

Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. J. Becker

becker@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

# Digitaltechnik

## Mathematische Grundlagen - Relationen -

## Was sind Relationen?

- **Relationen** verallgemeinern die Prinzipien von **Vorschriften** wie  $x < y$  oder  $A \subseteq B$  und stellen sie auf eine **formale Grundlage**
- **zweistellige Relation** zwischen zwei Mengen  $X$  und  $Y$ :
  - Vorschrift  $\alpha$  für beliebige Elemente  $x \in X$  und  $y \in Y$
  - setzt fest, ob  **$x$  in Beziehung  $\alpha$  zu  $y$**  steht
- Steht  $x$  in der Beziehung  $\alpha$  zu  $y$ ,  
so schreibt man:  $x \alpha y$   
sonst:  $x \bar{\alpha} y$
- Gilt  $X = Y$   
→ so spricht man von einer **Relation auf** oder **in einer Menge**

## Eigenschaften von Relationen

- Bei **zweistelligen Relationen** auf einer Menge interessiert man sich für einige **spezielle Eigenschaften**

## Reflexivität

- wenn  $x \alpha x$  für beliebige  $x$  gilt, so ist die **Relation  $\alpha$  reflexiv**

## Beispiel:

- ‚=‘ ist eine **reflexive Relation**, da  $x = x$  immer gilt
- ‚ $\leq$ ‘ ist **reflexiv** auf den reellen Zahlen, da  $x \leq x$  für alle  $x$  gilt
- ‚ $\subseteq$ ‘ ist **reflexiv**, da jede Menge Untermenge von sich selbst ist

# Eigenschaften von Relationen

## Symmetrie

- Wenn aus  $x \alpha y$  auch  $y \alpha x$  folgt  
→ so ist die **Relation  $\alpha$  symmetrisch**

## Beispiele:

- ‚=‘ ist **symmetrisch**
- Die Relation „ist Freund von“ ist meist **symmetrisch**

## Antisymmetrie

- Wenn aus  $x \alpha y$  und  $y \alpha x$  folgt, dass  $x = y$  ist  
→ so ist  $\alpha$  **antisymmetrisch**
- Antisymmetrie ist **nicht** das Gegenteil von Symmetrie

## Beispiele:

- ‚=‘ ist sowohl **symmetrisch** als auch **antisymmetrisch**!
- ‚<‘ ist **antisymmetrisch**
- ‚≥‘ ist **antisymmetrisch**

# Eigenschaften von Relationen

## Transitivität

- Wenn aus  $x \alpha y$  und  $y \alpha z$  folgt, dass  $x \alpha z$  gilt  
→ so ist  $\alpha$  **transitiv**

## Beispiele:

- ‚=‘ ist **transitiv**
- ‚<‘ ist **transitiv**
- ‚ $\subseteq$ ‘ ist **transitiv**
- Die Relation ‚ist älter als‘ ist **transitiv**

## Typen von Relationen

- Anhand der vorgestellten Eigenschaften können Relationen bestimmten Typen zugeordnet werden

## Ordnungsrelation

- Eine **Ordnungsrelation** muss folgende Eigenschaften besitzen:
  - reflexiv
  - antisymmetrisch
  - Transitiv

## Beispiele:

- ‚=‘ ist **Ordnungsrelation**
- ‚ $\leq$ ‘ ist **Ordnungsrelation**
- Die Relation ‚ist mindestens so alt wie‘ ist **Ordnungsrelation**

## Strenge Ordnungsrelation

- Eine **strenge Ordnungsrelation** muss folgende Eigenschaften besitzen:
  - **antireflexiv** ( $x \alpha x$  gilt für kein  $x$ )
  - **antisymmetrisch**
  - **transitiv**
- Die meisten Relationen, die man auch instinktiv als ordnend bezeichnen würde sind entweder eine Ordnungsrelation oder eine strenge Ordnungsrelation

## Beispiele:

- ‚<‘ ist eine **strenge Ordnungsrelation**
- Die Relation ‚**ist schneller als**‘ ist eine **strenge Ordnungsrelation**

## Äquivalenzrelation

- Eine **Äquivalenzrelation** muss folgende Eigenschaften besitzen:
  - reflexiv
  - symmetrisch
  - transitiv
- Als Zeichen für ‚ $\alpha$ ‘ wird bei **Äquivalenzrelationen** ‚ $\equiv$ ‘ verwendet
- Teilt die Elemente in **disjunkte Teilmengen** auf  $\rightarrow$  **Äquivalenzklassen**

### Beispiele:

- ‚ $=$ ‘ ist selbstverständlich eine **Äquivalenzrelation**
- „ $x \alpha y \Leftrightarrow |x| = |y|$ “ ist für **Vektoren** eine **Äquivalenzrelation**

## Verträglichkeitsrelation

- Eine **Verträglichkeitsrelation** muss folgende Eigenschaften besitzen:
  - reflexiv
  - symmetrisch
  - nicht transitiv
- Als Zeichen für ‚ $\alpha$ ‘ wird bei **Verträglichkeitsrelationen** häufig ‚ $\sim$ ‘ verwendet

