i \& f \Big|_{x_i=0}] \end{aligned}$$

- Oder für eine **KNF**:

$$\begin{aligned} f(x_n, \dots, x_i, \dots, x_1) &= [x_i \vee f(x_n, \dots, 0, \dots, x_1)] \& [\bar{x}_i \vee f(x_n, \dots, 1, \dots, x_1)] \\ &= [x_i \vee f \Big|_{x_i=0}] \& [\bar{x}_i \vee f \Big|_{x_i=1}] \end{aligned}$$

Entwicklungssatz der Schaltalgebra

Beweis der beiden Fälle:

$$\begin{aligned}
 f(x_n, \dots, x_i = 1, \dots, x_1) &= [1 \& f \Big|_{x_i=1}] \vee [\bar{1} \& f \Big|_{x_i=0}] \\
 &= [1 \& f \Big|_{x_i=1}] \vee [0 \& f \Big|_{x_i=0}] \\
 &= f \Big|_{x_i=1} \vee 0 \\
 &= f \Big|_{x_i=1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x_n, \dots, x_i = 0, \dots, x_1) &= [0 \& f \Big|_{x_i=1}] \vee [\bar{0} \& f \Big|_{x_i=0}] \\
 &= [0 \& f \Big|_{x_i=1}] \vee [1 \& f \Big|_{x_i=0}] \\
 &= 0 \vee f \Big|_{x_i=0} \\
 &= f \Big|_{x_i=0}
 \end{aligned}$$

Entwicklungssatz der Schaltalgebra

- $f \Big|_{x_i=1}$ und $f \Big|_{x_i=0}$ werden als **Restfunktionen** oder **Kofaktoren** bezeichnet
- der nach x_i entwickelte Ausdruck lässt sich nach den weiteren Variablen entwickeln

Beispiel einer Funktion mit zwei Variablen:

$$\begin{aligned}
 y = f(x_2, x_1) &= x_1 \& f(x_2, 1) \vee \bar{x}_1 \& f(x_2, 0) \\
 &= x_2 \& [x_1 \& f(1, 1) \vee \bar{x}_1 \& f(1, 0)] \vee \\
 &\quad \bar{x}_2 \& [x_1 \& f(0, 1) \vee \bar{x}_1 \& f(0, 0)]
 \end{aligned}$$

Entwicklung nach x_1

Entwicklung nach x_2

$$\begin{aligned}
 &= x_2 \& x_1 \& f(1, 1) \vee x_2 \& \bar{x}_1 \& f(1, 0) \vee \bar{x}_2 \& x_1 \& f(0, 1) \vee \bar{x}_2 \& \bar{x}_1 \& f(0, 0)] \\
 &= \underbrace{m_3 \& f_3 \vee m_2 \& f_2 \vee m_1 \& f_1 \vee m_0 \& f_0}_{3} \\
 &= \bigvee_{j=0}^3 (m_j \& f_j)
 \end{aligned}$$

Minterme

DNF