## Beispiele:

- Relation für Menschen „**verträgt sich mit**“ ist **Verträglichkeitsrelation**
- **Verträglichkeitsrelationen** treten bei Problemen auf, bei denen bestimmte Paarungen ausgeschlossen sind
  - z.B.: **“zwei Leitungen führen zur gleichen Zeit ein Signal“**

## Überdeckungsproblem

- Ein häufig auftretendes Grundproblem ist das sogenannte **Überdeckungsproblem**
- Beispiel:
  - “wie viele Partys man **mindestens** feiern muss, um alle Freunde so einzuladen, dass keine zwei Freunde, die sich nicht vertragen, zur gleichen Party eingeladen werden“
- Die Grundlage des Problems:
  - eine **Verträglichkeitsrelation**

## Problemstellung

- Es sei **M** die **Menge der Freunde**  $f_i$ 
  - $M = \{ f_i \mid f_i \text{ ist Freund} \}$
- Gesucht sind Gästelisten (Teilmengen  $G_j$ )
  - nur **Freunde** ( $f_i$ ) enthalten, für welche **paarweise** die **Verträglichkeitsrelation** erfüllt ist
  - für alle  $f_k, f_m \in G_j$  gilt:  $f_k \alpha f_m$
- Eine **Menge**  $\tau$  von solchen **Partys** ( $G_j$ ) wird **Überdeckung** von **M** genannt, wenn **jeder Freund** ( $f_i$ ) in einer **Gästeliste** ( $G_j \in \tau$ ) **enthalten** ist
  - $\tau = \{ G_{j_1}, G_{j_2}, \dots, G_{j_n} \}$
  - $\forall f_i \in M$  gilt  $\rightarrow \exists G_j \in \tau$  mit  $f_i \in G_j$

# Überdeckungsproblem

## Beispiel:

### ■ Gäste:

$$M = \{ a, b, c, d, e \}$$

### ■ Verträglichkeit:

$$a \bar{a} c \quad b \bar{a} c \quad a \bar{a} e$$

### ■ Gästelisten:

$$G_1 = \{ a, b \}$$

$$G_2 = \{ c, e, d \}$$

$$G_3 = \{ b, d, e \}$$

$$G_4 = \{ a \}$$

### ■ Überdeckungen:

$$\tau_a = \{ G_1, G_2 \}$$

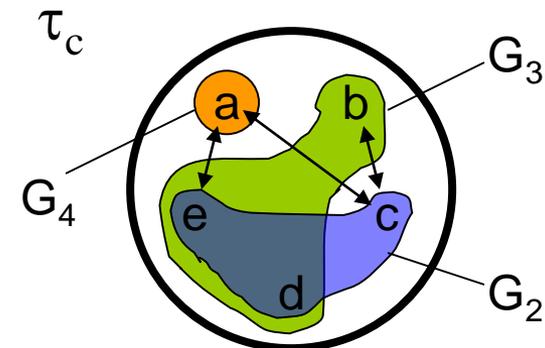
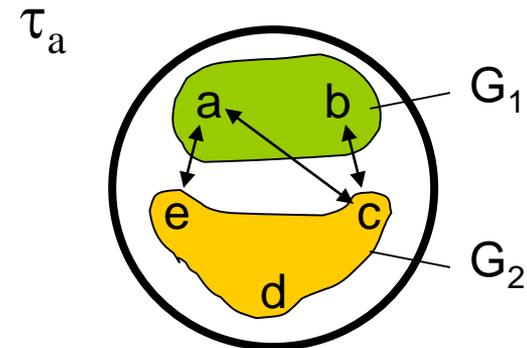
$$\tau_b = \{ G_2, G_3 \}$$

$$\tau_c = \{ G_2, G_3, G_4 \}$$

ist **Überdeckung**

ist keine Überdeckung

ist **Überdeckung**



# Überdeckungsproblem

## Überdeckungsrelation

- bestimmtes **Element**  $f_i$  von einer **Teilmenge**  $G_j$  **überdeckt**  
→ eine **Relation** zwischen der Menge der **Elemente** aus  $M$   
und der Menge der **Teilmengen**  $\tau$
- Diese Relation wird **Überdeckungsrelation** genannt
- Sie wird zweckmäßigerweise als „ $\tau \times M$ “-**Matrix** dargestellt

## Struktur der Überdeckungstabelle:

Überdeckende Mengen $\in \tau$	Überdeckte Größen $\in M$			
	$f_1$	$f_2$	...	$f_j$
$G_1$				
$G_2$				
...				
$G_j$				ist $f_j \in G_j$ ?

# Überdeckungsrelation

## Überdeckungstabellen des Beispiels:

$\tau_a$	a	b	c	d	e
$G_1$	X	X			
$G_2$			X	X	X

$\tau_c$	a	b	c	d	e
$G_2$			X	X	X
$G_3$		X		X	X
$G_4$	X				

- $\tau_b$  ist keine Überdeckung, da ‚a‘ von keiner Teilmenge überdeckt wird

$\tau_b$	a	b	c	d	e
$G_2$			X	X	X
$G_3$		X		X	X